

**MATEMATIKA „C”**  
**9. évfolyam**

**9. modul**  
**SAKKMATEK**

Készítette: Surányi Szabolcs

## MODULLEÍRÁS

<b>A modul célja</b>	A kombinatorikai, gráfelméleti és geometriai tapasztalatok elmélyítése, bővítése.
<b>Időkeret</b>	3 foglalkozás
<b>Ajánlott korosztály</b>	14–15 évesek (9. osztály)
<b>Modulkapcsolódási pontok</b>	Tágabb környezetben Építészet, művészetek, játék. Szűkebb környezetben: Kombinatorika, gráfelmélet, területszámítás, gondolkodási képességek. Ajánlott megelőző tevékenységek: kombinatorikai és gráfelméleti alapismeretek.
<b>A képességfejlesztés fókuszai</b>	Gondolkodási képességek: induktív és deduktív következtetés, érvelés. a gondolkodási sebesség fejlesztése Kombinatívítás. Kommunikációs képességek: szövegértés, szövegértelmezés.

### AJÁNLÁS

A sakk és a matematika kapcsolatáról az átlagember azt tartja, hogy mindkettőhöz elengedhetetlen a logikus gondolkodás képessége. Ennél több is igaz azonban, e két terület nagyban erősítheti egymást. Sok matematikai kérdés merül fel a sakkjátékkal kapcsolatban, és fordítva, rengeteg matematikafeladat fogalmazható meg sakk-környezetben, nem feltétlenül sakkfeladványként, csak a játékhoz, vagy annak kellékeihez (sakktábla, sakkbábuk) kapcsolódva.

A sakkjáték kapcsán a becslés, számolás képessége (pl. játékok száma), a lehetséges lépések számához, a bábuk elhelyezéséhez kapcsolódó kérdésekkel a kombinatorikus gondolkodás képességét fejleszthetjük, a bábuk mozgatásával kapcsolatos kérdésekkel a gráfelméleti fogalmak mélyíthetők el. A sakktábla darabolásaival a hosszúság, a terület becslése és a geometriai transzformációk fogalma mélyíthető.

## MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
<b>I. Mennyi?</b>			
1.	Sakktáblához és a sakkjátékhoz kapcsolódó számítások <b>Munkaforma:</b> párban, majd frontális	Mennyiségi következtetés, érvelés, becslés, kreativitás, problémamegoldás, számolás	Minden párnál egy sakk-készlet, négyzetrácsos papírlapok
2.	Leszámlálási feladatok a sakkjátékkal kapcsolatban <b>Munkaforma:</b> párban, majd frontális	Mennyiségi következtetés, számolás, becslés, problémamegoldás	minden párnál egy sakk-készlet
3.	Kombinatorikai feladatok a sakktáblával kapcsolatban <b>Munkaforma:</b> csoportban	Döntőképesség, elemzés, kreativitás, problémamegoldás	1. feladatlap Négyzetrácsos lapok, csoportonként egy-egy sakk-készlet
<b>II. Vagdossunk!</b>			
1.	Látszólagos geometriai paradoxonok vizsgálata a sakktábla átdarabolásai segítségével <b>Munkaforma:</b> csoportban	Deduktív következtetés, érvelés, problémamegoldás, hosszúság (terület, térfogat) becslés, rész-egész érzékelése	2. feladatlap Négyzetrácsos lapok, olló, vonalzó
2.	További darabolási feladatok <b>Munkaforma:</b> csoportban	Deduktív következtetés, érvelés, problémamegoldás, hosszúság (terület, térfogat) becslés, rész-egész érzékelése	3. feladatlap Négyzetrácsos lapok, olló, vonalzó
<b>III. Lépkedjünk és színezzünk!</b>			
1.	A sakktábla színezéséhez kapcsolódó feladatok <b>Munkaforma:</b> csoportban	Problémaérzékenység, problémamegoldás, következtetés, érvelés, rendszerezés	4. feladatlap Csoportonként 1-1 sakktábla, 25 pénzérme, négyzetrácsos lapok, olló

	<b>Lépések, tevékenységek</b>	<b>Kiemelt készségek, képességek</b>	<b>Eszközök, mellékletek</b>
<b>III. Lépkedjünk és színezzünk!</b>			
2.	Sakkfigurák mozgatása a sakktáblán, a tábla bejárása <b>Munkaforma:</b> csoportban	Deduktív és induktív következtetés, problémaérzékenység, problémamegoldás, következtetés, érvelés	5. feladatlap Sakk-készletek, négyzetrácsos lapok

## I. MENNYI?

### SAKKTÁBLÁHOZ ÉS A SAKKJÁTÉKHOZ KAPCSOLÓDÓ SZÁMÍTÁSOK

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: minden párosnál egy sakk-készlet, négyzetrácsos papírlapok; Munkaforma: párban majd frontális)

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

A legenda szerint, amikor a sakkjáték feltalálója bemutatta a játékot az uralkodónak, akinek nagyon megtetszett az új játék, azt mondta a feltalálónak, hogy jutalmul bármit kérhet, azt teljesíti. A feltaláló azt kérte, hogy adjon az uralkodó a tábla első mezőjére egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet és így tovább, minden mezőre kétszer annyi szemet, mint amennyi az előzőn van. Hány búzaszemet kért a feltaláló? Először próbáljátok meg megbecsülni az eredményt! Elég csak azt megmondani, hogy hány jegyű szám lesz a végeredmény.

#### Kiemelt készségek, képességek

Mennyiségi következtetés, érvelés, becslés, kreativitás, problémamegoldás

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A párosok gondolkozzanak közösen a problémán, ha minden párosnak van már ötlete, akkor a tanár írja fel azokat a táblára.

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/3.

A papíron lévő sakktábla mezőire írjátok be, hogy hány szem búza kerülne arra a mezőre! Keressetek módszert arra, hogy az összes mezőre rá lehessen írni, hány szem kerülne oda.

#### Kiemelt készségek, képességek

Mennyiségi következtetés, számolás, érvelés, becslés, kreativitás, problémamegoldás

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/4.

A párosok gondolkozzanak közösen a problémán. A második sor utolsó mezőjére már a  $2^{16} = 65536$  kerül, ebből észrevehető, hogy tovább nehezen lesz folytatható. Ha nem jönnek rá a párosok, hogy a kettő hatványait érdemes a mezőkre írni, akkor tegyen erre javaslatot a tanár.

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/5.

Próbáljuk meg összeszámolni, hogy ez összesen hány szem búza! Ha van már valamilyen megoldásotok a búzaszemek számára, akkor módosíthatjátok a becsléséteket.

#### Kiemelt készségek, képességek

Mennyiségi következtetés, számolás, érvelés, becslés, kreativitás, problémamegoldás

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/6.

A párosok gondolkozzanak közösen a problémán. Javasolhatja a tanár nekik, hogy kezdjék el sorban összeadni a mezőkön lévő szemek számát, és írják le a részeredményeket. Ha már sok párosnak megvan hatványalak segítségével az eredmény, akkor beszélje azt meg a csoport, majd próbálják meg közösen megbecsülni az eredményt, végül a pontos számot adja meg a tanár.

## LESZÁMLÁLÁSI FELADATOK A SAKKJÁTÉKKAL KAPCSOLATBAN

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: minden párosnál egy sakk-készlet; Munkaforma: párban, majd frontális)

### 1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Minden páros kap egy sakk-készletet. Állítsátok fel a figurákat, és próbáljatok meg minél több megnyitást találni, tehát amikor a fehér is és a fekete is egyet lép.

Hány megnyitás képzelhető el a sakkjátékban?

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Mennyiségi következtetés, számolás, becslés

### 1. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Próbáljuk meg megbecsülni a lehetséges sakkjátékok számát az alábbi statisztikai adatok alapján!

- Az első 5 lépésnél mindkét játékosnak 20-20 lépési lehetősége van.
- A következő lépéseknél mindkét játékosnak 30-30 lépési lehetősége van.
- A sakkjátszmák átlagosan 40 lépésből állnak.
- Egy sakkjátszma átlagos ideje 30 perc.

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Mennyiségi következtetés, számolás, becslés, problémamegoldás.

### 1. Foglalkozás – 2. lépés/3.

A párosok gondolkozzanak közösen a problémán, a tanár segítse őket! Ha több párosnak megvan a becslése a sakkjátékok számára, akkor a csoport közösen beszélje ezt meg! Ezután közösen számolja ki a csoport az ezen játékok lejátszásához szükséges időt!

## KOMBINATORIKAI FELADATOK A SAKKTÁBLÁVAL

### KAPCSOLATBAN

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 1. feladatlap, négyzetrácsos lapok, csoportonként egy-egy sakkkészlet; Munkaforma: 3-4 fős csoportokban)

### 1. Foglalkozás – 3. lépés/1.

Mindenki kap egy feladatsort. Minden tanuló olvassa el a feladatokat. A megoldás sorrendje tetszőleges. A feladatok nem egyforma nehézségűek.

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Döntőképesség, elemzés, kreativitás, problémamegoldás

**1. Foglalkozás – 3. lépés/2.**

A tanár figyelemmel kíséri a csoportok munkáját. Biztatja, segíti őket. A feladatsorban lévő problémák különböző nehézségűek. Minden csoportot külön-külön kell eljuttatni a választott probléma megoldásáig. A tanár bíztassa a tanulókat, hogy a náluk levő sakk-készlettel próbálják ki a lehetőségeket, vagy azok közül minél többet. Frontálisan nem célszerű megbeszélni a feladatok megoldását.

**1. Foglalkozás – 3. lépés/3.**

Ha több csoportban is felmerül, hogy valamelyik feladat nehéz, és nem tudják megoldani, akkor az e feladatokat megoldó csoport tagjait bíztassa a tanár arra, hogy a tanári asztalon lévő papírok közül keressék ki a feladatot, a hátuljára írják le a megoldást, és ezt is ki lehet helyezni az eddig kihelyezett feladatok mellé a falra.

## II. VAGDOSSUNK

### A sakktábla különböző darabolásai

#### LÁTSZÓLAGOS GEOMETRIAI PARADOXONOK VIZSGÁLATA

#### A SAKKTÁBLA ÁTDARABOLÁSAI SEGÍTSÉGÉVEL

(Javasolt idő: 15 perc; E szközök: 2. feladatlap, négyzetrácsos lapok, olló, vonalzó; Munkaforma: 3-4 fős csoportokban)

#### 2. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Az ábrákon kétféle módon vágjuk szét a sakktáblát, majd téglalapokat raktunk össze a darabokból. Ha jól megfigyelitek a képeket, mindkettő hibásnak tűnik. A megfelelő területek kiszámolásakor azt vehetjük észre, hogy a téglalapok területe nem egyezik meg a sakktábla területével. Hol a hiba?

#### Kiemelt készségek, képességek

Deduktív következtetés, érvelés, problémamegoldás, hosszúság (terület, térfogat) becslés, részegész érzékelése

#### 2. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A csoportok tagjai közösen tanulmányozzák az ábrákat. Biztassa őket a tanár, hogy vágják ki papírból ők is a sakktáblákat, darabolják azokat szét a megfelelő módokon, és rakják össze a téglalapokat. Ha kis méretű sakktáblákat vágnak ki, akkor nem látszik jól a hiba, ilyen esetben javasolja a tanár, hogy nagyobb méretben is készítsék el a darabokat. Amelyik két csoportnak a legjobban sikerült a darabokat elkészíteni, azok ragasszák fel egy közös papírra az eredeti táblát és az átdaraboltat, majd helyezzük el ezt a falra a többi feladat mellé.

#### TOVÁBBI DARABOLÁSI FELADATOK

(Javasolt idő: 30 perc; Eszközök: négyzetrácsos lapok, olló, vonalzó, 3. feladatlap)

#### 2. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Minden csoport kap egy feladatsort. Ezekben a feladatokban is a sakktábla feldarabolásával foglalkozunk. A csoport közösen válasszon magának feladatot, oldja meg, azután térjen csak rá a következő feladatra. Most is segíthet, ha kivágjátok a megfelelő alakzatokat, és azt tovább darabolva próbáltok rájönni a megoldásra.

#### Kiemelt készségek, képességek

Deduktív következtetés, érvelés, problémamegoldás, hosszúság (terület, térfogat) becslés, részegész érzékelése.



**2. Foglalkozás – 2. lépés/2.**

A csoportok közösen dolgoznak, a tanár felügyeli a munkát, és tanácsokat ad, ha kell. A megoldásokat nem érdemes frontálisan megbeszélni. Minden feladat leírásának egy példányát helyezük el a tanári asztalra!

Ha valamely csoport készen van egy feladattal, és van kedvük hozzá, akkor a tanári asztalról hozzák el a feladat leírását, és írják rá a megoldást, majd helyezték el a többi kidolgozott feladat mellé a falra! Ha egy csoport más megoldást ad egy feladatra, akkor az is kihelyezhető a falra az eddigi megoldás(ok) mellé.

## III. LÉPKEDJÜNK ÉS SZÍNEZZÜNK

### A SAKKTÁBLA SZÍNEZÉSÉHEZ KAPCSOLÓDÓ FELADATOK

(Javasolt idő: 20 perc; Eszközök: Csoportonként 1-1 sakktabla, 25 pénzérme, négyzetácsos lapok, olló, 4. feladatlap; Munakforma: 3-4 fős csoportban)

#### 3. Foglalkozás – 1. lépés/1.

A sakktabla egy  $5 \times 5$ -ös mezőjére helyezzünk el 25 darab pénzérmét, mindegyik mezőre egyet. Ezután rakjuk át mindegyik pénzérmét valamelyik szomszédos mezőre. (Szomszédos két mező, ha egy közös oldaluk van.) Elérhető-e, hogy az átrakás után minden mezőn legyen pénzérme?

#### Kiemelt készségek, képességek

Probléma-érzékenység, problémamegoldás, következtetés, érvelés.

#### 3. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Biztassa a tanár a csoportokat, hogy rakják fel az érméket a tábla megfelelő részére, és próbálják átrakni azokat úgy, hogy minden mezőre kerül pénzérme! Pár sikertelen próbálkozás után hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy kétféle színnel van színezve a tábla. Frontálisan ne beszéljük meg a feladatot, ha a csoport eljutott a megoldáshoz, akkor vesse fel a tanár a következő problémacsoportot!

#### 3. Foglalkozás – 1. lépés/3.

Válasszatok feladatot az alábbiak közül! Nem baj, ha nem mindegyiket tudjátok megoldani, de törekedjete arra, hogy minél többnek a megoldását megtaláljátok!

#### Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, probléma-érzékenység, problémamegoldás, következtetés, érvelés

#### 3. Foglalkozás – 1. lépés/4.

A tanár felügyeli a csoportok munkáját. Az első feladatot választókat biztassa arra, hogy próbáljanak ki egy-két átrakást. A második és harmadik feladatot választók vágják ki a négyzetácsos lapból a megfelelő alakzatokat, és ezekkel kísérletezzenek. A negyedik feladatot választók egy sakktablával és 31 darab megfelelő alakú papírdarabbal kísérletezhetnek. Minden feladat leírásának egy példányát helyezzük el a tanári asztalra! Ha valamely csoport készen van egy feladattal, és van kedvük hozzá, akkor a tanári asztalról hozzák el a feladat leírását, és írják rá a megoldást, majd helyezzék el a többi kidolgozott feladat mellé a falra!

### BÁBUK MOZGATÁSA A SAKKTÁBLÁN, A TÁBLA BEJÁRÁSA

#### 3. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Járjuk be a sakktablát a bástyával, királlyal, vezérrel úgy, hogy a tábla bal alsó sarkából indulunk, minden mezőt egyszer érintünk, és a kezdőpontba érkezünk vissza. Keressetek minél „trükkösebb” megoldásokat! A bábuk csak szabályosan léphetnek!

#### Kiemelt készségek, képességek

Deduktív és induktív következtetés, probléma-érzékenység, problémamegoldás, következtetés, érvelés.

#### 3. Foglalkozás – 2. lépés/2.

A csoportoknak javasolja a tanár, hogy a négyzethálós papírra rajzoljanak sakktáblát. A csoport egyik tagja mozgassa a bábút a táblán, egy másik jegyezze a mozgást a papíron. Ha valamely csoportnak sikerült valamilyen különleges ábrát rajzolnia, akkor azt bemutathatják a többi tanulónak is.

### **3. Foglalkozás – 2. lépés/3.**

A legérdekesebben a huszár mozog a sakktáblán. A következő feladatok is ehhez a bábúhoz kapcsolódnak. Válasszatok feladatot az alábbiak közül! Nem baj, ha nem mindegyiket tudjátok megoldani, de törekedjetez arra, hogy minél többnek a megoldását megtaláljátok!

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Deduktív és induktív következtetés, probléma-érzékenység, problémamegoldás, következtetés, érvelés

### **3. Foglalkozás – 2. lépés/4.**

A csoportoknak most is javasolja a tanár, hogy a négyzethálós papírra rajzoljanak sakktáblát. A csoport egyik tagja mozgassa a bábút a táblán, egy másik jegyezze a mozgást a papíron. A tanulók vigyék haza a feladatsort, hátha otthon van kedvük foglalkozni a feladatokkal (de ezt ne javasoljuk). Minden feladat leírásán.

### **3. Foglalkozás – 2. lépés/5.**

Ha valamely csoport készen van egy feladattal, és van kedvük hozzá, akkor a tanári asztalról hozzák el a feladat leírását, és írják a papír hátuljára a megoldást, majd helyezték el a többi kidolgozott feladat mellé a falra, így akinek nem sikerült egy feladatot megoldania, az is megtekintheti a megoldást.

# MELLÉKLET A TANÁROKNAK

## I. MENNYI?

**Ráhangelődés:** Ismételjük át a tanulókkal a sakkjátékot! Beszéljük meg, hogy milyen alakú a rendes sakktábla, milyen figurák vannak a sakkban, és ezek hogyan mozoghatnak a táblán. Beszéljük meg a sakktábla koordináta-rendszerét (mezők jelölése a1-től – bal alsó sarok – h8-ig – jobb felső sarok).

### 1. lépés: Sakktáblához és a sakkjátékhoz kapcsolódó számítások

I.:

A legenda szerint, amikor a sakkjáték feltalálója bemutatta a játékot az uralkodónak, akinek nagyon megtetszett az új játék, azt mondta a feltalálónak, hogy jutalmul bármit kérhet, azt teljesíti. A feltaláló azt kérte, hogy adjon az uralkodó a tábla első mezőjére egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet, és így tovább, minden mezőre kétszer annyi szemet, mint amennyi az előzőn van. Hány búzaszemet kért a feltaláló? Először próbáljátok meg megbecsülni az eredményt! Elég csak azt megmondani, hogy hány jegyű szám lesz a végeredmény.

**Megoldás:** Összesen  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63} = 2^{64} - 1$  szemet kért a feltaláló, ez körülbelül  $1,8 \times 10^{19}$ , tehát 20 jegyű a szám (18 446 744 073 709 551 615).

II.:

A papíron lévő sakktábla mezőire írjátok be, hogy hány szem búza kerülne arra a mezőre. Keressetek módszert arra, hogy az összes mezőre rá lehessen írni, hány szem kerülne oda.

**Megoldás:** A kettő hatványait érdemes a mezőkre írni..

III.:

Most próbáljuk meg megszámolni, hogy ez összesen hány szem búza! Ha van már valamilyen megoldásotok a búzaszemek számára, akkor módosíthatjátok a becslésüket.

**Megoldás:** Ha elkezdjük sorban összeadni az egyes mezőkön található szemek számát:

1

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 4 = 7$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

...

észrevehetjük, hogy ez mindig eggyel kisebb, mint az azt következő mezőn lévő szemek száma. Az utolsó mező után, ha lenne még egy mező, azon 264 szem lenne, így az összeg  $2^{64} - 1$ .

**A becslés:** mivel  $2^{10} = 1024 \approx 1000$ , így  $2^{64} - 1 = 2 \cdot 2^{63} - 1 = 2^4 \cdot (2^{10})^6 - 1 \approx 16 \cdot 1000^6 = 16 \cdot 10^{18}$ , amiből egy 19 jegyű szám adódik. Valójában az eredmény 20 jegyű, 18 446 744 073 709 551 615.

**Megjegyzés:** Ez a mennyiség a világ éves búzatermésének több ezerszerese.

## 2. lépés: Leszámlálási feladatok a sakkjátékkal kapcsolatban

### IV.:

Minden páros kap egy sakk-készletet. Állítsátok fel a figurákat, és próbáljatok meg minél több megnyitást találni, tehát amikor a fehér is és a fekete is egyet lép. Hány megnyitás képzelhető el a sakkjátékban? Próbáljátok meg meghatározni az eredményt!

**Megoldás:** A világosnak a 8 gyaloggal, valamint a huszárokkal is 2 lehetséges lépése van, ugyanígy a sötétnek is, így összesen  $20 \times 20 = 400$  nyitás lehetséges.

### V.:

Próbáljuk meg megbecsülni a lehetséges sakkjátékok számát az alábbi statisztikai adatok alapján!

- Az első 5 lépésnél mindkét játékosnak 20-20 lépési lehetősége van.
- A következő lépéseknél mindkét játékosnak 30-30 lépési lehetősége van.
- A sakkjátszmák átlagosan 40 lépésből állnak.
- Egy sakk játszma átlagos ideje 30 perc.

**Megoldás:**  $(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = 2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80} \approx 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{80} = 2 \cdot 10^{116}$ .

Egy nap alatt 48 játék játszható le, egy év alatt  $365 \cdot 48 = 17\,520 \approx 20\,000 = 2 \cdot 10^4$ , így összesen  $(2 \cdot 10^{116}) : (2 \cdot 10^4) = 10^{112}$  évre lenne szükség, ha végig ketten játszanának. Ha a föld összes lakosa folyamatosan játszana, akkor is kb.  $10^{100}$  évre lenne szükség az össze lehetséges játék lejátszásához.

**Megjegyzés:** A statisztikai adatok sakkjátékok elemzéséből lettek számítva.

## 3. lépés: Kombinatorikai feladatok a sakktáblával kapcsolatban

### 1. FELADATLAP

1. Hány négyzet van a sakktáblán?
2. Hány téglalap van a sakktáblán?
3. Hányféleképpen helyezhetünk el egy világos és egy sötét gyalogot a sakktábla egy  $2 \times 2$ -es részletére? Próbáld meg az összes lehetőséget lerajzolni! Hány esetben ütik egymást?
4. Hányféleképpen helyezhetünk el egy világos és egy sötét gyalogot a sakktáblán?
5. Hányféleképpen helyezhetünk el két világos gyalogot a sakktábla egy  $2 \times 2$ -es részletére? Próbáld meg az összes lehetőséget lerajzolni!
6. Hányféleképpen helyezhetünk el két világos gyalogot a sakktáblán?
7. Helyezzük el a 8 világos gyalogot a sakktáblán úgy, hogy minden sorba és oszlopba egy gyalog kerüljön. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
8. Hányféleképpen juthat el egy gyalog a  $3 \times 3$ -as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha csak jobbra vagy felfelé léphet egyszerre egy mezőt?
9. Hányféleképpen juthat el egy gyalog a sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha csak jobbra vagy felfelé léphet egyszerre egy mezőt?
10. Hányféleképpen juthat el egy király a  $3 \times 3$ -as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha csak jobbra, felfelé vagy átlósan jobbra és felfelé léphet egyszerre egy mezőt?

**Megoldások:**

- 1x1-es négyzetből 64, 2x2-es négyzetből 49 ... 7x7-es négyzetből 4, 8x8-asból 1, így a négyzetek száma  $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$ .  
(Itt azzal a feltétellel számoltunk, hogy a négyzetek oldalai a sakktáblát alkotó rácsegyenesek. Ha csak azt szabjuk meg, hogy a csúcspontok rácspontok legyenek, akkor több megoldás van.)
- 9 függőleges és 9 vízszintes rácsegyenesből alakítható ki a sakktábla. Egy téglalapot meghatároz két vízszintes és két függőleges rácsegyenes. Két vízszinteset és két függőlegeset is  $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$  - féleképpen választhatunk ki, így összesen  $36 \cdot 36 = 1296$  téglalap van a sakktáblán.  
(Itt is az előző feltételezéssel éltünk.)
- Az első 4, a második 3 helyre kerülhet, így 12 eset van. ebből 4 esetben ütik egymást, ha átlósan állnak.
- A megoldásszám az előzőnek pont a fele, vagyis 6.
- Az első gyalogot 64, a másodikat 63 helyre tehetjük, így a megoldásszám 4032.
- A megoldások száma az előző fele, vagyis 2016.
- Soronként (vagy oszloponként) haladva helyezzük el a gyalogokat. Az első sorban a nyolc mező bármelyikére rakhatunk, a másodikban már csak 7-re stb., az utolsó sorban már csak egy mezőre. így a megoldások száma  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$ .
- Az egyes mezőkre annyiféleképpen léphetünk, amennyi a tőle balra és lefelé lévő mezőkre való eljutások összege. Ezt ráírva a táblára:

1	3	6
1	2	3
1	1	1

9. A megoldás hasonló az előző feladat megoldásához:

1	8	36	120	330	782	1716	<b>3432</b>
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	6	21	56	126	252	462	792
1	5	15	35	70	126	210	330
1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

10. Az egyes mezőkre annyiféleképpen léphetünk, amennyi a tőle balra, lefelé és balra-lefelé (átlósan) lévő mezőkre való eljutások összege. Ezt ráírva a táblára:

1	5	<b>13</b>
1	3	5
1	1	1

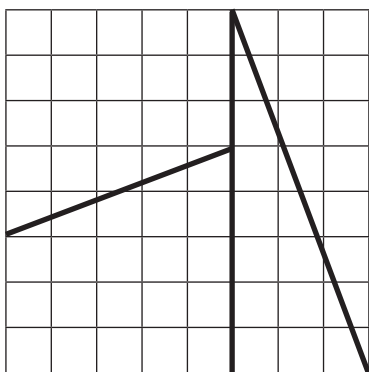
## II. VAGDOSSUNK!

**Ráhangelődés:** A foglalkozáson a saktábla különböző feldarabolásaival foglalkozik a csoport.

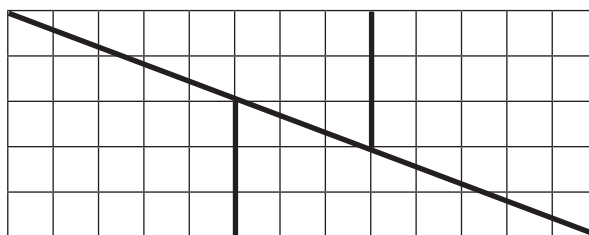
### 2. FELADATLAP

**Első átdarabolás:**

eredeti



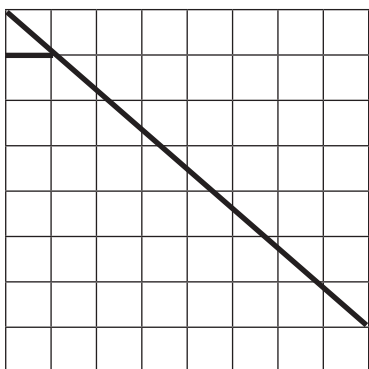
átdarabolt:



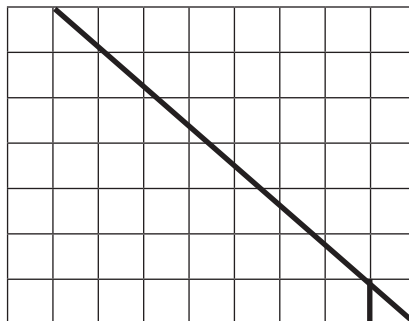
Az első területe  $8 \times 8 = 64$  egység, a második területe  $5 \times 13 = 65$  egység!

**Második átdarabolás:**

eredeti



átdarabolt:



**Megoldás:**

Az első területe  $8 \times 8 = 64$  egység, a második területe  $7 \times 9 = 63$  egység!

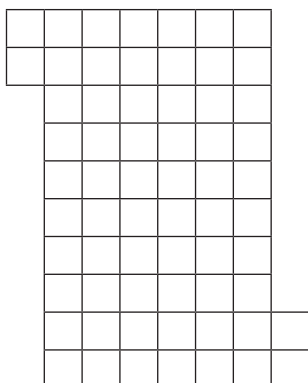
Az első esetben a „csalás” ott van, hogy a trapézok ferde szárának meredeksége és a háromszögek meredeksége nem egyezik meg, így az összerakott részek között rés keletkezik, melynek területe pontosan egy területegység.

A második esetben a levágott kis háromszög valójában nem egyenlő szárú, a két befogó  $1$  és  $\frac{8}{7}$  egység hosszú, így a kapott téglalap hosszabbik oldala valójában  $9\frac{1}{7}$  egység, tehát a területe  $7 \cdot 9\frac{1}{7} = 64$  területegység.

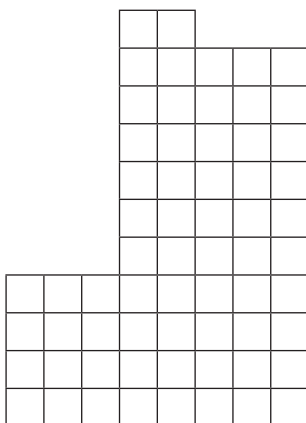
### 3. FELADATLAP

1. A következő két síkidom 64-64 kis négyzetből áll. Ezekből kell egy-egy sakktáblát összerakni úgy, hogy mindkettőt egyetlen vágással vágjátok két darabra. A vágásnak rácsvonal mentén kell haladnia, elkanyarodhat, de önmagába nem érhet vissza.

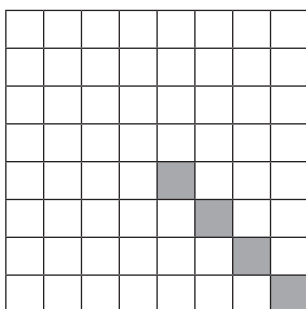
Első síkidom:



Második síkidom:



2. Vágjuk szét a sakktáblát 64 kis négyzetre úgy, hogy csak a rácsegyenesek mentén, egyenesen vághatunk! Legkevesebb hány vágásra van szükség?
3. Vágjuk szét a sakktáblát 16 egybevágó, nyolcszög alakú síkidomra!
4. Vágjuk szét a sakktáblát 4 egybevágó, tízszög alakú síkidomra!
5. Az alábbi sakktáblát vágjuk szét négy egyforma részre úgy, hogy minden rész pontosan egyet tartalmazzon a festett mezők közül!



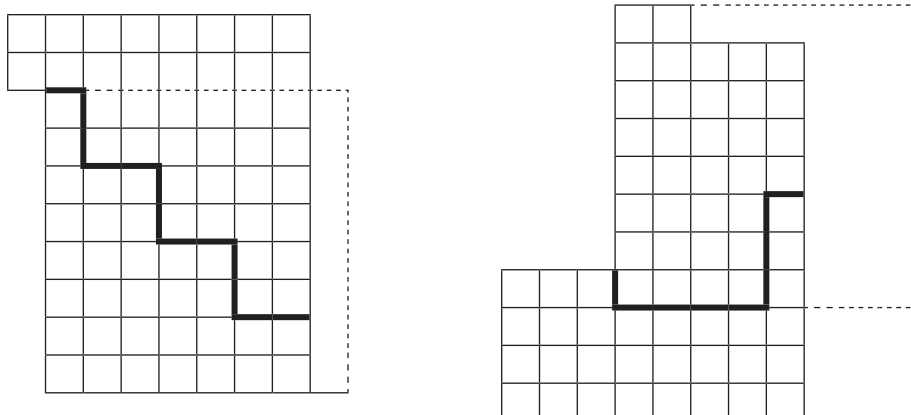
6. Vágjuk szét az alábbi sakktáblát négy egyforma részre úgy, hogy mind a 4 számból minden részbe pontosan egy essen, és a részek a tábla körüli 90°-os elforgatással egymásba vihetőek legyenek!

			3	1	1	
			3	2		
				4		
	1		2	4		
	1					
		3	3			
				2	4	4
				2		



**Megoldások:**

1. feladat:

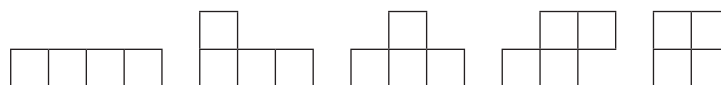


2. feladat:

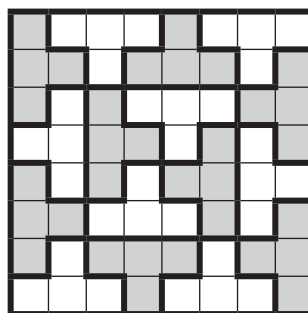
Legkevesebb 6 vágással lehet a táblát 1x1-es négyzetekre vágni, ha az első lépésben két egyforma részre vágjuk a táblát, majd a darabolást úgy folytatjuk, hogy az egyes részeket egymásra rakva egyszerre daraboljuk.

3. feladat:

Ha 16 egyforma sokszögből kell kirakni a sakktáblát, akkor egy sokszög 4 négyzetből áll. Négy négyzetből a következő alakokat lehet kirakni:

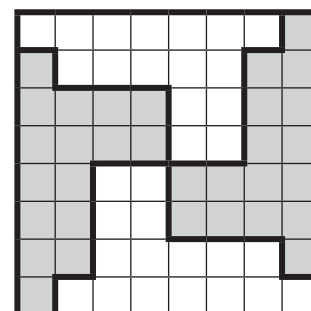
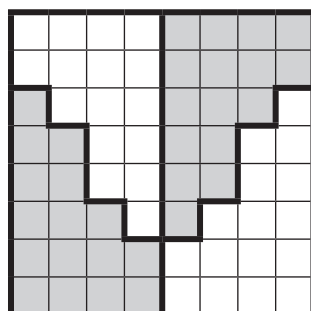
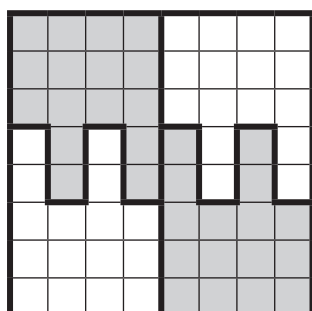


Ezek közül a harmadik és a negyedik nyolcszög. A negyedikből nem lehet kirakni a sakktáblát, mert akkor a sarok biztosan kimaradna. Így a megoldás:

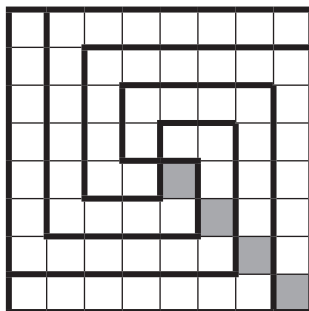


4. feladat:

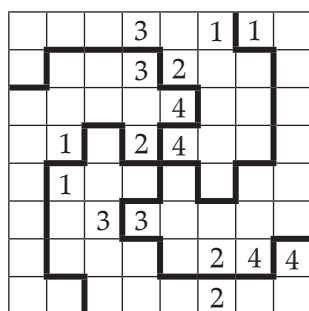
Néhány példa:



5. feladat:



6. feladat:



**A megoldás menete:**

- Az egyforma színű szomszédos mezők között behúzzuk a vonalakat.
- A négy középső mező közé behúzzuk a vonalakat.
- A megrajzolt vonalaknak behúzzuk a 90°-os elforgatottjait.
- A további vonalak behúzásánál arra figyelünk, hogy minden részbe kerüljön egy mindegyik színezett mezőből.

### III. LÉPKEDJÜNK ÉS SZÍNEZZÜNK

**Ráhangelődés:** Ezen a foglalkozáson a sakktábla színezéséhez kapcsolódó feladatokkal, majd a sakktábla különböző bábukkal való bejárásával foglalkozunk. Szükséges lehet a bábúk lehetséges mozgásainak átismétlésére.

#### I.:

A sakktábla egy 5x5-ös mezőjére helyezünk el 25 darab pénzérmét, mindegyik mezőre egyet. Ezután rakjuk át mindegyik pénzérmét valamelyik szomszédos mezőre. (Szomszédos két mező, ha egy közös oldaluk van.) El lehet-e érni, hogy az átrakás után minden mezőn legyen pénzérme?

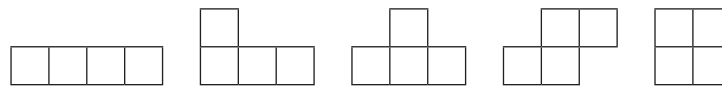
**Megoldás:** Az 5x5-ös sakktábla-részletnek 25 mezője van, feketék és fehérek, valamely színből 12, a másiktól 13 darab. A fehér mezőn lévő érme feketére, a fekete mezőn lévő fehérre kerül az átrakás után, így lesz olyan mező biztosan, amelyen az átrakás után nem lesz pénzérme (olyan színű, amelyből több van).

#### II.:

Válasszatok feladatot az alábbiak közül! Nem baj, ha nem mindegyiket tudjátok megoldani, de törekedjétek arra, hogy minél többnek a megoldását megtaláljátok!

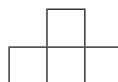
### 4. FELADATLAP

1. Meg lehet-e oldani az előző feladatot egy 6x6-os sakktábla-részleten?
2. Lehet-e téglalapot összerakni az alábbi öt alakzataból?



3. Lefedhető-e a teljes sakktábla 15 db

alakú, és 1 db



dominóval?



4. A sakktáblának levágjuk a két átellenes sarkában lévő mezőit. Lefedhető-e ezután ez a csonka tábla 2x1-es dominókkal?

#### Megoldások:

1. Igen, a pénzérméket „körkörösén” átrakva.
2. Nem. Ha sakktáblaszerűen színezzük az idomokat:



akkor látható, hogy nem ugyanannyi fekete és fehér mező van. Egy téglalapot ugyanígy színezve viszont ugyanannyi a fekete és a fehér mezők száma.

3. Nem lehet, a megadott mezők páratlan számút fednek le a fekete (vagy fehér) mezőkből.
4. Nem lehet, mert fekete és fehér mezőből a csonka táblán nem ugyanannyi van, egy 2x1-es dominó viszont egy fekete és egy fehér mezőt fed le egyszerre.

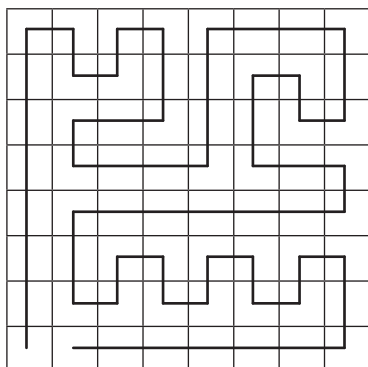
## 2. lépés: Bábúk mozgatása a sakktáblán, a tábla bejárása

### III.:

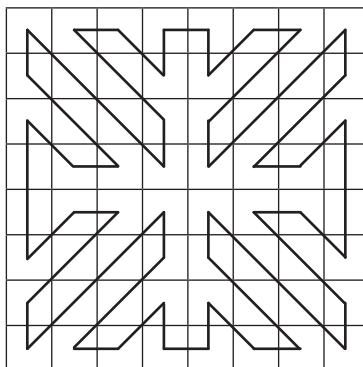
Járjuk be a sakktáblát a bástyával, királlyal, vezérrel úgy, hogy a tábla bal alsó sarkából indulunk, minden mezőt egyszer érintünk, és a kezdőpontba érkezünk vissza. Keressetek minél „trükkösebb” megoldásokat! A bábuk csak szabályosan léphetnek!

#### Megoldás:

Bástya: (egy példa)



Király: (egy példa)



Vezér:

A bástyára és a királyra adott példamegoldás itt is megfelelő.

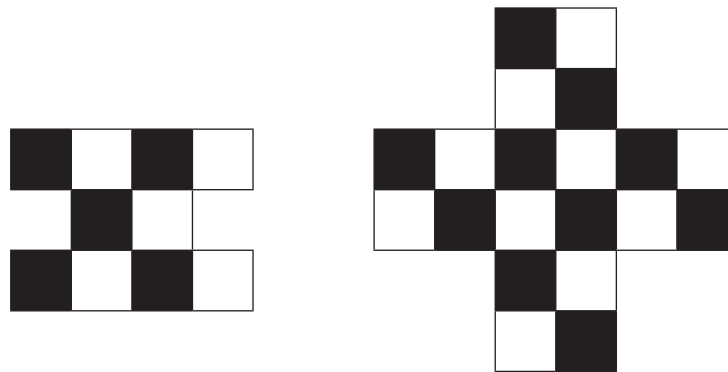
Természetesen mindhárom esetben találhatóak más megoldások.

## 5. FELADATLAP

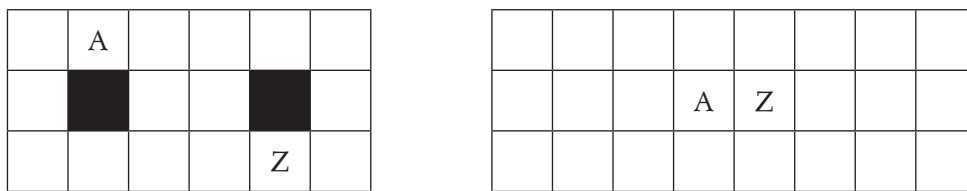
- Járjuk be az 5x5-ös sakktáblarészletet a huszárral úgy, hogy minden mezőt egyszer érintsük!
- Járjuk be a sakktáblát a huszárral úgy, hogy minden mezőt egyszer érintsük! Próbálj olyan megoldást találni, ahol az utolsó lépéssel éppen lóugrásnyi távolságra kerülsz a kezdőmezőtől!
- Az alábbi sakktáblára egy közmondást írtunk, minden mezőre egyetlen betűt. A D4-es mezőről indulva huszárlépésekkel lépkedve olvassátok ki a szöveget!

G	R	K	L	E	M	Á	N
K	O	Y	T	T	Z	R	B
A	O	Z	S	Z	N	E	B
S	A	P	J	A	L	I	E
H	Ö	T	H	A	O	B	Á
Á	E	T	D	O	L	D	N
T	A	A	N	Í	T		B
L	J	Ü	J	A	A	Y	E

4. Járd be huszárral a következő sakkjáratrészeket! Bármely mezőről indulhatsz!



5. Járd be huszárral a két táblarészletet A-tól Z-ig! Az első táblán a jelölt mezőkre ne lépj!



**Megoldás:**

1. feladat  
(Egy lehetséges megoldás:)

25	2	7	12	23
8	13	24	17	6
3	18	1	22	11
14	9	20	5	16
19	4	15	10	21

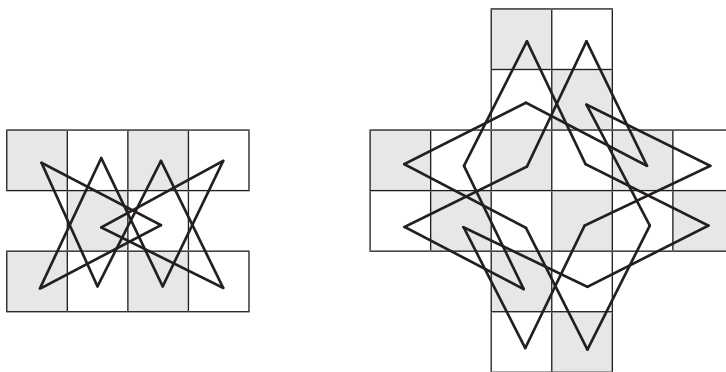
2. feladat:  
(Egy lehetséges megoldás:)

20	39	60	5	34	25	10	55
61	4	21	38	9	56	33	26
40	19	6	39	24	35	54	11
3	62	37	22	57	8	27	32
18	41	58	7	36	23	12	53
63	12	43	50	15	46	31	28
42	17	64	45	48	29	52	13
1	44	49	16	51	14	47	30

3. Ha leütöd a partnered a sakktáblával, az nem bizonyítja, hogy jobban játszol (angol közmondás)  
A lépések sorrendje:

50	11	24	64	14	37	26	35
23	63	51	12	25	34	15	38
10	49	62	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

4. feladat:



5. feladat:

