

MATEMATIKA „C”
9. évfolyam

8. modul
SZIMMETRIKUS?

Készítette: Surányi Szabolcs

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A szimmetriák felismerése, alkalmazása.
Időkeret	2 foglalkozás
Ajánlott korosztály	14–15 évesek (9. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben Képzőművészetek, játékok. Szűkebb környezetben: Geometria, gondolkodási képességek. Ajánlott megelőző tevékenységek: Egybevágósági tarnszformációk ismerete.
A képességfejlesztés fókuszai	A gondolkodási képességek fejlesztése: rendszerzés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, kreativitás. A vizuális képességek fejlesztése: térlátás, térbeli viszonyok, ábrázolás. Kommunikációs képességek: szövegértés, szövegértelmezés.

AJÁNLÁS

A szimmetriák körbevesznek minket, megjelennek a természetben, képzőművészeti alkotásokban, sőt tevékenységeinkben is. Szimmetrikus ábrák megfigyelése vagy készítése közben a geometriai transzformációk mélyíthetőek el. Matematikai játékok segítségével felfedezhetjük a tevékenységeinkben rejlő szimmetriákat.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Teremdíszítés			
1.	Vizuális paradoxonok Munkaforma: csoportban	Rendszerezés, problémaérzékenység, probléma-reprezentáció, térlátás, térbeli viszonyok	M. C. Escher képek: Vízésés, Emelkedés és ereszkedés, Relativitás, Konvex és konkáv, Fent és lent, Rajzoló kezek (Minden csoportnak annyi kép, ahány tagja van.)
2.	A sík parkettázása során szimmetriák felfedezése Munkaforma: csoportban	Rendszerezés, problémaérzékenység, eredetiség, kreativitás, ábrázolás, prezentáció	1. feladatlap Rajzlap, vonalzó, körző, átlátszó másolópapír, színes ceruzák M. C. Escher képek: Rák-kánon; Periodikus rajz 20, 1938. III. Hal; Periodikus rajz 35, 1941. VII. Hüllők; Periodikus rajz 99, 1954. VIII. Repülő halak; Periodikus rajz 42, 1941. VIII. Kagylók és tengeri csillagok.

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
II. Játszóház			
1.	A játékok Munkaforma: párban	Deduktív és induktív következtetés, érvelés, gondolkodási sebesség, problémaérzékenység, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés	2. feladatlap A megoldások egy-egy példánya, négyzetrácsos lapok, színes ceruzák, 51 egyforma (pl. 5 Ft-os) pénzérme, 50 db 10 Ft-os pénzérme, 2 sakktábla 9 bástyabábuval, olló.

I. TEREMDÍSZÍTÉS

VIZUÁLIS PARADOXONOK

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: M. C. Escher képek [Vízésés, Emelkedés és ereszkedés, Relativitás, Konvex és konkáv, Fent és lent, Rajzoló kezek] – minden csoportnak annyi kép, ahány tagja van; Munkaforma: 3-4 fős csoportok)

1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Minden csoport kap pár M. C. Escher által készített képet, fogalmazzátok meg, mi a furcsaság rajtuk!

Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, térlátás, térbeli viszonyok.

1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Minden csoportnak osszunk ki legalább három különböző képet! Először a csoport minden tagja választ magának egy képet, és azon keresi meg a furcsaságokat, majd bemutatja azt a csoport többi tagjának. Ha valamelyik kép tetszik a tanulóknak, azt helyezzük ki a tanterem falára.

A SÍK PARKETTÁZÁSA SORÁN SZIMMETRIÁK FELFEDEZÉSE

(Javasolt idő: 40 perc; Eszközök: rajzlap, vonalzó, körző, átlátszó másolópapír, színes ceruzák, 1. feladatlap, M. C. Escher képek [Rák-kánon; Periodikus rajz 20, 1938. III. Hal; Periodikus rajz 35, 1941. VII. Hüllők; Periodikus rajz 99, 1954. VIII. Repülő halak; Periodikus rajz 42, 1941. VIII. Kagylók és tengeri csillagok]; Munkaforma: 3-4 fős csoportokban)

1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Ki szeretnénk csempézni a fürdőszoba falát. Milyen szabályos sokszögekkel lehet hézagmentesen csempézni? Keressétek az összes megoldást, és készítsétek ezekről vázlatot! Próbáljátok megindokolni, hogy miért csak ennyi megoldás létezik!

Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, térlátás, térbeli viszonyok.

1. Foglalkozás – 2. lépés/2.

A tanár biztassa a csoportokat, hogy mind a három megoldást igyekeznek megtalálni. Segíthet azzal, hogy a matematikafüzet lapjai négyzetrácsosak, így a tanulók nap mint nap találkoznak az egyik lehetőséggel.

1. Foglalkozás – 2. lépés/3.

Ki szeretnénk csempézni a fürdőszoba falát. Csak megegyező oldalú, szabályos, sokszög alakú csempék állnak a rendelkezésünkre, melyek nem feltétlenül egyformák. A megadott utasításoknak megfelelően rajzoljátok le papírra a csempézéseket! Színezzétek ki az ábrát úgy, hogy az azonos alakú csempék színe azonos, a különbözőeké különböző legyen! Hogyan lehet gyorsítható az ábrarajzolás?

Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, térlátás, térbeli viszonyok.

1. Foglalkozás – 2. lépés/4.

A csoportokon belül minden tanuló más-más utasítás szerint dolgozzon. Ha elkészültek a munkákkal, a tanár biztassa őket arra, hogy más mozgásokat is keressenek, ami alapján elkészíthető az ábra (mindegyiken felfedezhetünk tükrözési, eltolási és forgatási szimmetriát)! Felhívhatja a tanár a tanulók figyelmét a transzformációk tulajdonságaira is, ha az idő ezt engedi. Végezetül, az egyforma ábrákat egymás mellé illesztve helyezték ki a diákok az elkészült munkákat a tanterem falára.

1. Foglalkozás – 2. lépés/5.

M. C. Escher sok olyan grafikát készített, amelyeken a síkot „parkettázta”, de nem olyan szabályos alakzatokkal, mint mi az előző feladatban. Minden csoport kap egy pár Escher képet. A csoporton belül mindenki válasszon magának egyet. Keressék ki az alapmintát a képeken! Másoljátok le az alapmintát, majd ennek segítségével készíttetek az eredeti képhez hasonlót! Színezzétek ki a képeket úgy, hogy az azonos állású képelemek azonos színűek legyenek! Keressetek minél több fajta mozgást, melyek segítségével az ábra az alapelemből reprodukálható!

Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, térlátás, térbeli viszonyok.

1. Foglalkozás – 2. lépés/6.

Miután a csoportok megkapják a képeket, minden tag választ magának egyet. Együtt keressék ki az alapelemet, amelyekből a rajzok felépíthetőek, és beszéljék meg együtt, hogy milyen mozgásokkal (transzformációkkal) építhető fel az alapelemből az ábra! Kereshetnek nagyobb részeket is (több alapelemből állót), melyekből más-más transzformációval kapható meg az egész rajz. Miután elkészültek a képekkel, az azonosakat megfelelően összeillesztve dekoráljuk ki ezekkel a termet!

II. JÁTSZÓHÁZ

2. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Az asztalokon játékok leírását találjátok. Az ellenfél-párosok játszanak le néhány menetet! Minden menet előtt sorsoljátok ki, hogy melyik páros kezdi a játékot. Miután játszottatok a játékokkal, próbáljátok meg kitalálni, hogy a kezdő vagy a másodiknak lépő párosnak van nyerő stratégiája! Néhány játéknak több változata van, ezeknél találjátok ki, hogy milyen különbség van a stratégiákban! A következő játékot egy másik páros ellen játsszátok!

Kiemelt készségek, képességek

Deduktív és induktív következtetés, érvelés, gondolkodási sebesség, probléma-érzékenység, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés

2. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Előkészítésként rakjuk ki az asztalokra a játékok leírását és a szükséges kellékeket, minden játékot külön asztalra, valamint a nyerő stratégiák leírását a tanári asztalra! (Lásd a mellékletben!) A tanár kísérje figyelemmel a játékokat! Ha a tanulók nem értették meg a játék menetét, akkor magyarázzuk el nekik. Ha a játékosok több lejátszott parti után maguktól nem jönnek rá az adott játéknál a nyerő stratégiára, akkor elhozhatják azt a tanári asztalról, közös elolvasás utána próbálják ki két esetben, egyszer az egyik, másodszer a másik csapat kezdjen!

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

I. TEREMDÍSZÍTÉS

1. FELADATLAP

Ráhangelődés: A különböző szimmetriákkal lépten-nyomon találkozhatunk a természetben, a körülöttünk lévő tárgyakon, felületeken (pl. eltolási, tükrözési, forgatási szimmetriával a csempék, parketták esetében). M. C. Escher 1898 és 1971 között élt holland grafikusművész munkái között sok olyan fedezhető fel, melyeken ilyen szimmetriákat dolgoz fel. Ezek különlegessége, hogy nem „egyszerű” alakzatokat (sokszögek) felhasználva alkotta meg őket. Munkáinak másik részében érdekes ellentmondásokat (paradoxonokat) fedezhet fel a figyelmes szemlélő. Először ilyen paradoxonokat keresünk a művész grafikáin, majd a sík különböző parkettázásain keresztül fedezzük fel az azokban megjelenő szimmetriákat.

2. lépés: A sík parkettázása során szimmetriák felfedezése

II.:

Ki szeretnének csempézni a fürdőszoba falát. Milyen szabályos sokszögekkel lehet hézagmentesen csempézni? Keressétek az összes megoldást, és készítsétek ezekről vázlatot! Próbáljátok megindokolni, hogy miért csak ennyi megoldás létezik!

Megoldás: A négyzetekkel való csempézés könnyen adódik. Ha megtalálták a szabályos háromszögekkel való kirakást, akkor hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy hatosával csoportosítva a háromszögeket, megkapjuk a hatszögekkel való kirakást és fordítva, a hatszögeket átlóikkal háromszögekre bonthatjuk, így megkapva ezt a megoldást.

Csak olyan sokszög jöhet szóba, melynek belső szögének nagysága megvan a 360-ban, hiszen ha egy olyan pontot nézünk, ahol a sokszögek közös csúcsban érintkeznek, itt a belső szöge összege 360° . Így három megoldás van: a háromszög (60°), négyszög (90°) és a hatszög (120°). Hatnál több oldalú sokszögnek egy belső szöge 120° -nál nagyobb, de 180° -nál kisebb, így több megoldás nincs.

III.:

Ki szeretnének csempézni a fürdőszoba falát. Csak megegyező oldalú szabályos sokszög alakú csempék állnak a rendelkezésünkre, melyek nem feltétlenül egyformák. A megadott utasításoknak megfelelően rajzoljátok le papírra a csempézéseket! Színezzétek ki az ábrát úgy, hogy az azonos alakú csempék színe azonos, a különbözőké különböző legyen! Hogyan gyorsítható az ábrarajzolás?

1. FELADATLAP

1. Szerkessz a rajzlap közepére egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget, majd ennek oldalaira kifelé szabályos háromszögeket! Helyezd a rajzlapra a másolópapírt, majd rajzold át az ábrát a másolópapírra! Ez után told el a másolópapírt a rajzlap fölött úgy, hogy a rajzlapon és a másolópapíron lévő ábrák közül pontosan két háromszög egymásra kerüljön, és a két hatszögnek egy közös oldala legyen! Rajzold át a másolópapírra a rajzlapon látható ábra azon részét, ami még nincs rajta! Ismételd meg ezt az eljárást többször és több irányba, amíg a papírra kifer!

2. Szerkessz a rajzlap közepére egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget, majd ennek oldalaira kifelé négyzeteket, és kösd össze a szomszédos négyzetek egymás melletti, nem érintkező csúcsait (így még hat szabályos háromszöget kapsz). Helyezd a rajzlapra a másolópapírt, majd rajzold át az ábrát a másolópapírra. Ez után told el a másolópapírt a rajzlap fölött úgy, hogy a rajzlapon és a másolópapíron lévő ábrák közül pontosan kettő háromszög és egy négyzet egymásra kerüljön! Rajzold át a másolópapírra a rajzlapon látható ábra azon részét, ami még nincs rajta! Ismételd meg ezt az eljárást többször és több irányba, amíg a papírra kifer!

3. Szerkessz a rajzlapra egy 2 cm oldalú nyolcszöget, és minden második oldalára kifelé egy négyzetet! Helyezd a rajzlapra a másolópapírt, majd rajzold át az ábrát a másolópapírra! Ezután forgasd el a másolópapírt az egyik négyzet középpontja körül 90° -kal! Rajzold át a másolópapírra a rajzlapon látható ábra azon részét, ami még nincs rajta! Ismételd meg ezt az eljárást többször és több irányba, amíg a papírra kifer!

4. Szerkessz a rajzlapra egy 1 cm oldalú tizenkétszöget, és minden második oldalára kifelé egy szabályos háromszöget! Helyezd a rajzlapra a másolópapírt, majd rajzold át az ábrát a másolópapírra! Ezután forgasd el a másolópapírt az egyik háromszög külső csúcsa körül 120° -kal! Rajzold át a másolópapírra a rajzlapon látható ábra azon részét, ami még nincs rajta! Ismételd meg ezt az eljárást többször és több irányba, amíg a papírra kifer!

II. JÁTSZÓHÁZ

Ráhangelődés: A szimmetria nem csak a geometriai formákban fedezhető fel, hanem különböző játékoknál a nyerő stratégia is visszavezethető valamilyen szimmetriára, ahol az ellenfél lépésére kell valamilyen szimmetrikus válaszlépéssel reagálni (néha ennek lehetőségét a megfelelő kezdőlépéssel kialakítva). Ezen a foglalkozáson ilyen játékokat játszanak a tanulók.

1. lépés:

2. FELADATLAP

1. játék:

- Rajzoljatok egy 5x5-ös négyzetrácsot, ennek mezőit színezzétek felváltva, egyszerre egy mezőt vagy két szomszédosat! Az nyer, aki utoljára tud mezőt kiszínezni.
- Rajzoljatok egy 6x6-os négyzetrácsot, ennek mezőit színezzétek felváltva, egyszerre egy mezőt vagy két szomszédosat! Az nyer, aki utoljára tud mezőt kiszínezni.

2. játék:

- Egy sorban helyeztetek el 10 pénzérmét! A játékosok felváltva vesznek el egy vagy két szomszédos pénzérmét. Az nyer, aki az utolsó pénzérmét elveszi.
- Egy sorban helyeztetek el 11 pénzérmét! A játékosok felváltva vesznek el egy vagy két szomszédos pénzérmét. Az nyer, aki az utolsó pénzérmét elveszi.
- Körben helyeztetek el 11 pénzérmét! A játékosok felváltva vesznek el egy vagy két szomszédos pénzérmét. Az nyer, aki az utolsó pénzérmét elveszi.

3. játék:

- A 8x8-as sakktabla bal alsó sarkából induljatok el a bástyával. Lépni csak jobbra vagy felfelé lehet, egyszerre akár több mezőnyit is. Az nyer, aki a jobb felső sarokba lép.
- Most is az előző játékot kell játszani, csak egy „hamis” 7x8-as sakktablán, ahol a tábla baloldali oszlopát letakarjuk.

4. játék:

- Két kupacban 20-20 pénzérme van. A két játékos felváltva vesz valamelyik kupacból 1-et, de abból akár az összeset is elveheti. Az nyer, aki utoljára tud venni.
- Két kupacban 20, illetve 30 pénzérme van. A két játékos felváltva vesz valamelyik kupacból 1-et, de abból akár az összeset is elveheti. Az nyer, aki utoljára tud venni.

5. játék:

A játékosok felváltva bástyákat helyeznek a 8x8-as sakktablára. Az veszít, aki nem tud úgy bábut felhelyezni, hogy az ne legyen ütésben.

6. játék:

Egy 10x5 négyzetből álló papírlapot, illetve annak részeit kell szétvágni a rácsegyenesek mentén. Egy játékos egyszerre csak egyet vághat, egy rácsegyenes mentén. Az nyer, aki először tudott 1x1-es négyzetet levágni.

7. játék:

Egy A5-ös papírlapra a két játékos felváltva helyez 5 Ft-s érméket úgy, hogy azok nem fedhetik egymást, és nem lóghatnak le a lapról. Az nyer, aki utoljára tud tenni.

8. játék:

Egy 5x5-ös táblázatba felváltva rakja a saját jelét a két játékos (a kezdő kört, a második keresztet). A játék végén megszámlálják, hogy hány sorban és oszlopban van többségben a kör, illetve a kereszt. Az nyer, aki több sorban és oszlopban szerez többséget.

Megoldások – nyerő stratégiák:**1. játék**

- a) A kezdőnek van nyerő stratégiája, ha első lépésként a középső mezőt színezi, és utána minden lépésénél az ellenfél által színezett mező(k) középső mezőre szimmetrikus párját (párjait) színezi.
- b) A másodiknak van nyerő stratégiája, ha a kezdő minden lépését a tábla közepére szimmetrikusan megismétli.

2. játék:

- a) A kezdőnek van nyerő stratégiája, ha kezdetben a középső két pénzérmét veszi el, majd mindig megismétli az ellenfele lépését ezen kettőre szimmetrikusan.
- b) A kezdőnek van nyerő stratégiája, ha kezdetben a középső pénzérmét veszi el, majd mindig megismétli az ellenfele lépését erre szimmetrikusan.
- c) A másodiknak van nyerő stratégiája, bármit lép az első, utána a játék olyan, mint az előző kettő közül valamelyik. (A kört megbontva, a pénzérmék vonala kiegyenesíthető.)

3. játék:

- a) A másodiknak van nyerő stratégiája, ha mindig a tábla átlójába tolja a bástyát.
- b. A kezdőnek van nyerő stratégiája, ha első lépésben egy mezőt feltolja a bástyát, innentől a játék megegyezik az előzővel.

4. játék:

- a) A másodiknak van nyerő stratégiája, ha mindig annyit vesz, hogy mindkét kupacban ugyanannyi maradjon, vagyis megismétli ellenfele lépését, csak mindig a másik kupacból vesz el.
- b) Az elsőnek van nyerő stratégiája, ha első lépésben a nagyobb kupacból vesz el 10 érmét, innentől a játék megegyezik az előzővel.

5. játék:

A másodiknak van nyerő stratégiája, ha mindig megismétli ellenfele lépését a tábla középpontjára szimmetrikusan.

6. játék:

A kezdőnek van nyerő stratégiája, ha első lépésben két 5x5-ös részre vágja a lapot, majd addig, amíg nem tud 1x1-es darabot levágni, megismétli ellenfele vágását a másik darabon.

7. játék:

A kezdő nyerhet, ha első lépésben a lap közepére rak, majd mindig megismétli ellenfele lépését erre szimmetrikusan.

8. játék:

A kezdő nyerhet, ha első lépésben elfoglalja a tábla közepét, majd erre szimmetrikusan megismétli ellenfele lépését.