MATEMATIKA „C”
9. évfolyam

7. modul
VÉLETLEN?

Készítette: Surányi Szabolcs

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A relatív gyakoriság és a valószínűség kapcsolatának megismerése és megértése. Az események valószínűségének a becslése a relatív gyakoriság alapján. A kombinativitás fejlesztése. Két esemény valószínűségének összehasonlítása, és becslés a relatív gyakoriságukra. Grafikonok értő olvasása, a grafikus manipulációk felismerése.
Időkeret	3 foglalkozás
Ajánlott korosztály	14–15 évesek (9. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Mérések kiértékelése a fizikában, kémiában, biológiában. Szűkebb környezetben: Valószínűségszámítás, kombinatorika. Ajánlott megelőző tevékenységek: Statisztikai alapfogalmak ismerete, grafikonok ismerete. Ajánlott követő tevékenységek: Valószínűségszámítás.
A képességfejlesztés fókuszai	A gondolkodási képességek fejlesztése: Rendszerezés, kombinativitás, deduktív és induktív következtetés, valószínűségi következtetés. Vizuális képességek fejlesztése: Tájékozódás a vizuális információk között, ábrázolás.

AJÁNLÁS

A belső bizonytalanság minden emberben meghatározó lelki tényező, melyet különböző módszerekkel mindenki csökkenteni próbál. Sok esetben a statisztika módszereivel, máskor logikai úton szeretnénk bizonyosságot szerezni egy-egy esemény bekövetkezését illetően. Az események relatív gyakoriságának a megfigyelése megerősítheti bennünk a gondolati úton kapott modellünk helyességét.

A statisztikai adatok ábrázolása segíti a következtetések levonását, az adatokból új ismereteket szerezhetünk. Azonban ezek az ábrázolások gyakran félrevezetőek, ha nem kellő odafigyeléssel szemléljük az elénk kerülő grafikonokat. Gyakran hibás következtetésekre juthatunk. Fontos, hogy értő szemmel vizsgáljuk ezeket, hiszen lépten-nyomon találkozunk ilyen formában információval, például a napi sajtóban.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Véletlen-e a véletlen?			
1.	A relatív gyakoriság alakulásának megfigyelése egy kísérletsorozatban **Munkaforma:** egyéni, majd frontális	Valószínűségi következtetés, számolás	Minden tanulónak egy pénzérme 1. feladatlap
2.	Kísérletezzünk! A relatív gyakoriság és a valószínűség kapcsolatának megfigyelése önállóan végzett kísérletek során, a valószínűség meghatározása logikai úton **Munkaforma:** párban	Valószínűségi következtetés, számolás, logikai modellalkotás, kombinatorikai készség	Minden tanulópárnak egy doboz, benne öt azonos méretű golyó, két piros és három kék; két pénzérme; két dobókocka; 10 számkártya, 0-tól 9-ig megszámozva; egy pakli magyar kártya; 2. feladatlap
3.	Értékeljük az eredményeket! **Munkaforma:** frontális	Valószínűségi következtetés, számolás, logikai modellalkotás, kombinatorikai készség	3. feladatlap

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
II. Játsszunk a véletlennel!			
1.	A relatív gyakoriság becslése, egyes események valószínűségeinek összehasonlítása **Munkaforma:** csoportban	Valószínűségi következtetés, számolás, becslés	4. feladatlap Minden játékmesternél a játék leírása 2 példányban; 3 pénzérme; egy dobozban 8 egyforma méretű golyó, 4 piros és 4 kék; egy dobozban 10 cédula, 0-tól 9-ig számozva; 4 dobókocka
2.	Licitáljunk! Stratégia kidolgozása **Munkaforma:** frontális	Gondolkodási sebesség, stratégia követése	különböző ajándékok (csoki, ropi stb.)
III. Hiszem, ha látom?!			
	Ráhangolódás **Munkaforma:** frontális		Színes ceruza és papír minden csoportnál
1.	A kísérletek során kapott statisztikai adatok grafikus megjelenítése és elemzése **Munkaforma:** csoportban	Ábrázolás, prezentáció, mennyiségi következtetés, számlálás, érvelés	Milliméterpapír, színes ceruzák
2.	Grafikonkészítés, grafikonolvasás **Munkaforma:** csoportban, majd frontális	Ábrázolás, prezentáció, mennyiségi következtetés, számlálás, érvelés	Milliméterpapír, színes ceruzák, mérőszalag
3.	Adatok leolvasása grafikonról **Munkaforma:** párban	Mennyiségi következtetés, számolási képesség	5. feladatlap
4.	Grafikonok értő olvasása **Munkaforma:** párban	Problémamegoldás, döntőképesség, elemzés, kreativitás	6. feladatlap Milliméterpapír, színes ceruzák

I. VÉLETLEN-E A VÉLETLEN?

A relatív gyakoriság és a statisztika kapcsolata

EGY KÍSÉRLETSOROZATBAN A RELATÍV GYAKORISÁG ALAKULÁSÁNAK A MEGFIGYELÉSE

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 1. feladatlap, minden tanulónak egy pénzérme; Munkaforma: egyéni, majd frontális)

1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Fej vagy írás?

Mi az esélyesebb egy pénzérme feldobása esetén: az, hogy fejet, vagy az, hogy írást dobunk? Írja le mindenki, hogy mit gondol erről, az esetek hányad részében (vagy hány százalékában) dob fejet és hányadrészben írást. Miután ezt mindenki végiggondolta, dobjátok fel a nálatok lévő pénzérmét 100-szor, és jegyezzétek le mindegyik dobásról, hogy fej volt-e vagy írás! Végül mindenki számolja meg, hogy a 100 dobásból hányszor kapott fejet, hányszor írást!

Kiemelt készségek, képességek

Valószínűségi következtetés, számolás

1. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A tanár figyelemmel kíséri a tanulókat kísérletezés közben, és figyeli, hogy rendesen vezetik-e a jegyzőkönyveket. A kísérletsorozat elvégzése után minden tanuló számolja össze, hogy az általa kapott dobássorozatban hányszor kapott fejet és hányszor írást! Számítsák ki, hogy ez az esetek hányad része, vagyis mi a fejés az írásdobás relatív gyakorisága! Ezután az egész csoport adatait összesítsük, vagyis nézzük meg, hogy 100, 200, … dobás után hogyan alakult a fej- és az írásdobások relatív gyakorisága! Vezessen erről is az egyik tanuló jegyzőkönyvet, mert a következő foglalkozáson erre szükségük lesz a tanulóknak. Végül beszélje meg a csoport, hogy a kísérletsorozat előtt milyen eredményt vártak, és a kapott eredmény mennyiben egyezik ezzel.

KÍSÉRLETEZZÜNK!

A relatív gyakoriság és a valószínűség kapcsolatának megfigyelése önállóan végzett kísérletek során, a valószínűség meghatározása logikai úton

(Javasolt idő: 25 perc; Eszközök: 2. feladatlap; minden tanulópárnak egy doboz, benne öt azonos méretű golyó, két piros és három kék; két pénzérme; két dobókocka; 10 számkártya, 0-tól 9-ig megszámozva; egy pakli magyar kártya; Munkaforma: párban)

1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Kísérletsorozatokat fogunk végezni, és eközben megfigyeljük, hogy egy-egy esemény hányszor fordul elő az adott kísérletsorozatban. Először minden egyes kísérletsorozat esetén próbálja meg a páros megbecsülni a megadott események valószínűségét!

Itt fogalmazhatunk úgy is, hogy becsüljék meg, az esetek hányad részében, vagy hány százalékában fog bekövetkezni az adott esemény). A páros egyik tagja végezze a kísérletet, a másik vezesse a jegyzőkönyvet (töltse ki a táblázatot!

A kísérletsorozat elvégzése után minden páros számolja meg, hogy hányszor következett be a megadott esemény! A kísérleteket annyiszor kell egy-egy párosnak elvégeznie, hogy a végén az egész csoportnak megfelelő számú (500 és 1000 közötti) adat álljon a rendelkezésére.

A későbbi feldolgozás megkönnyítése miatt érdemes ugyanannyi kísérletet végeztetni minden párossal mindegyik kísérletsorozat esetében.

Kiemelt készségek, képességek

Valószínűségi következtetés, számolás, logikai modellalkotás, kombinatorikai készség.

1. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Először a csoport megbeszéli, hogy egy-egy páros hányszor hajtsa végre az egyes kísérleteket. (Ez a szám ne legyen kevesebb 20-nál és ne legyen több 40-nél!) A tanár figyelemmel kíséri a tanulókat kísérletezés közben, és ellenőrzi, hogy rendesen vezetik-e a jegyzőkönyveket. A kapott eredményeket felhasználva nézzék meg a párok, hogy megfelelő volt-e a becslésük, majd próbálják meg kiszámolni az egyes események valószínűségét is. Ha valamelyik páros hamarabb készen van, mint a többi, akkor besegíthet egy másik párosnak úgy, hogy az általuk még el nem végzett kísérletsorozatok közül az egyiket újra elvégzi.

ÉRTÉKELJÜK AZ EREDMÉNYEKET!

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 3. feladatlap; Munkaforma: frontális)

1. Foglalkozás – 3. lépés/1.

A kísérletsorozatok elvégzése után értékeljük ki a kapott eredményeket! Nézzük meg a megfelelő táblázatok kitöltése közben, hogy hogyan alakultak a relatív gyakoriságok a kísérletsorozat folyamán, majd beszéljük meg, hogy mennyi az adott esemény bekövetkezésének valószínűsége! Végül hasonlítsuk össze a kapott és a számolt eredményt!

Kiemelt készségek, képességek

Valószínűségi következtetés, számolás, logikai modellalkotás, kombinatorikai készség

1. Foglalkozás – 3. lépés/2.

Mindegyik kísérletsorozat esetében a párok sorban bemondják az egyes események gyakoriságát, ezeket a táblánál összegezzük, erről mindegyik tanuló jegyzőkönyvet vezet (beírja a táblázatába, hogy 50, 100, … kísérlet után mennyi volt a gyakoriság, majd kiszámolja, a relatív gyakoriságot). A jegyzőkönyveket tegyük el, mert ebből fognak egy másik foglalkozáson dolgozni a tanulók! Ha egy eseményre vonatkozó adatokat összegeztük, akkor beszélje meg a csoport, hogy a logikai modell alapján mennyi az esemény valószínűsége, és megfelelően közel esik-e a kapott relatív gyakoriság e valószínűséghez!

II. JÁTSSZUNK A VÉLETLENNEL

A relatív gyakoriság becslése, egyes események valószínűségeinek összehasonlítása

Ráhangolódás

Az előző foglalkozáson kísérletsorozatokat végeztünk, és eközben különböző események bekövetkezésének gyakoriságát figyeltük meg.

A RELATÍV GYAKORISÁG BECSLÉSE, EGYES ESEMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGEINEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

(Javasolt idő: 35 perc; Eszközök: 4. feladatlap; minden játékmesternél a játék leírása 2 példányban; 3 pénzérme; egy dobozban 8 egyforma méretű golyó, 4 piros és 4 kék; egy dobozban 10 cédula, 0-tól 9-ig számozva; 4 dobókocka; Munkaforma: 2 fős csapatokban (páratlan számú tanulócsoport esetén úgy osszuk csoportokba a tanulókat, hogy páros számú csapat legyen) játékmesterek vezetésével)

2. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Játszunk! A csapatok kapnak egy lapot, ezen vezetik a játékmesterek a nyereményüket. Minden asztalnál találtok egy játékot, amit a játékmester ismertet veletek. Minden játék során két eseményt kell megfigyelnetek, ezeket A-val és B-vel jelöljük. A játéknak minden esetben 2 fordulója van. Először az egyik páros a kedvezményezett, vagyis ők választják meg, hogy melyik esemény bekövetkezése esetén legyenek ők a nyertesek. A második fordulóban fordított a helyzet, ilyenkor a második páros a kedvezményezett, vagyis ők választanak. Elképzelhető, hogy egyik csapat sem nyer, ha sem az A, sem a B esemény nem következik be, vagy abban az esetben, ha mindkettő bekövetkezik. A játék nyertese nyer egy pontot, amit a játékmester felír a lapjukra. Minden játékról vezessenek a csapatok jegyzőkönyvet, és válaszoljanak a játékkal kapcsolatban feltett kérdésekre. A kérdéseket minden játék előtt, és után is válaszoljátok meg!

Kiemelt készségek, képességek

Valószínűségi következtetés, számolás, becslés

2. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Ezen az órán a játékmestereké a főszerep, ők vezetik a foglalkozást, a tanár csak a rendre ügyel, és a vitás kérdések eldöntésében segít, esetleg a magyarázatokat pontosítja. Minden játékmester külön asztalnál áll, amiket a csapatok sorban végiglátogatnak. A játékmester ismerteti a játékot, majd kérdésekkel segíti a csapatokat. A csapatok lejátszanak 20 (minimum 10) fordulót, erről jegyzőkönyvet vezetnek, a játékmesterek eközben könyvelik a nyereményeket. A jegyzőkönyvek alapján újra megpróbálnak válaszolni a feltett kérdésekre. Minden esetben ösztönzik a tanulókat arra, hogy matematikailag is próbálják megindokolni, hogy melyik eseményt érdemesebb a kedvezményezettnek választania az egyes esetekben!

LICITÁLJUNK! STRATÉGIA KIDOLGOZÁSA

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: különböző ajándékok (csoki, ropi stb.); Munkaforma: frontális)

2. Foglalkozás – 2. lépés/1.

A nyereményetekből különböző ajándékokra licitálhattok. Ez a licitálás annyiban különbözik a hagyományos licittől, hogy itt annak is ki kell fizetnie az általa licitált összeget, aki a második legnagyobb licitet ajánlotta.

Kiemelt készségek, képességek

Gondolkodási sebesség, stratégia követése

2. Foglalkozás – 2. lépés/2.

A játékmesterek vezethetik a licitet. Az egyes ajándékok kikiáltási ára ne legyen túl magas, 2-5 pont. Bíztathatjuk a párokat arra, hogy más párokkal szövetkezve közösen licitáljanak, hiszen így veszthetnek a legkevesebbet, ha osztoznak a liciten vett ajándékon.

III. HISZEM, HA LÁTOM

A relatív gyakoriság és a statisztika kapcsolata

Ráhangoldódás/1.

A kettővel korábbi foglalkozáson elsőnek végrehajtott kísérletsorozat jegyzőkönyve alapján készítsünk milliméterpapírra pontdiagramot, mely a pénzérmével dobott fej- és írásdobások relatív gyakoriságának alakulását szemlélteti a kísérletsorozat alatt. A vízszintes tengelyen a dobásszámot, a függőleges tengelyen a relatív gyakoriságot ábrázoljuk. Figyeljük meg, hogyan ingadoztak a relatív gyakoriságok a kísérletsorozat folyamán!

Ráhangoldódás/2.

Beszéljék meg a tanulók, hogy miként érdemes a tengelybeosztásokat megválasztani, készítsék el a diagramokat – ugyanazon a diagramon ábrázolva afej- és az írásdobások relatív gyakoriságát! Jelöljék be egy vízszintes vonallal a logikai úton meghatározott valószínűséget is!

A KÍSÉRLETEK SORÁN KAPOTT STATISZTIKAI ADATOK GRAFIKUS MEGJELENÍTÉSE ÉS ELEMZÉSE

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: milliméterpapír, színes ceruzák; Munkaforma: csoportos)

3. Foglalkozás – 1. lépés/1.

A kettővel korábbi foglakozáson felvett jegyzőkönyvek alapján milliméterpapíron ábrázoljuk, hogyan ingadozott az egyes események relatív gyakorisága a kísérletsorozatok folyamán! Mindenki válasszon ki egy kísérletsorozatot, melynek eredményeiből diagramot készít! A függőleges tengelyen a relatív gyakoriságot, a vízszintes tengelyen az elvégzett kísérletek számát ábrázoljuk. Az azonos kísérletsorozattal foglalkozók beszéljék meg, hogyan érdemes a tengelybeosztásokat megválasztani, majd mindenki készítse el a saját diagramját! Jelöljétek be a diagramon (egy vízszintes vonallal) az adott esemény kiszámolt valószínűségét is.

Kiemelt készségek, képességek

Ábrázolás, prezentáció, mennyiségi következtetés, számlálás, érvelés

3. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Az azonos kísérletsorozattal foglalkozó tanulók kerülnek egy csoportba. Ügyeljen a tanár arra, hogy minden kísérletsorozattal legalább két tanuló foglalkozzon! A tanár kövesse figyelemmel a csoportok munkáját! Ha kell, tegyen javaslatot a megfelelő tengelybeosztások megválasztására, egy csoporton belül ez többféle is lehet! A kész diagramok közül a csoport tagjai válasszák ki azt, amelyik a legjobban sikerült, majd az egész csoport előtt mutassák be! Elevenítsék fel a grafikon segítségével a kettővel korábbi foglalkozás tapasztalatait (hogyan változott a relatív gyakoriság a kísérletsorozat folyamán)! A kiválasztott grafikonokat kitehetjük ezután a falra.

GRAFIKONKÉSZÍTÉS, GRAFIKONOLVASÁS

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 5. feladatlap; Munkaforma: párban)

3. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Hihetünk-e a szemünknek? Készítsünk kétféle grafikont ugyanarról az adatsorról! Mérjük meg mindenkinek a magasságát a csoporton belül! Készítsünk két oszlopdiagramot ezek alapján! Az egyikből az legyen leolvasható, hogy nagy eltérések vannak a testmagasságok között, a másikból pedig az, hogy a csoport minden tagja nagyjából egyforma magas!

Kiemelt készségek, képességek

Ábrázolás, prezentáció, mennyiségi következtetés, számlálás, érvelés

3. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Miután megmérték a testmagasságokat, alakítsanak két csoportot. (Ha van kiugróan magas, vagy alacsony tanuló a csoportban, akkor az ő adataikat kihagyhatjuk az adatsorból.) A csoportokon belül a tanulók beszéljék meg, hogy hogyan érdemes az adott hatás eléréséhez a tengelybeosztást megválasztani, majd készítsék el a grafikonokat! Egy csoporton belül a tanulók több grafikont is készíthetnek (akár más-más tengelybeosztást választva), és ezek közül kiválaszthatják a végén a legjobban sikerültet. Hasonlítsák össze a két grafikont, hogy tényleg a kívánt hatást érhetik-e el vele!

ADATOK LEOLVASÁSA GRAFIKONRÓL

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 5. feladatlap; Munkaforma: párban)

3. Foglalkozás – 3. lépés/1.

Higgyünk a szemünknek? Olvassunk le adatokat egy grafikonról! A feladatlapon található grafikon alapján válaszoljatok a feltett kérdésekre! Próbáljatok meg ti is megfogalmazni olyan kérdéseket, amire a grafikon alapján válaszolni lehet!

Kiemelt készségek, képességek

Mennyiségi következtetés, számolási képesség.

3. Foglalkozás – 3. lépés/2.

A páros tagjai közösen oldják meg a feladatot, a tanár figyelemmel kíséri a munkát. Biztassa a tanulókat, hogy maguk is fogalmazzanak meg kérdéseket, amit aztán feltehetnek a többi csoport tagjainak!

GRAFIKONOK ÉRTŐ OLVASÁSA

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: 6. feladatlap, milliméterpapír, színes ceruzák; Munkaforma: párban)

3. Foglalkozás – 4. lépés/1.

Mit higgyünk el? Helyesek-e a levont következtetések? A feladat menüben található feladatok közül próbáljatok meg minél többet megoldani!

Kiemelt készségek, képességek

Problémamegoldás, döntőképesség, elemzés, kreativitás.

3. Foglalkozás – 4. lépés/2.

A tanár figyelemmel kíséri a tanulópárok munkáját. Ügyel arra, hogy ha a páros tagjainak különböző részfeladatokat kell megoldaniuk, akkor ne együtt, hanem külön-külön dolgozzanak, és csak a részfeladat megoldása után hasonlítsák össze eredményeiket! Frontálisan ne beszéljük meg az eredményeket, inkább a párosok tagjai egymással egyeztesse jussanak el a megoldáshoz.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

I. VÉLETLEN-E A VÉLETLEN?

Ráhangolódás: A valószínűség fogalma az emberben három módon is kialakul(hat).

1. Mindenkire jellemző egyfajta belső bizonytalanság, melyet igyekszünk olyan jóslatokkal, kijelentésekkel csökkenteni, mint például „Úgy érzem, ez most sikerülni fog.”, vagyis ebben az esetben nagyobbnak becsüljük a siker valószínűségét a kudarc valószínűségénél.

2. A hosszú távú megfigyeléseink, tapasztalataink vagy egy kísérlet többszöri elvégzése is ad egyfajta bizonyosságérzetet, jellemzően ez jelenik meg az időjárás-jelentések esetén, amikor az „ilyenkor szokásos hőmérséklet, csapadékmennyiség stb.” kerül említésre. Itt a megfigyelt esemény relatív gyakoriságát azonosítjuk a valószínűségével.

3. A harmadik esetben tisztán logikai úton vonunk le következtetést, például a kockadobás esetében, amikor (ha tényleg meg vagyunk győződve arról, hogy szabályos a dobókocka) azt mondjuk, hogy ha egyik oldal sem kitüntetett, akkor mindegyik egyforma eséllyel kerülhet a dobás után legfelülre, tehát az esetek egyhatod részében. Ebben az esetben az egyenlő valószínűséggel bekövetkező elemi események valószínűségét a darabszámuk reciproka adja, majd az összetett események valószínűségét a $\frac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{összes eset száma}}$ képlettel számolhatjuk.

A Bernoulli-féle nagy számok törvénye matematikailag bizonyítja azt, hogy az utolsó két eset valójában ugyanazt az értéket adja. Ennek kísérletekkel történő igazolását próbáljuk meg ezen az órán. Fontos lesz végig az óra folyamán, hogy a kísérleteket elegendően sok esetben végezzék el a tanulók.
Minden kísérletsorozatról jegyzőkönyvet vezetnek, és ebből számolják ki az egyes események gyakoriságát, majd relatív gyakoriságát. Beszéljük meg velük, hogyan vezessék a jegyzőkönyvet!
A kísérletsorozatok elvégzése előtt a tanulók minden esetben gondolják végig, hogy logikai úton milyen relatív gyakoriságot várnak az egyes események esetén, vagyis számítsák ki az események valószínűségét.

1. FELADATLAP

A tanulói táblázatok a jegyzőkönyvhöz:

Dobás	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Eredmény																				
Dobás	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Eredmény																				
Dobás	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Eredmény																				
Dobás	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Eredmény																				
Dobás	91	92	93	94	95	96	97	98	99	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Eredmény																				
Dobott fejek száma:											Dobott írások száma:									

Dobások száma																				
Fej dobások gyakorisága																				
Fej dobások relatív gyakorisága																				
Írás dobások gyakorisága																				
Írás dobások relatív gyakorisága																				

Megoldás: A kapott relatív gyakoriságok 0,5 körüli értéknek adódnak (általában igen kis eltéréssel). A logikai modell is azt mondatja velünk, hogy mivel a pénzérmének nincsen kitüntetett oldala, ezért az esetek felében dobunk fejet, a felében írást.

Megjegyzés: Várhatóan a kapott relatív gyakoriságok eltérhetnek az előre várt 0,5-től, azonban ez az eltérés igen csekély szokott lenni, ha kellően sok kísérleti eredmény áll a rendelkezésünkre (legalább 1000).

2. FELADATLAP – KÉSÉRLETEZZÜNK!

A kísérletek:

1. Egy dobozban két piros és három kék golyó van. Becsukott szemmel húzzunk ki egy golyót. Legyen az A esemény az, hogy a kihúzott golyó színe piros, a B esemény pedig, hogy a kihúzott golyó színe kék.

Húzás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A golyó színe																				
Húzás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A golyó színe																				
Az A esemény bekövetkezéseinek száma:									A B esemény bekövetkezéseinek száma:											

2. Két pénzérmét feldobva legyen az A esemény azt hogy két fejet dobtunk, a B esemény az, hogy egy fejet és egy írást dobtunk.

Dobás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A két pénzérme:																				
Dobás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A két pénzérme:																				
Az A esemény bekövetkezéseinek száma:									A B esemény bekövetkezéseinek száma:											

3. Két kockával dobva legyen az A esemény az, hogy a dobott pontok összege prímszám, a B esemény az, hogy egyformát dobtunk a két kockával.

Húzás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A dobott két szám																				
A pontok összege																				
Húzás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A dobott két szám																				
A pontok összege																				
Az A esemény bekövetkezéseinek száma:										A B esemény bekövetkezéseinek száma:										

4. 10 számkártya közül, melyekre a 0, 1, …, 9 számok vannak írva, húzzunk ki kettőt úgy, hogy az elsőnek kihúzott kártyát visszatesszük. Legyen az A esemény az, hogy a kihúzott számokat a húzás sorrendjében egymás mellé írva az így kapott (nem feltétlenül kétjegyű, pl. a 01 húzás az 1-et adja) szám kevesebb 50-nél, a B esemény az, hogy a két szám szorzata páros.

Húzás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A kétjegyű szám																				
A számok szorzata																				
Húzás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A kétjegyű szám																				
A számok szorzata																				
Az A esemény bekövetkezéseinek száma:										A B esemény bekövetkezéseinek száma:										

5. Egy pakli magyar kártyából vegyünk ki úgy 6 lapot, hogy köztük legyen a piros ász. A hat lapot megkeverve húzzunk belőlük addig, amíg ki nem húztuk a piros ászt. Legyen az A esemény az, hogy a piros ász kihúzásához legfeljebb három húzás kell, a B esemény az, hogy a piros ászt elsőre, harmadikra vagy ötödikre húztuk ki.

Húzás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A szükséges hűzások száma																				
Húzás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A szükséges húzások száma																				
Az A esemény bekövetkezéseinek száma:									A B esemény bekövetkezéseinek száma:											

Megoldás:

1. $P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$; $P(B) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ mert az A eseménynél 2, a B eseménynél 3 a kedvező esetek száma, az összes eset pedig 5.

2. $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$; $P(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ mert a lehetséges dobások: FF, FI, IF, II, tehát az összes eset száma 4, az A eseménynél a kedvező esetek száma 1, a B-nél 2.

Sok tanuló hajlamos egy esetnek tekinteni azt, amikor egy fejet és egy írást dobunk a két érmével, főleg abban az esetben, ha két ugyanolyan érme van náluk. Ilyenkor érdemes az egyik érméjüket egy attól különböző érmére kicserélni.

3. Két kockával dobható pontokat az alábbi táblázat foglalja össze:

Összeg	Esetek	Esetszám
2	**1 + 1**	1
3	1 + 2 ; 2 + 1	2
4	1 + 3 ; **2 + 2** ; 3 + 1	3
5	1 + 4 ; 2 + 3 ; 3 + 2 ; 4 + 1	4
6	1 + 5 ; 2 + 4 ; **3 + 3** ; 4 + 2 ; 5 + 1	5
7	1 + 6 ; 2 + 5 ; 3 + 4 ; 4 + 3 ; 5 + 2 ; 6 + 1	6
8	2 + 6 ; 3 + 5 ; **4 + 4** ; 5 + 3 ; 6 + 2	5
9	3 + 6 ; 4 + 5 ; 5 + 4 ; 6 + 3	4
10	4 + 6 ; **5 + 5** ; 6 + 4	3
11	5 + 6 ; 6 + 5	2
12	**6 + 6**	1

Az összes eset száma $(6\cdot6)=1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=36$. A jó összegek a 2, 3, 5, 7, 11, így táblázatból kiolvasható, hogy $P(A)=\frac{1+2+4+6+2}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$, valamint a **vastagon szedett** dobáspárok esetén következik be a B esemény, ezért $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. Ez utóbbi eredményt a következő gondolatmenettel is megindokolhatjuk: bármit is dobunk az első kockával (6 eset), a második kockával csak egyfélét, így a kedvező esetek száma 6. Ennél a kísérletsorozatnál is sok olyan tanuló lehet, akik például az $1+4$ dobáspárt ugyanannak tekinti, mint a $4+1$ dobáspárt. Érdemes ebben az esetben különböző (pl. nem egyező színű) kockákat használni.

4. Az összes eset száma $10\cdot10=100$. Erre az eredményre jutunk akkor is, ha úgy okoskodunk, hogy a kihúzott számokból egy kétjegyű számot képezünk (az egyjegyűek és a 0 nullával kezdődnek). Ezeket vizsgálva megállapíthatjuk, hogy 100-féle ilyen számot kaphatunk, mégpedig 0-tól 99-ig bármely egész számot.
Az A esemény valószínűsége $P(B)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$.
A B esemény akkor következik be, ha legalább az egyik húzáskor páros számot húzunk. Könnyebb azt meghatározni, hogy hány esetben lesz mindkétszer a kihúzott kártyán páratlan szám: $5\cdot5=25$, így a lehetséges 100 esetből $100-25=75$ esetben lesz legalább az egyik páros, vagyis $P(A)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

5. A hat lapot a keveréssel valamilyen sorrendbe raktuk, az összes sorrend száma a lehetséges esetek száma, vagyis 6! A kedvező eseteket vizsgálva annak a valószínűsége, hogy pl. az elsőnek húzott lap a piros ász, $P=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$, hiszen az adott helyen a piros ászt kellett húzni, a többi lap sorrendje tetszőleges. Így $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, és ugyan így $P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

3. FELADATLAP – ÉRTÉKELJÜK AZ EREDMÉNYEKET!

A tanulói táblázatok:

1. kísérletsorozat																				
Húzások száma																				
Piros húzás gyakorisága																				
Piros húzás relatív gyakorisága																				
Kék húzás gyakorisága																				
Kék húzás relatív gyakorisága																				

2. kísérletsorozat																				
Dobások száma																				
Két fej gyakorisága																				
Két fej relatív gyakorisága																				
Fej-írás gyakorisága																				
Fej-írás relatív gyakorisága																				

3. kísérletsorozat																				
Húzások száma																				
Prímszám összeg gyakorisága																				
Prímszám összeg relatív gyakorisága																				
Két egyforma dobás gyakorisága																				
Két egyforma dobás relatív gyakorisága																				

4. kísérletsorozat																				
Húzások száma																				
50-nél nagyobb összeg gyakorisága																				
50-nél nagyobb összeg relatív gyakorisága																				
Páros szorzat gyakorisága																				
Páros szorzat relatív gyakorisága																				

5. kísérletsorozat																				
Húzások száma																				
Legfeljebb 3 húzás gyakorisága																				
Legfeljebb 3 húzás relatív gyakorisága																				
Páratlan számú húzás gyakorisága																				
Páratlan számú húzás relatív gyakorisága																				

II. JÁTSSZUNK A VÉLETLENNEL!

1. játék

Dobjunk fel 3 pénzérmét! Legyen az *A* esemény az, hogy három egyformát dobunk, a *B* esemény az, hogy pontosan 2 fejet dobunk.

A játék közben a következő jegyzőkönyvet vezessétek!

dobás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
választás																				
dobás																				
dobás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
választás																				
dobás																				

Kérdések:

A játék előtt:
1. Melyik eseményt célszerű a kedvezményezettnek választania?
2. Van-e olyan dobás, amikor egyik csapat sem nyer?
3. Figyelembe kell-e venni az előző dobások eredményét?

A játék után:
1. Összesítsétek az eredményeket az alábbi táblázatba!

Esemény	Gyakoriság
A: FFF vagy III	
B: FFI	
C: IIF	

2. Az A esemény helyett milyen eseményt figyeljünk meg, hogy a kedvezményezett ne legyen jobb helyzetben?
3. Milyen eseménypárt tudnátok javasolni, hogy ne legyen kedvezményezettje a játéknak, de valamelyik csapat biztosan nyerjen?

Megoldás:
A dobásnak nyolc lehetséges kimenetele van: FFF, FFI, FIF, IFF, FII, IFI, IIF, III. Gondot okozhat az egyes tanulóknak, hogy pl. egy fejet és 2 írást háromféleképpen tudunk dobni, hiszen ebben az esetben megkülönböztethetőek a pénzérmék.

Válaszok:
A játék előtt:
1. Az *A* esemény 2, a *B* pedig 3 esetben következik be, így $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ és $P(B) = \frac{3}{8}$, a kedvezményezettnek a *B* eseményt érdemes választania.
2. Három olyan eset is van, amikor senki sem nyer: FII, IFI, IIF.
3. Nem kell figyelembe venni, attól nem függ. Akkor érdemes az előző eredményekre figyelni, ha a relatív gyakoriságukból akarunk a valószínűbb eseményre következtetni.

A játék után:
2. Például az *A* esemény legyen az, hogy pontosan két írást dobunk.
3. *A:* legalább két fejet dobunk; *B:* legalább két írást dobunk.

2. játék

A dobozban három piros és négy kék golyó van. Először a játékmester kihúz egy golyót, megmutatja a színét, és nem teszi vissza. Ezután húz még egy golyót. Az *A* esemény az, hogy a másodikra kihúzott golyó piros, a *B* esemény az, hogy a másodikra kihúzott golyó kék.

A játék során a következő jegyzőkönyvet vezessétek!

húzás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
első húzás																				
választás																				
második húzás																				
húzás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
első húzás																				
választás																				
második húzás																				

Kérdések:

A játék előtt:
1. Mindig ugyanazt az eseményt érdemes-e választania a kedvezményezettnek, vagy ez függ az elsőnek kihúzott golyó színétől?
2. Minden esetben előnyben van a kedvezményezett?

A játék után:
1. Melyik eseményt választanátok akkor, ha az elsőnek kihúzott golyót visszatennétek?

Megoldás:

Ha az elsőnek kihúzott golyó piros, akkor 2 piros és 4 kék marad a dobozban.

Ekkor $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ és , tehát a *B*-t érdemes választani. Ha az elsőre kihúzott golyó színe kék, akkor ugyanannyi piros és kék golyó marad a dobozban, ilyenkor tetszőlegesen választhatunk a két esemény között, mindkettő valószínűsége $\frac{1}{2}$.

Válaszok:

A játék előtt:
1. Az előbb vázolt gondolatmenet alapján abban az esetben, ha kéket húzunk, nagyobb a nyerés esélye, ha pirosat húzunk, akkor mindegy, tehát az elsőnek kihúzott golyótól függetlenül mindig lehet a B eseményt választani.
2. A kedvezményezett csak akkor van előnyben, ha a kihúzott golyó piros.
A játék után:
1. A B-t, mert több a kék golyó a dobozban.

3. játék

A dobozban 10 cédula van, melyekre a 0, 1, …, 9 számokat írtuk. Kihúzunk a dobozból egymás után 5 cédulát úgy, hogy a már kihúzottakat visszatesszük. Legyen az A esemény az, hogy a kihúzott számok összege legalább 23, a B esemény az, hogy a kihúzott számok összege kisebb 23-nál.

A játék során a következő jegyzőkönyvet vezessétek!

húzás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
választás																				
húzott számok																				
összeg																				
húzás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
választás																				
húzott számok																				
összeg																				

Kérdések:

A játék előtt:
1. Hányféle összeget kaphatunk a játék során?

A játék után:
1. Melyik eseményt érdemesebb választani ebben a játékban?

Megoldás:

Mindkét eseménynek ugyanannyi a valószínűsége, ugyanis egy olyan húzáshoz, melynél az összeg 23 alatti, egyértelműen hozzárendelhetünk egy olyat, ahol az összeg legalább 23 a következő módon. Legyenek a kihúzott számok sorrendben: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, és $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leq 23$, ekkor $y_1=9-x_1$, $y_2=9-x_2$, $y_3=9-x_3$, $y_4=9-x_4$, $y_5=9-x_5$ nyilván egy olyan húzásötös lesz, ahol az összeg legalább 23, és ez egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a két számötös között. Csak a kihúzott számok sorrendjében eltérő húzásokat is figyelembe véve így különböző esetekhez különbözőeket rendeltünk, így ugyanannyi esetben következik be az A, mint a B esemény.

Válaszok:

A játék előtt:
1. Az összeg 0-tól 45-ig bármi lehet. Ez 46 féle szám, és a 23 a második felének a legkisebb tagja.

A játék után:
1. A megoldásban vázolt gondolatmenet alapján mindegy, hogy a kedvezményezett melyik eseményt választja.

4. játék

Dobjatok fel három kockát! Legyen az *A* esemény az, hogy van legalább két egyforma dobás, a *B* pedig az, hogy nincs két egyforma, de van pontosan egy darab 1-es dobás.

A játék során a következő jegyzőkönyvet vezessétek!

<table>
<tr><td>Dobás</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Esemény</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Dobás</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Esemény</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Dobás</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Esemény</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Dobás</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Esemény</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Kérdések:

A játék előtt:
1. Érdemes-e figyelembe venni az előző dobások eredményeit?
2. Van-e olyan eset, amikor senki sem nyer?

A játék után:
1. Próbáld meg logikai úton meghatározni, hogy melyik esemény a valószínűbb!

Megoldás:

A lehetséges esetek száma $6\cdot 6\cdot 6=216$. Az *A* esemény valószínűségét úgy célszerű meghatározni, hogy az ellentett esemény valószínűségét kivonjuk 1-ből. Az ellentett esemény: mindhárom kockával különbözőt dobtunk ($6\cdot 5\cdot 4=120$ eset), tehát

$$P(A)=\frac{216-120}{216}=\frac{96}{216}=\frac{8}{18}.$$

A *B* esemény vagy az első kockával dobunk 1-est, és a másik két kockával egymástól és 1-től különbözőt ($1\cdot 5\cdot 4=20$ eset) vagy ugyanez a második illetve a harmadik kockára, tehát

$$P(B)=\frac{20+20+20}{216}=\frac{60}{216}=\frac{5}{18}.$$

Válaszok:

A játék előtt:
1. A következő dobás eredménye nem függ az előzőektől, csak statisztikai megfontolásokból érdemes az előző dobásokat figyelni.
2. Van ilyen: ha három különböző számot dobunk, amik között nincs ott az 1-es.

A játék után:
1. Más módon is megindokolható, hogy több olyan eset van, amikor az *A* esemény következik be. Tegyük fel, hogy a kockákat különböző színűre festjük (piros, kék, zöld), ez nem befolyásolja az események gyakoriságát. A *B* akkor következik be, ha az egyik kockán 1-es van, a másik kettőn egymástól és 1-től különböző szám van. Minden ilyen esetnek megfeleltetünk pontosan 1 *A*-beli eseményt úgy, hogy különböző dobásoknak különbözőket feleltetünk meg a következő módon:

B bekövetkezése			*A* bekövetkezése		
piros	kék	zöld	piros	kék	zöld
1	x	y	x	x	y
y	1	x	y	x	x
x	y	1	x	y	x

Ily módon mindig az *A* esemény bekövetkezését jelentő dobásokhoz jutunk, mindegyikhez csak egyszer. Másfelől van olyan dobáshármas, amit így nem kapunk meg, például ha három egyformát dobunk. Tehát tényleg nagyobb az esély arra, hogy az *A* következzen be.

5. játék

A játékmester feldob egy szabályos dobókockát, és a kedvezményezettnek – választása szerint – kétféle információt adhat:
I.: ALSÓ HARMAD, ha a dobott szám 1 vagy 2;
KÖZÉPSŐ HARMAD, ha a dobott szám 3 vagy 4;
FELSŐ HARMAD, ha a dobott szám 5 vagy 6.
II.: ALSÓ, ha a dobott szám 1, 2 vagy 3, és FELSŐ, ha a dobott szám 4, 5 vagy 6.
Legyen az *A* esemény az, hogy a dobott szám prímszám, a *B* pedig az, hogy nem prímszám.

dobás sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I. vagy II. választás																				
A vagy *B* választása																				
dobás																				
dobás sorszáma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
I. vagy II. választás																				
A vagy *B* választása																				
dobás																				

Kérdések:

A játék előtt:
1. Érdemes-e figyelembe venni a játékmester közléseit?

A játék után:
1. Mi a lényeges különbség az I. és a II. közlés között?

Megoldás:

Mind az alsó, mind a középső, mind a felső harmadban egy-egy prímszám van, míg az ALSÓban kettő, a FELSŐben egy.
Ha az I.-t választjuk, akkor az *A* és a *B* eseménynek az információ alapján egyforma a valószínűsége, míg ha II.-t választjuk, akkor ALSÓ esetén az *A* eseménynek, FELSŐ esetén a *B* eseménynek nagyobb a valószínűsége ($\frac{2}{3}$).

Válaszok:

A játék előtt:
1. Az előbb vázolt gondolatmenet alapján igen, méghozzá a II.-t.
A játék után:
1. Bár az I. közlés több információt szolgáltat, mégis kevesebbet érünk vele, hiszen az események valószínűsége nem változik meg a közlés után.

III. HISZEM, HA LÁTOM!?

Ráhangolódás: A statisztikai adatokat szemléletesebbé tehetjük, ha ábrázoljuk őket különböző (oszlop-, sáv-, vonal-, kör-, pont- stb.) diagramokon. Ilyen diagramokkal minden nap találkozhatunk pl. a televízióban és az újságokban. Ezen a foglalkozáson a diagramokkal fogunk foglalkozni. Először a tanulók készítenek diagramokat, majd megvizsgáljuk, hogy egy jól/rosszul elkészített diagramból milyen hibás következtetést lehet levonni egy adatsorra vonatkozóan.

4. FELADATLAP – HIHETÜNK-E A SZEMÜNKNEK?

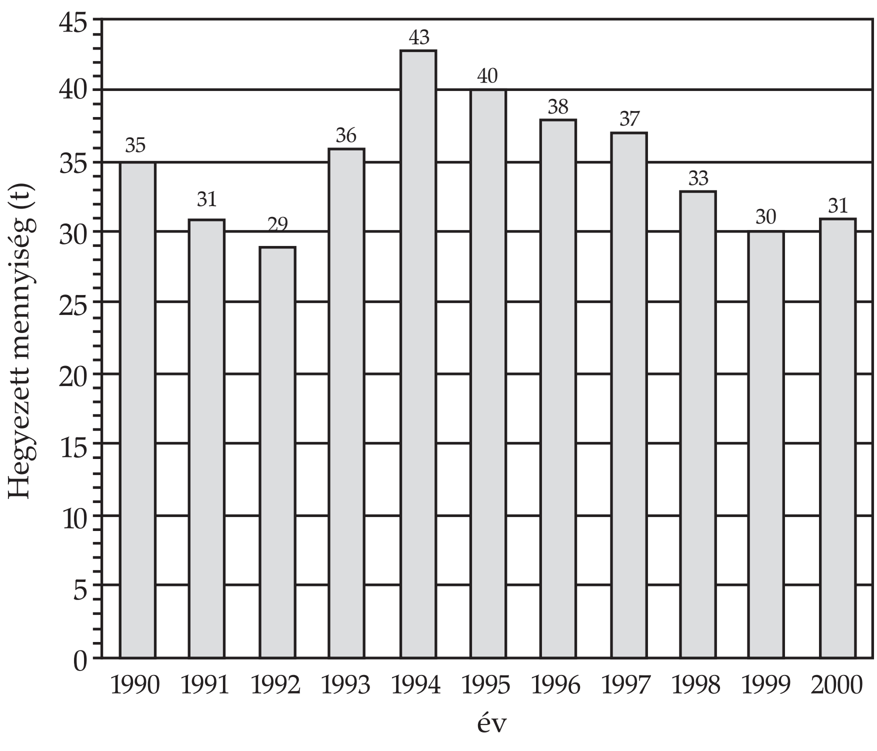
Megoldás: Mindkét esetben a vízszintes tengelyen a tanulókat (nevüket), a függőleges tengelyen a testmagasságokat ábrázoljuk.
Ahhoz, hogy közel azonosnak tűnjenek a testmagasságok, a függőleges tengely minimumpontja a 0 cm, maximumpontja a legmagasabb tanuló magasságánál pár cm-re több legyen. Érdemes a grafikont fekvő helyzetű papírra elkészíteni úgy, hogy a függőleges tengely beosztása minél elnagyoltabb legyen, pl. 20 cm-nek a grafikonon 1 cm felel meg.
Abban az esetben, ha nagyon eltérőnek akarjuk ábrázolni a testmagasságokat, a függőleges tengely minimumpontja a legalacsonyabb tanuló magasságánál pár cm-rel kevesebb legyen, maximumpontja a legmagasabb tanuló magasságánál pár cm-re több legyen. Érdemes a grafikont álló helyzetű papírra elkészíteni úgy, hogy a függőleges tengely beosztása minél részletesebb legyen, pl. 1 cm-nek a grafikonon 1 cm felel meg, vagy ha lehet, akkor még nagyíthatunk is.
Az elkészült grafikonok közül a két legjobbat tegyük ki az eddig elkészült munkák mellé a falra.

5. FELADATLAP – ADATOK LEOLVASÁSA A GRAFIKONRÓL

Első feladat:

Az alábbi grafikon Kukutyinban az egyes években meghegyezett zab mennyiségét mutatja egész tonnára kerekítve. A grafikon alapján válaszolj az alábbi kérdésekre!

A Kukutyinban hegyezett zab mennyisége (t)

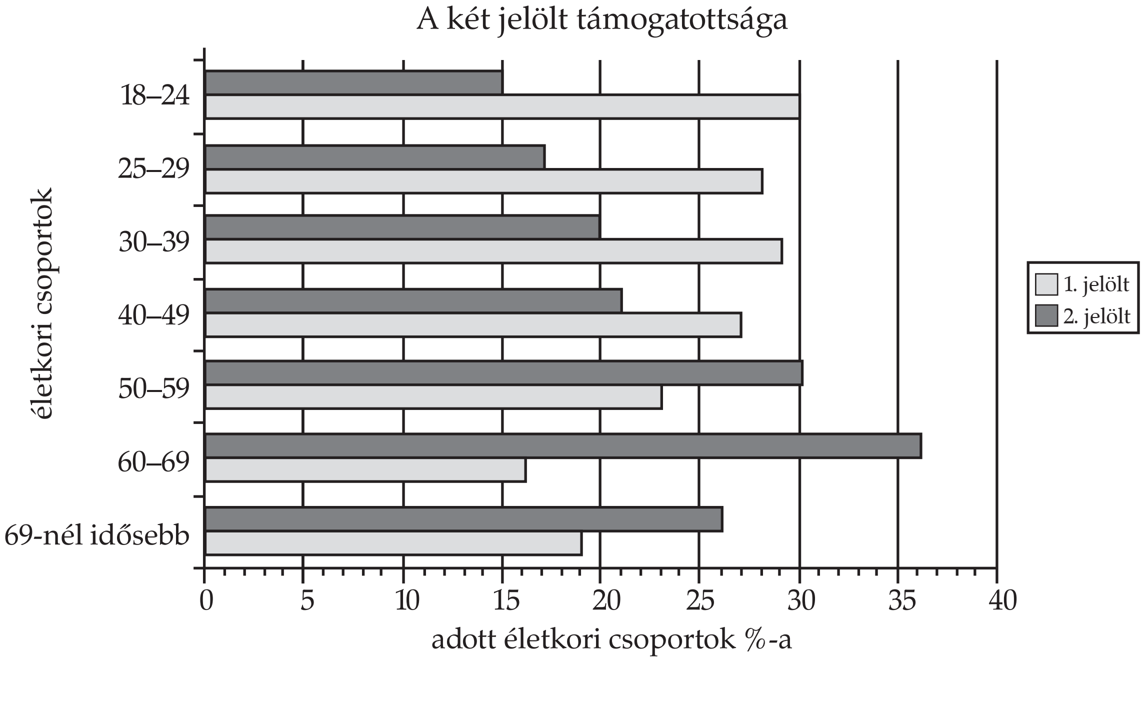


1. Hány év adatai olvashatóak le a diagramról?
2. Melyik évben hegyezték meg a legtöbb, és melyikben a legkevesebb zabot Kukutyinban?
3. Mennyi zabot hegyeztek meg ezekben az években összesen Kukutyinban?
4. Átlagosan mennyi zabot hegyeztek meg Kukutyinban az adott időszakban egy fél évben?
5. Melyik volt az a leghosszabb időszak, amikor folyamatosan nőtt a meghegyezett zab mennyisége? Hány évig tartott ez az időszak?
6. Melyik évben csökkent a legjobban a meghegyezett zab mennyisége az előző évi mennyiséghez képest?
7. Melyik évben változott meg legjobban a meghegyezett zab mennyisége az előző évihez képest? Hány százalékos volt ez a változás?
8. Hány tonnával hegyeztek kevesebb zabot 1999-ben, mint 1998-ban?
9. Hogyan változott az egy év alatt meghegyezett zab mennyisége ebben az időszakban?

Megoldások:
1. 11 év
2. A legtöbbet 1994-ben (43 t), a legkevesebbet 1992-ben (29 t).
3. 383 tonnát
4. Egy év átlaga: 383:11=34,8 tonna, egy fél év átlaga 34,8 : 2 = 17,4 tonna. (Feltételezve, hogy egész évben folyamatosan hegyezik a zabot.)
5. 1992 és 1994 között nőtt a legtovább a meghegyezett zab mennyisége, összesen 3 évig.
6. 1991-ben, és 1998-ban is 4 tonnával csökkent a mennyiség. 1991-ben ez $100-\frac{31}{35}\cdot 100\approx 11{,}43\%$-os csökkenés, 1998-ban $100-\frac{33}{37}\cdot 100\approx 10{,}81\%$-os csökkenés, tehát 1991-ben.
7. 1993-ban és 1994-ben is 7 tonnával nőtt a meghegyezett zab mennyisége, az első esetben 24,14%-os, a második esetben ez 19,44%-os növekedés, tehát 1993-ban, 24,14%-kal nőtt.
8. 3 tonnával.
9. 3 évig csökkent, majd 3 évig nőtt, ezután 5 éven keresztül folyamatosan csökkent, majd az utolsó évben megint nőtt.

6. FELADATLAP – GRAFIKONOK ÉRTŐ OLVASÁSA

1. A Kukutyini Zabhegyezők Társasága elnökválasztást fog tartani. Egy közvélemény-kutatás keretében megkérdezték a tagságot, hogy melyik jelöltre adná a voksát. A két esélyes jelölt támogatottságát szemlélteti az alábbi grafikon. A függőleges tengelyen a korcsoportokat ábrázolták, a vízszintes tengelyen pedig azt, hogy az adott csoport tagjainak hány százaléka szavazna a jelöltek valamelyikére (egész százalékra kerekítve).



Kérdések:

a) Olvassátok le, és foglaljátok táblázatba a diagramon ábrázolt adatokat!

b) Észrevehetitek, hogy a két jelöltet együtt egyik korcsoporton belül sem támogatja a korcsoport összes tagja. Honnan látszik ez? Mi lehet ennek az oka?

c) Mindkét jelölt elégedettséggel szemlélte a diagramot, a saját győzelmét kiolvasva abból. Melyiknek van igaza, ki fogja nyerni közülük az elnökválasztást? Van-e olyan adat, amit ismernünk kellene ahhoz, hogy ezt biztosan meg tudjuk mondani?

d) A következő két táblázat a Kukutyini Zabhegyezők Társaságának korcsoportok szerinti megoszlásának két lehetséges esetét mutatja. Egyikőtök az egyik, másiktok a másik táblázat alapján számolja ki, hogy melyik jelölt nyerne a közvélemény-kutatás alapján! Hasonlítsátok össze az eredményeiteket! Mi az eltérés oka? (Számolás közben a nem egész eredményeket kerekítsétek a megszokott módon.)

Egyik tag:

Korcsoport	Létszám	1. jelöltre szavaz	2. jelöltre szavaz
18–24	52		
25–29	60		
30–39	55		
40–49	60		
50–59	90		
60–69	140		
69-nél idősebb	130		
Összesen:			

Másik tag:

Korcsoport	Létszám	1. jelöltre szavaz	2. jelöltre szavaz
18–24	120		
25–29	135		
30–39	92		
40–49	90		
50–59	61		
60–69	50		
69-nél idősebb	42		
Összesen:			

Megoldás:
a)Az adatokból készített táblázat:

korosztály	1. jelölt	2. jelölt
18-24	15	30
25-29	17	28
30-39	20	29
40-49	21	27
50-59	30	23
60-69	36	16
69-nél idősebb	26	19

b) Onnan látszik, hogy összességében a két jelöltet semelyik korcsoport tagjainak a 100%-a sem támogatja. Ennek oka lehet például az, hogy más jelöltek is indulnak a választáson, vagy nem minden tag vesz részt azon.

c) A grafikon alapján ezt nem lehet megállapítani, ismernünk kell ehhez a körcsoportok létszámát is.

d)

Korcsoport	Létszám	1. jelöltre szavaz	2. jelöltre szavaz
18-24	52	8	16
25-29	60	10	17
30-39	55	11	16
40-49	60	13	16
50-59	90	27	21
60-69	140	50	22
69-nél idősebb	130	34	25
Összesen:		153	133

Ebben az esetben az első jelölt győzne.

Másik tag:

Korcsoport	Létszám	1. jelöltre szavaz	2. jelöltre szavaz
18-24	120	18	36
25-29	135	23	38
30-39	92	18	27
40-49	90	19	24
50-59	61	18	14
60-69	50	18	8
69-nél idősebb	42	11	8
Összesen:		125	155

Ebben az esetben a második jelölt győzne.
A különbség oka, hogy az első jelölt támogatottsága az idősebbek körében nagyobb, a második jelölt támogatottsága pedig a fiatalabbak körében, így ha az idősebbek vannak többen, akkor az első jelölt az esélyesebb, ha a fiatalok vannak többen, akkor a második jelölt.
2. Hegyes Henrik zabhegyező-tanonc feljegyezte, hogy az év első öt hónapjában hány kilogramm zabot hegyezett meg havonta. Ezt tartalmazza az alábbi táblázat:

Hónap	Mennyiség (kg)
január	4
február	6
március	9
április	11
május	12

Ő is és mestere, Zabos Zalán is készítettek egy-egy oszlopdiagramot ezen adatok alapján.
a) A páros egyik tagja Hegyező Henrik, a másik tagja Zabos Zalán féle diagramot készítse el milliméterpapírra, és ennek alapján válaszoljatok a kérdésekre. Utána egyeztessétek az eredményeiteket!

Hegyező a következő diagramot készítette:
A vízszintes tengely hossza 5 cm, egy hónapnak 1 cm felel meg. Az oszlopok szélessége 6 mm.
A függőleges tengely hossza 24 cm, egy kg-nak 2 cm felel meg.

Zabos a következő diagramot készítette:
A vízszintes tengely hossza 15 cm, egy hónapnak 3 cm felel meg. Az oszlopok szélessége 2,6 cm.
A függőleges tengely hossza 6 cm, 1 cm felel meg 2 kg-nak.

Mindketten behúztak egy vonalat is a diagramba (az első és az utolsó oszlop tetejének a középpontját kötötték össze), mely azt mutatja, hogyan növekedett a Hegyező által kihegyezett zabmennyiség.

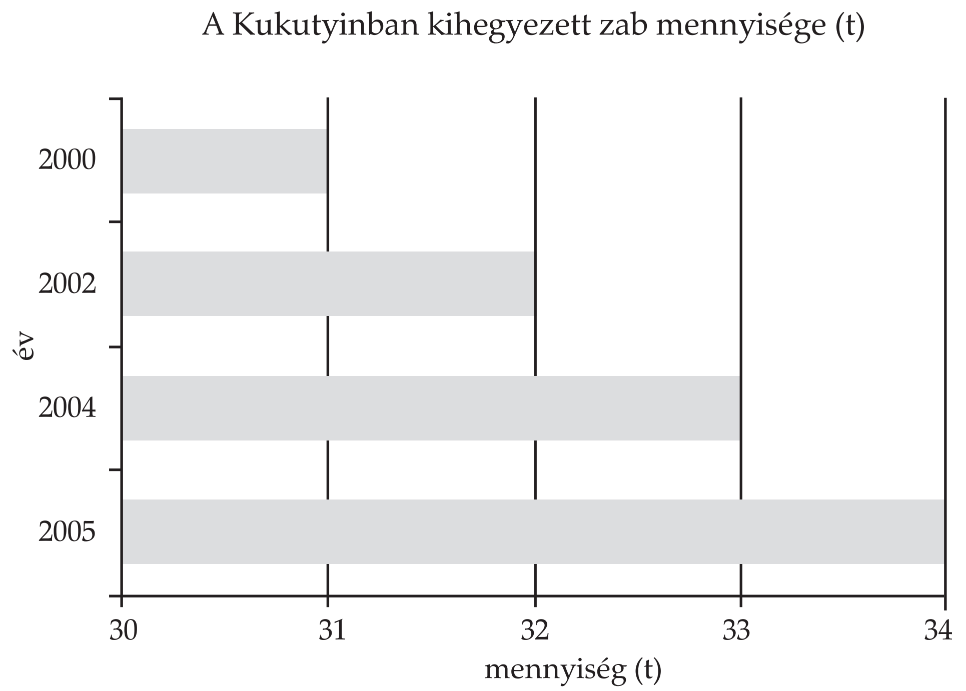
Melyikük mit mondhatott, hogyan változott a hegyező által kihegyezett mennyiség?

b) Számoljátok ki, hogy az 5 hónap alatt hányszorosára és hány százalékkal változott a Hegyező által kihegyezett mennyiség! Melyiküknek van igaza?

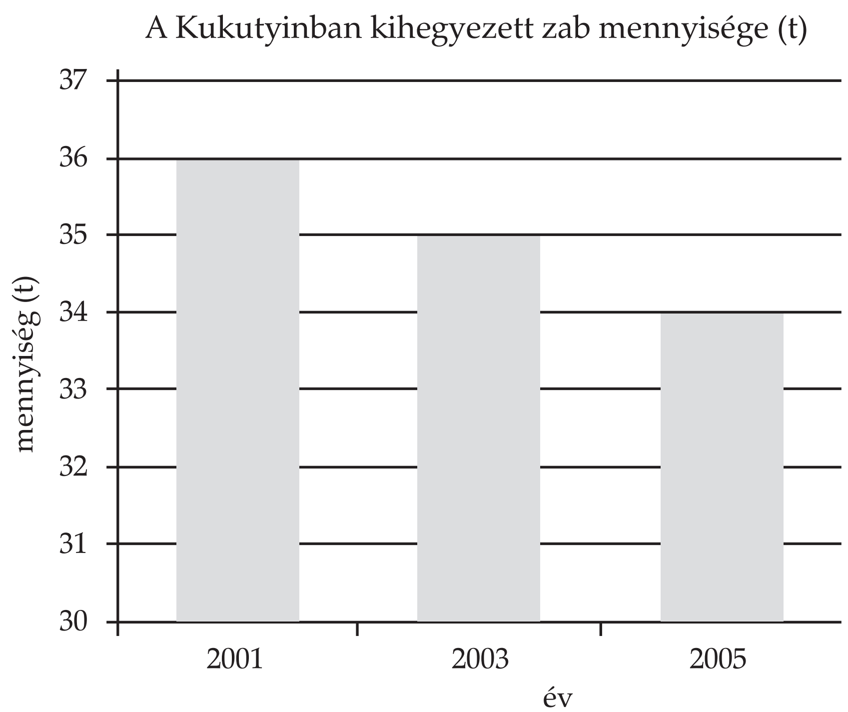
Megoldások:
a) Az első grafikon komoly növekedést mutat, a behúzott egyenes meredeksége 4, Hegyező avval dicsekedett, hogy egyre jobban megy neki a zabhegyezés.
A második esetben is növekedést látunk, de a meredeksége a megrajzolt egyenesnek $\frac{1}{3}$, lassú növekedést látunk, a mester szerint Hegyezőnek van még mit tanulnia.
b) Hegyező teljesítménye a háromszorosára, vagyis 200%-kal nőtt, ezért az első grafikon ad helyesebb képet (bár ebben az esetben is arányosabbak lehetnének a tengelyek). Akkor lenne jó a grafikon, ha a kapott egyenes meredeksége 3 lenne.

3. Feljegyezték azt is, hogy az utóbbi években hogyan alakult a Kukutyinban meghegyezett zab mennyisége. Ezt két diagramon is ábrázolták. A páros egyik tagja az első, a másik tagja a második diagramot vizsgálja meg, és ennek alapján válaszoljon a kérdésekre.

Az egyik tag diagramja:



A másik tag diagramja:



Egyéni kérdések:
a) Készíts táblázatot a diagram alapján!
b) Hogyan jellemeznéd a kihegyezett zab mennyiségének változását ebben az időszakban?

Közös kérdések:

c) Hasonlítsátok össze az eredményeiteket! Mi okozhatja az eltérést?
d) Készítsetek olyan táblázatot, amelyik mindkettőtök adatait tartalmazza!
e) Készítsetek olyan diagramot, amelyikből leolvasható, hogyan változott a kihegyezett zab mennyisége ebben az időszakban!

Megoldások:
a) Első tag:

Év	Hegyezett mennyiség (t)
2000	31
2002	32
2004	33
2005	34

Második tag:

Év	Hegyezett mennyiség (t)
2001	36
2003	35
2005	34

b) Az első tag szerint a hegyezett mennyiség folyamatosan (egyenletesen) nőtt. A második tag szerint a hegyezett mennyiség folyamatosan (egyenletesen) csökkent.
c) Az eltérést az okozza, hogy nem a teljes adatsor, annak csak egy részét ábrázolták az egyes diagramokon. ezen részadatsorok teljesen más képet mutatnak.
d) A közös táblázat:

Év	Hegyezett mennyiség (t)
2000	31
2001	36
2002	32
2003	35
2004	33
2005	34

e) A közös diagram:

A Kukutyinban kihegyezett zab mennyisége (t)