MATEMATIKA „C”
9. évfolyam

6. modul
GONDOLKODOM, TEHÁT VAGYOK

Készítette: Kovács Károlyné

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A logikus gondolkozás, a logikai képességek és a gondolkozási módszerek eszköztárának fejlesztése.
Időkeret	2 foglalkozás
Ajánlott korosztály	14–15 évesek (9. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: tájékozódás a hétköznapi életben, a kijelentések értelmezése. Ajánlott megelőző tevékenységek: logikai alapfogalmak ismertetése.
A képességfejlesztés fókuszai	Gondolkodási képességek: induktív és deduktív következtetés, érvelés a gondolkodási sebesség fejlesztése Kommunikációs képességek: szövegértés, szövegértelmezés, nyelvi fejlettség

AJÁNLÁS

Lépten-nyomon találkozunk a logikával a hétköznapi életben, még ha ez nem is tudatosul bennünk. Sokszor teszünk kijelentéseket, fogalmazunk meg állításokat, vonunk le következtetéseket. Sok logikai feladvánnyal találkozik, aki ezeket szereti. A televíziós vetélkedők is igen kedveltek, ahol sokszor a játékosok logikus következtetések segítségével jutnak el a feladványok megfejtéséhez.
A tanulók kedvelik a logikai feladványokat, bár ezek a tanórán ritkán, vagy egyáltalán nem kerülnek elő, így indokolt, hogy ez a témakör is szerepeljen a kötetlen, tanórán kívüli foglalkozások matematikatartalmai között.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Az igaz-hamis ország			
1.	Logikai feladványok **Munkaforma:** egyéni, majd párban, végül frontális	Induktív és deduktív következtetés; érvelés, bizonyítás; szövegértés, szövegértelmezés	1. feladatlap
2.	Emlékezetfejlesztő feladatok, logikai kijelentés fogalma **Munkaforma:** csoportban	Logikus gondolkozás, emlékezőképesség	A 4 db képből annyi, hogy minden csoportnak jusson egy
3.	Újabb logikai feladványok gyártása a kijelentések tagadásával **Munkaforma:** párban, majd frontális	A kijelentések igaz/hamis voltának megértése, az ellentétes állítás fogalmának megértése, az ellentétes logikai tartalmú állítás megfogalmazásának képessége	2. feladatlap
4.	Logikai feladatok készítése vagy gyűjtése **Munkaforma:** egyéni		
II. Zokni a fiókban			
1.	Kísérlet golyókkal és poharakkal a skatulya-elv megértéséhez **Munkaforma:** csoportban, majd frontális	Induktív következtetés, problémaérzékenység, a legfeljebb és a legalább fogalmak megértése, a skatulya-elv megértése	Csoportonként 4 pohár és 9 golyó (4 piros és 5 kék), 3. feladatlap
2.	A skatulya-elv alkalmazása feladatokban **Munkaforma:** csoportban, majd frontális	Gráfelméleti alapfogalmak megértése (pont, él, kör)	Színes ceruza és papír minden csoportnál

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, mellékletek**
II. Zokni a fiókban			
3.	Válasszunk kedvünkre való feladatokat! **Munkaforma:** csoportban	Gráfelméleti alapfogalmak megértése (pont, él, kör), problémamegoldás, döntőképesség, elemzés, kreativitás	4. feladatlap (minden feladatból egy-egy példány külön papíron, a tanári asztalon)

I. IGAZ-HAMIS ORSZÁG

LOGIKAI FELADVÁNYOK

(Javasolt idő: 20 perc; Eszközök: 1. feladatlap; Munkaforma: egyéni, majd párban, végül frontális)

1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Oldjuk meg a következő logikai feladatokat, melyek közül kettő a híres detektív, Sherlock Holmes egyik ügye, kettő pedig Lewis Caroll: *Alice csodaországban* című művének főszereplőjével, Alice-zal esett meg.

Kiemelt készségek, képességek

Induktív és deduktív következtetés; érvelés, bizonyítás; szövegértés, szövegértelmezés

1. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy mind a négy feladatot olvassák el, és gondolkozzanak mindegyiken egy kicsit! Ezután hagyjuk őket egy kicsit foglalkozni a problémákkal, majd megbeszélhetik azokat a szomszédjukkal! Ha már nagyjából minden párnak van legalább két feladatra megoldása, akkor kezdjük el a megoldások megbeszélését! Hagyjuk, hogy az egyes megoldásokat egy-egy tanuló ismertesse! Ügyeljünk arra, hogy a gondolatmenetét végigmondhassa, ne engedjük, hogy más közbeszóljon! Ha a gondolatmenet hibás, akkor kérjük meg a tanulókat, hogy próbálják meg azt kijavítani, keressék meg a hibás elemet benne!

EMLÉKEZETFEJLESZTŐ FELADATOK, LOGIKAI KIJELENTÉS FOGALMA

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: a 4 db képből annyi, hogy minden csoportnak jusson egy; Mnukaforma: 4 fős csoportban)

1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Játszunk memóriajátékot!

Minden csoport kap egy képet, ezekről 10 kijelentést kell megfogalmazni. Ezeket írják le egy papírra. A kijelentések között 5 legyen olyan, ami igaz, és 5 olyan, ami nem igaz, de tetszőleges sorrendben! Egy másik papírra írják fel, hogy melyik kijelenés igaz a képre vonatkozóan, és melyik nem. A hamis kijelentéseknek írják le a tagadását is. Ezután a csoportok cseréljék ki egymás között a képeket és a kijelentéseket tartalmazó papírokat, majd minden csapat 1 percig nézheti azt a képet, amit másodjára kapott, végül ismét fejjel lefelé fordítják őket. Ezután a papíron lévő kijelentések közül válogassák ki azokat, melyek igazak voltak a képre vonatkozóan, a hamis kijelentéseknek pedig írják le a tagadását. Az a csapat nyer, amelyik a legtöbb helyes választ adja.

Kiemelt készségek, képességek

Logikus gondolkozás, emlékezőképesség

1. Foglalkozás – 2. lépés/2.

A tanár válasszon ki 4 olyan képet, amelyről könnyű állításokat megfogalmazni, fénymásolja le annyi példányban, hogy minden csoportnak jusson mindegyikből!
A tanár segít a csoportoknak a kijelentések megfogalmazásában, ha ez szükséges. Ezután ellenőrizzen le egy-két leírt mondatot, hogy azok valóban kijelentések-e, nem értették-e félre a tanulók a feladatot. A cserénél ügyeljünk arra, hogy a képeket ne láthassa a másik csoport egyetlen tagja sem. Célszerű azokat lefelé fordítva kicserélni, majd egyszerre megfordítani. Ha a csapatok kiválogatták az igaz kijelentéseket, és leírták a hamisak tagadását, akkor megkapják a másik csapattól a megoldást, és ez alapján ellenőrzik munkájukat.

ÚJABB LOGIKAI FELADVÁNYOK GYÁRTÁSA A KIJELENTÉSEK TAGADÁSÁVAL

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 2. feladatlap; Munkaforma: párban, majd frontális

1. Foglalkozás – 3. lépés/1.

Minden kijelentés esetében megfogalmazhatunk olyan kijelentés(eket), melyek alig térnek el az eredeti kijelentéstől, de a logikai értékük ellentétes. Egy példa: Az első feladatban így is fogalmazhatott volna a gyanúsított: „Nem tudom, hogy ki lopta el a gyémántot." Ebben az esetben a kijelentés tagadását fogalmazzuk meg!
Fogalmazza meg mindenki a feladványokban a megfelelő kijelentések tagadását, majd oldja meg így is azokat!

Kiemelt készségek, képességek

A kijelentések igaz/hamis voltának megértése, az ellentétes állítás fogalmának megértése, az ellentétes logikai tartalmú állítás megfogalmazásának képessége.

1. Foglalkozás – 3. lépés/2.

Először minden tanuló írja le a saját lapjára a pontozott vonalra a kijelentések tagadását. Ezt beszéljék meg közösen, hogy mindenki a jó megoldás alapján gondolkozhasson el az új feladványokon! A tanulók magukban foglalkoznak egy kicsit a problémákkal, majd megbeszélhetik azokat a párjukkal. Ha már nagyjából minden párnak van legalább két feladatra megoldása, akkor kezdjük el a megoldások megbeszélését! Hagyjuk, hogy az egyes megoldásokat egy-egy tanuló ismertesse! Ügyeljünk arra, hogy a gondolatmenetét végigmondhassa, ne engedjük, hogy más közbeszóljon! Ha a gondolatmenet hibás, akkor kérjük meg a tanulókat, hogy próbálják meg azt kijavítani, keressék meg a hibás elemet benne!

LOGIKAI FELADATOK KÉSZÍTÉSE VAGY GYŰJTÉSE

Ha tetszettek a feladatok, akkor próbáljanak a tanulók maguk is ilyen feladatokat gyártani vagy keresni a következő órára! Javasolhatjuk nekik többek között Raymond M. Smullyan könyveit, pl.: *Mi a címe ennek a könyvnek* (TYPOTEX Elektronikus Kiadó, Budapest, 1996); *Alice rejtvényországban* (Typotex Kiadó, 2001). A feladatokat külön-külön papírra írják le úgy, hogy az egyik oldalon a feladat szövege, a másikon a megoldása legyen. Ezeket a következő órán a megoldásuk után ki lehet ragasztani a falra (úgy, hogy a megoldás ne, csak a feladat látszódjon), hogy később is megtekinthetőek, esetleg megoldhatóak legyenek.

II. ZOKNI A FIÓKBAN

Ráhangolódás/1.

(Munkaforma: párban, csoportban, majd együtt)
Oldjuk meg az otthon elkészített vagy gyűjtött logikai feladatokat.
Kiemelt készségek, képességek
Induktív és deduktív következtetés; érvelés, bizonyítás; szövegértés, szövegértelmezés

Ráhangolódás/2.

Ha elég sok feladatot hoztak a tanulók, akkor párokban dolgozzanak, ha keveset, akkor nagyobb csoportokban, esetleg az egész csoport közösen.
Ha nagyon sok feladatot hoztak a tanulók, akkor minden pár kapjon egy feladatot, lehetőleg ne olyat, amelyiket a páros egyik tagja hozott! A megoldás után a kész feladatokat rakjuk ki a falra (például parafatáblára rajzszöggel) úgy, hogy a megoldást is meg lehessen nézni!

KÍSÉRLET GOLYÓKKAL ÉS POHARAKKAL A SKATULYA-ELV MEGÉRTÉSÉHEZ

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: csoportonként 4 pohár, és 9 golyó (4 piros és 5 kék), 3. feladatlap; Munkaforma: 3-4 fős csoportban, majd frontális)

2. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Végezzétek el a feladatlapon található tevékenységeket! Minden esetben írjátok le, hogy az egyes poharakba hány darab és milyen színű golyókat tettetek. Ha találtok olyan tevékenységet, amit nem tudtok végrehajtani, akkor fogalmazzátok meg írásban, hogy miért nem sikerült!
A mellékletben megtalálható a megoldás.
Kiemelt készségek, képességek
Induktív következtetés, problémaérzékenység, a legfeljebb és a legalább fogalmak megértése, a skatulya-elv megértése

2. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A tanulók 3–4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár nem szól bele a munkába, csak arra ügyel, hogy a tanulók ne játsszák el a feladatot. Ha minden csoport készen van a feladatokkal, akkor a tanár olvastassa fel valamelyik csoporttal, hogy hogyan végezték el az adott tevékenységet, vagy miért nem lehetett azt elvégezni. Ha nem tudja valaki pontosan megfogalmazni, hogy valamely tevékenységet miért nem lehet elvégezni, akkor a tanár kérje meg valamelyik másik csoportba tartozó tanulót, hogy próbálja meg a saját csoportja által leírtak alapján pontosítani azt! Végül az egész csoport fogalmazza meg pontosan, hogy miért lehet vagy nem lehet az adott tevékenységet elvégezni!

A SKATULYA-ELV ALKALMAZÁSA FELADATOKBAN

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: csoportonként 4 pohár, és 9 golyó (4 piros és 5 kék), 3. feladatlap; Munkaforma: 3-4 fős csoportban, majd frontális)

2. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Nyilvánvalónak tekinthetjük, hogy bármely két ember között az ismeretség kölcsönös, tehát ha az egyik ismeri a másikat, akkor az a másik is ismeri az elsőt. Mutassuk meg, hogy ekkor egy hatfős társaságban biztosan található 3 olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást.

Kiemelt készségek, képességek

Gráfelméleti alapfogalmak megértése (pont, él, kör)

2. Foglalkozás – 2. lépés/2.

A tanulók most is 3-4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár tegyen javaslatot arra, hogy az embereket egy hatpontú gráf (ajánlott a hatszögforma) ábrázolja, az ismerettséget a pontok között behúzott egyik színű vonal (él), a „nem ismertséget" a másik színű vonal mutassa! A tanulók próbáljanak minél több esetet felrajzolni, és a megfelelő formát (egyszínű háromszöget) keresni! Ez után javaslatot tehet a tanár arra, hogy az egyik embertől indulva próbáljanak ilyen háromszöget keresni.

2. Foglalkozás – 2. lépés/3.

Tegyük fel, hogy az emberek között most háromféle kapcsolat lehet, barátok, ismerősök vagy ismeretlenek lehetnek egymás számára, és ezek a viszonyok ismét kölcsönösek. Mutassuk meg, hogy ekkor egy 17 fős társaságban biztosan található 3 olyan ember, akik kölcsönösen ugyanolyan viszonyban vannak egymással.

(A mellékleteben megtalálható a megoldás.)

Kiemelt készségek, képességek

Gráfelméleti alapfogalmak megértése (pont, él, kör)

2. Foglalkozás – 2. lépés/4.

A tanulók most is 3-4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár most is tehet javaslatot arra, hogy az embereket egy 17 pontú gráf ábrázolja, az ismerettséget a pontok között behúzott egyik színű vonal (él), a „nem ismertséget" a másik színű vonal mutassa, a barátságot pedig egy harmadik szín. Most ne biztassuk a tanulókat arra, hogy próbáljanak minél több esetet felrajzolni, mert nagyon bonyolult lesz az ábra! Inkább ösztönözzük a társaságot arra, hogy az előző gondolatmenetet próbálják meg most is alkalmazni!

VÁLASSZUNK KEDVÜNKRE VALÓ FELADATOKAT!

(Javasolt idő: 20 perc; Eszközök: 4. feladatlap, minden feladatból egy-egy példány külön papíron, a tanári asztalon; Munkaforma: 3-4 fős csoportban)

2. Foglalkozás – 3. lépés/1.

A 4. feladatlapon dolgozunk tovább. Mindenki olvassa el a feladatokat, majd próbáljatok meg minél többet megoldani közülük! A megoldás sorrendje tetszőleges.

Kiemelt készségek, képességek

Gráfelméleti alapfogalmak megértése (pont, él, kör), problémamegoldás, döntőképesség, elemzés, kreativitás

2. Foglalkozás – 3. lépés/2.

A tanár figyelemmel kíséri a csoportok munkáját. Biztatja, segíti őket. A feladatsorban lévő problémák különböző nehézségűek. Minden csoportot külön-külön kell eljuttatni a választott probléma megoldásáig. Nem célszerű frontálisan megbeszélni a feladatok megoldását! Ha több csoportban is felmerül, hogy valamelyik feladat nehéz, és nem tudják megoldani, akkor az e feladatokat megoldó csoport tagjait biztassa a tanár arra, hogy a tanári asztalon lévő papírok közül keressék ki a feladatot, a hátuljára írják le a megoldást, és ezt is ki lehet helyezni a logikai feladatok mellé a falra.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

I. IGAZ-HAMIS ORSZÁG

1. FELADATLAP

1. feladat:
Sherlock Holmest, a híres detektívet többször is felkérte a Scotland Yard egyik detektíve, hogy segítsen neki megoldani egy-egy rejtélyes bűnesetet. Holmes mindig örömmel fogadta az ilyen felkéréseket, és meg is oldotta a kilátástalannak látszó ügyet.
Történt egyszer, hogy egy gyémántlopási ügyben a gyanúsított, aki már többször került a rendőrség látókörébe, azt állította, hogy „Tudom, ki lopta el a gyémántot!", de nem volt hajlandó többet elárulni. Tudták erről az emberről, hogy ha bűnös, akkor sosem mond igazat. Mikor Holmes meghallotta ezt a felügyelőtől, azonnal kijelentette, hogy nem ez az ember lopta el a gyémántot. Honnan tudta ezt Holmes?

2. feladat:
Nem sokkal később ugyanebben az ügyben két gyanúsított került a rendőrség látókörébe, Simlis Bill és Nagyszájú Jack. Megbízható szemtanúk állítása alapján biztosak voltak a rendőrök abban, hogy az egyikük a tolvaj, a másik pedig ártatlan. A következőket vallották:
Simlis: Nem a Nagyszájú lopta el a gyémántot.
Nagyszájú: Simlis lopta el a gyémántot.
Ez a két ember is ismert volt a rendőrség előtt, így tudták róluk, ha valamelyiküknek benne van a keze az ügyben, akkor az hazudik.
Holmes ezt az ügyet is rögtön megoldotta, és azt is megmondta a felügyelőnek, hogy a másik gyanúsított hazudott-e a kihallgatáson (hiszen ez a későbbiekben fontos lehet).
Ki lopta el a gyémántot, és igazat, vagy hamisat állított-e a másik gyanúsított?

3. feladat:
Mikor Alice belépett a feledékenység erdejébe, nem felejtett el mindent, csak bizonyos dolgokat. Gyakran elfelejtette a nevét, és nem jutott eszébe, hogy milyen nap van. Sokszor találkozott itt Subiduval, és Subidammal, az ikrekkel, akik annyira egyformák voltak, hogy nem tudta őket senki sem megkülönböztetni egymástól, csak ha felvették a hímzett gallérjukat. Az a furcsa tulajdonságuk volt, hogy Subidu minden hétfőn, kedden és szerdán hazudik, és a hét többi napján igazat mond, Subidam pedig csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, és a hét többi napján igazat mond.
Egy napon Alice együtt találta a testvéreket, akik a következőket mondták:
Egyik: Subidam vagyok.
Másik: Subidu vagyok.
Melyik volt Subidu, és melyik Subidam?

4. feladat:
Egy másik alkalommal, amikor Alice találkozott az ikrekkel, és rajtuk volt a gallér, a következőket mondták:
Subidu: Tegnap hazudós napom volt.
Subidam: Tegnap nekem is hazudós napom volt.
Milyen nap volt?

Az 1. feladatlap megoldása:

1. feladat:
Ha a gyanúsított lopta volna el a gyémántot, akkor tényleg tudná, hogy ki lopta el azt, tehát nem hazudik. Miután tudjuk azt is, hogy ha bűnös, akkor hazudik, tehát nem lehet ő a bűnös, hiszen most nem hazudik.
Megjegyzés: Felhívhatjuk a tanulók figyelmét arra, miért fontos az a kijelentés, hogy a rendőrség már ismerte az elkövetőt, ugyanis ebből a kijelentéstől válik hihetővé az, hogy tudják róla, ha bűnös, akkor hazudik.

2. feladat:
Ha Simlis a tolvaj, akkor ő hazudik, tehát Nagyszájú is benne volt a lopásban. Ez azonban nem lehet, mert tudjuk, hogy csak az egyikük van benne, így ő ártatlan, és akkor Nagyszájú a tolvaj, aki valóban hazudik. És Simlis is hazudott ebben az esetben.

3. feladat:
Készítsünk egy táblázatot, melyben bejelöljük, hogy melyikük mely napokon mond igazat, illetve hazudik!

	hétfő	kedd	szerda	csütörtök	péntek	szombat	vasárnap
Subidu	H	H	H	I	I	I	I
Subidam	I	I	I	H	H	H	I

Látható, hogy a hét első hat napján az egyikük hazudik, a másikuk igazat mond, vasárnap pedig mindketten igazat mondanak. Mivel mindketten különböző nevet mondtak, így vagy mindketten igazat mondanak, vagy mindketten hazudnak. Mivel olyan nap nincs, amikor mindketten hazudnak, csak igazat mondhattak. Egy ilyen nap van, a vasárnap, tehát vasárnap volt.

4. feladat:
Subidu ha hazudott, akkor ezt csak hétfőn mondhatta, ha igazat mondott, akkor csak csütörtökön mondhatta. Subidam ha hazudott, akkor ezt csak csütörtökön, ha igazat mondott, akkor csak vasárnap mondhatta. Tehát csütörtök volt.

2. FELADATLAP ÉS MEGOLDÁSA

1. feladat:
Sherlock Holmest, a híres detektívet többször is felkérte a Scotland Yard egyik detektíve, hogy segítsen neki megoldani egy-egy rejtélyes bűnesetet. Holmes mindig örömmel fogadta az ilyen felkéréseket, és meg is oldotta a kilátástalannak látszó ügyet.
Történt egyszer, hogy egy gyémántlopási ügyben a gyanúsított, aki már többször került a rendőrség látókörébe, azt állította, hogy *„Nem tudom, hogy ki lopta el a gyémántot."*, de nem volt hajlandó többet elárulni. Tudták erről az emberről, hogy ha bűnös, akkor sosem mond igazat.

Ebben az esetben nem dönthető el, hogy a gyanúsított bűnös-e, vagy ártatlan, Holmes így valószínűleg azt mondhatta a felügyelőnek: „Ezek alapján még nem tudom megoldani az ügyet, további adatokra van szükségem."

2. feladat:
Nem sokkal később ugyanebben az ügyben két gyanúsított került a rendőrség látókörébe, Simlis Bill és Nagyszájú Jack. Megbízható szemtanúk állítása alapján biztosak voltak a rendőrök abban, hogy az egyikük a tolvaj, a másik pedig ártatlan. A következőket vallották:
– Simlis: *A Nagyszájú lopta el a gyémántot.*
– Nagyszájú: *Nem a Simlis lopta el a gyémántot.*
Ez a két ember is ismert volt a rendőrség előtt, így tudták róluk, ha valamelyiküknek benne van a keze az ügyben, akkor az hazudik.
Holmes ezt az ügyet is rögtön megoldotta, és azt is megmondta a felügyelőnek, hogy a másik gyanúsított hazudott-e a kihallgatáson (hiszen ez a későbbiekben fontos lehet).
Ki lopta el a gyémántot, és igazat, vagy hamisat állított-e a másik gyanúsított?

Ebben az esetben teljesen szimmetrikus a probléma, így a másik a bűnös, vagyis a Simlis és a Nagyszájú hazudott.

3. feladat:
Mikor Alice belépett a feledékenység erdejébe, nem felejtett el mindent, csak bizonyos dolgokat. Gyakran elfelejtette a nevét, és nem jutott eszébe, hogy milyen nap van. Sokszor találkozott itt Subiduval és Subidammal, az ikrekkel, akik annyira egyformák voltak, hogy nem tudta őket senki sem megkülönböztetni egymástól, csak ha felvették a hímzett gallérjukat. Az a furcsa tulajdonságuk volt, hogy Subidu minden hétfőn, kedden és szerdán hazudik, és a hét többi napján igazat mond, Subidam pedig csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, és a hét többi napján igazat mond.
Egy napon Alice együtt találta a testvéreket, akik a következőket mondták:
Egyik: *Nem Subidam vagyok.* vagy *Subidu vagyok.*
Másik: *Nem Subidu vagyok.* vagy *Subidam vagyok.*
Melyik volt Subidu, és melyik Subidam?

Ez a probléma is szimmetrikus, így az egyik Subidu, a másik Subidam.

4. feladat:
Egy másik alkalommal, amikor Alice találkozott az ikrekkel, és rajtuk volt a gallér, a következőket mondták:
Subidu: *Tegnap nem volt hazudós napom.* vagy *Tegnap igazmondó napom volt.*
Subidam: *Tegnap nekem sem volt hazudós napom.* vagy *Tegnap nekem is igazmondó napom volt.*
Milyen nap volt?

Táblázatot kiegészítve két sorral, és bejelölve azon napokat, amikor ezt mondhatták (a **félkövér x-**szel a hazudós napokat jelöltük, a többi x azokat a napokat jelöli, amikor igazat mondtak):

	hétfő	kedd	szerda	csütörtök	péntek	szombat	vasárnap
Subidu	H	H	H	I	I	I	I
		x	**x**		x	x	x
Subidam	I	I	I	H	H	H	I
	x	x	x		**x**	**x**	

Ebben az esetben nem dönthető el, hogy kedden, szerdán, pénteken vagy szombaton találkozott-e velük Alice.

Javaslat: A harmadik feladat tárgyalása esetén felhívhatjuk a tanulók figyelmét arra, hogy azt is meg tudják ebben az esetben mondani, hogy melyik napon történt ez az eset Alic-zal, evvel is ösztönözhetjük őket arra, hogy maguk is próbáljanak ilyen feladatot gyártani, hiszen egy szituáció esetén több kérdést is feltehetünk!
Az itt bemutatott probléma esetén, ha két kijelentés van a feladatban, akkor kipróbálhatjuk azt is, hogy csak az egyiket tagadjuk, ebben az esetben mi az adott feladat megoldása.

II. ZOKNI A FIÓKBAN

3. FELADATLAP

1. lépés: Kísérlet golyókkal és poharakkal a skatulya-elv megértéséhez

Tevékenységek:
1. Rakjuk be az összes piros golyót úgy a poharakba, hogy minden pohárban legyen golyó, és legalább az egyik pohárba legalább két golyó kerüljön!
2. Rakjuk be az összes kék golyót úgy a poharakba, hogy minden pohárban legyen golyó, és legalább az egyik pohárba legalább két golyó kerüljön!
3. Rakjuk be az összes golyót a poharakba úgy, hogy minden pohárba legfeljebb két golyó kerüljön!
4. Rakjuk be az összes golyót a poharakba úgy, hogy minden pohárba legalább két golyó kerüljön!
5. Rakjuk be az összes golyót a poharakba úgy, hogy minden pohárba legalább két golyó kerüljön, és az egyik pohárba legalább négy golyó kerüljön!
6. Rakjuk be a poharakba az összes golyót úgy, hogy egyik pohárba sem kerülhet két azonos színű golyó!

Megoldás:
Az első tevékenységet nem lehet elvégezni. Ahhoz, hogy mindbe rakjunk egyet, kell 4 golyó, és még egy ötödik, hogy az egyikben kettő legyen. Itt kevesebb a golyó, mint amennyi kellene.
A második tevékenység elvégezhető, mindegyik pohárba rakunk egy kék golyót, majd az ötödiket betesszük valamelyikbe.
A harmadik tevékenységet nem lehet elvégezni, mivel 9 golyónk van, és ha minden pohárba két golyót teszünk, az $4 \cdot 2 = 8$ golyó csak, egy tehát kimarad.
A negyedik tevékenység megoldható, hiszen minden pohárba 2 golyót rakva 8 golyót helyezünk el, a kilencediket pedig valamelyik pohárba kerül, így abban három golyó lesz.
Az ötödik tevékenység nem végezhető el, mert ahhoz legalább 10 golyó kellene, de csak kilenc van.
A hatodik tevékenység nem végezhető el, mert 5 kék golyó van, és (a harmadik esetben láttuk, hogy) lesz egy pohár, amibe 2 kéknek kellene kerülnie.

Javaslat: Ha végeztünk a megbeszéléssel, akkor fogalmaztassuk meg a tapasztalatokat, vagyis magát a skatulya-elvet.

2. lépés: A skatulya-elv alkalmazása feladatokban

II. Nyilvánvalónak tekinthetjük, hogy bármely két ember között az ismeretség kölcsönös, tehát ha az egyik ismeri a másikat, akkor az a másik is ismeri az elsőt. Mutassuk meg, hogy ekkor egy hatfős társaságban biztosan található 3 olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást!
Megoldás: Legyen a hat ember A, B, C, D, E és F. Kiindulva az egyik embertől (A), a maradék öt embert az ő szempontjából két csoportra oszthatjuk, akiket ismer, és akiket nem ismer. Mivel öt emberről van szó, az egyik csoportba legalább három ember tartozik, pl. B, C, és D (itt jelenik meg a feladatban a skatulya-elv). Tegyük fel, hogy őket ismeri az első ember. Ha B, C és D között van kettő, akik ismerik egymást (pl. B és C), akkor ők hárman A-val együtt kölcsönösen ismerik egymást, tehát a keresett hármast alkotják. Ha B, C és D közül viszont egyik sem ismeri a másikat, akkor ők hárman alkotják a keresett hármast.

III. Tegyük fel, hogy az emberek között most háromféle kapcsolat lehet, barátok, ismerősök vagy ismeretlenek lehetnek egymás számára, és ezek a viszonyok ismét kölcsönösek. Mutassuk meg, hogy ekkor egy 17 társaságban biztosan található 3 olyan ember, akik kölcsönösen ugyanolyan viszonyban vannak egymással.

Megoldás: Válasszunk egy embert a 17-ből! A maradék 16 embert 3 csoportba oszthatjuk a szerint, hogy milyen viszonyban vannak az elsőként választott egyénnel. 16 embert három csoportba csak úgy oszthatunk, hogy az egyik csoportba legalább 6 ember tartozik (itt jelenik meg a skatulya-elv először a megoldásban). Legyen például barátság, ami az elsőnek választott embert e hathoz fűzi. Ha van közöttük kettő, akik szintén barátok, akkor megvan a keresett hármas, ha nincsen, akkor találtunk 6 olyan embert, akik között már csak kétféle viszony lehet. Az előző feladatban megmutattuk, hogy ekkor lesz közöttük megfelelő három ember.

Megjegyzés: Az eredeti probléma kétféle irányba általánosítható. Az egyik irány a már látott, vagyis egyre többféle kapcsolatot tételezünk fel az emberek között. A másik irány, ha nagyobb, azonos kapcsolatokkal rendelkező csoportot keresünk. A problémakör absztrakt megfogalmazása: a teljes gráfok éleit kettő (vagy több) színnel színezve, milyen pontszám esetén találunk benne egyszínű teljes részgráfot.
Az emberi kapcsolatok gráfelméleti alapokon való tárgyalása igen kiterjedt mostanában. Egy magyar weboldal (www.iwiw.hu) evvel foglalkozik, ahol a regisztrált felhasználók megjelölhetik az ismerőseiket, és egy gráfon felrajzolhatóak a közöttük lévő kapcsolatok, esetleg több emberen keresztül. Statisztikai és gráfelméleti módszerekkel kimutatható, hogy a világon tetszőleges két ember között átlagosan 6 emberen keresztül kapcsolat teremthető úgy, hogy a lánc tagjai sorban ismerik egymást.

4. FELADATLAP

1. Sok egyforma alakú zokni van a fiókban, ezek fekete vagy fehér színűek. Becsukott szemmel legalább hány darab zoknit kell kivenni a fiókból, hogy biztosan legyen a kivettek között
   a) 1 pár;
   b) 2 pár;
   c) 4 pár;
   d) n pár?

2. 11 pár azonos alakú, de különböző mintájú zokni van egy fiókban, nem összepárosítva. Legalább hány zoknit kell kivenni a fiókból becsukott szemmel ahhoz, hogy legyen a kezünkben 2 pár?
3. 15 darab postagalamb van egy galambdúcban: 7 szürke, 5 barna és 3 fehér.
   a) Legalább hány galamb repülhetett ki a dúcból, ha mindegyik fajtából legalább egy kirepült?
   b) Legalább hány galambnak kell kirepülnie a galambdúcból ahhoz, hogy biztosan legyen a kirepültek között 4 egyforma színű?
4. Mutassuk meg, hogy tizenegy egész szám közül biztosan kiválasztható kettő úgy, hogy a különbségük osztható 10-zel!
5. Mutassuk meg, hogy hat egész szám közül biztosan kiválasztható kettő úgy, hogy a különbségük osztható 5-tel!
6. Mutassuk meg, hogy három négyzetszám közül biztosan kiválasztható kettő úgy, hogy a különbségük osztható 3-mal!
7. Igaz-e, hogy öt egész szám között mindig van három, amelyek összege osztható 3-mal?
8. Legalább hány főből áll az a baráti társaság, melynek van legalább két olyan tagja, akik a hétnek ugyanazon a napján születtek?
9. Igazoljuk, hogy egy 25 fős osztályban van legalább három olyan tanuló, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat!

10. Egy szabályos (egyenlő oldalú) háromszög alakú céltábla oldal 90 cm.
A céltáblát10 lövés eltalálta. Igazoljuk, hogy volt két olyan találat, melyek 31 cm-nél közelebb vannak egymáshoz!

11. Egy szabályos (egyenlő oldalú) hatszög alakú céltábla oldal 10 cm. A céltáblát 7 lövés eltalálta. Igazoljuk, hogy volt két olyan találat, melyek 11 cm-nél közelebb vannak egymáshoz!

Megoldások:

1.a: 3 darabot

1.b: 5 darabot

1.c: 9 darabot

1.d: $2 \cdot n+1$ darabot

2.: 13 darabot. Legrosszabb esetben minden párból kihúzzuk az egyik felét, ezután még kettőt kell kivennünk a fiókból.

3.a.: Legrosszabb esetben 7 szürke + 5 barna + 1 fehér = 13 galamb.

3.b.: Legrosszabb esetben 3 szürke + 3 barna + 3 fehér + 1 galamb = 10 galamb.

4.: Két szám különbsége akkor osztható 10-zel, ha ugyan arra a számjegyre végződnek (vagyis megegyezik a 10-es maradékuk). Mivel 11 szám között biztosan van kettő olyan, amelyik ugyan arra a számjegyre végződik, így ezek különbsége osztható lesz 10-zel.

5.: Két szám különbsége akkor osztható 5-tel, ha megegyezik a két szám 5-tel vett osztási maradéka. A számok 5-tel vett osztási maradéka 0, 1, 2, 3 vagy 4 lehet, tehát csak 5 féle szám, így hat szám között biztosan van kettő, melyeknek az 5-tel vett osztási maradéka megegyezik, így e kettő különbsége osztható lesz 5-tel.

6.: Akkor osztható két szám különbsége 3-mal, ha megegyezik a két szám 3-mal vett osztási maradéka. A négyzetszámokat megvizsgálva, azok hárommal vett osztási maradéka csak 0 vagy 1 lehet, így három négyzetszám közül biztosan lesz kettő, melyeknél ez a maradék megegyezik, így ezek különbsége osztható lesz 3-mal.

7.: Igaz. Három szám összege akkor osztható 3-mal, ha a 3-mal vett osztási maradékaik összege is osztható hárommal. A számok 3-as maradéka 0, 1 vagy 2 lehet. Ha az öt szám között van három olyan, amelyik ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, akkor ezek összege biztosan osztható 3-mal. Ha nincs az öt szám között három egyforma maradékot adó, akkor mind a három fajta maradéknak elő kell fordulnia közöttük (itt jelenik meg a skatulya-elv, ugyanis ha csak kétféle maradék jelenne meg, az maximum 4 szám esetén lehetne), így válasszunk egy olyat, ami 0, egy olyat, ami 1 és egy olyat, ami 2 maradékot ad 3-mal osztva, ezek összege pedig osztható 3-mal.

8.: 7+1=8.

9: Ha minden hónapban csak két tanuló ünnepelné a születésnapját, akkor legfeljebb $12 \cdot 2=24$ tanuló járhatna az osztályba.

10.: Osszuk fel a céltáblát 9 darab 30 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög alakú területre az ábrának megfelelően! Biztosan van legalább egy olyan kisebb háromszög alakú terület, amelybe legalább kettő lövés talált. Mivel egy ilyen területen belül nincs két olyan pont, melyek távolsága nagyobb, mint 30 cm, így tényleg lesz legalább 2 olyan találat, melyek távolsága kisebb, mint 31 cm.

11.: Osszuk fel a céltáblát a hatszög leghosszabb átlóival 6 szabályos, 10 cm oldalú, szabályos háromszög alakú területrészre. Mivel hat ilyen rész keletkezett, ezért biztosan lesz egy olyan, amelyikbe kettő lövés talált. Egy ilyen háromszög alakú területrész bármely két pontjának távolsága legfeljebb 10 cm, így biztosan lesz két olyan találat, melyek távolsága kevesebb, mint 11 cm.