

**MATEMATIKA „C”**  
**9. évfolyam**

**12. modul**  
**LINEÁRIS PROGRAMOZÁS**

Készítette: Kovács Károlyné

## MODULLEÍRÁS

<b>A modul célja</b>	A koordináta-geometriai ismeretszerzés előkészítése, a függvény fogalmának elmélyítése. Szövegértés fejlesztése, a szövegben megadott információk rendszerezése, a mennyiségek kapcsolatának algebrai megfogalmazása.
<b>Időkeret</b>	4 foglalkozás
<b>Ajánlott korosztály</b>	14–15 évesek (9. osztály)
<b>Modulkapcsolódási pontok</b>	Tágabb környezetben: gazdasági élet, tanulói környezet Szűkebb környezetben: koordináta-geometria, lineáris függvények, szélsőértéket keresésére épülő problémák megoldása Ajánlott megelőző tevékenységek: tanórán a lineáris egyenletrendszer megoldása, lineáris függvény ábrázolása
<b>A képességfejlesztés fókuszai</b>	Együttműködési készség és képesség szövegértelmezés, szövegértés rendszerezés kreativitás valóságérzet

### AJÁNLÁS

A lineáris programozás nem tantervi tananyag. Azért választottam a tanórán kívüli foglalkozás témájául, mert kiválóan alkalmas a koordinátáskon való tájékozódás, a lineáris függvényábrázolás fejlesztésére. Hasznos segédeszköz lehet gyakorlati jellegű problémák megoldására. Általa nagyon jól fejleszthető a tanulói szövegértés, szövegértelmezés. A szövegben megadott adatok rendszerezése, a mennyiségek közötti összefüggések algebrai megfogalmazása nagymértékben elősegíti más tantárgyak tanulását is.

A tanév legutolsó foglalkozásának megünneplése jól összeköthető a szendvicskészítéses szélsőérték probléma megoldásával. A szendvicsek elkészítése, a nyersanyagárak megbecsülése jó alkalom a realitásérzék fejlesztésére.

## MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
<b>I. Sokszöglapok a koordinátasíkon</b>			
1.	Tájékozódás a koordinátasíkon <b>Munkaforma:</b> frontális	Számolás, gondolkodási sebesség	1. feladatlap
2.	Lineáris egyenlőtlenség-rendszer felírása a megoldáshalmaz ismeretében <b>Munkaforma:</b> egyéni	Kreativitás, eredetiség, probléma-érzékenység, metakogníció	
3.	Lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát szemléltető ponthalmaz önálló megadása, majd ezen a halmazon egy adott lineáris függvény maximumának (minimumának) megkeresése <b>Munkaforma:</b> csoportban	Problémamegoldás, probléma-reprezentáció, számolási képesség	2. feladatlap
<b>II. Szöveggel már nehezebb</b>			
1.	Lineáris programozási problémák megoldása (még nem szöveges) <b>Munkaforma:</b> egyéni	Értelmes memória, problémamegoldás	3. Feladatlap
2.	Szöveges lineáris programozási problémák megoldása <b>Munkaforma:</b> párban	Szövegértés, szövegértelmezés, rendszerezés, analógias gondolkodás	4. feladatlap
3.	Szövegfordítás <b>Munkaforma:</b> egyéni	Szövegértés, szövegértelmezés, rendszerezés, analógias gondolkodás	5. feladatlap

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
<b>III. Készülődés az utolsó foglalkozásra</b>			
1.	Szendvicskészítés megtervezése <b>Munkaforma:</b> egyéni, majd frontális	Szövegértés, szövegértelmezés, becslés, valóságérzet, gondolkodási sebesség, problémamegoldás	
2.	Lineáris programozási feladat tervezése, készítése, megfogalmazása, megoldása <b>Munkaforma:</b> csoportban	Kreativitás, becslés, valóságérzet, metakogníció	
<b>IV. Az utolsó foglalkozás</b>			
1.	Szendvicskészítés, beszélgetés, játék		

# I. SOKSZÖGLAPOK A KOORDINÁTASÍKON

## Ráhangelődés

Kisiskolás korokban bizonyára találkoztatok olyan feladattal, melyben pontokat kellett összekötni megadott sorrendben (pl. az ábrán a pontok mellé egymást követő természetes számokat írtak 1-től indulva, s az egymást követő számokkal megjelölt pontokat kellett összekötni). Így az ábrán egy kiskutya vagy hűsvét előtt egy nyuszi képe rajzolódott ki.

Ezzel a feladattal – egy kicsit összetettebb módon – mi is megpróbálkozunk. A pontok jelölésére mit használjunk? Ha a pontokat egy koordinátasíkon rajzoljuk meg, akkor a koordinátaival, vagyis valamilyen  $(x; y)$  valós számpárral jellemezhetjük a pontokat.

## TÁJÉKOZÓDÁS A KOORDINÁTASÍKON

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 1. feladatlap; Munkaforma: frontális)

### 1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Jelöljétek meg a koordinátasík azon  $(x; y)$  koordinátájú pontjait, amelyek koordinátáira teljesül az  $y - x = 4$  egyenlet! Hogyan jellemeznétek ezt a ponthalmazt? Tekinthesz egy függvény grafikonjának is? Melyik az a függvény?

Most azokat a síkbeli pontokat jelöljétek meg, amelyek koordinátáira az  $y - x < 4$  egyenlőtlenség fennáll!

Ellenőrizzünk! A  $(2; 5)$ ,  $(6; 6)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(100; 104)$  és  $(-1001; -999)$  pontok ott vannak a megjelöltek között? Miért? Hogyan jellemeznéd a keresett pontok halmazát?

Ezen a lapon lévő feladatban olyan pontokat kell a koordinátasíkon megjelölnötök, amelyek  $(x; y)$  koordinátái a lapon megadott 4 egyenlőtlenség mindegyikét ki kell, hogy elégítsék. Nézd meg, hogy mit alkotnak a keresett pontok! (Egy konvex ötszöglapot, egy „házikót”.)

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Számolás, gondolkodási sebesség.

### 1. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A függvény értelmezési tartományát se felejtétek el megadni a tanulók!

## LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZER FELÍRÁSA A MEGOLDÁSHALMAZ ISMERETÉBEN

(Javasolt idő: 15–20 perc; Munkaforma: egyéni)

### 1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Fordítsuk meg a problémakeresés irányát! Egy külön négyzethálós lapon vegyél fel egy derékszögű koordináta-rendszert, majd rajzolj bele egy sokszöglapot (legfeljebb 4 csúcst)! Cseréld ki a lapodat a szomszédodéval!

A feladat: olyan egyenlőtlenségrendszer felírása, amelyet kizárólag a sokszöglap pontjai elégítenek ki! Ha készen vagytok, cseréljétek vissza a lapokat, és ellenőrizzétek egymás munkáját!

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Kreativitás, eredetiség, probléma-érzékenység, metakogníció

**1. Foglalkozás – 2. lépés/2.**

A tanárnak legyen egy ilyen ábrája készen, arra az esetre, ha a tanulók létszáma páratlan.

A tanár folyamatosan figyelje a tanulók munkáját. Várható, hogy a fő probléma az egyenesek egyenleteinek felírása lesz. Figyelje meg a tanár, hogy melyik tanulónak okoz ez gondot, s egyénileg segítse a tanulót! Tanórán az elsőfokú függvény ábrázolásakor tanultak a tanulók módszereket arra, hogy a lineáris függvény grafikonjának (illetve 2 pontjának) ismeretében hogyan adható meg a függvény képlettel is. Amikor már lényegében minden tanuló befejezte a munkát, akkor mondják el a gyerekek, hogyan, milyen módszerrel keresték meg az egyenesek egyenleteit.

## LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZER MEGOLDÁSHALMAZÁT SZEMLÉLTETŐ PONTNALMAZ ÖNÁLLÓ MEGADÁSA, MAJD EZEN A HALMAZON EGY ADOTT LINEÁRIS FÜGGVÉNY MAXIMUMÁNAK (MINIMUMÁNAK) MEGKERESÉSE

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: 2. feladatlap; Munakforma: egyéni)

**1. Foglalkozás – 3. lépés/1.**

Most nemcsak egy ponthalmazt kell megkeresnetek, hanem további, a ponthalmazra vonatkozó kérdésekre is válaszolnotok kell!

A ponthalmaz pontjai közül melyeknek a koordinátái elégítik ki az  $x + y = 0$  egyenletet?

És a b) és a c) kérdésekben lévő egyenletek esetében?

A  $k$  helyére különböző számot írva, mit tapasztalunk? És ha a  $k$  helyére egyre nagyobb számot írunk?

Miért csak az  $x + y = 4$  egyenletű egyenes az egyetlen megfelelő egyenes? Tehát melyik a keresett pont?

Rajzoljatok egy új koordinátarendszert! Az  $x + 2y = k$  egyenletben jelöljön  $k$  olyan számot, amelyre  $-1 \leq k \leq 4$ . Rajzoljatok fel néhányat az egyenesek közül! Milyen meredekségűek az egyenesek? Rajzoljátok fel azt a négyzetlapot, amelynek 3 csúcspontja:  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ! A négyzetlaphoz a négyzet oldalai is hozzátartoznak. Keresd meg a négyzetlap azon pontjait, amelynek koordinátáira az  $x + 2y$  kifejezés a lehető legnagyobb, illetve legkisebb értéket veszi fel!

**Kiemelt készségek, képességek**

Problémamegoldás, probléma-reprezentáció, számolási képesség

**1. Foglalkozás – 3. lépés/2.**

A tanulók önállóan dolgoznak.

A feladatlap utolsó kérdése esetében elképzelhető, hogy lesz olyan kreatív tanuló, aki vonalzó csúsztatásával keresi meg a megfelelő egyenest. Világosan tisztázni kell a tanulókkal, hogy minden  $k$  szám esetén ugyanolyan meredekségű egyenes pontkoordinátái elégítik ki az  $x + y = k$  egyenletet, s  $k$ -t növelve a megfelelő egyenes az  $y$  tengelyt  $k$ -ban, tehát egyre nagyobb számnál metszi, így valóban egy vonalzó csúsztatásával megkereshető az az egyenes, amelynek még éppen van közös pontja a ponthalmazzal, de annál nagyobb  $k$  esetén már nincs.

**1. Foglalkozás – 3. lépés/3.**

Ha a másodiknak felvetett problémára nem jut idő, akkor lehet ez a következő foglalkozás nyitó feladata, vagy a tanár feladhatja otthoni munkára is.

## II. SZÖVEGGEL MÁR NEHEZEBB

### LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI PROBLÉMÁK MEGOLDÁSA

#### (MÉG NEM SZÖVEGES)

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 3. feladatlap; Munkaforma: egyéni)

#### 2. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Bemelegítésül itt egy megoldásra váró probléma.

#### Kiemelt készségek, képességek

Értelmes memória, problémamegoldás

#### 2. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A tanulóknak így már nehezebb a probléma megoldása, hiszen rá kell jönniük, hogy a kérdéses kifejezés értékét célszerű paraméterrel jelölni. Mivel az előkészítő feladatok megkönnyítik a problémát, így várható, hogy a tanulók nagy része önállóan megoldja.

A feladat megoldásának megbeszélése történhet úgy, hogy valamelyik tanuló felrajzolja a táblára a sokszöglapot, s egy másik pedig az azonos meredekségű egyenessereg néhány tagját. Indokoltassa a tanár, hogy miért lesz mindkét esetben pontosan egy megoldása a feladatnak!

### SZÖVEGES LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI PROBLÉMÁK MEGOLDÁSA

(Javasolt idő: 25 perc; Eszközök: 4. feladatlap; Munkaforma: párban)

#### 2. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Nézzük, hol tudjuk alkalmazni a tudományunkat. Válasszatok párt magatoknak! Figyelmesen olvassátok el a szöveget, s gyűjtsétek ki az adatokat!

\*Ha feltesszük, hogy egy hónapban az I. termékből 5 kamionnyit, a II.-ből hármat gyártat a vállalkozó, akkor hány munkásra van szükség összesen? Mennyi lenne ekkor a vállalkozó tiszta nyeresége összesen?

Tegyük fel, hogy havonta  $x$  kamionnyit gyártat az I. termékből, és  $y$ -nyit a II.-ből. Olvassátok el ismét a szöveget, s fordítsátok le a szöveget az algebra nyelvére!\*\*

#### Kiemelt készségek, képességek

Szövegértés, szövegértelmezés, rendszerezés, analógiás gondolkodás

#### 2. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Az adatokat célszerű táblázatba rendezni.

\*A szöveg értelmezését segítő néhány kérdést csak azután tegye fel a tanár, ha már minden tanuló valamilyen módon rögzítette az adatokat.

\*\*Itt ismét hagyja a tanár önállóan dolgozni a gyerekeket. A felírt egyenlőtlenségeket viszont beszéljék meg együtt. Az össznyereség felírása után lehet, hogy javasolják a tanulók a paraméterrel jelölést. A tanár vezesse rá a tanulókat, hogy célszerű a nyereség 20 ezred részével dolgozni, s erre egy újabb betűjelölést bevezetni! Innen ismét önállóan dolgozhatnak a tanulók.  $x$  és  $y$  a feladat szerint csak egész szám lehet. A grafikonokat mégis érdemes egyenesekkel elkészíteni a jobb áttekinthetőség miatt, de a megoldás leolvasásakor ügyelni kell erre is.

Ha a tanulók egy része a többiekénél gyorsabban oldja meg a feladatot, azoknak adja ki a tanár a következő szöveget feldolgozásra.

## **SZÖVEGLEFORDÍTÁS**

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 5. feladatlap; Munkaforma: egyéni)

### **2. Foglalkozás – 3. lépés/1.**

A következő feladaton önállóan dolgozzatok!

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Szövegértés, szövegértelmezés, rendszerezés, analógiás gondolkodás

### **2. Foglalkozás – 3. lépés/2.**

Most már jó lenne, ha minden diák önállóan értelmezné a feladatot, s gyűjtené össze a lényeges információkat, adná meg az egyenlőtlenség-rendszert! Ha nem marad idő a grafikus megoldásra, a tanulók a talán kíváncsiságból is befejezik otthon a feladatot.



## III. KÉSZÜLŐDÉS AZ UTOLSÓ FOGLALKOZÁSRA

### Ráhangelődés

A következő foglalkozás már az utolsó lesz. Jó lenne megünnepelni! Akár játszunk, akár kirándulunk, mindenképpen kellene egy kis harapnivaló. Legegyszerűbb szendvicset készíteni. Ma utánajárunk, hogy mennyi nyersanyagból mennyi szendvics készíthető.

### SZENDVICS KÉSZÍTÉS MEGTERVEZÉSE

(Javasolt idő: 20 perc; Munkaforma: egyéni, majd frontális)

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Tegyük fel, hogy veszünk egy 50 dkg-os margarint, 80 dkg sonkát (s láss csodát, amikor lemérjük, hát 84 dkg!), 40 dkg kovászos uborkát, 60 dkg sajtot. (A kenyeret nem számolom, a végén kiderül, hogy mennyi kell.) Készítsünk kétféle szendvicset:

I. tegyünk rá margarint, sonkát meg sajtot;

II. tegyünk rá margarint, sonkát, meg uborkát.

Az I. fajtát jól megkenjük margarinnal, 2 dkg-ot teszünk a kenyérré, sonkából is 2 dkg-ot, sajtból viszont 3 dkg-ot.

A II. fajtára csak 1 dkg margarint, de 3 dkg sonkát és 2 dkg uborkát rakunk.

Jegyezzétek az adatokat! (*most már 84 dkg sonkát mondjon a tanár!*) Vajon legfeljebb hány szendvicset készíthetünk?

Mire jutottatok? 32 szendvics készíthető maximum, az I.-ből 18, a II.-ből 14 db. Nézzük, melyik nyersanyagból mennyi fogyott el!

Margarin elfogyott, sonkából és sajtból is 6-6 dkg, uborkából pedig 12 dkg maradt.

Ez elég életszerű, a valóságban is mindig a vaj vagy margarin fogy el leghamarabb.

Mit gondolsz, átlag mennyibe kerülhet egy ilyen szendvics nyersanyaga? Számoljuk ki! Mit gondoltok, mennyibe kerül egy fél kilogrammos margarin?

Attól függ, hogy hol, és milyen veszünk, kb. 200 Ft.

És 80 dkg sonka? (kb. 1200 Ft) Tegyük fel, hogy trappista sajtot veszünk, kb. mennyibe kerül 60 dkg? (kb. 600 Ft) Az uborka? (kb. 160 Ft) A kenyeret még nem számoltuk. Mennyibe kerül átlagosan egy szendvics? (kb. 70 Ft)

#### Kiemelt készségek, képességek

Szövegértés, szövegértelmezés, becslés, valóságérzet, gondolkodási sebesség, problémamegoldás.

#### 1. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Önállóan dolgozzanak a tanulók, de hagyja a tanár, ha a részeredményeiket össze akarják hasonlítani!

## LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT TERVEZÉSE, KÉSZÍTÉSE, MEGFOGALMAZÁSA, MEGOLDÁSA

(Javasolt idő: 25 perc; Munkaforma: csoportban)

### 1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Úgy látom, nem mindenki volt elégedett a szendvicsek fajtájával. Alakítsatok ki 3 fős csoportokat, s minden csoport tervezzen meg kétfajta, kedvére való szendvicset! Előre gondoljátok ki, hogy milyen, és mennyi nyersanyagból akarjátok készíteni, s mennyi pénzt szántok a szendvicsekre! Legyen kéznél négyzethálós papír! Lehet, hogy többször is le kell rajzolnotok a grafikonokat!

A végén becsüljétek meg, hogy mennyibe kerülnek átlagosan a szendvicseitek!

Kipróbáljuk a következő foglalkozáson valamelyik szendvics elkészítését? Ha az elsőt választjátok, akkor fejenként 2 db szendvics ára kb 140 Ft, ennyit kellene befizetnetek. Ki vállalja, hogy begyűjti a pénzt? És ki veszi meg a nyersanyagokat? De akkor mindenből annyit vegyél, amennyit mondtunk, s olyan fajtákat, hogy az összegyűjtött pénz elég legyen a vásárláshoz! Kenyeret majd én hozok. A nyersanyagokat ne vágd fel otthon!

Ki fog hozni sajtvagót, kenőkéseket, kiskést, vágódeszkát, tálcát, papírszalvétát?

#### **Kiemelt készségek, képességek**

Kreativitás, becslés, valóságérzet, metakogníció.

### 1. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Nem könnyű feladat, de az eddigi tapasztalatok sokat segíthetnek. A tanár figyelje a csoportok munkáját, de aktívan ne avatkozzon bele.

## IV. AZ UTOLSÓ FOGLALKOZÁS

Ezt a foglalkozást a szendvicsek készítésével lehetne kezdeni. Ha nem jelent túl nagy gondot, vigyen a tanár a foglalkozásra egy pontos (néhány gr hibahatárú) konyhai mérleget, s a gyerekek mérjék le a 2-3 dkg-os adagokat (elég néhányszor lemérni, utána már a gyerekek is jól meg tudják becsülni).

A szendvicsek elfogyasztása közben kezdeményezhetne a tanár egy beszélgetést a gyerekekkel arról, hogy mi volt a véleményük a foglalkozásokról. Melyik foglalkozásra emlékeznek a legszívesebben, és miért? Volt-e olyan foglalkozás, amelyiket unalmasnak tartottak? Milyen ismerősüknek ajánlanák a foglalkozásokon való részvételt?

Kinek nem ajánlanák? Milyen témakörökkel foglalkoznának jövőre szívesen – ha lesznek ilyen foglalkozások? Egyedül, párban vagy csoportban volt jó dolgozni? Foglalkozott-e otthon valaki tovább valamelyik problémával?

A beszélgetés után lehetne javasolni játékot. Mindenképpen olyan játékot, amit közösen, együtt tudnak játszani. Az alábbiakban néhányat javaslok, lehet, hogy valamelyiket nem ismerik. Természetesen a gyerekek javaslatai előnyt élveznek. Próbáljanak ki több játékot is! Játék-ajánló – lásd mellékletben.

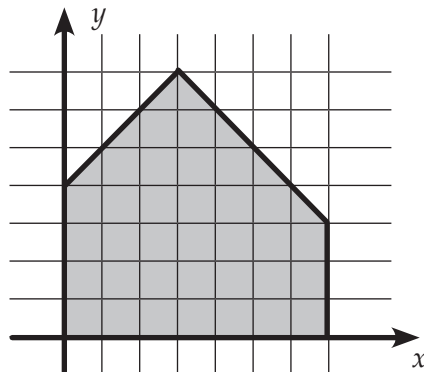
## MELLÉKLET A TANÁROKNAK

### I. SOKSZÖGLAPOK A KOORDINÁTASÍKON

#### 1. FELADATLAP MEGOLDÁSA

Keress meg azokat az  $(x; y)$  koordinátájú pontokat a koordinátasíkon, amelyek valós koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőtlenség-rendszert!

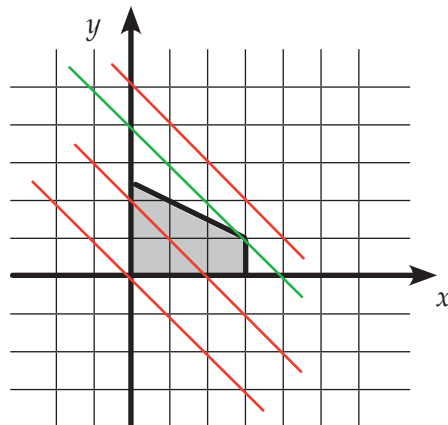
$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \end{cases}$$



#### 2. FELADATLAP MEGOLDÁSA

Keress meg azokat az  $(x; y)$  koordinátájú pontokat a koordinátasíkon, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőtlenség-rendszert!

$$\begin{cases} 2y + x \leq 5 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$



- Van-e a ponthalmaznak olyan pontja, amelynek koordinátái eleget tesznek az  $x + y = 0$  egyenletnek?  
M:  $(0;0)$
- Van-e a ponthalmaznak olyan pontja, amelynek koordinátái eleget tesznek az  $x + y = 2$  egyenletnek?  
M: **Végtelen sok ilyen pont van.**
- Van-e a ponthalmaznak olyan pontja, amelynek koordinátái eleget tesznek az  $x + y = 5$  egyenletnek?  
M: **Nincs ilyen pont.**
- Keress meg a ponthalmaz azon pontját, amelynek  $(x; y)$  koordinátái eleget tesznek az  $x + y = k$  egyenletnek, s a  $k$  szám a lehető legnagyobb!  
M:  $k = 4$

## II. SZÖVEGSEL MÁR NEHEZEBB

### 3. FELADATLAP

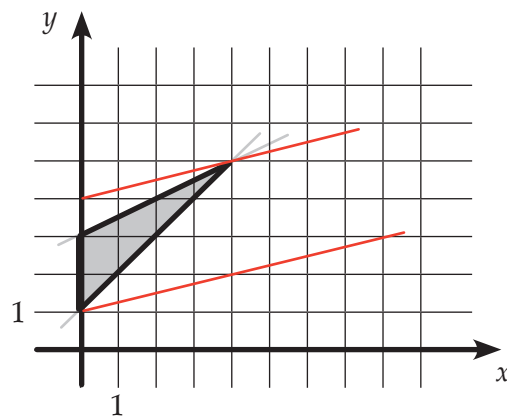
Keressd meg azoknak az  $(x; y)$  koordinátájú pontoknak a halmazát a koordinátasíkon, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőtlenség-rendszert!

$$\begin{cases} x - y \leq -1 \\ y - \frac{1}{2}x \leq 3 \\ 0 \leq x \end{cases}$$

Határozd meg e ponthalmaz azon pontját, amelynek  $(x; y)$  koordinátáira

- a) maximális az  $y - \frac{1}{4}x$  kifejezés értéke! Megoldás:  $(4; 5)$   
b) minimális az  $y - \frac{1}{4}x$  kifejezés értéke! Megoldás:  $(0; 1)$

**Megoldás:**



## 4. FELADATLAP

Egy nagyvállalkozó az üzemében kétféle terméket gyártat. Havonta legalább 5 kamion készül az I. fajtából, és 2 kamionnal a II. fajtából, de legfeljebb 360 munkás áll rendelkezésre. Havonta az üzem össztermelése 15 kamionnál nem több, s minden hónapban egész kamionnyi árut készítenek mindkét fajtából.

Az I. termékből 1 kamion 60 000 Ft tiszta nyereséget eredményez, és ehhez mindössze 10 munkásra van szükség.

A II. termékből 1 kamion előállítására 80 000 Ft tiszta nyereséget hoz, de ehhez 40 munkásra van szükség.

Hogyan szervezze meg a termelést, hogy a nyereség havonta

- félmillió Ft legyen?
- másfélmillió Ft legyen?
- a lehető legnagyobb legyen a nyereség?

### Megoldás:

- Pl. I. fajtából 3 kamiont, II. fajtából 4 kamiont gyártani havonta.
- Nem érhető el 1,5 millió Ft nyereség.
- Ha az I. fajtából  $x$  kamionnyi, a II. fajtából  $y$  kamionnyi készül havonta, akkor:

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ y \geq 2 \\ x + y \leq 15 \\ 10x + 40y \leq 360 \end{cases}$$

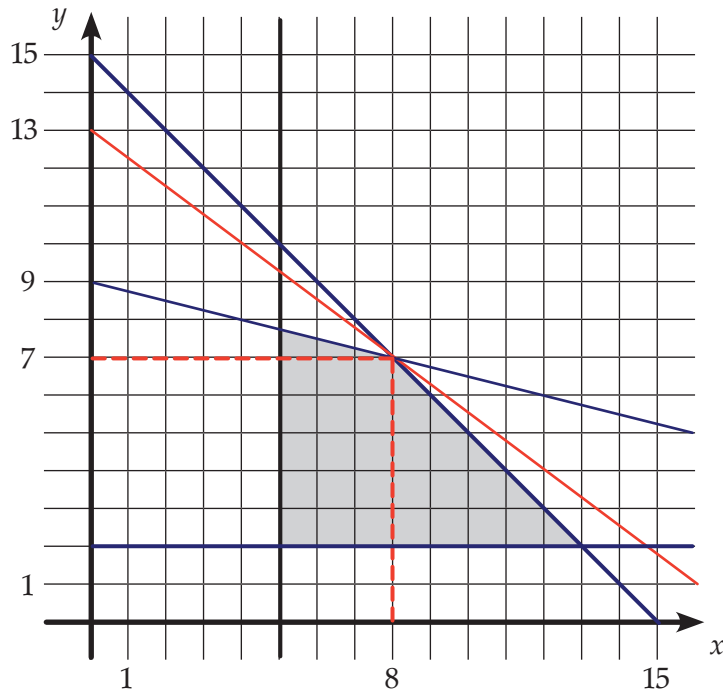
A nyereség:  $n = 60000x + 80000y$

Ha  $\frac{n}{20000} = b$ , akkor  $3x + 4y = b$

Keressük a sík azon  $(x; y)$  koordinátájú pontjait, amelyekre

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ y \geq 2 \\ x + y \leq 15 \\ y \leq 9 - \frac{1}{4}x \end{cases}$$

és  $3x + 4y = b$ , továbbá  $b$  maximális.



*Megoldás tehát:* Az I. fajta termékből 8 kamionnyit, a II. fajtából 7 kamionnyit érdemes termelni, s a maximális nyereség: 1 040 000 Ft.

*Ellenőrzés:* Így a vállalkozónak  $80 + 280 = 360$  munkást kell foglalkoztatnia, és havonta összesen 15 kamionnyit termeltetnie. Ez a feladat feltételeinek eleget tesz.

## 5. FELADATLAP

Egy állatállomány etetésében két takarmányféleség között választhatunk. Az első 10%-ot tartalmaz az A tápanyagból, 10%-ot a C-ből, 20%-ot a D-ből, a második takarmányfajta pedig 10%-ot a B tápanyagból, 20%-ot a C-ből és 10%-ot a D-ből. A tapasztalat azt mutatja, hogy egy-egy állatnak az egyes tápanyagokból naponta rendre legalább 0,4 kg, 0,6 kg, 2 kg és 1,7 kg-ot kell kapnia. Adjunk meg egy olyan takarmányozási tervet, amelynek költsége minimális, ha az első takarmányfajta kg-ja 80 Ft, a másodiké 20 Ft!

**Megoldás:**

	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)
I.	10	-	10	20
II.	-	10	20	10

I. fajta:  $x$  kg

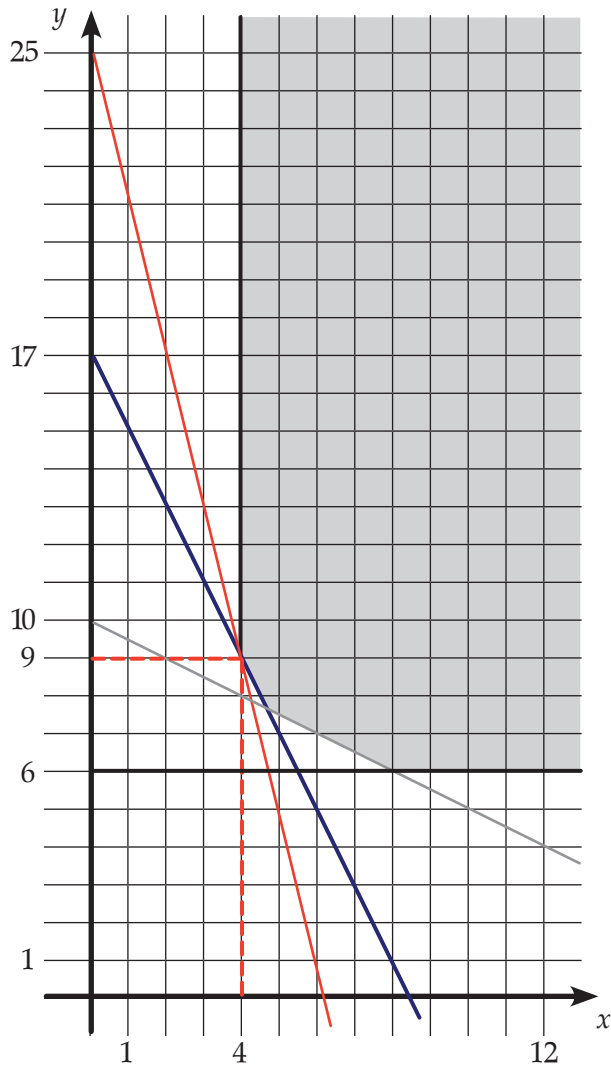
II. fajta:  $y$  kg

$$\begin{cases} 0,1 x \geq 0,4 \\ 0,1 y \geq 0,6 \\ 0,1 x + 0,2 y \geq 2 \\ 0,2 x + 0,1 y \geq 1,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 6 \\ y \geq 10 - \frac{x}{2} \\ y \geq 17 - 2x \end{cases}$$

A  $k$  költség:  $k = 80x + 20y$

Legyen  $\frac{k}{20} = c$ , így  $4x + y = c$ , azaz  $y = c - 4x$





*Megoldás:* az I. fajta takarmányból 4 kg, a II.-ből 9 kg esetén lesz minimális a költség. A takarmány költsége így naponta 500 Ft.

*Ellenőrzés:* Így az A-ból 0,4 kg, B-ből 0,9 kg, C-ből 2,2 kg és D-ből 1,7 kg jut naponta egy-egy állat szervezetében, ami a megadott feltételeket kielégíti.

## IV. AZ UTOLSÓ FOGLALKOZÁS

### JÁTÉKAJÁNLÓ

#### Bozsó (Bumm)

**Játékosok száma:** 3-15

**A játék menete:** A játékosok sorba mondják a számokat (1-től kezdve). De minden olyan szám helyett, amiben szerepel a 7-es számjegy és/vagy osztható 7-tel, 'Bozsó'-t kell mondaniuk. Aki ezt elvéri, az kiesik, és a sorban következő folytatja onnan, ahol tartottak. Az nyer, aki nem téveszt, és ezért a végéig bent marad.

**Így néz ki egy sor:**

1 2 3 4 5 6 Bozsó 8 9 10 11 12 13 Bozsó 15 16 Bozsó ...

Nehezítés lehet, hogy minden Bozsó után megfordul a menet irányja. (Így tehát aki mondta a 6-ot, az fogja mondani a 8-at is.)

#### Csapva vagy csúsztatva:

**Játékosok száma:** 6-16 (páros számok)

**Kellékek:** egy magyar viszonylatban nagyobb pénzérme (10, 20, vagy 50 forintos) és egy asztal;

**A játék menete, szabályai:** A játékosokat két azonos létszámú csapatba osztjuk. A csapatok az asztal hosszánál állnak/térdelnek/gugolnak... csapatonként. A kezdő csapat tagjai az asztal alatt adogatják az érmét úgy, hogy a másik csapat ne lássa kinél van a pénz. Amikor a nem adogató csapat úgy dönt, hogy elég az adogatásból, valamelyik tagja egy 'Stop', vagy 'Állj' bemondással beszünteti a pénz kézről-kézre járását. Ekkor a csapat összes tagja felemeli az ökölbe szorított kezét behajlítva, és megkérdezik: „Csapva vagy csúsztatva?” Attól függően, hogy a másik csapat mit választott, ők egyszerre lecsapják, vagy kicsúsztatják a kezeiket, amelyek közül az egyikben ott lapul a pénz. A játék, hogy miután mindegyik kéz az asztalon tenyérrel lefelé fekszik, a másik csapat ki tudja-e találni hogy melyikben van a pénz. A játékosok számától függően két vagy három lehetőségük van rákérdezni a „gyanús” kezekre. Ilyenkor, a kezet fel kell emelni, megmutatni, hogy ott van-e a pénz.. Ha nincs, és nem ez volt az utolsó rákérdezési lehetőség, akkor a többi kéz közül a csapat még „gyanúsíthat”. Amennyiben megtalálták a pénzt, minden kezdődik előlről, ők dugják el a pénzt, amelyet a másik csapatnak kell „kitalálni”. Amikor egy csapat egy kezet felemeltet, akkor fontos, hogy a döntés egyhangú legyen. Ezért minden játékos csak akkor emelje fel a kezét, ha a másik csapat egységesen kéri. (Ha nincs ott a pénz, mindig lesznek olyanok, akik állítólag kifejezetten tiltakoztak a felemelés ellen és most új tippelési lehetőséget követelnek.)

**Pontozás:** Érdemes a pontokat úgy számolni, hogy a hamar megtalált pénznél több pont járjon, mint a sokadik tippelésre megtaláltért. Bevált a gyakorlat, hogy pl. amikor 3 tipp lehetőséggel játszanak a csapatok, akkor ha elsőre sikerül kitalálniuk 3, ha másodikra 2, ha harmadikra 1 pontot kapnak.

## Értelmező

**Játékosok száma:** 5-17

**Kellékek:** egy értelmészó kéziszótár, minden játékosnak toll és papír

**A játék menete:** A játék vezetője a felcsapott kéziszótárból kiválaszt egy olyan szót, amit a játékosok közül senki sem ismer. Ez nem titkos, hangosan mondja a szót, ha valaki tudja a jelentést, újat választ. Miután sikerül ismeretlen szót kiválasztani, minden játékosnak írnia kell egy definíciót az idegen szóra, mintha az szerepelne a szótárban. Eközben a játékvezető a kéziszótárból kiírja az igazi meghatározást egy lapra. Amikor mindenki végzett az eredetibbnél eredetibb magyarázatok gyártásával a játékvezető összegyűjti a lapokat és sorba felolvassa azokat, természetesen úgy hogy senki sem tudja, melyik kié. A játékosok feladata, hogy kitalálják, melyik az eredeti meghatározás. Ezért a második felolvasás után mindenki jelentkezéssel jelzi, hogy melyik szerinte az igazi. Miután mindenki leadta voksát, a játékvezető elmondja melyik volt a kéziszótárból másolt. Pontot az kap, aki eltalálta az igazi meghatározást, vagy akinek a meghatározására szavaztak. (Ilyenkor persze annyi pontot kap ahányan úgy gondolták hogy az övé az eredeti meghatározás.)

## Kézcsapkodós

**Játékosok száma:** 5-20

**Kellékek:** egy asztal, ami körül mindenki elfér

**A játék menete:** A játékosok egy asztal körül körbeülnek, tenyereiket lefelé fordítva az asztalra helyezik úgy, hogy mindenki a szomszédjainak a feléje eső keze után rakja le egyik-egyik tenyerét. Így mindenkinek a kezei közt két kéz lesz, a szomszédjaié. A játék abból áll, hogy a tenyerek csapása megy körbe-körbe, ha egyet csapunk azzal az addigi irányt folytatjuk, ha kettőt, akkor megfordítjuk az irányt. Az a kéz (!) esik ki, amelyik nem csap amikor kellene, vagy csap amikor nem kellene. Az nyer aki a végén bent marad, de 3 kéznél kevesebbrel nem érdemes játszani, így több nyertes is lehet.

## Mi lenne, ha...?

**Játékosok száma:** 6-15

**Játék menete:** A csoport egyik tagja (pl. Anna) kimegy a teremből. Ezután a bennmaradók kiválasztják a társaság egyik tagját. Mikor Anna visszajön, kérdéseket tesz fel sorban minden kinek. Minden kérdése úgy kezdődik, hogy „Mi lenne, ha...” Minden kérdése az általa még nem ismert Kiválasztottra vonatkozik.

Anna: Mi lenne, ha virág lenne?

Balázs: Szerintem ibolya.

Anna: Mi lenne, ha bútor lenne?

Cili: Kecses toalett asztalka.

Így tovább, amíg Anna rá nem jön, hogy kit választott ki a csoport. Akinél kitalálta az megy ki, a többiek pedig egy új embert választanak. A játék akkor igazán „hasznos”, ha nem csak külső jegyekre, hanem belső tulajdonságokra alapozódnak a válaszok. Éppen ezért elsősorban egymást már jól ismerő társaságnak ajánlott.

## Ölbe ülős

**Játékosok száma:** 5-50 + játékvezető

**Kellékek:** egy csomag francia kártya, székek

**A játék menete:** Körben ülnek a játékosok. Mindenki húz egy lapot és megnézi a színét, majd visszaadja a játékvezetőnek a kártyát. A játékvezető sorba húzza a lapokat a kezében lévő pakliból, és azok színét bemondja/bekiáltja. Amikor valaki a saját színét hallja, (ha tud) egy székkal jobbra ül. Ha ott már ülnek, akkor az ölébe ül. Mindig csak az mehet jobbra, aki felül ül. Ha a játékvezető Jokert húz, az egyes székeken helycsere van, aki legfelül volt az legalulra kerül, aki alatta volt, most az ül az ölébe... Az nyer, aki először körbeér és visszajut a saját helyére, ám a játékot lehet folytatni az utolsó három bent maradóig.

## Híres X.

**Kellékek:** tollak, sok-sok papírfecni, egy sapka ill. valami, amiből húzni lehet, egy stopper

**A játék menete:** A játék hasonlít az Activityhez. Mindenki felírja egy-egy fecnire négy híres ember nevét. (Nem kell kifejezetten ragaszkodni, ahhoz, hogy ember legyen.) Lehet Van Gogh; Mici-mackó; Böbe, a veszprémi állatkert festő majma; Madonna; egy közös ismerős, esetleg jelenlévő ember... A fecniket tegyük egy sapkába és alakítsunk 2-4 csapatot. Három részből áll:

- Az első részben röviden, szóban kell a híres embert körülírni.
- A másodikban mutogatni kell.
- A harmadik részben pedig (amikor már harmadszorra találkozunk ugyanazokkal a nevekkal) csak egyetlen egy kulcsszóval lehet utalni a sapkából kihúzott hírességre.

A csapatoknak 1-1 perc áll rendelkezésükre, hogy fecniket szerezzenek: Az első csapat egyik tagja kiáll csapattársai elé és körülírja azt, amit/akit húzott. Ha egy híres embert kitalál a csapata, az a fecni az övék és a játékos újabb és újabb neveket húzhat, amíg le nem telik az 1 perc. Ezután a második csapat jön majd a harmadik,... amíg az összes fecni el nem fogy. Ha elfogytak a fecnik, felírjuk a pontokat, összeszedjük a papírkákat és jöhet a második forduló (a mutogató). Itt is 1 perce van egy csapatnak minden körben. (Fontos, hogy körönként mindig más szerepeljen a csapatokból, mert különben csak a nagyhangúak jutnak szóhoz, jó ha csapaton belül is van egy sorrend, hogy mindenki ugyanannyiszor magyarázhasson.) Ha másodsorra is elfogytak a papírok, ismét pontösszegzés következik, és jöhet a kulcsszavas forduló. A játékosoknak végig figyelniük kell az elhangzó neveket, mert csak így ismerhetnek rájuk a végén egyetlen kulcsszóból.

További játékok leírása található pl. a [www.fazekas.hu](http://www.fazekas.hu) honlapon a matematika portálon, a kutatómunkák között.