MATEMATIKA „C”
9. évfolyam

10. modul
MI FÜGG MITŐL?

Készítette: Kovács Károlyné

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A függvény fogalmának mélyebb megértése. Szövegben megadott információk rendszerezése, mennyiségek közötti összefüggések felismerése, azok matematika nyelvén való megfogalmazása. A függvény alapfogalmainak biztos ismerete.
Időkeret	5 foglalkozás
Ajánlott korosztály	14–15 évesek (9. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: képzőművészet, biológia, kémia. Szűkebb környezetben: térgeometria. Ajánlott megelőző tevékenységek: aktív, tanulói foglalkoztatást előtérbe helyező tanórai foglalkozások.
A képességfejlesztés fókuszai	Elemzés szövegértés, szövegértelmezés szöveg összefüggések keresése kreativitás probléma-érzékenység problémamegoldás együttműködési képesség érvelés

AJÁNLÁS

Kilencedik osztályban folytatódik a függvény fogalmának kialakítása. A lineáris függvényeken túl egyéb alapfüggvényekkel is megismerkednek a tanulók. Ez a modul a legnagyobb hangsúlyt a függvényalkotásra helyezi. Változatos szituációkban (szövegek, könyvek, albumok stb. alapján) kell a tanulóknak az információk felhasználásával függvényeket megadni. Közben folyamatosan mélyülnek a tanulók függvénytani ismeretei, a függvény alapfogalmai (értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet, függvényérték, leképezés). Az utolsó foglalkozáson lehetősége nyílik a tanulóknak a függvénytani alapismereteik felmérésére is.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, mellékletek**
I. Szövegeljünk!			
	Ráhangolódás **Munkaforma:** egyéni, majd frontális	Szövegértelmezés, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás	
1.	Szöveg alapján függvény alkotása **Munkaforma:** csoportban	Együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás, gondolkodási sebesség, rendszerezés, szövegértés, lényegkiemelő érvelés, kritikai érzék, gondolkodási sebesség	Csoportfeladatok
2.	Torpedójáték – a koordinátasíkon való tájékozódás ismétlése **Munkaforma:** párban	Elemzés, rendszerezés, gondolkodási sebesség, logikai következtetés	
II. Nem mese ez, gyermek			
1.	Képlettel adott függvény értelmezési tartománybeli elemének és a hozzá tartozó függvényértéknek különböző jelentésadása. **Munkaforma**: párban, majd frontális	Kreativitás, számolási képesség, deduktív következtetés, mennyiségi következtetés, elemzés, analógiák felismerése	1. feladatlap
2.	Szituációs játékok, nem üres halmaz leképezése nem üres halmazra **Munkaforma**: frontális	Modellalkotó képesség, gondolkodási sebesség, együttműködési készség, kreativitás	

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
III. Együtt könnyebb			
1.	Függvények alkotása **Munkaforma**: csoportban	Együttműködési készség, kreativitás, eredetiség, problémaérzékenység, rendszerezés	Könyvek a csoportoknak
2.	A függvények ellenőrzése **Munkaforma**: csoportban	Metakogníció	
IV. Inkább rajzoljunk?			
	Ráhangolódás **Munkaforma:** frontális	Bizonyítás igénye	
1.	Függvények ábrázolása derékszögű koordináta-rendszerben **Munkaforma**: egyéni, majd frontális	Számolási képesség, leleményesség, műveletvégzési sebesség, rajzkészség, metakogníció	2. feladatlap
V. Ezt már mind tudom?			
1.	Függvénytani alapismeretek felmérése **Munkaforma:** egyéni	Metakogníció, szövegértés, számolási képesség, problémamegoldás, műveletvégzési sebesség	3. feladatlap 4. feladatlap
2.	A tesztfeladatok megoldásainak megbeszélése, a munka értékelése **Munkaforma**: frontális	Érvelés	

I. SZÖVEGELJÜNK

Ráhangolódás/1.

(Javasolt idő: 25 perc; Munkaforma: egyéni, majd frontális)

Három gyerek felváltva kavicsokat dobál a tóba. Sorban egymás után Anna mindig 1-et, Balázs egyszerre 2-t, Cili pedig 3 kavicsot dob be a vízbe.
Mindenki írjon le egy olyan kérdést, amelyet az eddigi információk alapján meg lehet válaszolni!

Megoldás a mellékletben.

Milyen függvényt lehetne alkotni?

Kiemelt készségek, képességek

Szövegértelmezés, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás.

Ráhangolódás/2.

Fontos, hogy a gyerekek leírják a kérdésüket, így kevésbé befolyásolják egymást. Utána olvastassa fel a tanár a gyerekekkel a kérdéseket, s együtt találják meg a választ! Bizonyára lesz olyan tanuló, aki arra kérdez rá, hogy pl. 10 dobás után hány kavics kerül a tóba. Ilyen kérdésekkel felfedezhetik a tanulók, hogy hogyan függ a tóba került kavicsok száma a dobások számától. Használja a tanár a hozzárendelés „nyilát”: $4 \mapsto 6 + 1$, $5 \mapsto 6 + 3$,

Ezek után próbálják a tanulók megállapítani, hogy *x* dobás esetén hogyan számítható ki, hogy összesen hány kavics került a tóba. Természetesen adódik, hogy a hozzárendelés három képlettel adható meg, és az is, hogy az értelmezési tartomány a természetes számok halmazának részhalmaza (legnagyobb eleme a rendelkezésre álló kavicsok számától függ).

Tegyen fel a tanár a függvénnyel kapcsolatos kérdéseket! Pl. Tegyük fel, hogy dobálás előtt a gyerekek összesen 125 kavicsot számoltak meg a tóparton, akkor a függvény értelmezési tartományának mi lesz a legnagyobb eleme? Mit rendel ez a függvény a 8-hoz? Hol veszi fel a függvény a 114 értéket? Szerepel-e a függvény értékei között a 100?

SZÖVEG ALAPJÁN FÜGGVÉNY ALKOTÁSA

(Javasolt idő: 25 perc; Eszközök: csoportfeladatok a mellékletből; Munkaforma: 3-4 fős csoportok, majd frontális)

1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Alakítsatok ki 3-4 fős csoportokat! Minden csoport kap egy-egy „történetet”, s írjatok először megint olyan kérdéseket, amelyek megválaszolhatók az információk alapján, majd próbáljatok a szöveg alapján függvényt alkotni!

A Csoportfeladatok megoldásai a mellékleteben találhatók.

Kiemelt készségek, képességek

Együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás, gondolkodási sebesség, rendszerezés, szövegértés, lényegkiemelő.

1. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A kapott feladatot, helyes megoldás esetén forgószínpadszerűen adja tovább a csoport a következő csoportnak megoldásra. Ne várja meg a gyorsabban, ügyesebben dolgozó csoport, hogy a másik csoport megoldja a saját feladatát, így persze lehet, hogy lesz olyan csoport, amelyiknek két, vagy több probléma megoldásán is kell dolgoznia párhuzamosan, de talán rájönnek, hogy hogyan lehet hasznosítani a csoportos munkaformát.
A tanár kicsit segítsen az önállótlanabb csoportnak, ne fogalmazzon meg helyettük kérdést, csak próbálja rávezetni őket!

1. Foglalkozás – 1. lépés/3.

Nézzük meg, melyik szöveg alapján milyen függvényt alkottatok!

Az első szövegre milyen kérdéseket tettetek fel?

A szöveg adatai alapján milyen függvényt alkottatok?

Minden egyes probléma megoldását hasonló módon elemezze ki a csoport!

Kiemelt készségek, képességek
Érvelés, kritikai érzék, gondolkodási sebesség.

1. Foglalkozás – 1. lépés/4.

Sok kérdést érdemes megfogalmazni, mielőtt rátérnének egy függvény megadására. A már kész függvénnyel kapcsolatban is több kérdést tehet fel a tanár: pl. Mit rendel a függvény 3-hoz? Hol veszi fel a függvény a 145 értéket? Mi a függvény legnagyobb értéke? Az értelmezési tartomány melyik eleméhez rendeli a függvény a legnagyobb függvényértéket?
Ha több függvényt is megadtak egy szöveg alapján, a „második" függvényt már a tanulók önállóan vizsgálják meg, s fogalmazzanak meg kérdéseket!
A végén minden feladatlapra írják fel a gyerekek a szöveg alapján létrehozott, majd javított függvényt, és a tanár szedje be azokat, mert a III. foglalkozáson ismét használni fogják a tanulók!

TORPEDÓJÁTÉK – A KOORDINÁTASÍKON VALÓ TÁJÉKOZÓDÁS ELŐKÉSZÍTÉSE

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: négyzethálós papír, két különböző színű ceruza; Munkaforma: párban)

1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Játsszunk torpedójátékot!

Válasszatok párt magatoknak, s mindenki rajzoljon négyzethálós papírra egy 10×10-es négyzetet! Az oszlopokat (balról kezdve) jelöljétek a, b, c, d, e, f, g, h, i, j-vel, a sorokat (alsó sortól kezdve) 1-től 10-ig számokkal. Mindkét játékos meghatározott számú és megadott alakú hajót helyez a négyzetbe úgy, hogy a hajók határvonalának sem lehet közös pontja. Természetesen vigyázni kell, hogy a partnered ne vegye észre, hogy hová helyezted a hajóidat. A játékosok felváltva torpedót lőnek a másik „tengerére” (pl. a5). A játékos hangosan visszajelzést ad: „Talált.” vagy „Nem talált.”. Ha egy játékos egy hajó utolsó kockáját is eltalálta, akkor közölni kell vele, hogy „Talált, süllyedt.” Az nyer, akinek előbb sikerül kilőnie a másik összes hajóját.

Az elhelyezendő hajók:

1 kocka: 3 db

2 oldalával érintkező kocka: 2 db

3 kocka L alakban elhelyezve: 2 db

5 kockából álló alakzat, a kockák kereszt alakban elhelyezve (függőlegesen 3 kocka, a középső mellett mindkét oldalról egy-egy kocka): 1 db

Kiemelt készségek, képességek

Elemzés, rendszerezés, gondolkodási sebesség, logikai következtetés.

II. NEM MESE EZ GYERMEK

Ráhangolódás/1.

(Javasolt idő: 4–5 perc, Munkaforma: párban)

Bemelegítésül játsszunk egy rövid ideig torpedójátékot! Most csak 8×8-as négyzet legyen a „tenger". Milyen hajókat és hányat helyezzünk el?

Kiemelt készségek, képességek

Becslés, elemzés, rendszerezés, gondolkodási sebesség, logikai következtetés

Ráhangolódás/2.

Célszerű megfigyelni, hogy a gyerekek hogyan tudják megbecsülni a játékra fordítandó időt.

KÉPLETTEL ADOTT FÜGGVÉNY ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYBELI ELEMÉNEK ÉS A HOZZÁ TARTOZÓ FÜGGVÉNYÉRTÉKNEK KÜLÖNBÖZŐ JELENTÉSADÁSA

(Javasolt idő: 30 perc; Eszközök: 1. feladatlap - Függvénypárok; Munkaforma: párban)

2. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Minden pár kap két képlettel megadott függvényt. Adjatok legalább egy jelentést mindkét esetben az értelmezési tartomány tetszőleges elemének, s a hozzá tartozó függvényértéknek! Ezután írjatok le egy-egy történetet, amelynek az adatai alapján megadható a feladatban kapott függvény!

Kiemelt készségek, képességek

Kreativitás, számolási képesség, deduktív következtetés, mennyiségi következtetés, elemzés, analógiák felismerése.

2. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A megadott függvények a problémamegoldás szempontjából különböző nehézségűek, ezt a tanár a feladatok kiosztásakor vegye figyelembe.

Előre megadott ideig dolgozzanak a gyerekek a megoldásokon, s akkor fogjanak a következő feladatba, ha már az előzővel végeztek.

Megbeszéléskor először egy-egy pár cserélje ki a megírt „történeteket", s áttanulmányozás után a 4 tanuló együtt vitassa meg a 4 megoldást. Majd mindegyik függvényt egyesével írják a táblára, a megoldással megbízott pár olvassa fel a megírt „történetet", s a csoport együtt vitassa, és véleményezze a munkát.

Leggyakoribb hiba, hogy a „történet" olyannak sikerül, hogy az annak alapján gyártott függvény az értelmezési tartomány különbözősége miatt eltér a megadottól.

SZITUÁCIÓS JÁTÉKOK, NEM ÜRES HALMAZ LEKÉPEZÉSE NEM ÜRES HALMAZRA

(Javasolt idő: 5 perc; Eszközök

2. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Alakítsunk ki két csoportot. Mondjuk, az egyik csoportba tartozzanak azok, akiknek nem kék a szemük, a másikba a többiek. Van olyan, akinek kék a szeme?

Mindkét csoport gondolja ki, hogy ha az ő csoportjuk minden tagjához egy-egy embert hozzá kellene rendelni a másik csoportból, akkor milyen hozzárendelést valósítana meg?

Ha kigondoltátok, akkor először a nem kékszeműek csoportja mutassa be a hozzárendelést mondjuk úgy, hogy minden ember odamegy ahhoz, akihez őt rendelték. A másik csoport ellenőrizze, hogy valóban függvény-e a leképezés!

Miért gondoljátok, hogy függvény (nem függvény)?

Ha függvény, milyen halmaz az értelmezési tartománya? És az értékkészlete?

Kiemelt készségek, képességek

Modellalkotó képesség, gondolkodási sebesség, együttműködési készség, kreativitás.

2. Foglalkozás – 2. lépés/2.

A játékban az a fontos, hogy a gyerekek megértsék, hogy nem kell feltétlen valamilyen tulajdonság, vagy szabály, ami alapján elvégzik a hozzárendelést, csak az a fontos, hogy minden emberhez legyen hozzárendelve egy ember, és pontosan egy ember.

Először előfordul, hogy valamilyen szabályon törik a fejüket, de ha nem találnak, lehet, hogy „végső kétségbeeséskor” azt találják ki, hogy te ő mellé, te meg ő mellé stb. állj.

Ne segítsen a tanár ennek felismerésében. Kétszer, más-más csoport felosztással is hajtsák végre a hozzárendelést a gyerekek, s talán maguktól is rájönnek, hogy nem feltétlen szükséges a hozzárendelés elvégzéséhez egy közös tulajdonság vagy szabály.

III. EGYÜTT KÖNNYEBB

FÜGGVÉNYEK ALKOTÁSA

(Javasolt idő: 30 perc; Eszközök

3. Foglalkozás – 1. lépés/1.

A mai foglalkozás elmélyült kutatómunkát igényel. Alakítsatok ki 3-4 fős csoportokat! Minden csoport kap egy-egy könyvet. A feladat az, hogy a csoport a könyv anyagának, képeinek, információinak felhasználásával adjon meg legalább három függvényt. Jól tervezzétek meg a függvényeket! Gondoljátok végig, hogy mi mindent kell megadni ahhoz, hogy adott legyen a függvény!

Az ajánlott könyvek listája, és a projektfeladatokmegoldása a mellékletben.

Kiemelt készségek, képességek

Együttműködési készség, kreativitás, eredetiség, probléma-érzékenység, rendszerezés

3. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Igyekeztünk olyan könyveket kiválasztani, amelyek felkelthetik a tanulók érdeklődését, s alkalmasak függvényalkotásra. Ha a csoport létszáma az ideális 15-18-nál több, akkor az eszközökben megadott könyveken kívül javasoljuk A világ nagy múzeumai sorozat további köteteit.

A feladat csak akkor éri el a célját, ha a csoport minden tagja részt vesz a munkában, s a könyvek áttanulmányozása után együtt keresik a lehetőséget a függvény alkotására. A tanár elsődleges feladata az egyes csoportokon belül a munka koordinálása.

Világosan derüljön ki a tanulók leírásából, hogy mi a függvény értelmezési tartománya (kizárólag az adott könyvben szereplő „dolgok” összessége lehet), a képhalmaza, s a hozzárendelése (elemenként megadva, vagy leírással). A tanár munka közben is vizsgálja meg, hogy az értelmezési tartomány minden elemére végrehajtható-e a megadott hozzárendelés.

A FÜGGVÉNYEK ELLENŐRZÉSE

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök

3. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Minden csoport adja tovább a következő csoportnak az elkészített függvények leírását, s a nyersanyagul szolgáló könyvet is, s minden csoport ellenőrizze, hogy a másik csoport által készített függvények értelmezési tartományának minden eleme szerepel-e a könyvben, és egyértelmű-e a hozzárendelés! Ezen kívül határozza meg a csoport a függvények értékkészletét is! Ezután értékelje írásban a létrehozott függvényeket!

Otthoni munkának ajánlható, hogy a háztartásban lévő eszközök alkalmazásával adjanak meg függvényeket.

Kiemelt készségek, képességek

Metakogníció

3. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Az ellenőrzés során minden csoport egy kicsit megismerkedik egy újabb könyvvel is. A másik csoport által megadott függvény átvizsgálása lehetőséget nyújt a függvény fogalmának tudatosítására.

A függvényleírásokat tegye el a tanár a relikviák közé!

IV. INKÁBB RAJZOLJUNK?

Ráhangolódás/1.

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: frontális)

Az otthoni munkával gyártott függvények megbeszélése (5 perc)
A torpedójátékban a lövés helyét egy jelpárral: egy betűvel és egy számmal adtátok meg. Egy sík pontjait hogyan szokták megadni?
Egy egyenesnek legalább hány pontjához kell hozzárendelni egy-egy valós számot, hogy adott legyen a számegyenes?
Ha például a 0-t és az 2-t hozzárendeltük egy-egy ponthoz, hogyan szerkesztjük meg a többi egészszám „helyét"? És az 5/3 helyét?
Már tudjuk, hogy bármelyik racionális szám helye megszerkeszthető, de vajon maradt még üres hely az egyenesen? Ha a 0 és 1 által meghatározott szakasz fölé rajzoltok egy négyzetet, s meghúzzátok az origóból induló átlóját, és ezt az átlót az origó körül ráforgatjátok a számegyenesre, akkor ennek végpontja melyik szám helyét határozza meg?
Azt, hogy a $\sqrt{2}$ nem racionális szám ki tudja bebizonyítani?
(Ha nem ismerik a tanulók annak egyik bizonyítását sem, a tanár döntse el, hogy bizonyítja vagy sem. Ha bizonyítja, ott nyitva lehetne hagyni a kérdést, hogy a $2n^2 = k^2$ egyenletet miért nem elégítheti ki egyetlen $(n; k)$ egész számpár sem. Talán lesz olyan tanuló, aki a következő foglalkozásig be tudja fejezni a bizonyítást.)
Nem minden irracionális szám helye szerkeszthető meg véges sok lépésben körzővel és vonalzóval. Más módon megkereshetjük, pl. ha egy egység sugarú kört az origóból indítva egyszer körbegördítünk a számegyenesen, egy teljes fordulat után a 2π helyét jelölhetjük ki.
Az olyan függvényeket, amelyek valós számhoz valós számot rendelnek, ábrázolni is tudjuk. A koordináta-rendszerben a két számegyenes nagyon alkalmas az értelmezési tartomány és az értékkészlet megjelenítésére: az értelmezési tartományt az x tengelyen, az értékkészletet pedig az y tengelyen jelölhetjük meg. Így egy pont első koordinátája az értelmezési tartomány egy eleme lehet, a második koordinátája pedig az első koordinátával megadott értelmezési tartománybeli elemhez rendelt függvényérték. Sok probléma megoldásában segítségünkre lehet, ha egy függvénynek tudjuk vázolni a grafikonját.

Ráhangolódás/2.

A rövid választ: „koordinátákkal" – ne fogadja el a tanár, ismerjék fel a tanulók, hogy ehhez előbb a síkon fel kell venni egy koordinátarendszert.
Ez jó alkalom, hogy tisztázzák, hogy mi is az a derékszögű koordináta-rendszer. Innen eljuthatunk annak a kérdésnek a felvetéséhez, hogy mi is az a számegyenes, s ekkor tisztázható, hogy ez egy függvény megjelenítése: a valós számok halmazát képezzük le egy egyenes pontjaira.
Ha a tanulók ismerik a szakasz egyenlő részekre való felosztásának szerkesztési eljárását, akkor gondolják végig a tanulók, hogy hogyan szerkeszthető meg bármelyik racionális szám „helye".

FÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

(Javasolt idő: 30 perc; Eszközök: 2. feladatlap; Munkaforma: egyéni)

4. Foglalkozás – 1. lépés/1.

A 2. foglalkozáson (Nem mese ez gyermek) minden tanulópár más-más függvénypárt kapott. Most mindenki kap közülük többet. Először ábrázoljátok mindegyik függvényt! Sok esetben nem rajzolható meg a teljes grafikon. Igyekezzetek úgy megválasztani a tengelyeken az egységet, hogy a grafikon nem megrajzolt része egyértelműen elképzelhető legyen!

Az ábrázolás után fogalmazzatok meg, s írjatok le olyan kérdéseket, amelyek megválaszolásában sokat segíthet a függvény grafikonja!

Kiemelt készségek, képességek

Számolási képesség, leleményesség, műveletvégzési sebesség, rajzkészség.

4. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Minden tanuló önállóan dolgozzon, így könnyebben láthatja a tanár, hogy melyik tanuló milyen szinten tud alapfüggvényeket ábrázolni. Segítsen a célszerű egységválasztásban. Függvényábrázolás során is gyakori hiba, hogy nem veszik a tanulók figyelembe az értelmezési tartományt. Erre különösen figyeljen a tanár.

Ha egy függvény grafikonját már minden tanuló megrajzolta, akkor egy tanuló rajzolja fel a táblára is. Ha néhány tanuló egy függvényt rosszul ábrázolt, akkor a tanár rajzolja fel a hibás grafikont a táblára (a tanuló megnevezése nélkül), s a csoport együtt elemezze a hibás megoldást.

4. Foglalkozás – 1. lépés/3.

Milyen kérdéseket tennétek fel egy függvénnyel kapcsolatban, hogy a választ megkönnyítse a grafikon ismerete?

Kiemelt készségek, képességek

Metakogníció

4. Foglalkozás – 1. lépés/4.

Várható, hogy a tanulók a monotonitásra, a szélsőértékre, a szélsőérték helyére, a zérushelyre vonatkozó kérdéseket fogalmaznak meg. Előjöhet a töréspont fogalma. Elképzelhető, hogy a függvény végtelenben vett határértékének szemléletes fogalma is megfogalmazódik valamilyen formában. Minden fogalmat mindegyik függvénynél vizsgálják meg a gyerekek.

Lehet, hogy valamelyik tanuló az egyenlőtlenség és egyenlet megoldására gondol. Ha ez előjön, mutassa meg egy példán a tanár az egyenlőtlenség (egyenlet) grafikus megoldását.

V. EZT MÁR TUDOM?

Ráhangolódás/1.

A további tanulmányaitok szempontjából is fontos, hogy a függvénytani alapismereteitek biztos, s tudásotok e területen kellően mély legyen. Most lehetőségetek nyílik függvénytani alapismereteitek felmérésére.. Úgy üljetek, hogy ne lássátok egymás munkáját. Egy tesztet fogtok kitölteni. A tesztek megoldására 30 perc áll rendelkezésetekre. A feladatlap két részből áll, a második részhez addig ne fogjatok, amíg nem fejeztétek be az első részt!
A teszt minden kérdésre 4 választ kínál fel, s közülük pontosan egy helyes. Karikázd be a tesztlapon az általad helyesnek vélt válasz betűjelét!

FÜGGVÉNYTANI ALAPISMERETEK FELMÉRÉSE

(Javasolt idő: 30 perc; Eszközök

5. Foglalkozás – 1. lépés/1.

A tesztlapok kitöltése

Kiemelt készségek, képességek
Metakogníció, szövegértés, számolási képesség, problémamegoldásműveletvégzési sebesség.

A TESZTFELADATOK MEGOLDÁSAINAK MEGBESZÉLÉSE, A MUNKA ÉRTÉKELÉSE

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: 3. feladatlap, 4. feladatlap; Munkaforma: egyéni)

5. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Kinek melyik alapfogalommal van gondja? Javaslom, hogy csak akkor álljunk meg, s beszéljük meg a megoldást, ha véleménykülönbség alakul ki.

Kiemelt készségek, képességek
Érvelés

5. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Tapasztalatom szerint a teszt legcélszerűbb megbeszélési módja a következő: A tanár feladatonként megkérdezi, hogy melyik a helyes válasz, s a javaslatokat „rezzenéstelen" arccal veszi tudomásul. Kérdezzen rá, hogy van-e eltérő vélemény! Ha nincs, és helyes a kialakult vélemény, akkor reagáljon csak egyetértően. Ha csak egy diáknak is más a véleménye, a tanár ne döntse el a kérdést, a diákokkal indokoltassa döntésüket! Ha szükséges, részletesen beszéljék meg a feladat megoldását! A tanulók javítsák a saját munkájukat. A végén (először az 1. rész megbeszélése után) pontozzák saját munkájukat. Javaslat a pontozásra: minden helyes válasz: 6 pont; egyik választ sem jelöli meg: 1 pont; rossz válasz: 0 pont. Az 1. részből 90% és afölötti teljesítmény biztos ismeretekre utal. A 2. részt feladatait várhatólag kevés tanuló oldja meg az idő rövidsége miatt. A tanár kérdezze meg, hogy a 2. részben meddig jutott el mindenki, s az értékelésbe csak azokat a feladatokat vegyék bele, amikkel minden tanuló tudott foglalkozni. Javaslom, hogy a tanár adjon lehetőséget az érdeklődő tanulóknak a végeredmények megbeszélésére a foglalkozást követő napok valamelyikén.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

I. SZÖVEGELJÜNK

Ráhangolódás:
Ha a tóparton összesen 125 kavics áll rendelkezésre, akkor az a függvény, amely megadja, hogy hogyan függ a tóba bedobott kavicsok száma a dobások számától, a következő:

$$\{0; 1; 2; 3; \ldots; 62\} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto \begin{cases} 6 \cdot \dfrac{x}{3}, & \text{ha } x = 3k, \text{ ahol } k \text{ 20-nál nem nagyobb term.szám} \\ 6 \cdot \dfrac{x-1}{3} + 1, & \text{ha } x = 3k + 1, \text{ ahol } k \text{ 20-nál nem nagyobb term.szám} \\ 6 \cdot \dfrac{x-2}{3} + 1 + 2, & \text{ha } x = 3k + 2, \text{ ahol } k \text{ 20-nál nem nagyobb term.szám} \end{cases}$$

Minden csoportnak 1-1 feladat

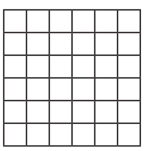
Csoportfeladatok

1. Annáék lakásában 200 literes fürdőkád van, de 205 liter éppen belefér. Anna fürödni szeretne, a lefolyót lezárja, és megnyitja a melegvízcsapot. 10 perc múlva benéz, éppen félig van a kád vízzel, de nagyon meleg. Elzárja a melegvízcsapot, s jó erősen megnyitja a hidegvízcsapot (15 liter folyik ki belőle percenként). Egy kicsit még olvasgat, és 8 perc múlva siet a fürdőszobába.

2. Pisti 3 éves, s a szobájában „autósat” játszik. Mindkét „autó” egy-egy karika, az egyik 10 cm, a másik 20 cm sugarú kör. Először elhelyezi a padlón a két karikát úgy, hogy azok képzeletbeli középpontjának távolsága úgy 60 cm, majd a kis karikát tolja a nagy felé egészen addig, míg a karikák középpontja egybe nem esik.

3. István gyakran segít öccsének Péternek a tanulásban. Most Péter éppen azt tanulja matematika órán, hogy hogyan lehet meghatározni a természetes számok pozitív osztóinak számát. István számkártyákat készített: 10 db nagyobb alakút (ezek mindegyikére különböző 10-zel osztható számot írt, a legnagyobb szám 100 volt), s több kis alakút, ezekre különböző természetes számot írt, a legkisebb közülük a 2 volt. István felmutatott egy 10-zel osztható számot, akkor Péternek meg kellett keresnie, s felmutatni azt a számkártyát, amelyen a szám pozitív osztóinak száma látható.

4. Kati négyzethálós papírra négyzeteket rajzolt, majd minden négyzet mellé két számot írt le: pl. 4;1 vagy 12;9 vagy 20;25. Bátyja, Balázs rápillantott a papírjára, nézegette, majd megkérdezte: „Mit jelentenek ezek a számpárok?” Kati csak mosolygott. „Gondolkozz! Nézd meg melyik négyzet mellé melyik számpárt írtam!” Balázs még mindig nem jött rá. „Rajzolj még egy négyzetet, s írd mellé a számokat!” Íme Kati rajza:



A számpár: 24; 36

5. Egy gazda udvarán csirkék és lovak vannak. Ezeknek az állatoknak összesen 60 lába van.

6. Jóska a szüleivel a Vörös tengerre utazott. Édesapja gyakorlott búvár, s ezen az utazáson már Jóskával együtt merültek le a mélybe. Egyik gyakorlásuk során rögzített kötél mellett ereszkedtek le 20 m mélységig. Lefele másodpercenként fél métert, felfele 10 másodperc alatt 1 m-t haladtak, miközben 20 m mélységben azonnal visszafordultak. Jóska édesapja az indulás előtt elmagyarázta, hogy visszafelé 5 m-ként megállnak majd 5-5 percre, mert a nagyobb nyomáson a palackból belélegzett gázból több oldódik fel a vérben, így amikor jönnek fölfelé (mivel eközben csökken a nyomás), a vérben oldott nitrogén buborékokat alkotva kiválhat, és ezek a buborékok embóliát okozhatnak. Fontos, hogy lassan váljanak ki a gázok a vérből, többek közt emiatt kell lassan emelkedni és közben megállni.

7. Egy telefontársaság egyik új díjcsomagjának díjszabásában a következők olvashatók:
Előfizetési díj havonta 3300 Ft, ezért 100 perc ingyen lebeszélhető az adott hónapban. Minden további perc díja percenként 39 Ft. Minden megkezdett percért egész percdíjat számolnak fel. Havonta számlázzák a díjakat.
Megtetszett a díjcsomag. Megkötöttem a szerződést a telefontársasággal. Elég bőbeszédű vagyok, így minden hívásom és beszélgetésem legalább egy percig tart, de egy beszélgetés befejezése után soha nem hívok fel senkit egy percen belül.

A csoportfeladatok egy lehetséges megoldása:

1. Annáék lakásában 200 literes fürdőkád van, de 205 liter éppen belefér. Anna fürödni szeretne, a lefolyót lezárja, és megnyitja a melegvízcsapot. 10 perc múlva benéz, éppen félig van a kád vízzel, de nagyon meleg. Elzárja a melegvízcsapot, s jó erősen megnyitja a hidegvízcsapot (15 liter folyik ki belőle percenként). Egy kicsit még olvasgat, és 8 perc múlva siet a fürdőszobába.

Sok kérdést fel lehet tenni. Pl. Mennyi víz van a kádban 10 perc, 11 perc stb. múlva? Kifolyt-e a víz a kádból, amikor Anna 8 perc után visszament a fürdőszobába?

Kérdés lehet: Hogyan függ a kádban lévő víz literben mért mennyisége az eltelt időtől (a melegvizes csap megnyitásától számítva, percben mérve)? Ekkor a függvény:

$$[0; 18] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 10x, & \text{ha } 0 \le x \le 10 \\ 100 + (x - 10) \cdot 15, & \text{ha } 10 < x \le 17 \\ 205, & \text{ha } 17 < x \le 18 \end{cases}$$

2. Pisti 3 éves, s a szobájában „autósat” játszik. Mindkét „autó” egy-egy karika, az egyik 10 cm, a másik 20 cm sugarú kör. Először elhelyezi a padlón a két karikát úgy, hogy azok képzeletbeli középpontjának távolsága úgy 60 cm, majd a kis karikát tolja a nagy felé egészen addig, míg a karikák középpontja egybe nem esik.

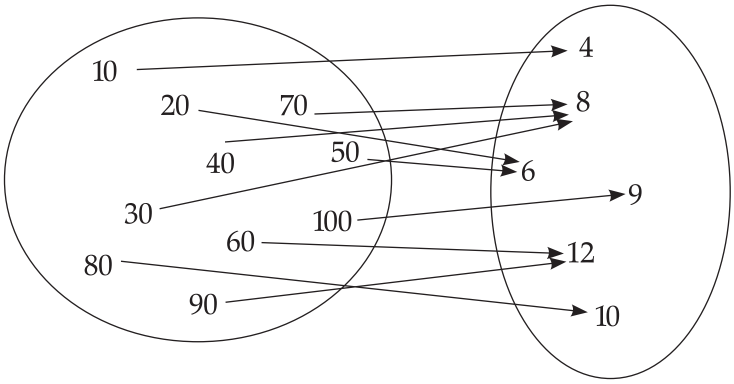
   A karikákat körrel modellezve, meg lehet kérdezni, hogy hány közös pontja van a köröknek, amikor a középpontjaik távolsága 32 cm? És amikor 30 cm? És amikor 5 cm? Így eljuthatnak az alábbi függvényhez:
   x jelöli a körök középpontjainak távolságát cm-ben mérve. A szöveg szerint az értelmezési tartomány: [0; 60]. A függvény megadja, hogy hogyan függ a körök közös pontjainak száma a körök középpontjainak távolságától.

$$[0; 60] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ ha } 0 \le x < 10 \text{ vagy } 30 < x \le 60 \\ 1, \text{ ha } x = 10 \quad \text{vagy } x = 30 \\ 2, \text{ ha } 10 < x < 30 \end{cases}$$

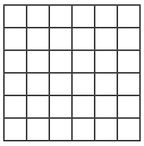
3. István gyakran segít öccsének Péternek a tanulásban. Most Péter éppen azt tanulja matematika órán, hogy hogyan lehet meghatározni a természetes számok pozitív osztóinak számát. István számkártyákat készített: 10 db nagyobb alakút (ezek mindegyikére különböző 10-zel osztható számot írt, a legnagyobb szám 100 volt), s több kis alakút, ezekre különböző természetes számot írt, a legkisebb közülük a 2 volt. István felmutatott egy 10-zel osztható számot, akkor Péternek meg kellett keresnie, s felmutatni azt a számkártyát, amelyen a szám pozitív osztóinak száma látható.

   Egyszerűen adódó kérdések: Milyen számot mutat fel Péter (feltéve, hogy helyesek az ismeretei), ha István a 20-as számkártyát mutatta fel? Mi a legnagyobb szám, amelyet Péter felmutathatott? Mutathatott-e fel Péter 14-et? Ha István minden kártyáját pontosan egyszer mutatott fel, akkor hányszor rakta fel Péter a 8-as kártyáját (vagy milyen kártyákat mutathatott fel Péter?)

   Magától adódik a függvény: minden István által felmutatott számhoz rendeljük hozzá a szám pozitív osztóinak számát. Mivel az értelmezési tartománynak véges sok eleme van, megadhatjuk a függvényt Venn-diagrammal (vagy értéktáblázattal) is.



4. Kati négyzethálós papírra négyzeteket rajzolt, majd minden négyzet mellé két számot írt le: pl. 4; 1 vagy 12; 9 vagy 20; 25. Bátyja, Balázs rápillantott a papírjára, nézegette, majd megkérdezte: „Mit jelentenek ezek a számpárok?” Kati csak mosolygott. „Gondolkozz! Nézd meg melyik négyzet mellé melyik számpárt írtam!” Balázs még mindig nem jött rá. „Rajzolj még egy négyzetet, s írd mellé a számokat!” Íme Kati rajza:



A számpár: 24; 36

A számpár első tagja a négyzet kerülete, a második a területe.

Az a oldalú négyzet k kerülete: $k = 4a$, a t területe: $t = a^2$, tehát $t = \left(\frac{k}{4}\right)^2$ vagy $t = \frac{k^2}{16}$

A függvény, amely megadja, hogy hogyan függ a négyzet területe a kerületétől (feltételezve, hogy a kerület bármilyen pozitív szám lehet):

$$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ k \mapsto \frac{k^2}{16}$$

5. Egy gazda udvarán csirkék és lovak vannak. Ezeknek az állatoknak összesen 60 lába van.

Kérdések lehetnek pl. Ha 2 csirke van, akkor hány ló? Lehet-e a gazdának 15 lova? Legfeljebb hány csirkéje lehet a gazdának?
Függvény alkotható pl. a „Hogyan függ a lovak száma a csirkék számától?” kérdés alapján.
x jelölje a csirkék számát. x csak páros szám lehet, mert páratlan esetén annak kétszeresét 60-ból kivonva olyan számot kapunk, amely nem osztható 4-gyel. Az x legfeljebb 28 lehet, mert a gazda udvarán volt mind a két fajta állat.

A függvény tehát: $\{2; 4; 6; ...; 28\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{60-2x}{4}$ vagy $\{2; 4; 6; ...; 28\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 15 - \frac{x}{2}$

6. Jóska a szüleivel a Vörös tengerre utazott. Édesapja gyakorlott búvár, s ezen az utazáson már Jóskával együtt merültek le a mélybe. Egyik gyakorlásuk során rögzített kötél mellett ereszkedtek le 20 m mélységig. Lefele másodpercenként fél métert, felfele 10 másodperc alatt 1 m-t haladtak, miközben 20 m mélységben azonnal visszafordultak. Jóska édesapja az indulás előtt elmagyarázta, hogy visszafelé 5 m-ként megállnak majd 5-5 percre, mert a nagyobb nyomáson a palackból belélegzett gázból több oldódik fel a vérben, így amikor jönnek fölfelé, (mivel eközben csökken a nyomás), a vérben oldott nitrogén buborékokat alkotva kiválhat és ezek a buborékok embóliát okozhatnak. Fontos, hogy lassan váljanak ki a gázok a vérből, többek közt emiatt kell lassan emelkedni és közben megállni.

Kérdésekre példa: Mennyi ideig tartott a lemerülés 20 m re? (40 sec) A lemerülés kezdetétől számítva mennyi idő múlva érkeztek vissza a felszínre? (19 perc)
Az indulástól számítva 8 perc múlva milyen mélyen vannak a víz alatt? (10 m mélyen) Mikor álltak meg a felszín alatt 5 m-en? (790 sec múlva)

Hogyan függ a felszín alatti (méterben megadott) helyzet a merülés kezdetétől számított (másodpercben mért) időtől?

$$[0;\,1140] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} -0{,}5\,x, & \text{ha } 0 \le x \le 40 \\ -20 + 0{,}1 \cdot (x - 40), & \text{ha } 40 < x \le 90 \\ -15, & \text{ha } 90 < x \le 390 \\ -15 + 0{,}1 \cdot (x - 390), & \text{ha } 390 < x \le 440 \\ -10, & \text{ha } 440 < x \le 740 \\ -10 + 0{,}1 \cdot (x - 740), & \text{ha } 740 < x \le 790 \\ -5, & \text{ha } 790 < x \le 1090 \\ -5 + 0{,}1 \cdot (x - 1090), & \text{ha } 1090 < x \le 1140 \end{cases}$$

7. Egy telefontársaság egyik új díjcsomagjának díjszabásában a következők olvashatók:
Előfizetési díj havonta 3300 Ft, ezért 100 perc ingyen lebeszélhető az adott hónapban. Minden további perc díja percenként 39 Ft. Minden megkezdett percért egész percdíjat számolnak fel. Havonta számlázzák a díjakat.
Megtetszett a díjcsomag. Megkötöttem a szerződést a telefontársasággal. Elég bőbeszédű vagyok, így minden hívásom, és beszélgetésem legalább egy percig tart, de egy beszélgetés befejezése után soha nem hívok fel senkit egy percen belül.

Mivel arról nincs információnk, hogy egy adott hónapban hány hívást hajt végre a felhasználó, s így azt sem tudjuk, hogy hányszor fordult elő, hogy a hívás időtartama nem egész perc, ezért a szöveg alapján csak a fizetendő összeget tudjuk megadni a számlázott percek függvényében.

Kérdésekre példa: Mennyi díjat fizet az a felhasználó, akinek egy adott hónapban 94 percet számláztak? És ha 153 percet számláztak?

Hogyan függ egy adott hónapban a számlázott percektől a számla összege? 31 napos hónappal számolva, s csak belföldi előfizetőkkel beszélve:

$$\{0;\,1;\,2;\,3;\,\ldots;\,44640\} \to \boldsymbol{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3300, & \text{ha } 0 \le x \le 100 \text{ és } x \in \mathbf{Z} \\ 3300 + 39 \cdot (x - 100), & \text{ha } 100 < x \le 44640 \text{ és } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

II. NEM MESE EZ, GYERMEK

1. FELADATLAP

1.

a) $f\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto 4x$

b.) $g\colon \{1; 2; 3; \ldots; 49; 50\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{10}{x}$

2.

a) $f\colon \{0; 1; 2; 3; \ldots; 999; 1000\} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto 1000 - x$

b.) $g\colon [1; 10] \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^2 + (10 - x)^2$

3.

a) $f\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto (1{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot x)^2$

b.) $g\colon \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 120x, \text{ ha } 0 \le x < 10 \text{ és } x \in \mathbf{Z} \\ 100x, \text{ ha } 10 \le x \text{ és } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$

4.

a) $f\colon \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto 4x$

b) $g\colon \{3; 4; 5; 6; \ldots\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{180 \cdot (x-2)}{x}$

5.

a.) $f\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{10}{x}$

b) $g\colon [0; 5] \to R,\ x \mapsto \begin{cases} 10x, & \text{ha } 0 \le x \le 2 \\ 20, & \text{ha } 2 \le x \le 3 \\ 15x - 25, & \text{ha } 3 < x \le 5 \end{cases}$

6.

a.) $f\colon \{4; 5; 6; \ldots\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{x\,(x-3)}{2}$

b) $g\colon [0; 200[\to \mathbf{R},\ x \mapsto |x - 35|$

7.

a) f: $\{3; 4; 5; 6; \ldots\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 180 \cdot (x - 2)$

b) g: $[0; 5] \to R$, $x \mapsto \begin{cases} 50x, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 50, & \text{ha } 1 < x \le 3 \\ -60x + 230, & \text{ha } 3 < x \le 3{,}5 \\ 20, & \text{ha } 3 < x \le 5 \end{cases}$

8.

a) f: $Z^+ \to R$, $x \mapsto 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot x$

b) g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{16}$

9.

a) f: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 1{,}2 \cdot 1{,}2x$

b) g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x\pi}{3}$

10.

a) f: $]2; +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 4$

b) g: $\{2; 3; 4; \ldots; n; \ldots\} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto \dfrac{1 + x}{2} \cdot x$

1. FELADATLAP – MEGOLDÁS

Egy lehetőség a függvény szöveggel megadására:

1.

a) f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 4x$

x: négyzet oldalhossza cm-ben

$f(x)$: az x oldalú négyzet kerülete (cm-ben)

b) g: $\{1; 2; 3; ...; 49; 50\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{10}{x}$

Tegyük fel, hogy 1 juh 10 nap alatt legel le egy 10 egység területű rétet, és a juhok „ugyanolyan étvágyúak"

x: juhok darabszáma

$g(x)$: x juh ennyi nap alatt legeli le a 10 egység területű rétet

2.

a) f: $\{0; 1; 2; 3; ...; 999; 1000\} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto 1000 - x$

Két zsebemben összesen 1000 Ft van

x: ennyi pénz van a bal zsebemben

$f(x)$: ha a bal zsebemben x Ft van, akkor ennyi pénz van a jobb zsebemben

b) g: $[1; 10] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + (10 - x)^2$

Egy 10 egység hosszú AB szakasz P belső pontja által létrehozott két szakasz fölé egy-egy négyzetet szerkesztünk.

x: A P pont A ponttól való távolsága

$g(x)$: PA = x esetén a két négyzet területének összege

3.

a) f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (1,1 \cdot 0,9 \cdot x)^2$

x: Egy négyzet oldalhossza

$f(x)$: Az olyan négyzet területe, melyet a következőképpen kapunk: Az x oldalú négyzet oldalhosszát megnöveljük 10%-kal, majd a kapott új négyzet oldalát lecsökkentjük 10%-kal, s így ismét négyzethez jutunk.

b) g: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 120x, \text{ ha } 0 \le x < 10 \text{ és } x \in \mathbf{Z} \\ 100x, \text{ ha } 10 \le x \text{ és } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$

Piacon az árus krumplit árul, s a következő reklámot írta ki a placcra: „Krumpli kilója 120 Ft, de ha ön legalább 10 kg-ot vesz, akkor csak 100 Ft-ba kerül kilogrammonként" Az árus csak egész kg-nyi mennyiséget tudott mérni.

x: A vevő által vásárolt krumpli mennyisége

$g(x)$: A vevő által vásárolt x kg krumpli ára

4.

a) f: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 4x$

x: Lovak száma

$f(x)$: x db ló lábainak száma

b) g: $\{3; 4; 5; 6; ...\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{180 \cdot (x-2)}{x}$

x: Szabályos sokszög oldalainak száma

$g(x)$: Az x oldalú szabályos sokszög egy belső szögének mértéke fokban

5.

a) f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{10}{x}$

x: 10 cm^2 területű téglalap egyik oldalának hossza cm-ben mérve.

$f(x)$: A 10 cm^2 területű, x oldalú téglalap másik oldalának hossza cm-ben mérve.

b) g: $[0; 5] \to R$, $x \mapsto \begin{cases} 10x, \text{ ha } 0 \le x \le 2 \\ 20, \text{ ha } 2 \le x \le 3 \\ 15x - 25, \text{ ha } 3 < x \le 5 \end{cases}$

Az A várostól B város 50 km távolságra van. Jancsi A-ból B-be kerékpárral ment. Az első két órában óránként átlagosan 10 km-t haladt, ezután 1 órát pihent, majd, hogy behozza lemaradását, 15 km/h sebességgel haladt tovább.

x: Az indulástól eltelt idő órában mérve

$g(x)$: Az indulástól számított x óra múlva Jancsi távolsága az A várostól.

6.

a) f: $\{4; 5; 6; ...\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x\,(x-3)}{2}$

x: konvex sokszög csúcsainak száma

$f(x)$: Az x csúcsú konvex sokszög átlóinak száma

b) g: $[0; 200[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto |x - 35|$

A 7-es út mellett, a 35-ös kilométerkőnél lakom.

x: A 0 kilométerkőtől való távolságom a 7-es úton km-ben mérve.

$g(x)$: Lakásomtól való távolságom, amikor a 0 kilométerkőtől x km-re vagyok a 7-es úton.

7.

a) f: $\{3; 4; 5; 6; ...\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 180 \cdot (x-2)$

x: Konvex sokszög csúcsainak száma

$f(x)$: Az x csúcsú konvex sokszög belső szögeinek összege fokban mérve.

b) g: $[0; 5] \to R$, $x \mapsto \begin{cases} 50x, \text{ ha } 0 \le x \le 1 \\ 50, \text{ ha } 1 < x \le 3 \\ -60x + 230, \text{ ha } 3 < x \le 3{,}5 \\ 20, \text{ ha } 3 < x \le 5 \end{cases}$

Az A várostól B város 50 km távolságra van. Gergő autóval ment A-ból B-be, átlag 50 km/h sebességgel. B városban 2 órát töltött, majd visszaindult 60 km/h átlagsebességgel, de fél óra múlva lerobbant a kocsija, s 2 órán át ott vesztegelt, B várostól 20 km-re.

x: Az indulástól eltelt idő órában mérve.

$g(x)$: Indulástól számított x óra múlva Gergő helyzetét adja meg (km-ben).

8.

a) f: $Z^+ \to R$, $x \mapsto 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot x$

x: Egy áru ára árváltozás előtt Ft-ban mérve.

$f(x)$: A kezdetben x Ft-ért kínált áru 20%-os áremelkedés, majd 20%-os árcsökkentés utáni ára.

b) g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{16}$

A négyzet felezőpontjai által meghatározott négyzetnek ismét kijelöljük a felezőpontjait. Az eljárást ismételve a kiindulási négyzettől kezdve a számolást, tekintsük az ötödik négyzetet.

x: Az első négyzet oldalhossza cm-ben mérve.

$g(x)$: Az első x oldalú négyzetből kapott ötödik négyzet területe cm-ben mérve.

9.

a) f: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 1{,}2 \cdot 1{,}2x$

A bank egy évi lekötés esetén 20% kamatot ír jóvá egy év után.

x: A bankba betett összeg Ft-ban.

$f(x)$: x Ft betét esetén 2 év múlva ekkora összeg vehető fel

b) g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x\pi}{3}$

x: Kör sugara

$g(x)$: x sugarú kör 120°-os körcikkének ívhossza

10.

a) f: $]2; +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 4$

x: Négyzet oldalának hossza cm-ben mérve

$g(x)$: Az x oldalú négyzetből kivágva 2 cm oldalhosszú négyzetet, a visszamaradó sokszög területe cm^2-ben mérve.

b) g: $\{2; 3; 4; ...; n; ...\} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto \dfrac{1 + x}{2} \cdot x$

x: 1-nél nagyobb pozitív egész szám

$g(x)$: 1-től x-ig a pozitív egész számok összege.

III. EGYÜTT KÖNNYEBB

Projekt munkához könyvek és atlaszok listája:

Minden könyv csoportonként 2 példányban, földrajzi atlasz 4 példányban

1. Királyok könyve (Magyarország és Erdély királyai, királynői, fejedelmei és kormányzói), Officina Nova könyvek, Magyar Könyvklub, Budapest, 1997
2. Csorba Csaba: Legendás váraink, Magyar Könyvklub, Budapest, 2000
3. A világ nagy múzeumai: Prado (Madrid), Corvina, 1990
4. Földrajzi atlasz
5. Ki kicsoda a világirodalomban? Könyvkuckó Kiadó, 1997
6. Nigel Hawkes: A világ építészete…az építészet világa az ókortól a XXI. Századig, Gulliver Kiadó, 1997

A projekt feladatokra a néhány megoldás:

Projekt munkához könyvek és atlaszok listája:
Minden könyv csoportonként 2 példányban, földrajzi atlasz 4 példányban

Csak néhány példát adok meg a lehetséges függvényekre:

1. Királyok könyve (Magyarország és Erdély királyai, királynői, fejedelmei és kormányzói), Officina Nova könyvek, Magyar Könyvklub, Budapest, 1997

   Várható, hogy Magyarország uralkodói alkotják a függvény értelmezési tartományát. A könyv megadja az egyes uralkodó-házak fontosabb családi kapcsolatait fa-gráffal. Könnyen kigyűjthető az egyes királyok uralkodásának időtartamai, továbbá uralkodásuk alatt bekövetkezett fontosabb események évszáma.

2. Csorba Csaba: Legendás váraink, Magyar Könyvklub, Budapest, 2000

   A könyvben szereplő várak lehetnek a függvény értelmezési tartományának elemei. Minden várhoz hozzárendelhető annak az országnak a neve, amelynek területén található ma a vár. Kiválaszthatók azok a várak, amelyek esetében ismert annak az oklevélnek vagy írásnak a dátuma (évszáma), amely először tesz említést a várról. Ebben az esetben ezek a várak alkotják a függvény értelmezési tartományát, s oklevél illetve írás dátuma a függvény értéke. Minden várhoz hozzárendelhető pl. a leírás első szava.

3. A világ nagy múzeumai: Prado (Madrid), Corvina, 1990

   Javaslom, hogy csak a színes képek képezzék a vizsgálat tárgyát.
   Az albumban található festmények alkothatják a függvény értelmezési tartományát. Minden képhez hozzárendelhető festőjének neve. Kiválaszthatók azok a képek, amelyen egyértelműen megadható a képen látható emberek (vagy állatok) száma. A képek nagy részéről eldönthető, hogy megjelenik-e (akár háttérként) egy táj képe, vagy egy szoba belső részlete.

4. Földrajzi atlasz

   Nagyon sokféle függvény adható meg. Pl. egy-egy országban (földrészen) található legalább 1 millió lakosú városok száma; egy-egy ország legmagasabb csúcsának neve (vagy magassága)

5. Ki kicsoda a világirodalomban? Könyvkuckó Kiadó, 1997

   A könyvben szereplő írók, költők (ismert vagy feltételezett) születési évszáma (időszámításunk előtti: negatív szám); nemzetisége; vezetéknevének betűszáma. Kiválaszthatók azok az írók, költők, drámaírók akiknek megjelent magyar fordításban is valamelyik művük.

6. Nigel Hawkes: A világ építészete…az építészet világa az ókortól a XXI. Századig, Gulliver Kiadó, 1997

   A könyvből kiválaszthatók azon épületek, tornyok és szobrok melyeknek közli a könyv a magasságát. A könyvben szereplő hidak hossza. Kiválaszthatók azok az épületek, amelyeknek közli a könyv a felépítésük költségét

IV. INKÁBB RAJZOLJUNK?

Minden tanulópár kap 1-1 függvényt

2. FELADATLAP

f_1: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 4x$

f_2: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 4x$

f_3: $\{1; 2; 3; ...; 49; 50\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{10}{x}$

f_4: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{10}{x}$

f_5: $\{0; 1; 2; 3; ...; 999; 1000\} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto 1000 - x$

$$f_6: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 120x, & \text{ha } 0 \le x < 10 \text{ és } x \in \mathbf{Z} \\ 100x, & \text{ha } 10 \le x \text{ és } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

f_7: $]2; +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 4$

f_8: $[0; 200[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto |x - 35|$

$$f_9: [0; 5] \to R,\ x \mapsto \begin{cases} 10x, & \text{ha } 0 \le x \le 2 \\ 20, & \text{ha } 2 \le x \le 3 \\ 15x - 25, & \text{ha } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

$$f_{10}: [0; 5] \to R,\ x \mapsto \begin{cases} 50x, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 50, & \text{ha } 1 < x \le 3 \\ -60x + 230, & \text{ha } 3 < x \le 3{,}5 \\ 20, & \text{ha } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

V. EZT MÁR MIND TUDOM?

3. FELADATLAP (TESZTFELADAT ÉS MEGOLDÁSUK)

1. Három gyerek felváltva kavicsokat dobál a tóba. Sorban egymás után Anna mindig 1-et, Balázs egyszerre 2-t, Cili pedig 3-at dob. Hány dobást hajtottak végre összesen, ha a tóba 31 kavics került?

   A: 16 B: 6
   C: 19 D: A többi válasz nem helyes.

2. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 3 - x$ függvény a -3 -hoz melyik számot rendeli?

   A: -6 B: 0
   C: 6 D: 3

3. A valós számok halmazán értelmezett $g(x) = x^2 - 3$ függvénynek a -3 helyen mekkora a függvényértéke?

   A: -12 B: -6
   C: 6 D: 12

4. Melyik számhoz rendel az $R \to R, x \mapsto 5 - \frac{1}{2}x$ függvény 6-ot?

   A: 2 B: $-\frac{1}{2}$
   C: -2 D: -4

5. 10 000 Ft volt nálam, amikor elmentem vásárolni. Adjuk meg azt a függvényt, amely a vásárlás után megmaradt pénzem értékét adja meg az elköltött x Ft függvényében!

   A: $\{0; 1; 2; 3; ...; 999; 10\,000\} \to R, x \mapsto 10\,000 - x$
   B: $y = 10\,000 - x$
   C: $f(x) = 10\,000 - x$
   D: $[0; 10\,000] \to R, x \mapsto 10\,000 - x$

6. 10 000 Ft volt nálam, amikor elmentem vásárolni. Adjuk meg azt a függvényt, amely az elköltött pénz értékét adja meg a vásárlás után megmaradt pénz függvényében!

   A: $[0; 10000] \to R, x \mapsto 10\,000 - x$ B: $y = 10\,000 - x$
   C: $f(x) = 10000 - x$ **D:** $\{0; 1; 2; 3; ...; 999; 10000\} \to R, x \mapsto 10000 - x$

7. Két zsebemben összesen 1000 Ft van, mindkettőben ugyanannyi. A bal zsebemből átrakok a másikba x Ft-ot. Jelölje $f(x)$ a jobb zsebemben lévő pénz értékét. Adjuk meg az f függvényt!

   A: $f(x) = 1000 + x$, ahol $x \in \{0; 1; 2; ...; 499; 500\}$
   B: $f(x) = 500 - x$, ahol $x \in [0; 500]$
   C: $f(x) = 500 + x$, ahol $x \in \{0; 1; 2; ...; 499; 500\}$
   D: $f(x) = 500 + x$

8. Hogyan függ a négyzet t területe a k kerületétől?

A: $t(k) = 16\,k^2$, ahol $k \in \mathbf{R}^+$
B: $t(k) = \dfrac{k^2}{4}$, ahol $k \in \mathbf{R}^+$
C: $t(k) = \left(\dfrac{k}{2}\right)^2$, ahol $k \in \mathbf{R}^+$
<u>**D:**</u> $t(k) = \dfrac{k^2}{2}$, ahol $k \in \mathbf{R}^+$

9. Az f függvény minden n oldalú sokszög oldalszámához hozzárendeli a sokszög átlóinak számát. Melyik az f függvény?

<u>**A:**</u> $\{3; 4; 5; ...\} \to Z,\ n \mapsto \dfrac{n\,(n-3)}{2}$
B: $\{4; 5; 6; ...\} \to Z,\ n \mapsto \dfrac{n\,(n-3)}{2}$
C: $\{3; 4; 5; ...\} \to Z,\ n \mapsto n\,(n-2)$
D: $\{3; 4; 5; ...\} \to Z,\ n \mapsto \dfrac{n\,(n-2)}{2}$

10. Mi az f függvény értékkészlete, ha az értelmezési tartománya $\{x \in Z \mid -2 \le x \le 3\}$, és $f(x) = 2 - x$?

A: $\{-1; 4\}$
B: $\{-1; 0\}$
C: $[-1; 4]$
<u>**D:**</u> $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

11. Az f: $[-2; 1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2 - x$ függvény melyik számhoz rendel 4-et?

<u>**A:**</u> – 2
B: 0
C: 1
D: 2

12. Az f: $[-2; 1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2 - x$ függvény grafikonja hol metszi az x tengelyt?

A: (2; 0)
B: (0; 2)
C: (–2; 0)
<u>**D:**</u> Nincs az x tengelyen pontja.

13. A g: $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x-3)^2$ függvénynek mi a zérushelye?

A: 3
B: Nincs
<u>**C:**</u> (3; 0)
D: (0; 9)

14. A g: $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x-3)^2$ függvénynek melyik halmaz az értékkészlete?

A: $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
B: $\{1; 4; 9; 16; 25\}$
<u>**C:**</u> $\{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$
D: A nemnegatív számok halmaza.

15. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2 \cdot |x-3| - 1$ függvénynek mi a legkisebb függvényértéke?

A: – 3
<u>**B:**</u> – 1
C: $\dfrac{1}{2}$
D: 3

16. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 5 - 3 \cdot |x+2|$ függvénynek mi a legnagyobb függvényértéke?

<u>**A:**</u> 5
B: 3
C: – 2
D: 2

17. Melyik halmaz az $f(x) = 5 - |x - 2|$ hozzárendelésű függvény értékkészlete, ha az értelmezési tartománya a valós számok halmaza?

A: $]5; +\infty[$ B: $]-\infty; 5[$
C: $[5; +\infty[$ **D:** $]-\infty; 5]$

18. Legyen f: {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} $\to$ **Z**, $x \mapsto$ *x pozitív osztóinak száma*. Az f függvény milyen számot rendel a 6-hoz?

A: 4 B: 3
C: 2 D:1

19. Legyen f: {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} $\to$ **Z**, $x \mapsto$ *x pozitív osztóinak száma*. Az f függvény melyik számhoz rendel 3-at?

A: Csak a 9-hez. B: A 6-hoz és a 8-hoz.
C: A 4-hez és a 9-hez. D: Nincs a függvény értékei között a 3.

20. Legyen f: {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} $\to$ **Z**, $x \mapsto$ *x pozitív osztóinak száma*. Az f függvény melyik számhoz rendel 5-öt?

A: 9-hez B: 5-höz
C: 6-hoz **D:** Nincs a függvény értékei között az 5.

21. Legyen f: {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} $\to$ **Z**, $x \mapsto$ *x pozitív osztóinak száma*. Az f függvénynek melyik halmaz az értékkészlete?

A: {2; 4} B: {2; 2; 3; 2; 4; 2; 4; 3}
C: {2; 3; 4} D: A pozitív egész számok halmaza.

22. Az f: $[-2; 1] \to$ **R**, $x \mapsto 1 - 4x$ függvény függvényértékei között hány egész szám van?

A: 12 **B:** 13
C: 14 D: Végtelen sok.

4. FELADATLAP (TESZTFELADAT ÉS MEGOLDÁSUK)

1. Az f: $[-2; 3] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ függvény függvényértékei között hány egész szám van?

A: 6 B: 9
C: 8 **<u>D:</u>** 10

2. Az f: $[-2; 3] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 6 - 2 \cdot |x - 1|$ függvény függvényértékei között hány egész szám van?

A: 3 B: 6
<u>C:</u> 7 D: 8

3. Egy 3 egység sugarú kör középpontjától 6 egységre lévő pont köré rajzolt 1 egység sugarú kört toljuk el addig, hogy a két kör koncentrikus legyen. Jelölje x a két kör középpontjainak távolságát! Ekkor a körök közös pontjainak számát megadó függvény:

A: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } 4 < x \le 6 \\ 1, \text{ ha } x = 4 \\ 2, \text{ ha } 0 \le x < 4 \end{cases}$

B: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } 4 \le x \le 6 \\ 2, \text{ ha } 0 \le x < 4 \end{cases}$

<u>C:</u> $[0; 6] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ ha } 4 < x \le 6 \text{ vagy } 0 \le x < 2 \\ 1, \text{ ha } x = 4 \text{ vagy } x = 2 \\ 2, \text{ ha } 2 < x < 4 \end{cases}$

D: Nem adható meg, mert végtelen sok közös pontja is lehet a köröknek.

4. Az f függvény minden kétjegyű, tízzel osztható pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám különböző prímosztóinak számát. Hányszor veszi fel a függvény a 3 értéket?

<u>A:</u> 4 B: 3
C: 2 D:1

5. Az f függvény minden kétjegyű, tízzel osztható pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám pozitív osztóinak számát. Mi lehet a függvény legnagyobb értéke?

A: 1 B: 6
C: 8 **<u>D:</u>** 12

6. Az f függvény minden kétjegyű, tízzel osztható pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám pozitív osztóinak számát. Hányszor veszi fel a függvény a 8 értéket?

A: 4-szer B: 3-szor
<u>C:</u> 2-szer D: 1-szer

7. A $[0; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 4 - 2 \cdot |x - 4|$ függvénynek mi a legnagyobb függvényértéke?

A: 12 B: 4
C: 6 **<u>D:</u>** 2

8. A [3; 5] intervallumon értelmezett $f(x) = 4 - 2 \cdot |x - 4|$ függvénynek mi a legnagyobb függvényértéke?

A: 1 B: 2

<u>**C:**</u> 4 D: 8

9. Az f függvény minden kétjegyű, tízzel osztható pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám pozitív osztóinak számát. Melyik halmaz a függvény értékkészlete?

A: {4; 6; 8; 10; 12; 14} <u>**B:**</u> {4; 6; 8; 10; 12}

C: {6; 8; 10} D: {4; 6; 8; 12}

10. Az $f\colon \left[\frac{2}{11}; 2\right] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény függvényértékei között hány egész szám van?

A: 4 <u>**B:**</u> 5

C: 6 D: 7

11. Az $f\colon \left[-\frac{4}{5}; +\infty\right[\to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{x}{x+1}$ függvény függvényértékei között hány egész szám van?

A: Nincs egy sem. B: 4

<u>**C:**</u> 5 D: 2

12. Ha $-2 \le x \le 3$, akkor

A: $4 \le x^2 \le 9$ <u>**B:**</u> $0 \le x^2 \le 9$

C: $4 \le x^2$ D: A többi válasz nem helyes.

13. Ha $-3 < x \le 2$, akkor

A: $9 \le x^2 \le 4$ B: $4 \le x^2 < 9$

<u>**C:**</u> $0 \le x^2 < 9$ D: $0 < x^2 < 9$

14. Ha $-1 < x \le 2$, akkor

<u>**A:**</u> $-1 \le |x| - 1 \le 1$ B: $0 < |x| - 1 \le 1$

C: $0 \le |x| - 1 \le 1$ D: $-1 < |x| - 1 \le 1$

15. Hány olyan x negatív egész szám van, amelyre igaz, hogy $(x+1)^2 \le 9$?

A: 2 <u>**B:**</u> 4

C: 5 D: 7

16. Ha $-2 < x \le 2$, akkor

A: $\frac{1}{x+2} \le \frac{1}{4}$ B: $\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2}$

C: $0 < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{4}$ <u>**D:**</u> $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+2}$