MATEMATIKA „C”
8. évfolyam

6. modul
ATTÓL FÜGG?

Készítette: Surányi Szabolcs

A modul célja	A halmazokkal kapcsolatos fogalmak elmélyítése, a halmazműveletek pontos értelmezése. A hozzárendelések közül a függvények felismerése. Függvények alkotása változatos szövegkörnyezetben, a függvénytani alapfogalmak elmélyítése. Grafikonolvasás fejlesztése.
Időkeret	4 x 45 perc
Ajánlott korosztály	13–14 évesek; 8. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Hétköznapi tevékenységek. (Menetrend, TV-műsor olvasása stb.) Szűkebb környezetben: Tanórai halmazelméleti, függvénytani ismeretek.
A képességfejlesztés fókuszai	Gondolkodási képességek: Rendszerezés. Problémaérzékenység, problémareprezentáció. Eredetiség, kreativitás. Kommunikációs képességek: Nyelvi fejlettség. Szövegértés, szövegértelmezés. Relációszókincs.

AJÁNLÁS

A halmaz fogalmának, a halmazműveleteknek a mély megértése hosszú folyamat, ami, ha elmarad, a későbbi tanulmányokat sok területen hátráltathatja. A függvény pontos fogalmának megértése szintén igen fontos, ez a fogalom lépten-nyomon előkerül a matematika tanulmányok során. A modul nagy hangsúlyt fektet e fogalom elmélyítésére, pontosítására, annak felismerésére, hogy a függvények körülvesznek bennünket, mindenütt beléjük botlunk.

Különösen nagy hangsúlyt fektet a modul különböző szövegkörnyezetben a függvényalkotás lehetőségének felismerésére, az értelmezési tartomány, értékkészlet, függvényérték, leképezés fogalmának elmélyítésére. Természetesen a függvények ábrázolása, a grafikonolvasás is fontos tanulói tevékenység, így a modul utolsó foglalkozásán ez kerül előtérbe.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Katz Sándor: *Függvények korszerű felfogásban* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1989)

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Halmozzuk a halmazokat			
	Halmaz, részhalmaz fogalmának megbeszélése differenciálással	Problémaérzékenység, problémareprezentáció, eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés	
1.	A halmazműveletek áttekintése, szituációs játék a tanulókból alkotott halmazokkal	Problémaérzékenység, problémareprezentáció, eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés	Eszközök: halmazműveleteket tartalmazó A4-es méretű fehér lapok (min. 15 db) vastag, sötét árnyalatú filctoll
2.	Hozzárendelések vizsgálata	Problémaérzékenység, problémareprezentáció, eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés	

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
II. Ki kihez tartozik?			
1.	Hozzárendelések és függvények alkotása	Együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás, érvelés, kritikai érzék	Eszközök: újságok forrásanyagokként Mellékletek a tanároknak: Példa Forrásanyagok listája
2.	Az elkészült hozzárendelések és függvények vizsgálata	Együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás, érvelés, kritikai érzék	
III. Szövegeljünk!			
1.	Szöveg alapján függvényalkotás	Szövegértés, szövegértelmezés, együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás, érvelés, kritikai érzék	Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap, és példák a kérdésekre és a függvényekre
2.	A kérdések és a függvények vizsgálata	Szövegértés, szövegértelmezés, együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás, érvelés, kritikai érzék	
3.	Torpedójáték	Szövegértés, szövegértelmezés, együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, problémamegoldás, érvelés, kritikai érzék	Eszközök: négyzetrácsos papírlap, két különböző színű ceruza

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
IV. Rajzzal is lehet!			
1.	Függvények ábrázolása	szövegértés, szövegértelmezés, együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, ábrázolás, reprezentáció	Eszközök: négyzetrácsos lapok
2.	Grafikon alapján történetek rekonstruálása, majd a történet alapján a grafikon megrajzolása.	szövegértés, szövegértelmezés, együttműködési képesség, kreativitás, eredetiség, ábrázolás, reprezentáció	Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap Melléklet a tanároknak: Történetek, grafikonok és kérdések A **B** feladatlap és megoldása

I. HALMOZZUK A HALMAZOKAT

Ráhangolódás (kb. 10 perc)

A csoport jelen lévő tagjai egy halmazt alkotnak, jelöljük ezt A-val. Hogyan lehetne másképpen megadni ennek a halmaznak az elemeit?

Megadhatjuk ennek a halmaznak egy-két részhalmazát is. Például, legyen S a szemüvegesek halmaza. Tudnátok még ilyen részhalmazokat mondani? Kik tartoznak közületek e halmazokba?

Hagyja a tanár, hogy a gyerekek javasolják a részhalmazokat, és a jelölést is hozzá. Ha a tanulók nem javasolnak egyetlen halmazt sem, akkor mondhat a tanár még példákat, hátha ez beindítja a tanulók fantáziáját. Írja fel a tanár a halmazokat szöveges meghatározással a táblára. Legalább 10 halmaz meghatározását adja meg az osztály!

A halmazok megadásánál kerüljön elő az elemek felsorolásával való megadás és a Venn-diagrammal történő megadás is. Ez utóbbi esetben az ábrázolásnál a négyszög és a zárt görbe vonalformát is érdemes használni, esetleg felváltva. A felsorolással és Venn-diagrammal való megadásnál csak egy-két példa kerüljön fel a táblára, a többit a tanulók a füzetükbe írják.

1. A halmazműveletek áttekintése, szituációs játék a tanulókból alkotott halmazokkal

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: halmazműveleteket tartalmazó A4-es méretű fehér lapok (min. 15 db), vastag, sötét árnyalatú filctoll; Munkaforma: közösen)

Ki tudná felsorolni a tanult halmazműveleteket?

Válasszunk az előbb felsoroltak közül két halmazt (pl. F: fiúk halmaza és S: szemüvegesek halmaza), és nézzük meg, kik tartoznak az $F \cup S$; $F \cap S$; $F \setminus S$ halmazokba!

Ismételje át a csoport a halmazműveleteket egy konkrét példán keresztül! A két halmazt a tanár válassza ki az előzőekben felírtak közül, és a tanulók először a füzetükbe adják meg a műveletekkel kapott halmazokat, majd beszélje meg a csoport azokat közösen!

Felkészültebb csoport esetén kettőnél több halmazzal végzett műveleteket is áttekinthet az osztály. Ha ismerik, akkor a komplementer halmaz is szerepeljen a megbeszélt halmazműveletek között!

Most játszani fogunk. A nálam lévő lapokra az előzőekben felírt halmazokkal végzett műveleteket írtam. Ha felmutatok egy lapot, akkor 10 másodpercen belül fel kell állnia annak, aki a lapon lévő halmazba tartozik! Ha valaki nem áll fel, pedig kellene neki, vagy feláll, de nem kellene neki, akkor kiesik. Vajon ki marad benn a legtovább?

A tanár készítse el a halmazműveleteket tartalmazó lapokat! A lapok mérete legalább A4-es legyen, és vastag, sötét árnyalatú filctollat írjon rájuk a tanár, hogy minden tanuló jól lássa a feliratokat! A lapokat elkészítheti a tanár aközben, hogy a tanulók a halmazokat javasolják, vagy még aközben, amikor az előző problémán dolgoznak. Legalább 15 ilyen lap készüljön!

A tanár ne mondja el előre, hogy milyen műveleteket írt fel a lapokra!

Lehetőleg legyen a műveletek között olyan, aminek a végeredménye az üres halmaz (például két diszjunkt halmaz metszete), és olyan is, amit egy halmaz és a valódi részhalmaza között végzünk.

Felkészültebb csoport esetén legyen olyan lap is, melyen három halmazzal képezett művelet szerepel.

A játék előtt üljön az osztály egy kupacba (ehhez lehet, hogy érdemes átrendezni egy kicsit a tantermet). A játék során a tanár véletlenszerűen húzzon egyet az elkészített lapok közül, és jól láthatóan mutassa fel azt a tanulóknak! Ha valaki kiesett, akkor az üljön ki a kupacból.
A játék végén ünnepelje meg valamilyen formában a csoport a győztest! A játékot többször is lejátszhatja a csoport, ha tetszik a tanulóknak. Esetleg készíthet a tanár újabb papírokat, bonyolultabb halmazműveletekkel.

2. Hozzárendelések vizsgálata

(Javasolt idő: 20 perc; Munkaforma: közösen)

Válasszunk egyet a legelőször felsorolt halmazok közül! Akik ebbe a halmazba tartoznak közületek, alkossák az egyik csoportot, a többiek a másik csoportot. Mindkét csoport gondolja ki, hogy ha az ő csoportjának minden tagjához hozzá kellene rendelni egy vagy több embert a másik csoportból, akkor azt hogyan lehetne megtenni!
Mondok egy példát:

> Ha B azok halmaza, akik a pad bal oldalán ülnek, J pedig azok halmaza, akik a jobb oldalon ülnek, akkor a B halmaz minden eleméhez rendeljük hozzá azt, aki a padban mellette ül! Ha valaki mellett nem ül senki, akkor hozzá egy előre kijelölt embert rendelünk a J halmazból.

Nagyon figyeljetek a hozzárendelésekre, mert ezután majd le is kell írnotok ezt lehetőleg a matematika nyelvén!

Ha kigondoltátok, akkor az első csoportja mutassa be a hozzárendelést, mondjuk úgy, hogy minden ember odamegy ahhoz, akihez őt rendelték!
A tanulók első csoportja bemutatja a hozzárendelését.
Adjátok meg a hozzárendelés alaphalmazát és képhalmazát!

Nézzük meg fordítva is, a másik csoport is mutassa be a hozzárendelését az előbbi módon!
A tanulók második csoportja is bemutatja a hozzárendelését.
Adjátok meg a hozzárendelés alaphalmazát és képhalmazát!

Most üljön le mindenki, és próbálja meg (lehetőleg a matematika nyelvén) leírni, hogyan történt a hozzárendelés az egyes esetekben!
Fontos, hogy a tanulók leírják azt, hogy mi történt, vagyis a hozzárendelés menetét! Ez többféle módon történhet, például nyilakkal, szabály megadásával, táblázattal stb. A tanulók egyesével olvassák fel az irományaikat, és a tanár kérje fel a többieket, hogy bírálják meg azt. Itt a humor sokat segíthet, nehéz pedagógiai feladat arra figyelni, hogy ne cikizésnek fogja fel az a tanuló a bírálatot, akinek éppen a munkájáról szó van. Javítsa a csoport mind a stiláris, mind a tartalmi hibákat egyaránt!
Érdemes a feladatot többször is végrehajtatni a gyerekekkel, olyan halmazok esetén, amelyeknek azonos, és olyan halmazokkal, melyeknek nagyon különböző az elemszámuk. Remélhetőleg több eset is előfordul a példák során, vagyis olyan hozzárendelés is születik, ahol egy tanulóhoz több másikat is rendelnek, vagy olyan hozzárendelés, ahol egy tanulót több is kiválaszt magának a hozzárendelés során.
Vizsgálja meg az osztály a hozzárendeléseket fordítva is! Itt nagyon különböző létszámú csoportok esetén remélhetőleg lesz olyan eset, amikor valamely tanulóhoz nem tartozik egy másik tanuló sem.
A foglalkozás végén kérje meg a tanár a tanulókat, hogy keressenek hozzárendelésekre hétköznapi példákat a környezetükben! Ilyen lehet például, ha mindenkihez hozzárendeljük a nevét, születési dátumát stb.

II. KI KIHEZ TARTOZIK?

Ráhangolódás (kb. 10 perc)
Tekintsük meg az általatok hozott hozzárendeléseket! Vizsgáljuk meg, hogy a hozzárendeléseitek függvény-e! Mi a hozzárendelés alaphalmaza, képhalmaza? Megadhatóak-e ezek a halmazok úgy, hogy a hozzárendelés függvény legyen?

Tisztázza az osztály a függvény fogalmát! Nagyon fontos kihangsúlyozni, hogy a definícióban két feltételnek kell teljesülnie, vagyis hogy a (nem üres) alaphalmaz **minden eleméhez** hozzá kell rendelni a (nem üres) képhalmaznak **pontosan egy elemét**. Vizsgálja meg az osztály a gyűjtött hozzárendeléseket e szempontok alapján!
Gyakori hiba, hogy egy hozzárendelést azért nem tekintenek függvénynek a tanulók, mert több elemhez is ugyanazt az elemet rendeli (ilyen például, ha minden tanulóhoz hozzárendeljük a vezetéknevét, és van két azonos vezetéknevű tanuló a csoportban). Beszéljék meg együtt, hogy ebben az esetben is függvény a hozzárendelés, hiszen teljesíti a definíció két feltételét. Elképzelhető, hogy egy hozzárendelés esetén, ha az alaphalmazt vagy a képhalmazt másképp fogalmazzuk meg, függvényt kapunk.
Melléklet a tanároknak: Példa
A megbeszélés közben az alaphalmaz, képhalmaz megfogalmazásról fokozatosan térjünk át az értelmezési tartomány, értékkészlet megfogalmazásra.
Ha a tanulók kevés hozzárendelést írtak, akkor felkérheti őket a tanár, hogy „helyben” gyártson mindegyikük egy-két hozzárendelést, és ezeket vizsgálják meg együtt.

1. Hozzárendelések és függvények alkotása

(Javasolt idő: 25 perc; Eszközök: újságok forrásanyagokként, Munkaforma: 3-4 fős csoportban)

Rendeződjetek 3-4 fős csoportokba!

Melléklet a tanároknak: Forrásanyagok listája

Minden csoport kap tőlem forrásanyagot. Tanulmányozzátok át, és ennek alapján gyártsatok hozzárendeléseket!
Írjon minden csoport 5 olyan hozzárendelést, ami függvény, és 5 olyat, ami nem függvény! Jól tervezzétek meg a hozzárendeléseket! Gondoljátok végig, hogy mi mindent kell megadni ahhoz, hogy adott legyen a hozzárendelés! Figyeljetek oda, hogy a gyártott hozzárendelések közül a függvények valóban függvények legyenek!
A feladat csak akkor éri el a célját, ha a csoport minden tagja részt vesz a munkában, s a kapott forrásanyag áttanulmányozása után mindenki keresi a lehetőséget a hozzárendelések (és függvények) alkotására. Hagyja a tanár, sőt biztassa a gyerekeket, hogy nézzék át alaposan a kapott anyagot, ne döntsenek elhamarkodottan.
Világosan derüljön ki a gyerekek leírásából, hogy mi a hozzárendelés alaphalmaza (kizárólag az adott anyagban szereplő „dolgok” összessége lehet), a képhalmaza, és az ezek közötti hozzárendelések (elemenként megadva, vagy leírással). A tanár munka közben vizsgálja meg, hogy a függvények esetében az értelmezési tartomány minden elemére végrehajtható a megadott hozzárendelés.

2. Az elkészült hozzárendelések és függvények vizsgálata

(Javasolt idő: 10 perc; Munkaforma: 3-4 fős csoportban)

Minden csoport adja tovább a következő csoportnak az elkészített hozzárendelések és függvények leírását, valamint a forrásanyagot is!

A csoportok ellenőrizzék a kapott leírásokban a következőket:

1. a nem függvény hozzárendelések valóban nem függvények;
2. a függvények esetében az értelmezési tartomány minden eleme szerepel-e a forrásanyagban, és egyértelmű-e a hozzárendelés!

Továbbá:

3. Határozza meg a csoport az ellenőrzésre kapott függvények esetében az értékkészletet is!
2. Értékelje írásban a csoport a létrehozott függvényeket!

A másik csoport által megadott hozzárendelések és függvények vizsgálata lehetőséget nyújt a hozzárendelések fogalmának elmélyítésére, a függvény fogalmának tudatosítására, s annak eldöntésére, hogy adott-e valóban a függvény.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

Ráhangolódás

Példa:
Minden tanulóhoz rendeljük hozzá a szüleit. Ez a hozzárendelés lehet függvény, ha a képhalmaz a felnőtt nőkből és férfiakból álló emberpárok halmaza (ahol minden párosnak egy nő és egy férfi tagja van), és nem függvény, ha a képhalmaz a felnőttek halmaza.
Az értelmezési tartomány szűkítésével általában gyártható függvény a hozzárendelésből, csak azokat az elemeket kell elhagyni, melyekhez nem rendelünk semmit. Ez a módszer abban az esetben nem működik, ha az alaphalmaz minden eleméhez több elemet is rendelünk.

1. Hozzárendelések és függvények alkotása

Forrásanyagok listája:
• Tv- és rádióműsor újság
• Mozi és színházműsor (például a helyi Est-lap)
• Vasúti menetrend (ha nincs az iskolában, akkor az Internetről egy része letölthető és kinyomtatható)
• Helyi tömegközlekedési menetrend
• Hirdetési újság
• Idegen nyelvű szótár
Más is elképzelhető a feladat alapanyagaként, például értelmező szótárak, lexikonok stb.

III. SZÖVEGELJÜNK!

Ráhangolódás (kb. 10 perc)

Egy mobiltelefon-társaság az egyik díjcsomagot a következő feltételekkel hirdeti:

- A kapcsolási díj 2 Ft. (Ezt minden kapcsolt beszélgetésnél meg kell fizetni.)
- A beszélgetés percdíja 10 Ft.
- 5 percnyi beszélgetés után 20%, 10 percnyi beszélgetés után a társaság 30% kedvezményt ad a percdíjból.

Mindenki írjon egy kérdést az eddigi információk alapján!

A tanulók ténylegesen írják le a kérdést lehetőleg úgy, hogy azt más tanuló ne lássa, ne befolyásolhassák egymást. Olvastassa fel a tanár a kérdéseket, és az osztály közösen keresse meg a válaszokat rájuk!
Valószínűleg előfordul majd olyan kérdés, hogy például: mennyit kell fizetni 2 percnyi beszélgetésért. Az ilyen kérdések rávezethetik a tanulókat arra, hogy lássák, miként függ a fizetendő összeg a beszélt időtartamtól. Az ilyen kérdések megválaszolásánál foglalják táblázatba, vagy használják a hozzárendelés nyilát a tanulók, például:
$2 \mapsto 2+2\cdot 10$ vagy $6 \mapsto 2+50+1\cdot 8$.

Felmerül a kérdés, hogy a percdíjat arányosan kell-e számolni, vagy minden megkezdett perc után kell-e fizetnie a telefonálónak. Az első esetben folytonos, a második esetben pedig szakaszonként folytonos függvényt kapunk, melynek az egész értékeknél ugrása van. Tisztázza mindkét eset jelentését az osztály.
Beszéljék meg, hogy az első esetben a fizetendő értékek tetszőleges (2-nél nagyobb) valós számok lehetnek (feltesszük, hogy a számlánál a nem egész forintoknak is van értelme, például: ezeket is összeadják, majd kerekítenek)!
A második esetben a fizetendő értékek csak pozitív egész számok lehetnek. (A telefontársaságok általában percdíj alapú tarifákat kínálnak, ami a második esetnek felel meg.)
Ezek tisztázása után beszélje meg az osztály például a következő kérdést: 22 Ft-ért hány perces beszélgetést lehet folytatni?

1. Szöveg alapján függvényalkotás

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: 2-3 fős csoportokban)

Alakítsatok ki 2-3 fős csoportokat!

Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap
Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap, és példák a kérdésekre és a függvényekre

Minden csoport rövid történeteket talál a feladatlapon. Írjatok olyan kérdéseket, melyek a szövegben lévő információk alapján megválaszolhatók, majd próbáljatok meg függvényt alkotni a történetek alapján! Adjátok meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét is!

A tanár kicsit segítsen az önállótlanabb csoportnak, de ne fogalmazzon meg helyettük kérdést, csak próbálja rávezetni őket! Ha a tanulók tanácstalanok a függvényalkotásban, akkor próbálja kérdésekkel rávezetni őket (a kérdések lehetőleg egyformák legyenek, csak a számadat változzék, például: az első történetben mennyit fizet Pisti, ha 2 kg, 3 kg stb. krumplit vásárol)! Talán ezzel az eljárással a tanulók felismernek valamilyen összefüggést, és annak alapján már tudnak függvényt alkotni. Lehetőleg a tanár a kérdéseit olyan kérdés alapján tegye fel, amit a tanulók már megfogalmaztak.
Nem kell feltétlenül minden csoportnak minden történethez függvényt alkotnia, de bíztassa őket a tanár, hogy kérdéseket mindegyikhez fogalmazzanak meg.

2. A kérdések és a függvények vizsgálata

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: közösen)

Nézzük meg, hogy melyik szöveg alapján milyen kérdéseket tettetek fel, milyen függvényeket alkottatok!
Az első szöveg alapján mit kérdeztetek meg?
A szöveg adatai alapján milyen függvényt alkottatok?

Minden egyes probléma megoldását hasonló módon elemezze ki a csoport!
Olvassa fel az egyik vállalkozó tanuló a történetet (ha nincs ilyen, akkor lehet a tanár is), és a csapatok tegyék fel sorra a kérdéseiket.
Ha elhangzott egy kérdés, akkor kérdezze meg a tanár a többi csoportot, hogy tettek-e fel hasonló kérdést, és ezeket olvastassa fel velük.
Ha már minden csapat felolvasta az azonos típusú kérdését, akkor kérdezze meg a tanár a tanulókat, hogy van-e másfajta kérdésük is az adott történethez!
Érdemes sok kérdést megfogalmazni, megfogalmaztatni a tanulókkal, mielőtt rátérnének egy-egy függvény megadására.
Ha már a történethez írt összes kérdés elhangzott, akkor térjen át az osztály a függvény(ek) megbeszélésére. Remélhetőleg egy-egy történethez különböző függvényeket is megadtak a tanulók. Ez esetben a függvények megbeszélése során vitassák meg azt is, hogy a megadott függvény alapján mely feltett kérdésekre könnyű válaszolni.
Az egyes függvények esetében beszélje meg az osztály, hogy mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete.
Végezetül a tanulók minden feladatlapra, minden történet mellé írják fel a létrehozott függvényt (a megbeszélés során javított formában), mert a következő foglalkozáson ismét használni fogják azokat a tanulók!

3. Torpedójáték

(Javasolt idő: 5 perc; Eszközök: négyzetrácsos papírlap, két különböző színű ceruza; Munkaforma: párban)

Ismeritek a torpedójátékot?
Mindenki rajzoljon a lapjára egy 8 × 8-as négyzetrácsot, ez lesz a játék tengere!
Számozzátok be a sorokat 1-től 8-ig, és betűzzétek meg az oszlopokat A-tól H-ig! Erre a tengerre kell elhelyezni a hajókat, melyekre az ellenfelek felváltva torpedókat lőnek egymás hajóira. Az nyer, aki előbb süllyeszti el az ellenfele összes hajóját.
Torpedót úgy tudsz kilőni, hogy megmondod a tenger egy négyzetének a helyét, például C5. Ha van ott hajó, akkor az ellenfeled azt mondja: „Talált.”, különben azt kell mondania: „Nem talált.”. Ha egy hajót teljesen elsüllyesztettél, akkor azt kell mondania: „Talált, süllyedt.”.
A hajók kis négyzetekből állnak, melyeknek mindegyike legalább egy lappal csatlakozik a hajót alkotó többi négyzethez. A hajók nem érintkezhetnek egymással (még a sarkuknál sem).
A következő hajókat kell elhelyezni a tengeren:

- 3 db 1 négyzetből állót
- 2 db 2 négyzetből állót
- 2 db 3 négyzetből állót
- 1 db 5 négyzetből állót

Érdemes úgy dolgoznod, hogy egy színnel jelöld a saját kérdéseid is (ponttal, ha nem talál, X-szel, ha talál), és egy másik színnel az ellenfeled célozgatásait is!
Vigyázz, úgy helyezd el a hajóidat a tengeren, hogy azokat ellenfeled ne lássa!

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Szöveg alapján függvényalkotás

A feladatlap, és példák kérdésekre, függvényekre

1. Pisti a piacon krumplit vásárolt, kilóját 130 forintért. Mivel elfelejtett szatyrot vinni, vett egy kosarat is 450 forintért, amibe legfeljebb 15 kg krumpli fér.

Megoldás:
Néhány lehetséges kérdés:

Mennyit fizetett Pisti összesen, ha 4 kg krumplit vásárolt? (970 Ft)
Mennyi krumplit vett Pisti, ha összesen 1035 Ft-ot fizetett? (Meg kell gondolni, hogy csak egész kilogramm krumplit vásárolhatott-e Pisti!) (4,5 kg)
Legfeljebb mennyit fizethetett Pisti a piacon, ha csak krumplit vett? (2400 Ft)

Egy lehetséges függvény:

Adjuk meg a Pisti által fizetett összeget a vásárolt krumpli mennyiségének függvényében, ha az árus csak egész kg-nyi krumplit tudott kimérni, és Pisti legfeljebb annyit vásárolt, amennyi belefér a szatyorba! ($x \mapsto 130x + 450$, ahol x pozitív egész, és legfeljebb 15.)

2. Pali olyan egyenlő szárú háromszögeket rajzolt, melyek kerülete 30 cm.

Megoldás:
Néhány lehetséges kérdés:

Mekkora a háromszög alapja, ha a szára 8 cm? (14 cm)
Mekkora a háromszög szára, ha az alapja 4 cm? (13 cm)

Egy lehetséges függvény:

Adjuk meg a háromszög alapjának hosszát a szár függvényében!
($x \mapsto 30 - 2x$, Ét.: A 7,5-nél nagyobb és 15-nél kisebb számok halmaza)

Érdemes külön megvizsgálni az értelmezési tartományt!

3. Kukutyinból Boncidába olyan egyenes út vezet, melynek hossza 60 km. Kukutyinból egy lovas kocsi indul Boncidára, és ugyanekkor Boncidáról Kukutyinba indul egy kerékpáros. A lovas kocsi sebessége 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A kerékpáros, akinek sebessége kétszer akkora, mint a lovas kocsié, Boncidára érve azonnal visszafordul.

Megoldás:
Néhány lehetséges kérdés:

Az indulástól számítva mennyi idő múlva találkozik először a lovas kocsi és a kerékpáros? (2 óra)
Az indulástól számítva mennyi idő múlva lesz a lovas kocsi és a kerékpáros távolsága 30 km? (1 óra, illetve 3 óra)
Milyen messze lesz a lovas kocsi Boncidától az indulás után 2,5 órával? (35 km)

Egy lehetséges függvény:

Adjuk meg a lovas kocsi és a biciklista távolságát az indulástól az első találkozásig eltelt idő függvényében! ($t \mapsto 60 - 30t$, ahol $0 \le t \le 2$)

4. Két 6 cm magas gyertya közül a vastagabbik 6 óra alatt, a vékonyabbik 3 óra alatt ég le. Mindkét gyertya egyenletesen ég. A két gyertyát egyszerre meggyújtjuk.

Megoldás:
Néhány lehetséges kérdés:

A meggyújtásuk után 2 órával mekkora lesz a két gyertya együttes magassága? (6 cm)
A meggyújtásuk után mennyi idő múlva lesz a két gyertya együttes magassága 5 cm? (2 óra 20 perc)

Egy lehetséges függvény:

Adjuk meg a két gyertya együttes magasságát a meggyújtásuktól az egyik gyertya leégéséig eltelt idő függvényében! ($t \mapsto 12-3t$, ahol $0 \le t \le 3$)

Egy másik példa:

Adjuk meg a két gyertya együttes magasságát a meggyújtásuktól a vastagabb gyertya leégéséig eltelt idő függvényéban! ($t \mapsto \begin{cases} 12-3t, \ ha\ 0 \le t \le 3 \\ 6-t, \ ha\ 3 < t \le 6 \end{cases}$

5. Panni és öccse almát szednek. Egy perc alatt Panni nyolc darab almát szed, míg öccse ötöt.

Megoldás:
Lehetséges kérdések:

Mennyi almát szedtek 10 perc alatt? (130 db)
Hány perc alatt szednek 143 almát? (11 perc)
Ha a fán összesen 247 alma volt, akkor mennyi idő alatt végeztek? (19 perc)

Egy lehetséges függvény:

Adjuk meg az általuk leszedett alma mennyiségét az idő függvényében. ($t \mapsto 13t$, ahol $0 \le t \le 19$)

IV. RAJZZAL IS LEHET!

Ráhangolódás (10 perc)

A torpedójáték tengerén az egyes mezőket egy betűvel és számmal jelöljük. Hasonlít a koordináta-rendszerhez, ott a pontokat két számmal adjuk meg. Vajon ez egy függvény a tenger mezői és a jelpárok, vagy a sík pontjai és a számpárok között?
Tudnátok még ehhez hasonló koordináta-rendszereket mondani?

A hasonló koordináta-rendszerek között említhetjük például a sakktáblát vagy a várostérképek mezőkre osztását (egy utca pl. a 15. oldalon, a C6 mezőben található). Említhetik a tanulók a földgömbön a szélességi és hosszúsági köröket, mint koordináta-rendszert.
Jó alkalom ez arra, hogy tisztázza az osztály a koordináta-rendszer fogalmát. Tekintse át az osztály a derékszögű koordináta-rendszerről szerzett ismereteit, tapasztalatait. Beszéljék meg, hogy a koordináta-rendszer megadásával (tengelyek és egységek rögzítése, megadása) egy függvényt adunk meg a sík pontjai és a számpárok között.
Beszélhet ezek után az osztály a számegyenesről, mint a valós számok és egy egyenes pontjai között létesített függvénykapcsolatról. Ha szükséges, beszéljék meg azt is, hogy mikor tekintünk adottnak egy számegyenest, és ha pl. két egész számot bejelölünk, akkor hogyan kereshetjük meg a többi egész vagy racionális szám helyét a számegyenesen. Ha a tanulók már tanulták a gyökvonást, akkor esetleg megbeszélhetik, hogy pl. a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ helyét hogyan jelölhetjük ki a számegyenesen.

1. Függvények ábrázolása

(Javasolt idő: 15 perc; Eszköz: négyzetrácsos papírlap; Munkaforma: 2-3 fős csoportokban)

Alakítsatok 2-3 fős csoportokat!
Az előző foglalkozáson történetek alapján függvényeket gyártottatok. Ábrázoljátok ezeket a függvényeket!
Mielőtt egy-egy függvénygrafikon megrajzolásához hozzákezdenétek, gondoljátok végig, hogyan érdemes az egyes tengelyeken a beosztásokat megválasztani! Ügyeljetek arra, hogy mi az egyes függvények értelmezési tartománya! Az ábrázolás után jelöljétek meg színessel a tengelyeken az egyes függvények értelmezési tartományát, értékkészletét!
Tegyetek fel a történetekhez olyan kérdéseket, melyekre a grafikon alapján könnyű válaszolni!

Ügyeljen a tanár arra, hogy a tanulók jól válasszák meg a tengelybeosztásokat! Ha elsőre nem sikerül jól ábrázolni egy-egy függvényt egy csapatnak, akkor beszélje meg velük a tanár a kudarc okát, és kérje meg őket, hogy tegyenek javaslatot arra, miként tudják a hibát kijavítani.
Ellenőrizze a tanár, hogy a tanulók helyesen jelölik-e be az értelmezési tartományt és az értékkészletet!
Várhatóan a tanulók a már feltett kérdéseik közül válogatnak az egyes grafikonokhoz kérdéseket, de remélhetően megjelennek a függvények szélsőértékére, monoton intervallumaira, a görbék változásának gyorsaságára vonatkozó kérdések is.

2. Grafikon alapján történetek rekonstruálása, majd a történet alapján a grafikon megrajzolása

(Javasolt idő: 20 perc; Munkaforma: 2-3 fős csoportokban, páros számú csoport javasolt)

Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása

Minden csoport kap egy grafikont egy elkezdett történettel – ezt a történetet kell a grafikon alapján befejeznetek. Mindegyik grafikonhoz tartoznak kérdések is, válaszoljátok meg ezeket is!
Ha ez sikerült, írjatok ti is további 3-4 kérdést a grafikon alapján! Ha készen vagytok, cseréljétek ki egy másik csoporttal a történeteteket! A történet alapján rajzolja meg minden csoport az ahhoz tartozó grafikont. A két csoport közösen nézze meg, hogy a történet alapján készült grafikonok egyeznek-e az eredeti grafikonokkal, majd cseréljék ki most a kérdéseiket, és mindenki keresse meg azokra a választ!

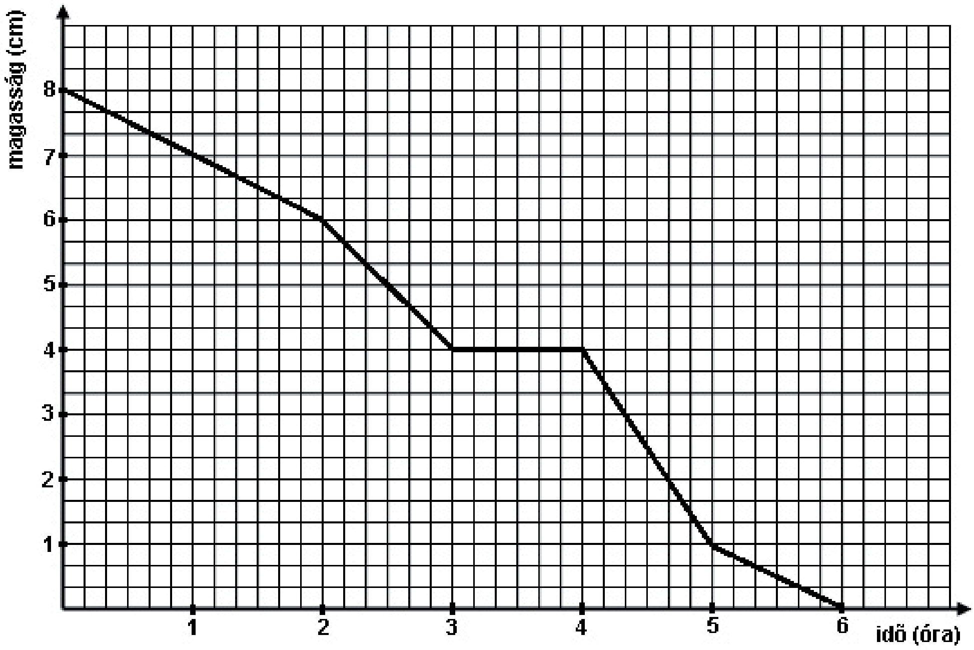
Javasolhatja a tanár, hogy a tanulók először a kérdésekre próbáljanak válaszolni, és csak ezután kezdjék el a történetírást! Fontos, hogy a történetírás előtt megértsék a grafikonokat – ebben segíthetnek a kérdések. Ha kell, fogalmaztasson meg a tanulókkal további kérdéseket is a grafikon alapján. Ha valamely csoport ezután is tanácstalan a történettel kapcsolatban, akkor kérdezzen rá a tanár, hogy a görbék egyes darabjai mit jelentenek, például ezen a darabon miért párhuzamos az x tengellyel a grafikon, itt miért emelkedik stb.!
Ha két csoport készen van, akkor a leírtak szerint szövetkezzenek, és először a történeteket cseréljék ki, majd rajzoljanak grafikont, végül jöhetnek az általuk adott kérdések! A két csoport ellenőrizze egymás munkáját, a tanár ezt csak felügyelje, és csak a vitás esetekben foglaljon állást. Ha valamelyik csoport a többihez képest nagyon hamar készen van, akkor kapjon másik grafikont is, és írja meg annak a történetét is.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

2. Grafikon alapján történetek rekonstruálása, majd történet alapján a grafikon megrajzolása

B feladatlap és megoldása

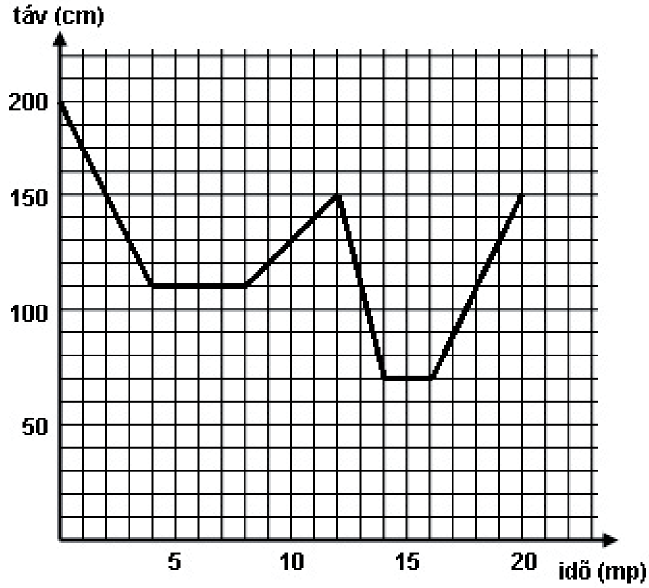
1. történet:
Két egyenlő magasságú gyertya közül a vékonyabbik kétszer olyan gyorsan ég le, mint a vastagabbik. A grafikon a két gyertya együttes hosszát mutatja az idő függvényében.



Kérdések:
1. Mennyi ideig égett csak a vastagabbik gyertya?
2. Hány percig nem égett egyik gyertya sem a vizsgált időszakban?
3. Mennyi idő alatt égett le a vékonyabbik gyertya?
4. Eredetileg milyen magasak voltak a gyertyák?

2. történet:

Az asztal fölé 2 méteres magasságba egy lámpát függesztettek, ezen egy pók lóg. A grafikon a pók asztaltól való távolságát ábrázolja az idő függvényében.

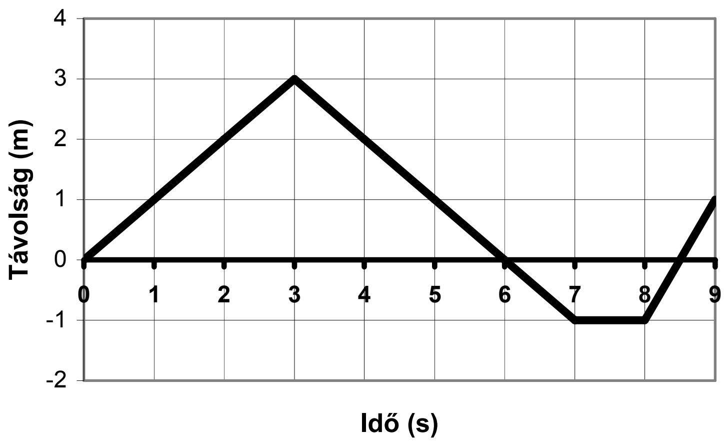


Kérdések:

1. Összesen hány másodpercig mászott felfelé a pók a megfigyelés ideje alatt?
2. Hány centiméterre távolodott el maximálisan a pók a lámpától?
3. Melyik szakaszon ment a leggyorsabban a pók?
4. Hány másodpercig volt a pók közelebb a lámpához, mint az asztalhoz?

3. történet:

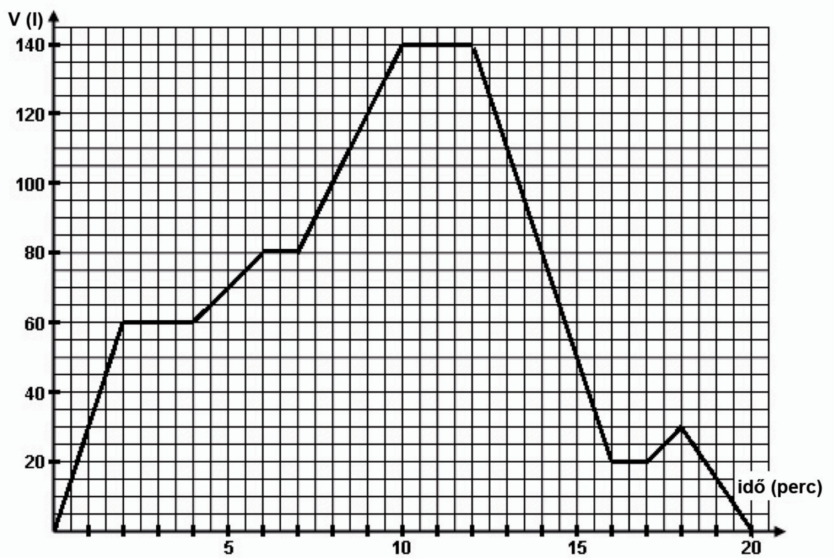
András és Béla 60 méteres távon versenyt futnak. A grafikon azt mutatja, hogy az indulástól számított 9 másodperc során András a verseny közben hány méterrel előzi meg Bélát.



Kérdések:

1. Összesen hány másodpercig vezetett Béla a verseny során?
2. Ki nyerte a versenyt?
3. Mikor futott a két fiú egyforma sebességgel?
4. Hány másodpercig futott Béla gyorsabban, mint András?

4. történet:
Egy kádba két csapból engedhető a víz, és a lefolyón ereszthető le. Az egyik csap vízhozama kétszerese a másik csapénak. A kádban lévő víz mennyiségét mutatja a grafikon az idő függvényében.



Kérdések:
1. Hány liter vizet engedtünk összesen a kádba?
2. Mennyi víz folyik ki az egyik, mennyi a másik csapból egy perc alatt?
3. Mennyi ideig volt nyitva legalább az egyik csap?
4. Mikor volt a kádban pontosan 80 liter víz?

Megoldások:

1. történet:
A történet:
Két ugyanolyan magas gyertya közül a vékonyabbik kétszer olyan gyorsan ég le, mit a vastagabbik. Először 2 órára a vastagabbikat gyújtjuk csak meg, majd ezt eloltva a vékonybbikat égetjük 1 óra hosszat. Ezután 1 órán keresztül egyik gyertya sem ég, majd meggyújtva mindkettőt hagyjuk leégni őket. Miután a vékonyabbik gyertya teljesen leégett, a vastagabbik még egy órán keresztül világított. Ábrázoljuk a gyertyák együttes hosszát az idő függvényében!

A válaszok:
1. 3 órán keresztül.
2. 1 h.
3. 2 óra alatt.
4. 4 cm.

2. történet:
A történet:
Az asztal fölött 2 méter magasságban van egy lámpa, ezen egy pók lóg. A pók 4 másodperc alatt a lámpáról leereszkedik 90 centimétert, majd 4 másodpercig pihen. Ezután 4 másodperc alatt visszamászik 40 centimétert. Valamit észrevesz, így hirtelen 2 másodperc alatt ereszkedik 80 centit, majd pihen 2 másodpercet, és ismét visszamászik, most 80 centit 4 másodperc

alatt. Ábrázoljuk a pók asztaltól való távolságát az idő függvényében, ha az egyes szakaszokon a sebessége egyenletes volt.

A válaszok:
1. 8 másodpercig.
2. 130 cm.
3. A 12.-től a 14. másodpercig.
4. 13,25 s és 17,5 s között volt távolabb a lámpától, mint az asztaltól, tehát 15,75 másodpercig volt összesen közelebb a lámpához, mint az asztalhoz.

3. történet:

A történet:

András és Béla 60 méteres távon versenyt futnak. Az első 3 másodpercben András 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal fut gyorsabban Bélánál. Ezután Béla beleerősített, és a következő 4 másodpercben ő gyorsabb Andrásnál, szintén 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal. A következő másodpercben a két fiú egyforma sebességgel fut, végül az utolsó másodpercben András hajrázik, és 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal gyorsabb Bélánál. Ábrázoljuk, hogy a verseny alatt András hány méterrel előzi meg Bélát az idő függvényében!

A válaszok:
1. 2,5 másodpercig (a 6.-tól a 8,5.-ig).
2. András.
3. A 7. és a 8. másodperc között.
4. 4 másodpercig (a 3. és a 7. másodperc között.)

4. történet:
A történet:
Egy kádba két csapból engedhető a víz, és a lefolyón ereszthető le. Az egyik csap vízhozama kétszerese a másik csapénak. Mindkét csapot megnyitva 2 perc alatt 60 liter vizet engedtünk a kádba, majd mindkét csapot elzártuk. Két perc múlva 2 percre megnyitottuk az egyik csapot, és még 20 liter vizet engedtünk a kádba. Egy perc múlva megnyitottuk a másik csapot, és 3 perc alatt még 60 liter vizet engedtünk a kádba. Két perc múlva kinyitottuk a lefolyót, és 120 liter vizet kiengedtünk 4 perc alatt. Ezután 1 percre újra megnyitottuk az első csapot, végül a lefolyót megnyitva leengedtük az összes vizet a kádból. Ábrázold a kádban lévő víz mennyiségét az idő függvényében!

A válaszok:
1. $140+10=150$ litert.
2. Az egyikből 10, a másikból 20 liter percenként.
3. 8 percig.
4. A 6. és a 7. perc között, valamint a 14. perc kezdetén.