MATEMATIKA „C"
8. évfolyam

4. modul
OSZTOGATÓ

Készítette: Surányi Szabolcs

A modul célja	A tanulók számelméleti ismereteinek elmélyítése, ismereteik tudatosítása, elemző képességük fejlesztése.
Időkeret	3 x 45 perc
Ajánlott korosztály	13–14 évesek; 8. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Tapasztalatszerzés (NAT szerint). Szűkebb környezetben: Kombinatorika, valószínűségszámítás. 8. o. „C" 1. modul. Ajánlott megelőző tevékenységek: Tanórai számelméleti ismeretek.
A képességfejlesztés fókuszai	Gondolkodási képességek: Deduktív következtetés, induktív következtetés, mennyiségi következtetés, érvelés, bizonyítás. Kommunikációs képességek: Szövegértés, szövegértelmezés

AJÁNLÁS

A számelmélet a matematika egyik legérdekesebb területe. Könnyű olyan problémákat megfogalmazni e témakörben, melyek megértése nagyon kevés előismeretet kíván, mégis több száz vagy több ezer éve nyitott kérdésnek számítanak. Az ilyen problémák felvetése és vizsgálata még a kevéssé motivált tanulóknak is érdekes lehet.

Az első foglalkozáson alkalmazott tesztforma, miután nem számonkérés a célja, különösen alkalmas a tanulók ismereteinek felelevenítéséhez, elmélyítéséhez, hiszen minden tanuló a saját tempójában haladhat. A tananyagrész több irányú körüljárása flexibilis gondolkodásra készteti a tanulókat.

A prímszámokkal kapcsolatban sok (ma is nyitott) kérdés vethető fel. A máig megoldatlan problémák akár több ezer évesek is lehetnek, mégis egyszerű érthetőségük miatt könnyen érzékennyé tehetők a tanulók irántuk.

A harmadik foglalkozáson megalkotandó öröknaptár az osztási maradékokkal történő számolásnak egy érdekes alkalmazása.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Eukleidész: *Elemek*
http://www.mersenne.org*
http://orange.ngkszki.hu/~trembe/primek/prim01.htm*

* 2007 augusztusában a honlap elérhető

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Tesztelő			
1.	Oszthatósági szabályokra visszavezethető „számvarázslat"	Deduktív következtetés, gondolkodási sebesség, érvelés, bizonyítás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés	Melléklet a tanároknak: Magyarázat Ötletek
2.	Számelméleti problémákkal kapcsolatos tesztfeladatok	Deduktív következtetés, gondolkodási sebesség, érvelés, bizonyítás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés	Eszközök: számológép Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap és megoldása Segítség az **A** feladatlap megoldásához

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
II. Príma prímek			
1.	Prímszámok száma	Egymásra figyelés, deduktív és induktív következtetés, mennyiségi következtetés, érvelés, bizonyítás, probléma-reprezentáció, probléma-érzékenység	Eszközök: számológép Tanulói munkafüzet: **A** táblázat Melléklet a tanároknak: Prímszámok száma
2.	Prímszámokkal kapcsolatos feladatok	Egymásra figyelés, deduktív és induktív következtetés, mennyiségi következtetés, érvelés, bizonyítás, probléma-reprezentáció, probléma-érzékenység	Eszközök: számológép Tanulói munkafüzet: **A** táblázat **B** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása
3.	Prímszámokkal kapcsolatos problémák (*frontális*)	Egymásra figyelés, deduktív és induktív következtetés, mennyiségi következtetés, érvelés, bizonyítás, probléma-reprezentáció, probléma-érzékenység	Eszközök: számológép Tanulói munkafüzet: **A** táblázat **B** táblázat

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, mellékletek**
III. Mi marad a végén?			
1.	Maradékos osztásra visszavezethető stratégiajáték	Deduktív és induktív következtetés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, gondolkodási sebesség	Eszközök: papírlapok, pénzérmék, idei naptárak, 2000-es és 2001-es naptárak. „Ki lép utolsónak?” játéktábla. Tanulói munkafüzet: „Ki lép utolsónak?” játéktábla Melléklet a tanároknak: A nyerő stratégia
2.	Öröknaptár készítése	Ddeduktív és induktív következtetés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, gondolkodási sebesség	Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap **D** feladatlap **E** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **C** feladatlap és megoldása A bütyökszabály A **D** feladatlap és megoldása Az **E** feladatlap és megoldása A képlet Tetszőleges dátum napja

I. TESZTELŐ

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

Emlékeztessük a tanulókat arra, hogy a természetes „számországot” hogyan mutattuk be az elmúlt évben: A király a 0, a királynő az 1, további „lakosok” a 2 és annál nagyobb egész számok. A 0 minden természetes számnak többszöröse, ugyanis nullaszorosa (ezért ez a király). Az 1 minden természetes számnak osztója (ezért ez a királynő). Vannak olyan „lakosok”, amelyeknek pontosan két osztója van a természetes számok között, ezek a prímszámok (építő mesterek). A király, a királynő és az építő mesterek kivételével minden további „lakos” előállítható szorzás művelettel egy vagy több „építő mesterből”. Ezeket a „lakosokat” a matematikában összetett számoknak nevezzük. Bármilyen módon is bontjuk fel az összetett számokat prímszámok szorzatára, mindig pontosan ugyanazokból a prímekből álló szorzatot kapjuk, legfeljebb a tényezők sorrendje más. A lakosok ruhájából (a számok számjegyeiből) is sok következtetést vonhatunk le, ismételjük át a már ismert oszthatósági szabályokat.

Ha a csoport nem vette végig a 7. évfolyam számára készült modulokat, akkor itt következhet az egész számország (előbbi) bemutatása.

1. A 9-cel oszthatóság szabályára visszavezethető feladat

(Javasolt idő: 10 perc; Munkaforma: egyénileg, majd párban)

Most jöjjön egy számvarázslat! Mindenki válasszon egy kétjegyű pozitív egész számot és írja le azt a papírra! A következő lépések mindegyike után kapott eredményt is írjátok le sorban egymás alá!

1. A gondolt szám számjegyeinek összegét vond ki a számból!
2 .Add össze az így kapott szám számjegyeit!
3. Szorozd meg az így kapott számot az eredeti számmal!
4. Vond ki ebből az eredeti szám négyszeresét!
5. Oszd el a kapott számot 5-tel!

Milyen számot kaptál? Ki tudná megmagyarázni, miért kapta vissza az eredetileg választott számot?

A tanár sorolja a lépéseket, a tanulók jegyezzék fel a papírra a kapott eredményeket. Ezután tegye fel a kérdéseket, miután a tanulók észrevették, hogy visszakapták az eredeti számot. Bíztassa őket, hogy próbálják ezt megmagyarázni. Hasonlítsák össze egymással a leírt számokat. Valószínűleg hamar észreveszik, hogy a második lépés után mindenkinél 9 az eredmény. (Ennek magyarázata a mellékletben.) Az utolsó három lépés jelentőségét valószínűleg hamar észreveszik, nagyobb gondot csak az előző észrevétel magyarázata jelenthet.
Melléklet a tanároknak: magyarázat

Alakítsatok párokat, és gyártsatok ti is ilyen számvarázslatot, például úgy, hogy a végeredmény a párotok életkora legyen!

Hagyja a tanár a párosokat dolgozni, hagy vitassák meg egymás között az ötleteiket. Segíthet a párosoknak (ötletek a mellékletben.) Ha valamelyik páros jónak találja az általa gyártott számvarázslatot, akkor csináltassa azt meg az egész csoporttal.
Melléklet a tanároknak: ötletek

2. Számelméleti problémákkal kapcsolatos tesztfeladatok

(Javasolt idő: 20 + 10 perc; Eszközök: számológép; Munkaforma: párban, majd frontális)

Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap
Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap és megoldása

Az **A** feladatlapot páronként közösen kell megoldanotok. Próbáljatok meg minél több tesztkérdésre közösen válaszolni! A megoldáshoz használhattok számológépet!

Mielőtt a teszthez hozzákezdenének, beszélje meg a csoport, hogy milyen taktikával érdemes a megoldásokba belekezdeni. Itt határozottan a páros munkán van a hangsúly, a sok feladattal nem valószínű, hogy egy tanuló egyedül is megbirkózik. A taktika lehet, hogy a páros egyik tagja elölről, a másik hátulról kezd neki a feladatoknak, vagy az egyik a páros, a másik a páratlan sorszámú feladatokat nézi stb., és ami nem ment, azt a végén közösen megbeszélik. Figyelmeztesse a tanár a csoportot, hogy csak adott idő áll rendelkezésre a feladatok megoldásához, és közben is szóljon, hogy még mennyi ideje van a pároknak a feladatmegoldásra.

Beszéljük meg a feladatok megoldásait!

Melléklet a tanároknak: Segítség az **A** feladatlap megoldásához
A tanár ismerteti a megoldást, majd nézze meg, hogy hány páros adott jó választ. Ha a csoport nagy része nem oldotta meg jól a feladatot, akkor egy olyan páros ismertesse a megoldást, akinek sikerült az adott feladatot jól megoldania. A tanár nyugodtan segítsen ilyenkor a megoldás ismertetőjének, ha hiányosan vagy rosszul indokol. Nem baj, ha az összes feladat megbeszélésére nem kerül sor, erre egy későbbi időpontban (esetleg a következő foglalkozás elején) vissza lehet térni.Minden tanuló munkafüzetében ott van a tesztlap, hátha van kedvük később is foglalkozni vele.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. A 9-cel oszthatóság szabályára visszavezethető feladat

Magyarázat:
Ha egy számból kivonjuk a számjegyeinek összegét, akkor 9-cel osztható számot kapunk, mert a számnak és a számjegyei összegének kilences maradéka megegyezik. A kapott kétjegyű szám kisebb 99-nél, így a második lépésben minden tanuló papírján a 9 szerepel. A harmadik lépésben vesszük a szám kilencszeresét tehát, a negyedik és ötödik lépésben pedig a kilenced részét, így visszakapjuk az eredeti számot.

(Legyen a szám $\overline{ab} = 10a + b = 9a + a + b$, amiből látszik, hogy a szám 9-es maradéka a számjegyei összegének maradékával megegyezik.)

Ötletek:
1. Legegyszerűbb változat, ha az utolsó két lépést változtatják meg, például: Vond le az eredeti szám kétszeresét, majd oszd el héttel az így kapott számot.
2. Az életkor kijöhet, ha a kilenchez eljutás után valamennyit hozzáadnak az eredményhez.
3. Az elején adassunk hozzá a választott számhoz 50-et, ha a szám 50-nél kevesebb, vagy vonjunk ki a számból 50-et, ha annál több. Ha pont az 50-re gondolt valaki, akkor azzal ne csináljon semmit.

2. Számelméleti problémákkal kapcsolatos tesztfeladatok

A feladatlap és megoldása

1. Mennyi a számjegyek összege abban a legnagyobb háromjegyű páros számban, melyben minden számjegy különböző prímszám?
A: 18 B: 17 C: 15 **D: 14** E: 12

Megoldás:
752

2. Hány 0 lesz a 16 tényezős $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 24 \cdot 25$ szorzat végén?
A: 4 **B: 5** C: 2 D: 1 E: Egy sem

Megoldás:
Mert a szorzat tényezőinek prímtényezős felbontásában az 5-ös prímszám éppen 5-ször szerepel, a 2-es prím is legalább ötször, így a szorzat osztható 10^5-nel.

3. Az alábbi számok között pontosan egy olyan van, amelyik nem lehet egy természetes szám számjegyeinek a szorzata. Melyik az?
A: 3240 **B: 4095** C:3024 D:2625 E: 1134

Megoldás:
Mivel csak a 4095-nek van kétjegyű prímszám osztója. $4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.
A többi szám csak egyjegyű prímszámokkal osztható: $3240 = 3^4 \cdot 5 \cdot 2^3$, $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$, $2625 = 3 \cdot 5^3 \cdot 7$ és $1134 = 2 \cdot 3^5 \cdot 7$.

4. Tekintsük azokat a 100-nál kisebb pozitív összetett számokat, melyek prímtényezős felbontásában a 7 a legkisebb prímtényező. Hány ilyen van?

A: 3 B: 4 C: 5 D: 7 E: 14

Megoldás:

7^2, $7 \cdot 11$ és $7 \cdot 13$

5. Hány olyan négyjegyű természetes szám van, amelyik osztható a négy legkisebb prímszámmal is és a négy legkisebb összetett számmal is?

A: 10 B: 6 C: 5 **D: 3** E: 1

Megoldás:

A keresett négyjegyű szám osztható a 2, 3, 5, 7, 4, 6, 8, 9 számok mindegyikével. A legkisebb ilyen szám a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Négyjegyű még ennek a számnak a 2-szerese és 3-szorosa, azaz 5040 és 7560.

6. Mennyi a számjegyek összege abban a legnagyobb háromjegyű prímszámban, melyben minden számjegy prímszám?

A: 23 B: 19 C: 12 D: 15 **E: 17**

Megoldás:

A megoldást a 700-nál nagyobb és 800-nál kisebb prímszámok között kereshetjük. A függvénytáblázat segítségével a tanulók is könnyen megtalálhatják, hogy a keresett háromjegyű prímszám a 773.

7. Hány igaz állítás van a következő négy között?

Ha egy egész szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal is.

Ha egy egész szám a 3 többszöröse, akkor a 6-nak is többszöröse.

Ha egy egész szám osztható a 4-gyel és a 6-tal, akkor osztható a 24-gyel is.

Ha egy egész szám 3-mal osztva 1-et ad maradékul, akkor 6-tal osztva is 1-et ad maradékul.

A: 4 B: 3 C: 2 **D: 1** E: Mind hamis

Megoldás:

Csak az első állítás igaz.

8. Az 1, 2 és a 3 számjegyek mindegyikének felhasználásával hány 200-nál nagyobb hárommal osztható háromjegyű egész szám képezhető?

A: 2 B: 3 **C: 4** D: 6 E: egy sem

Megoldás:

231, 213, 321, 312

9. Miklósnak ki kell találnia a többiek által gondolt számot. A következőket mondták neki a többiek:

Aladár: A gondolt szám a 21. Balázs: A gondolt szám prímszám.

Csongor: A gondolt szám páros. Dénes: A gondolt szám a 25.

Kiderült, hogy Aladár és Balázs közül csak az egyikük mondott igazat, illetve Csongor és Dénes közül is csak az egyikük mondott igazat. Melyik számra gondoltak?

A: 2 B: 3 C: 21 D: 25 E: nem lehet megmondani

Megoldás:

Mivel a 21 nem páros szám és a 25 nem prímszám, csak a páros és prím teljesülhet egyszerre.

10. Három természetes szám összege osztható 4-gyel. Hány hamis van a következő négy állítás között?

Mind a három szám biztosan osztható 4-gyel.

Pontosan két szám osztható ezek közül 4-gyel.

Legalább egy szám osztható közülük 4-gyel.

Lehet köztük olyan, amelyik nem osztható 4-gyel.

A: 0 B: 1 C: 2 **D: 3** E: 4

Megoldás:

Csak az utolsó igaz, a többi hamis. Az első állításra ellenpélda: 1+1+2. A másodikra állításnál elég a négyes maradékokat nézni, ezek összegének maradéka ilyenkor nem nulla. A harmadik állításra jó az elsőre adott ellenpélda.

11. Két pozitív egész szám szorzata 10 000, és egyik sem osztható 10-zel. Mennyi lehet a két szám összege?

A: 641 B: 1024 C: 1258

D: 2041 E: A két szám összege többféle is lehet

Megoldás:

$10000 = 2^4 \cdot 5^4$, így a két szám csak a $2^4 = 16$ és az $5^4 = 625$ lehet. Ezek összege 641.

12. Öt egymást követő páros számot összeszoroztunk. Milyen számjegyre végződik a szorzat?

A: 0 B: 2 C: 4 D: 6 E: 8

Megoldás:

Az 5 egymást követő páros szám között biztosan van 10-zel osztható.

13. Palinak rengeteg 1 cm széles, 2 cm magas és 3 cm hosszú téglatest alakú építőeleme van. Legalább hány ilyenből tud építeni egy kockát?

A: 12 B: 18 C: 24 **D: 36** E: 60

Megoldás:

A téglatest térfogata 6 cm^3, így a keletkező kocka térfogata osztható 6-tal, vagyis a minimális térfogatú kocka térfogata $6^3 = 216$ cm^3. Ehhez pedig valóban 36 ilyen téglatest kell.

14. Ha egy szám ötös maradéka 2, akkor a szám tizenkétszeresét és ötvenháromszorosát összeadva, az összeg ötös maradéka:

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 E: 4

Megoldás:

A szám tizenkétszeresének és a szám ötvenháromszorosának az összege a szám hetvenszerese, és mivel a 77 osztható 5-tel, így annak egész számszorosa is.

15. Öt gyerek mindegyike kimegy a táblához, és azt a feladatot kapja, hogy írja fel az 1, 2, 4 számok valamelyikét. Az alábbi számok közül melyik lehet az öt felírt szám szorzata?

A: 100 B: 120 **C: 256** D: 768 E: 2048

Megoldás:
A keresett számnak kettő hatványának kell lennie, a megadottak között a 256 és a 2048 kettő hatvány, de ez utóbbi 2^{11}, ami nem lehet, mert a szorzat maximuma $4^5 = 1024$.

16. A táblára felírtunk sorban, egymás után 100 darab nullát, majd az első lépésben mindegyikhez hozzáadtunk 1-et. A második lépésben minden második számhoz adunk hozzá 1-et. A harmadik lépésben minden harmadik számhoz adunk hozzá 1-et és így tovább. A 100-adik lépés után milyen szám áll a 72. helyen?

A: 0 B: 10 **C: 12** D: 20 E: 72

Megoldás:
Minden 0-hoz annyiszor adunk hozzá 1-et, amennyi osztója van a 0 sorszámának. A 72-nek 12 osztója van.

17. Két futó mindegyike egyenletes iramban egy irányba fut a kör alakú pályán. Az egyik 4, a másik 6 perc alatt futja le a kört. Fél óra alatt hányszor körözi le a gyorsabb futó a lassúbbat?

A: 1 **B: 2** C: 3 D: 4 E: nem körözi le

Megoldás:
12 percenként találkoznak, mert $[4;6] = 12$. Így fél óra alatt 2-szer lekörözik egymást, de 3-szor már nem.

18. Néhány gyerek igazságosan osztozik meg 16 almán és 24 körtén, azaz mindegyikük ugyanannyi almát és ugyanannyi körtét kap. Az alábbi számok közül melyik nem lehet a gyerekek száma?

A: 2 B: 4 **C: 6** D: 8 E: mindegyik lehet

Megoldás:
$(16;24) = 8$, és a 8 felsoroltak közül csak a 6-tal nem osztható.

19. Összeadtam páratlan darab páros számot, majd ehhez hozzáadtam páros darab páratlan számot. Melyik állítás igaz biztosan?

A: Az összeg nem osztható 3-mal. B: Az összeg páros.
C: Az összeg nullára végződik D: Az összeg 2005.
E: Az előző állítások egyike sem igaz biztosan.

Megoldás:
Ellenpélda az A, C és D állítások igaz voltára: $2 + 3 + 7$. Az E hamis, mert a B igaz.

20. A táblára felírtunk 50 darab nullát, majd az első lépésben mindegyikhez hozzáadtunk 1-et. A második lépésben minden második számhoz adunk hozzá 1-et. A harmadik lépésben minden harmadik számhoz adunk hozzá 1-et és így tovább. A 50-edik lépés után hány 2-es szerepel a táblán?

A: 10 **B: 15** C: 20 D: 25 E: egy sem

Megoldás:
Azokhoz a nullákhoz, amelyeknek a sorszáma prímszám, azokhoz pontosan kétszer adtunk hozzá 1-et, így annyi 2-es lesz a táblán, ahány prímszám van 50-ig, tehát 15.

21. Egy kétjegyű számhoz hozzáadtuk a számjegyei felcserélésével kapott számot. Az alábbi számok közül melyikkel osztható biztosan az összeg?

A: 2 B: 3 C: 5 D: 7 **E: 11**

Megoldás:

Legyen a szám $\overline{ab}$ alakú, ekkor helyiértékek segítségével felírva:

$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$.

22. Hány olyan pozitív egész x szám van, amelyre $(x;16) = 48$?

A: 1 B: 2 C: 3 D: 4 **E: 5**

Megoldás:

Az x szám prímtényezős felbontásában két prímszám lehet csak a 3 és a 2. A 3 csak első hatványon, a 2 pedig maximum a 4. hatványon, így a lehetséges számok. 3, 6, 12, 24, 48.

23. Legfeljebb hány pozitív egész számot tudunk úgy megadni, hogy semelyik kettő különbsége nem osztható 5-tel?

A: 2 B: 3 **C: 5**

D: 7 E: Nem lehet így számokat megadni.

Megoldás:

A számok 5-tel osztva 5-féle maradékot adhatnak, így már legalább 6 szám között biztosan lesz két olyan, amelyek ugyan azt a maradékot adják 5-tel osztva, és ezek különbsége osztható lesz 5-tel. Ezért legfeljebb 5 szám adható meg.

24. Két pozitív egész számról tudjuk, hogy legnagyobb közös osztójuk 18, legkisebb közös többszörösük a 108. Hány ilyen számpár van?

A: 1 B: 2 C: 3 D: 4 E: Nincsenek ilyen számok.

Megoldás:

$18 = 2 \cdot 3^2$ és $108 = 2^2 \cdot 3^3$. A keresett számpár mindkét tagjának prímosztója csak a 2-es és a 3-as lehet. Az egyik tagjának a prímtényezős felbontásában a 2-es prím első, a másikéban második hatványon, a 3-as pedig második és harmadik hatványon szerepelhet. Így két számpár lehet csak: $(2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3^3)$ és $(2 \cdot 3^3; 2^2 \cdot 3^2)$, azaz (18; 108) és (54; 36).

II. PRÍMA PRÍMEK

Ráhangolódás (kb. 2 perc)

Nézzünk néhány érdekességet az építőmesterekről, vagyis a prímszámokról! Milyen számokat nevezünk prímszámoknak? Az egyik foglalkozáson már 400-ig megkerestük a prímszámokat. Ki emlékszik, hogy hogyan? Hogyan dönthető el egy számról, hogy prímszám-e? Hogyan kereshetjük meg egy összetett számnak a prímosztóit? A táblázatban összesen 78 prímszám van. Szerintetek összesen hány prímszám van?

1. Prímszámok száma

(Javasolt idő: 8 perc; Eszközök: számológép; Munkaforma: egyénileg, majd frontális)

Tanulói munkafüzet: **A** táblázat (Az első 500 prímszámot tartalmazó táblázat)

A legkisebb prímszám a 2, ha ehhez hozzáadunk az 1-et, akkor szintén prímszámot kapunk, a hármat. Ha a 2 és 3 szorzatához ismét egyet adunk, akkor megint prímet kapunk (7).
Folytassuk az eljárást tovább, szorozzuk össze az első 3 prímszámot, és a szorzathoz adjunk hozzá 1-et! Prímszámot kapunk-e így mindig?
Ha folytatjuk az eljárást, akkor igazoljuk, hogy végtelen sok prímszám van!
Hagyja a tanár, hogy a tanulók kipróbálják az eljárást. Az első nehézség a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$-nél adódhat. Az első 500 prímet tartalmazó táblázatból a diákok könnyen kikereshetik, hogy ez a szám prím, különben elég az első 15 prímre megnézniük, hogy osztható-e vele, sőt, felhívhatja a tanár a figyelmet arra, hogy a 2, 3, 5, 7, 11 számokat ki sem kell próbálni. A következő számnál (30 031) adhat a tanár segítséget. (Próbáljátok meg az 50-nél nagyobb prímszámokat!) Ezután beszélje meg a csoport, hogy az eljárással igazolható, hogy végtelen sok prímszám van.
Melléklet a tanároknak: Prímszámok száma

2. Prímszámokkal kapcsolatos feladatok

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: számológép; Munkaforma: 3-4 fős csoportokban)

Tanulói munkafüzet: **A** táblázat
Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása

Alakítsatok 3-4 fős csoportokat!
Adok minden csoportnak egy feladatsort, ezek közül válasszon a csoport magának feladatot. Csak 10 percetek van a feladatsorra, utána új problémákkal fogunk foglalkozni! Ha valamelyik csoport előbb készen van a választott feladattal, akkor válasszon magának másik feladatot!
A tanár a feladatsor kiosztása után felügyelje a csoportok munkáját. Ha valamelyik csoport elakad, akkor segítsen nekik. Nem kell a feladatokat közösen megbeszélni, csak az célszerű, ha minden csoportot eljuttatunk legalább a választott probléma megoldásához. Javasolhatja a tanár, hogy a tanulók vigyék haza a feladatsort, hátha otthon kedvet kapnak, hogy megoldják a maradék feladatokat is, de ez ne legyen kötelező.

3. Prímszámokkal kapcsolatos problémák

(Javasolt idő: 25 perc; Eszközök: számológép; Munkaforma: frontális)

Tanulói munkafüzet: **A** táblázat
Tanulói munkafüzet: **B** táblázat

Azt már láttuk, hogy végtelen sok prímszám van. Szerintetek meg lehet-e mondani, hogy **hány darab prímszám van** egy adott számig?
Erre láttunk már módszert az egyik foglalkozáson: egy ideig a táblázatok segítségével megnézhetjük a prímszámok számát.
Ez nagy számok esetében igazán fáradtságos lenne. Szerencsére tudunk egy közelítő értéket adni arra, hogy például 1 és 99 között, egy és 999 között stb. mennyi a prímszámok arányára: $\frac{0,5}{n}$, ahol n jelöli a felső határszám (a 99, a 999 stb.) számjegyeinek számát. Próbáljátok ki!
Ehhez segíthet a *B* táblázat!

Ikerprímszámoknak nevezzük azokat a prímszám-párokat, melyek különbsége 2. Keressetek ilyen számokat az *A* táblázatban!
Szerintetek hány ikerprím-pár van?
A sejtés az, hogy végtelen sok ilyen pár van, de ezt nem tudjuk (a probléma több ezer éve nyitott). A 2006-ban ismert legnagyobb ilyen prím-páros a $16869987339975 \cdot 2^{171960} \pm 1$. Ezek a számok kicsit több mint 57 ezer számjegyből állnak. Ezt magyar matematikusoknak sikerült megtalálni 2005 végén számítógép segítségével.
Keressetek ikerprímeket 1 és 100 között!

Próbáljátok meg a **2-nél nagyobb számokat** minél kevesebb **prímszám összegeként felírni**! Szerintetek legkevesebb hány darab prímszám összegeként lehet felírni bármely páros számot?
A sejtés szerint kettő szám elég:
Például: $4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 5 + 5; 12 = 5 + 7; 14 = 7 + 7; 16 = 11 + 5; ...)$

Dirichlet-től származik az a sejtés, hogy bármely 5-nél nagyobb páratlan szám felírható három prímszám összegeként. Euler ebből azt fogalmazta meg, hogy bármely 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként. Ezeket a problémákat sem sikerült máig megoldani.

Fermat-féle prímszámoknak nevezzük a $2^{2^n} + 1$ alakú prímszámokat. Szerintetek hány ilyen prímszám van?
Próbáljátok ki, hogy mely n-ek esetén kaptok prímet!
$n = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén prímszámot kapunk, próbáljátok ki!

n	$2^{2^n}+1$
0	3
1	5
2	17
3	257
4	65537

Az $n=5$ esetén a $2^{32}+1=4294967297$, ami osztható 641-gyel.

Máig kérdés, hogy van-e még Fermat-féle prímszám, ennél az 5 esetnél többet nem ismerünk.

Tökéletes számnak nevezzük az olyan számokat, melyek egyenlők a náluk kisebb osztóiknak az összegével. Ilyen szám például a 28, mert $28=1+2+4+7+14$. Van egy ennél kisebb ilyen szám is, ki találja meg?

Ez a szám a 6, hiszen $6=1+2+3$.

Az ismert tökéletes számok alakja $2^{n-1}\cdot\left(2^n-1\right)$, ahol 2^n-1 maga is prímszám. Keressétek meg a következő tökéletes számot!

Ez a szám a 496, ahol $n=5$, és valóban $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$.

A 2^n-1 alakú számokat **Mersenne-féle számoknak** nevezzük. Megmutatható, hogy akkor lehet csak prímszám egy ilyen alakú szám, ha az n is prímszám. Fordítva igaz-e ez? Szerintetek mindig igaz lesz, hogy ha az n helyére prímszámot írunk, akkor a 2^n-1 is prímszám lesz? Próbáljátok ki az n = 11-re!

A konkrét példa megadása előtt beszélje meg az osztály közösen, hogy mi a tanulók véleménye az állítás megfordításáról, és ezután adja meg a tanár a konkrét számpéldát.

$n=11$-re nem igaz, ugyanis $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$.

Az a sejtés, hogy végtelen sok ilyen prímszám van, a 2006-ban ismert legnagyobb a 43. ilyen szám, a $2^{30402457}$ -1, amelynek 9 152 052 számjegye van. E számok kutatásával foglalkozik (számítógépes módszereket felhasználva) a GIMPS projekt (http://www.mersenne.org*).

A kérdéseket mindig konkrét számokra vonatkozóan tegye fel a tanár! A keresésre, képletbe helyettesítésre helyezze a hangsúlyt! A probléma általánosítását csak érdeklődő csoport esetében hagyja a tanár a tanulókra, különben ha a diákok nagy része már kipróbálta a megfogalmazott állítást néhány szám esetén, akkor az általánosítást a tanár mondja ki! Ahol konkrét eredmények ismertek, azt nyugodtan mondja el a tanár a diákoknak akkor is, ha maguktól nem fogalmazták meg a probléma általánosítását.

Egy-egy problémával annyi ideig érdemes foglalkozni, ameddig leköti a tanulókat. Ha valamely probléma iránt nem mutatnak érdeklődést a tanulók, akkor azt ugorja át a csoport!

Ha valamelyik probléma iránt nagy az érdeklődés, akkor bíztassa a tanár a diákokat, hogy nézzenek utána, és a következő órán ismertessék társaikkal, mit találtak! (Nagyon sok forrás található például az interneten is, de biztosan találnak megfelelő – főleg számelmélettel foglalkozó – könyveket az iskolai könyvtárban.)

* 2007 augusztusában a honlap elérhető

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Prímszámok száma

Az első három prím szorzatánál eggyel nagyobb szám $(2\cdot 3\cdot 5+1=)\ 31$ prímszám, és hasonlóan, a következő két lépésben is prímszámot kapunk. Viszont $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1 = 30031 = 59\cdot 509$. Bár az első hat prímszám szorzatánál eggyel nagyobb prímszám nem prím, mégis kaptunk két újabb prímszámot.
Általánosan: Miután az első *m* prím szorzatánál eggyel nagyobb szám az első *m* prím közül egyikkel sem osztható, így az eredmény vagy prímszám, vagy olyan összetett szám, melynek prímosztói nem szerepelnek az első *m* prímszám között. Így bebizonyítottuk, hogy végtelen sok prímszám van, hiszen az eljárást folytathatjuk.
A bizonyítás valójában indirekt módon történik, de ezt nem kell kihangsúlyozni.
Ezt a bizonyítást adta meg Eukleidész *Elemek* című munkájában.

A táblázat

Az első 500 prímszámot tartalmazó táblázat:

	0	**50**	**100**	**150**	**200**	**250**	**300**	**350**	**400**	**450**
1	2	233	547	877	1229	1597	1993	2371	2749	3187
2	3	239	557	881	1231	1601	1997	2377	2753	3191
3	5	241	563	883	1237	1607	1999	2381	2767	3203
4	7	251	569	887	1249	1609	2003	2383	2777	3209
5	11	257	571	907	1259	1613	2011	2389	2789	3217
6	13	263	577	911	1277	1619	2017	2393	2791	3221
7	17	269	587	919	1279	1621	2027	2399	2797	3229
8	19	271	593	929	1283	1627	2029	2411	2801	3251
9	23	277	599	937	1289	1637	2039	2417	2803	3253
10	29	281	601	941	1291	1657	2053	2423	2819	3257
11	31	283	607	947	1297	1663	2063	2437	2833	3259
12	37	293	613	953	1301	1667	2069	2441	2837	3271
13	41	307	617	967	1303	1669	2081	2447	2843	3299
14	43	311	619	971	1307	1693	2083	2459	2851	3301
15	47	313	631	977	1319	1697	2087	2467	2857	3307
16	53	317	641	983	1321	1699	2089	2473	2861	3313
17	59	331	643	991	1327	1709	2099	2477	2879	3319
18	61	337	647	997	1361	1721	2111	2503	2887	3323
19	67	347	653	1009	1367	1723	2113	2521	2897	3329
20	71	349	659	1013	1373	1733	2129	2531	2903	3331
21	73	353	661	1019	1381	1741	2131	2539	2909	3343
22	79	359	673	1021	1399	1747	2137	2543	2917	3347
23	83	367	677	1031	1409	1753	2141	2549	2927	3359
24	89	373	683	1033	1423	1759	2143	2551	2939	3361

	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
25	97	379	691	1039	1427	1777	2153	2557	2953	3371
26	101	383	701	1049	1429	1783	2161	2579	2957	3373
27	103	389	709	1051	1433	1787	2179	2591	2963	3389
28	107	397	719	1061	1439	1789	2203	2593	2969	3391
29	109	401	727	1063	1447	1801	2207	2609	2971	3407
30	113	409	733	1069	1451	1811	2213	2617	2999	3413
31	127	419	739	1087	1453	1823	2221	2621	3001	3433
32	131	421	743	1091	1459	1831	2237	2633	3011	3449
33	137	431	751	1093	1471	1847	2239	2647	3019	3457
34	139	433	757	1097	1481	1861	2243	2657	3023	3461
35	149	439	761	1103	1483	1867	2251	2659	3037	3463
36	151	443	769	1109	1487	1871	2267	2663	3041	3467
37	157	449	773	1117	1489	1873	2269	2671	3049	3469
38	163	457	787	1123	1493	1877	2273	2677	3061	3491
39	167	461	797	1129	1499	1879	2281	2683	3067	3499
40	173	463	809	1151	1511	1889	2287	2687	3079	3511
41	179	467	811	1153	1523	1901	2293	2689	3083	3517
42	181	479	821	1163	1531	1907	2297	2693	3089	3527
43	191	487	823	1171	1543	1913	2309	2699	3109	3529
44	193	491	827	1181	1549	1931	2311	2707	3119	3533
45	197	499	829	1187	1553	1933	2333	2711	3121	3539
46	199	503	839	1193	1559	1949	2339	2713	3137	3541
47	211	509	853	1201	1567	1951	2341	2719	3163	3547
48	223	521	857	1213	1571	1973	2347	2729	3167	3557
49	227	523	859	1217	1579	1979	2351	2731	3169	3559
50	229	541	863	1223	1583	1987	2357	2741	3181	3571

Lásd még az első 10 000 prímszámot: http://orange.ngkszki.hu/~trembe/primek/prim01.htm*

* 2007 augusztusában honlap elérhető

B táblázat

A prímszámok száma egy bizonyos számig:

1-től	A prímszámok száma:
99-ig	25
999-ig	168
9999-ig	1239
99999-ig	9592
999999-ig	78498
9999999-ig	664579
99999999-ig	5761455
999999999-ig	50847534
9999999999-ig	455052511
99999999999-ig	4118054813
999999999999-ig	37607912018
9999999999999-ig	346065536839

2. Prímszámokkal kapcsolatos feladatok

B feladatlap és megoldása

1. Adj meg két olyan prímszámot, amelyek összege és különbsége is prímszám! Hány ilyen számpár van?

Megoldás:
Ilyen prímszámok a 2 és az 5. Más ilyen szám nincs, ugyanis ha az összeg is prím, akkor az egyik számnak a 2-nek kell lennie, hiszen az összes többi prímszám páratlan, és két páratlan szám összege páros. Jelöljük a másik számot p-vel. A $p-2$, p *és* $p+2$ számok közül az egyik osztható 3-mal, így a p csak 5 lehet.

2. Lehet-e 15 egymást követő egész szám összege prímszám? És 16 vagy 17 egymást követő számé?

Megoldás:
15 egymást követő szám összege: $(a-7)+(a-6)+\ldots+a+\ldots+(a+6)+(a+7)=15a$, ezért az összeg sohasem lesz prímszám. 16 egymást követő szám összege: $(a-7)+(a-6)+\ldots+a+\ldots+(a+6)+(a+7)+(a+8)=16a+8=8(2a+1)$, és mivel 8-cal osztható prímszám nincs, ezért az összeg sohasem lesz prímszám. 17 egymást követő szám összege: $(a-8)+(a-7)+\ldots+a+\ldots+(a+7)+(a+8)=17a$, ezért az összeg akkor lesz prímszám, ha $a=1$. Ekkor a számok: –7, –6, –5, … 7, 8, 9.

3. Lehet-e az első 9 prímszámból bűvös négyzetet készíteni?

Megoldás:
Nem, mert abban a sorban (vagy oszlopban), ahol a 2 van, az összeg páros, a többiben páratlan.

4. Igazoljuk, hogy minden 3-nál nagyobb szám előállítható prímszámok összegeként!

Megoldás:
A páros számok előállnak 2-esek összegeként, a páratlanok pedig egy 3-as és kettesek összegeként előállítható.

5. Két prímszám különbsége 99. Hány osztója van a két prímszám összegének?

Megoldás:
A kettőn kívül mindegyik prímszám páratlan, és két ilyen különbsége páros, így az egyik prím a 2, a másik a 101. Az összegük 103, ami prím, így 2 osztója van.

III. MI MARAD A VÉGÉN?

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

Ha utánanéztek a tanulók a prímszámokkal kapcsolatos problémáknak, eredményeknek, akkor ismertessék azokat társaikkal.

1. Maradékos osztásra visszavezethető stratégiajáték

(Javasolt idő: 10 perc; Eszköz: pénzérme; Munkaforma: párban)

Játszunk „Ki lép utolsónak?” játékot! Alakítsatok ki párokat!
Minden pár kap egy játéktáblát, ezen fogtok játszani!

Tanulói munkafüzet: „Ki lép utolsónak?” játéktábla
A játék menete:

> Helyezzetek egy pénzérmét a 0-s körre, ez lesz a bábu, amivel lépkedni kell. A játékban a játékosok felváltva lépek ezzel a bábuval, mindig egy vagy két mezőt előre. Az nyer, aki a 21. mezőre lép.

Játsszátok le a játékot néhányszor! Egyszer az egyikőtök kezdjen, aztán a másik! Kinek van nyerő stratégiája a játékban, a kezdőnek, vagy a másodiknak, vagyis melyik játékos tud biztosan nyerni attól függetlenül, hogy az ellenfele (a szabályoknak megfelelően) hogyan lép?

Hogyan változik a nyerő stratégia, ha:
– 21 helyett 22 mező van, vagyis egyet hozzáteszünk a kis körökhöz? És ha 23 mező van, vagyis 2 új mezőt veszünk hozzájuk?
– 21 mező van, és egyszerre 2 vagy 3 mezőt lehet előre lépni?

Ha kell, beszélje meg a csoport, hogy mit jelent egy játék esetében a nyerő stratégia! Játszanak le a tanulók néhány játékot, majd bíztassa őket a tanár, hogy próbáljanak meg nyerő stratégiát találni! Segítheti őket tanácsokkal, vagy játszhat ellenük. Ha valamelyik páros már rájött a stratégiára, akkor tegye fel nekik a tanár a kérdéseket. Közösen csak abban az esetben beszélje meg az egész csoport a játékot és a stratégiát, ha erre igény van.
Melléklet a tanároknak: A nyerő stratégia

2. Öröknaptár készítése (számolás a héttel való osztási maradékokkal)

(Javasolt idő: 30 perc; Eszközök: idei naptárak, 2000-es és 2001-es naptárak; Munkaforma: 3-4 fős csoportokban)

Mostantól csoportokban fogtok dolgozni, alakítsatok ki 3-4 fős csoportokat!
Kérdéseket fogok feltenni, ha valamelyik csoport tudott már válaszolni az adott kérdésre, akkor teszem majd fel nekik a következő kérdést!

Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **C** feladatlap és megoldása

A kérdéseim (Segítségül a **C** feladatlapon találtok két táblázatot, ezek kitöltésével, sokkal könnyebb a számolás!):

1. Ki tudná megmondani, hogy hány nap telt el január elseje óta?
2. Ez a nap a hét melyik napjára esett?
3. Ezek alapján meg tudjátok mondani, hogy idén az ünnepnapok a hét melyik napjára esnek?

A foglalkozás hátralévő részében a csoportok önállóan dolgoznak.
Ha valamelyik csoport válaszolni tudott a feltett kérdésre, akkor tegye fel nekik a tanár a következő kérdést!
Ha valamely csoport tagjai nem tudnak elindulni, vagy elakadnak, akkor segítse őket a tanár!
Nem az a cél, hogy minden csoport közel azonos időben jusson el a problémák megoldásához, vagy hogy minden csoport a foglalkozás végére minden kérdésre válaszoljon, és megalkossa az öröknaptárt. Az a fontos, hogy legalább egy-két csoport tagjai végezzenek a feladattal! Ilyenkor a többi csoport tagjait bíztatni lehet arra, hogy kérdezzék meg ezektől a végeredményt, és esetleg gondolják végig, hogy hogyan lehet azt megkapni, kérdezzék meg őket a lépésekről!
Frontálisan nem kell a feladatokat megbeszélni, csak abban az esetben érdemes ezt a munkaformát választani (akkor is lehetőleg csak egy-két problémafelvetés esetén), ha valamennyi csoport teljes tanácstalanságot mutat!
Első lépésként érdemes az aktuális dátumot, a hónapok napjainak számát (a bütyökszabályt) a csoportnak közösen tisztáznia.
Az aktuális naptárakat csak akkor adja oda a tanár a tanulóknak, ha kitöltötték a táblázatokat! A naptár segítségével ellenőrizhetik a megoldásukat a tanulók.
Melléklet a tanároknak: A bütyökszabály

Tanulói munkafüzet: **D** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **D** feladatlap és megoldása

2000. március 1. szerdára esett. Milyen napra esett ebben az évben április, május, június, …, december elseje?
És 2001. január és február elseje? Hogyan lehet ezt gyorsan kiszámolni? Ehhez ad segítséget, ha a **D** feladatlapon található táblázatokat kitöltitek!

Most is az eredmények ellenőrzéséhez adja oda a tanár a naptárakat a tanulóknak.

Tanulói munkafüzet: **E** feladatlap
Melléklet a tanároknak: Az **E** feladatlap és megoldása

Tudnátok képletet adni, hogy egy 2000. március 1. és 2001. február 28. közötti dátum alapján hogyan lehet megmondani, hogy az a nap a hét melyik napjára esett?
Töltsétek ki ehhez az **E** feladatlapon található táblázatot! Ellenőrizzétek le egy-két napra a nálatok lévő naptárak segítségével!

Ennél a problémafelvetésnél törekedjen a tanár arra, hogy egy általánosabb képletet próbáljanak gyártani a tanulók, melyben az adott dátumból a hónapnak és a napnak a sorszáma szerepel.

Módosítsuk a képletet úgy, hogy egy 2000. március 1. és 2100. február 28. közötti dátum alapján meg tudjuk mondani, hogy az a nap a hét melyik napjára esett! Miért nem január elsejével kezdtünk számolni?

Lehet, hogy erre a kérdésre már nem marad idő, az óra végén érdemes a tanárnak ezt a képletet ismertetnie a tanulókkal, hogy ne érezzék, feleslegesen dolgoztak. Ha van olyan csoport, amelyik készen van evvel a feladattal is, akkor ebből a csoportból egy tanuló ismertesse a megoldást.
Melléklet a tanároknak: A képlet

Hogyan kell a képleten változtatni, hogy tetszőleges dátum alapján meg tudjuk mondani, hogy az adott nap a hét mely napjára esett?
Mondjátok meg, hogy melyik napra esik/esett:

- a születésetek;
- a 18. születésnapotok;
- 1848. március 15-e;
- 1956. október 23-a?

Ezt a kérdést csak akkor tegye fel a tanulóknak a tanár, ha a többi kérdésre már magabiztosan megtalálták az adott csoport tagjai a választ. Más dátumokat is kérdezhet a tanár, ez szabadon választott lehet, csak feleljen meg a tanulók érdeklődési körének!

Megjegyzés: A ma használatos naptárat 1582-ben vezették be, így ez a képlet csak 1583-tól érvényes!
Melléklet a tanároknak: Tetszőleges dátum napja

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Maradékos osztásra visszavezethető játék

A nyerő stratégia:
A játék a 21. mezőn ér véget: Nyerő stratégiája a második játékosnak van, ha az ellenfele lépéseit úgy egészíti ki, hogy mindig olyan mezőre lép, aminek a sorszáma hárommal osztható. Tehát a második játékos sorban a 3-as, 6-os, 9-es, 12-es, 15-ös, 18-as és végül a 21-es mezőre lép. Ez azért nyerő stratégia, mert ha 1-et vagy 2-t lehet egyszerre előrelépni, akkor minden esetben megoldható, hogy a két játékos lépéseinek összege egy körön belül 3 legyen. Mivel a mezők száma 3-mal osztható, így a körökben másodiknak lépő játékosnak van nyerő stratégiája.

A következő két játékvariánsnál (22 vagy 23 mező esetén) az első játékosnak van nyerő stratégiája. Akkor lesz nyerő a játékos, ha 22 mező esetén először az első (23 mező esetén a második) mezőre lép, és utána úgy egészíti ki az ellenfele lépéseit, hogy olyan mezőkre lép, melyek sorszáma hárommal osztva egyet (kettőt) adnak maradékul.
Összefoglalva, ha a legnagyobb sorszám 3-mal osztható, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha hárommal nem osztható, akkor a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

A harmadik játékvariánsnál (amikor 21 mező van, és egyszerre 2 vagy 3 mezőt lehet lépni) az első játékosnak van nyerő stratégiája: elsőre az 1-es mezőre lép, és utána úgy egészíti ki az ellenfele lépéseit, hogy mindig az öttel osztva 1 maradékot adó sorszámú mezőkre lép. Ez a játék hasonló a második játékvariánshoz.

2. Öröknaptár készítése (számolás a héttel való osztási maradékokkal)

A bütyökszabály:
A bal kéz kisujjához tartozó bütyökhöz január, a kisujjhoz és a gyűrűsujjhoz tartozó bütykök közéhez február, a gyűrűsujj bütykéhez március stb. tartozik. Júliusnál elfogynak a bütykök a bal kézen, folytatjuk a módszert a jobb kézen, augusztust a jobb mutatóujjunkhoz tartozó bütyök jelöli stb. Ha bütykös az adott hónap, akkor 31 napos, ha nem, akkor (február kivételével) 30 napos.

C feladatlap és megoldása

Töltsétek ki az alábbi két táblázatot, ez segíthet a feladat megoldásában!

Hónap	**A hónapban a napok száma**	**Év eleje óta összesen eltelt napok száma**
Január		
Február		
Március		
Április		
Május		
Június		
Július		
Augusztus		
Szeptember		
Október		
November		

A 7-es maradék	**Nap**
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Megoldás:
A január elseje óta eltelt napok számát az alábbi táblázat segítségével megkaphatjuk:

Hónap	**A hónapban a napok száma**	**Év eleje óta összesen eltelt napok száma**
Január	31	31
Február	28	59
Március	31	90
Április	30	120
Május	31	151
Június	30	181
Július	31	212
Augusztus	31	243
Szeptember	30	273
Október	31	304
November	30	334

Az eltelt napok száma:
Az előző hónapban az összesen oszlopban található értékhez hozzáadjuk a mai nap hónapon belüli sorszámát, például szeptember 10-ére: $243+10=253$. Szökőévek esetében ehhez márciustól kezdve 1-et hozzá kell adni!

Azt, hogy a hét melyik napjára esik január elseje, a napok számának 7-es maradéka alapján mondhatjuk meg: 253-at 7-tel osztva 1 maradékot ad, tehát a hét napjai között az aktuálishoz képest 1-gyel vissza kell lépni. Ha például szeptember 10-e szerda, akkor január elseje keddre esik. (Figyelni kell arra, hogy hétfő előtt vasárnap van.)

Ahhoz, hogy megmondjuk, milyen napra esik az adott nap, azt kell kiszámolni, hogy hány nappal van január elseje után, és ennek mennyi a hetes maradéka.
Például március 15.:
$59+15=74$, ennek hetes maradéka 4, tehát a január elsejei nap után négy nappal van a héten, példánkban ez szombat.

D feladatlap és megoldása

Töltsétek ki az alábbi táblázatokat:

Hónap	**Előző hónap napjainak száma**	**A hónap napjainak maradéka 7-tel osztva**	**Eltolás**	**Nap**
Április				
Május				
Június				
július				
Augusztus				
Szeptember				
Október				
November				
December				
Január				
Február				

Megoldás:

Hónap	Előző hónap napjainak száma	A hónap napjainak maradéka 7-tel osztva	Eltolás	Nap
Április	31	3	3	Szombat
Május	30	2	5	Hétfő
Június	31	3	1	Csütörtök
Július	30	2	3	Szombat
Augusztus	31	3	6	Kedd
Szeptember	31	3	2	Péntek
Október	30	2	4	Vasárnap
November	31	3	0	Szerda
December	30	2	2	Péntek
Január	31	3	5	Hétfő
Február	31	3	1	Csütörtök

A napok eltolódását úgy kapjuk, hogy összeadjuk az addig eltelt hónapok 7-es maradékait, majd vesszük a 7-es maradékát.

Az, hogy a hónap első napja a hét melyik napjára esett, ezek alapján könnyen megmondható: például szeptembernél az eltolás 2, akkor szeptember 1. péntekre esett.

Ennél a problémafelvetésnél érdemes javasolni a tanulóknak, hogy innentől csak a 7-es maradékokkal számoljanak.

E feladatlap és megoldása

Töltsétek ki az alábbi táblázatokat!

Hónap	Eltolás	Nap
Március		
Április		
Május		
Június		
Július		
Augusztus		
Szeptember		
Október		
November		
December		
Január		
Február		

Megoldás:
Az előző két táblázatra van szükség a feladat megoldásához, csak az első táblázathoz vegyük hozzá a márciust is, és a két középső oszlopra nincsen szükség:

Hónap	**Eltolás**	**Nap**
Március	0	Szerda
Április	3	Szombat
Május	5	Hétfő
Június	1	Csütörtök
Július	3	Szombat
Augusztus	6	Kedd
Szeptember	2	Péntek
Október	4	Vasárnap
November	0	Szerda
December	2	Péntek
Január	5	Hétfő
Február	1	Csütörtök

A nap megadása például október 22-ére: Az októberi eltolás 4, ehhez hozzáadjuk az adott nap számát, vagyis 22-t, elvonunk 1-et, mert 1.-ejével kezdtünk, és vesszük az összeg ($4+22-1=25$) hetes maradékát, ami 4, vagyis ez a nap vasárnapra esett.

A képlet tehát: NAP + HÓNAP – 1-nek 7-es maradéka, ahol a NAP a dátumban az adott száma, a HÓNAP pedig az első táblázatban szereplő eltolás értéke.

A képlet:

Egy évben 365 nap van, aminek 7-es maradéka 1, kivéve a szökőéveket, ezekben 366 nap van, ennek 7-es maradéka 2. Tehát „normál” években 1-gyel, szökőévekben 2-vel tolódik el a hét napjain belül március elseje. Így könnyen adhatunk képletet:

$\acute{E}V+\frac{\acute{E}V}{4}+H\acute{O}NAP+NAP-1$-nek 7-es maradéka,

ahol $\acute{E}V$ a századon belül az adott év sorszáma, $\frac{\acute{E}V}{4}$ ennek a sorszámnak a negyede (csak az egész része, a maradékkal nem kell törődni), a *HÓNAP* és a *NAP* ugyanaz, mint az előző problémafelvetésnél. A kapott számnak megfelelő napot kiolvashatjuk a második táblázatból. Figyelni kell arra, hogy a januári és a februári dátumok esetén még az előző évvel kell számolni!

Azért márciussal kezdjük a számolást, mert így a képlet független attól, hogy az adott év szökőév-e vagy nem.

Például 2008. június 16-ára nézve: $8+\frac{8}{4}+1+16-1=26$, aminek 7-es maradéka 5, tehát ez a nap hétfőre esik.

Tetszőleges dátum napja:

Figyelnünk kell arra, hogy a kerek százas évek közül csak azok szökőévek, melyek 400-zal is oszthatóak.
Számoljuk ki, hogy 2100. március 1. melyik napra esik!
100 + 25 + 0 + 0 = 125, aminek a 7-es maradéka 6, de ennél egyel kevesebbet kell vennünk, mert 2100 nem lesz szökőév, tehát 5 nap az eltolódás, vagyis ez a dátum hétfőre esik.
2200. március 1-jére: újabb 5 nap eltolódás keletkezik, vagyis ez a nap szombatra esik.
2300. március 1-jére. újabb 5 nap eltolódás van, ez a nap tehát ez a nap csütörtökre esik.
2400. március 1-jére: most 6 nap eltolódás keletkezik, így ez a nap ismét szerdára esik, és látható, hogy innentől ismétlődés van.
Foglaljuk ezt újra táblázatba!

Ha az évszázad	Eltolás
1600, 2000, 2400, …	0
1700, 2100, 2500, …	5
1800, 2200, 2600, …	3
1900, 2300, 2700, …	1

És a teljes képlet:

$$SZ + ÉV + \frac{ÉV}{4} + HÓNAP + NAP - 1,$$

ahol *SZ* az előbb kiszámolt századonkénti eltolás.

Ez alapján 1848. március 15-ére: $3 + 48 + \frac{48}{4} + 0 + 15 - 1 = 77$, aminek a 7-es maradéka 0, vagyis szerdára esett.

1956. október 23-ára: $1 + 56 + \frac{56}{4} + 4 + 23 - 1 = 97$, aminek a 7-es maradéka 6, vagyis ez a nap keddre esett.