MATEMATIKA „C”
8. évfolyam

2. modul
KISZÁMOLÓ

Készítette: Surányi Szabolcs

A modul célja	Számolás változatos formában egész- és racionális számokkal. Százalékszámítás. Számolás nagyon nagy, illetve nagyon kicsi számokkal. A modul lehetőséget ad arra, hogy a tanár felmérje az egyes tanulók számolási képességét, problémák iránti érzékenységét.
Időkeret	5 x 45 perc
Ajánlott korosztály	13–14 évesek; 8. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, csillagászat. Szűkebb környezetben: Statisztika. Ajánlott megelőző tevékenységek: Nevezetes számhalmazok ismerete, százalékszámítás, hatványozás, normálalak.
A képességfejlesztés fókuszai	Gondolkodási képességek: Számolási képesség, műveletvégzési sebesség. Kommunikációs képességek: Szövegértés, szövegértelmezés.

AJÁNLÁS

Az egész számokkal, közönséges és tizedes törtekkel való számolás a hétköznapi életünk fontos része, így ennek fejlesztése, készségszinten való elsajátítása igen hangsúlyos a modulban. A százalékszámítás szintén lépten-nyomon előkerül a mindennapokban. A modul feldolgozásával játékos formában erősíthetjük a tanulók tudását ezen a téren. A hatványozás hétköznapi problémákon keresztül, míg a hatványozás azonosságai hibák keresésén keresztül kerülnek előtérbe. A számok normálalakjával való számolást összekapcsoltuk a hosszúság mértékegységeinek megismerésével. A modult végül a számológép behatóbb tanulmányozása zárja.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Sain Márton: *Nincs királyi út! Matematikatörténet* (Gondolat Kiadó) – CD-ROM-on is megjelent (Typotex)

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Egészen			
1.	Római számokon alapuló gyufarejtvények	Számolás, mennyiségi következtetés, deduktív és induktív következtetés műveletvégzési sebesség, probléma érzékenység	Eszközök: Páronként egy doboz gyufa Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap és megoldása
2.	Műveletek egész számokkal	számolás, mennyiségi következtetés, deduktív és induktív következtetés, műveletvégzési sebesség, probléma érzékenység	
3.	Műveletek egész számokkal különböző problémaszituációkban	számolás, mennyiségi következtetés, deduktív és induktív következtetés, műveletvégzési sebesség, probléma érzékenység	Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
II. Tördelés			
1	Közönséges törtalakban megadott számokkal végzett műveletek	Számolás, mennyiségi következtetés, valószínűségi következtetés, műveletvégzési sebesség, probléma érzékenység	Eszközök: Számokat és műveleteket tartalmazó kártyák Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **C** feladatlap és megoldása Kártyák a tördelős játékhoz
2.	A racionális számok közönséges- és tizedes tört alakja	Számolás, mennyiségi következtetés, valószínűségi következtetés, műveletvégzési sebesség, probléma érzékenység	Melléklet a tanároknak: Módszer az átírásra
III. A százados			
1.	Százalékszámításra visszavezethető társasjáték	Gondolkodási sebesség, érvelés műveletvégzési sebesség, szövegértelmezés, problémaérzékenység	Eszközök: Dobókocka csoportonként Játékkártyák csoportonként Melléklet a tanároknak: Lehetséges példák Játékkártyák A játékkártyák megoldásai Példák játékváltozatokra

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
2.	Százalékszámítással kapcsolatos feladatok, grafikonelemzés	Gondolkodási sebesség, érvelés műveletvégzési sebesség, szövegértelmezés, problémaérzékenység	Tanulói munkafüzet: **D** feladatlap **E** feladatlap Melléklet a tanároknak: **D** feladatlap és megoldása **E** feladatlap és megoldása
IV. Hatványozzunk!			
1.	Hatványozással kapcsolatos feladatok	Számolás, szövegértés, probléma-érzékenység, hosszúság-érzékelés	Tanulói munkafüzet: **F** feladatlap **G** feladatlap Melléklet a tanároknak: Őseink száma Az **F** feladatlap és megoldása A **G** feladatlap és megoldása
2.	Számolás normálalakkal	Számolás, szövegértés, probléma-érzékenység, hosszúság-érzékelés	Tanulói munkafüzet: **H** feladatlap **I** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **H** feladatlap és megoldása Az **I** feladatlap és megoldása

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
V. Végjáték			
1.	Számolás számológéppel	Rendszerezés, számolás, szövegértés, probléma-megoldás, mennyiségi következtetés	Eszközök: Tudományos számológép minden tanulónál Tanulói munkafüzet: **J** feladatlap **K** feladatlap Melléklet a tanároknak: **J** feladatlap és megoldása **K** feladatlap és megoldása
2.	Tesztfeladatok megoldása	Rendszerezés, számolás, szövegértés, probléma-megoldás, mennyiségi következtetés	Tanulói munkafüzet: **K** feladatlap Melléklet a tanároknak: **K** feladatlap és megoldása

I. EGÉSZEN

Ráhangolódás (kb. 3 perc)

A római számok az ókori Rómából származó számjelölési rendszer. Elvei szerint néhány kiválasztott betűnek számértéket adnak, és ezek kombinációival írják le a számokat. A felhasznált betűk a latin ábécéből származnak:

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Ezek egymás mellé írásával kaphatók meg a számok, bizonyos szabályok betartásával: először az ezreseket, aztán a százasokat, aztán a tízeseket végül az egyeseket kell leírni. Vannak rövidített leírások, például a 4-et nem IIII, hanem IV alakban írhatjuk le. Továbbá minden érték csak legfeljebb 2-vel nagyobb érték előtt állhat (az I a szabály szerint csak a V és az X előtt állhat, így a 99 megfelelője XCIX).
a) Írjunk fel néhány számot római számokkal: 19, 27, 54, …!
b) Olvassátok le a következő számokat: XIX, MMCMLXXXIV, MCDXLIV, …!
c) Írjuk fel az idei évszámot és a születésetek évszámát római számok segítségével!

1. A római számokon alapuló gyufarejtvények

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: páronként egy doboz gyufa; Munkaforma: párban)

Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap
Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap és megoldása

Rendeződjetek párba!
Minden párosnak adok néhány rejtvényt. Rakjátok ki gyufából a rejtvényeket! Próbáljátok meg egyetlen gyufa áthelyezésével (a feltételeknek megfelelően) igazzá tenni azokat!
Ha valamelyik páros hamar készen van, akkor gyárthat maga is ilyen rejtvényt, amit feladhat a többi párosnak a következő foglalkozáson. Természetesen bárki hozhat gyufarejtvényt a következő foglalkozásra.
A tanár felügyelje a párosok munkáját, bíztassa őket! Nem kell, hogy az osztály közösen is megbeszélje a megoldásokat. Ha valamely páros nagyon nem boldogul a rejtvényekkel, akkor kérjen segítséget egy olyan párostól, mely már megoldotta az adott problémát! Javasolja a segítőknek a tanár, hogy ne a megoldást mondják el, hanem csak rávezető ötleteket adjanak!

2. Műveletek egész számokkal

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: egyénileg, majd 2-3 fős csoportban)

Válasszon mindenki magának egy 2 és 9 közé eső pozitív egész számot!
A feladat: Az általad választott számból 5 darab, valamint a négy alapművelet és zárójelek felhasználásával írj fel olyan műveletsorokat, melyeknek végeredménye sorban 1, 2, 3, …, 10!
Érdemes előre megbeszélni, ki melyik számot választja. Ügyeljen a tanár arra, hogy minden számot közel azonos számú tanuló válassza. Hagyja a tanár a tanulókat egy kis ideig egyedül dolgozni a problémán, majd javasolja a tanulóknak, hogy az azonos számot választók alkos-

sanak egy csoportot, és közösen oldják meg a feladatot. Ha egy csoport a többinél hamarabb van készen, akkor vagy javasolja a tanár, hogy próbáljanak másik megoldást is keresni, vagy válasszon a csoport egy újabb számot, és avval is kezdjen bele a fenti probléma megoldásába. Közösen nem kell megbeszélni a megoldásokat, csak abban az esetben, ha valamely csoportnak egyáltalán nem sikerült valamelyik végeredményt megkapnia.

3. Műveletek egész számokkal különböző helyzetekben

(Javasolt idő: 20 perc; Munkaforma: 3-4 fős csoportokban)

Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása

Alakítsatok 3-4 fős csoportokat!
Minden csoport kap egy feladatlapot. Válasszátok ki azt a feladatot, amelyik a legjobban felkeltette az érdeklődéseteket, és oldjátok meg! Ha valamelyik csoport készen van, akkor válasszon egy másik problémát, és próbálja meg azt is megoldani!

Hagyja a tanár, hogy a csoportok magukban dolgozzanak a feladatokon. Közösen nem kell megbeszélni a megoldásokat. Ha valamely csoport nem tud megbirkózni valamely feladattal, vagy annak egy részével, akkor elsősorban a tanártól kérhetnek segítséget. Ez lehet a probléma megoldásának kezdő lépése, vagy egy ahhoz vezető lépés. Ha egy alapprobléma megoldásával készen van egy csoport, akkor bíztassa őket a tanár arra, hogy írják le a megoldást műveletekkel is, bár ez nincs a feladatlapon!

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. A római számokon alapuló gyufarejtvények

A feladatlap

V + VI = IX

VII − III = IX

V − IV = VI

XX + VI = XV

Megoldások:

V + IV = IX vagy V + VI = XI

VII + II = IX vagy VI + III = IX

X − IV = VI

XX − VI = XIV

Egy-egy rejtvénynek az itt közöltektől eltérő megoldása is lehet.

3. Műveletek egész számokkal különböző helyzetekben

B feladatlap

1. feladat
A „Die Hard 3. - Az élet mindig drága" című filmben a két főhősnek (Bruce Willis és Samuel L. Jackson) a következő feladványt kellett megoldaniuk ahhoz, hogy egy bomba ne robbanjon fel a város közepén:
Van egy 3 gallonos és egy 5 gallonos (1 gallon kb. 3,785 l) vizes palackjuk, ami egy szökőkút szélén áll, tehát bármikor megtölthetők vízzel. Ezek segítségével kell 4 gallon vizet kimérniük. Hogyan tudják megtenni?

További kérdések:
a) A két palackba összesen nyolc gallon víz fér. Mutasd meg, hogy 1-től 8-ig bármely egész gallonnyi vizet ki lehet a két palackkal mérni!
b) Ki lehet-e mérni egy 6 és egy 2 gallonos palackkal is mérni 1-től 8-ig bármely egész gallonnyi vizet?
c) Két palackkal összesen 12 gallonnyi vizet lehet kimérni. Hány gallonosak legyenek a palackok, hogy 1-től 12-ig bármely egész gallonnyi vizet ki lehessen velük mérni?

Megoldás:
Megtöltve az 5 gallonos palackot, abból 3 gallont áttöltünk a másik palackba, így ebben 2 gallon marad. Ezt megint áttöltjük a 3 gallonosba (miután azt kiürítettük), így abba még 1 gallonnyi víz fér. Ha az 5 gallonost újra teletöltjük, és abból 1 gallont átöntünk a 3 gallonosba, akkor az 5 gallonosban 4 gallonnyi víz marad.
A mérés leírása pl.: $4 = 5 - (3 - (5 - 3)) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3$
a) Magától értetődően 3, 5 és 8 gallonnyi vizet ki tudunk a palackokkal mérni. Az alapprobléma megoldása közben volt 2 gallonnyi vizünk már, így a 2 és a 7 (2 + 5) gallonnyi vizet is ki tudjuk mérni. A feladat a 4 gallonnyi víz volt, így maradt az 1 és a 6 gallon. Ha a 4 gallonnyi vízből az üres 3 gallonos palackba annyit áttöltünk, amennyi abba fér, akkor pont 1 gallonnyi vizünk marad, és így 6 gallonnyit is ki tudunk mérni (1 + 5).
b) Nem, például 1 gallonnyit, nem lehet sehogyan sem kimérni.
c) Jó a megoldás akkor, ha a két palack térfogatának mérőszáma relatív prím, például 4 és 7 gallon.
A segítség lehet például: „Ha a teletöltött 5 gallonos palackból annyi vizet áttöltök az üres háromgallonosba, amennyi abba fér, akkor hány gallon víz marad benne?"

2. feladat
Van két homokóránk, az egyikben 7, a másikban 5 perc alatt pereg le a homok. Hogyan lehet ezekkel
a) 2 percet;
b) 3 percet;
c) 4 percet;
d) 1 percet lemérni?

További kérdések:
e) Lemérhető-e ezzel a két homokórával bármely egész percnyi időtartam?

f) Lemérhető-e egy 8 perces és egy 6 perces homokórával:
i) a 4 perc;
ii) és a 3 perc?
iii) Milyen percek mérhetők le ezzel a két órával?

Megoldás:
a) A két homokórát egyszerre indítjuk, és az 5 perceset rögtön megfordítjuk, amint az lejárt, ekkor a 7 percesben 2 percnyi homok marad.
b) Ha ekkor megfordítjuk az 5 percest azonnal, és közben lepörög a homok a 7 percesben, akkor az 5 percesben 3 percnyi homok marad.
c) Ha a lejárt 7 perceset újra megfordítjuk, és amíg az 5 perces homokóra másodszorra is lejár, addigra a 7 percesben 4 percnyi homok marad, így ekkor kell kezdeni a mérést.
A leírás: $4 = 7 - (5 - (7 - 5))$
d) Ha az 5 perces órát közben megfordítjuk, akkor mire a 4 percnyi homok lejár a 7 perces órán, addigra az 5 perces órában már csak 1 percnyi homok marad.
Leírás: $1 = 5 - 4 = 5 - (7 - (5 - (7 - 5)))$.
e) A mérés közben szerepelt már a 2, 3 és végeredményként 4 perc. A folyamatot folytatva 1 percet is le tudtunk mérni. Mivel 1-től 5-ig bármely egész percet le tudunk már mérni, így bármely egész percnyi időtartam lemérhető.
f) 4 percet le lehet mérni, 3-at nem, hiszen páros számok összevonásából csak páros számot kaphatunk.

A segítség lehet például: „Ha egyszerre indítjuk a két homokórát, akkor mennyivel később jár le a 7 perces homokóra, mint az 5 perces?”

3. feladat
Három mérősúlyunk van: 1, 3, és 9 kilogrammosak. A három súly és egy kétkarú mérleg segítségével hogyan lehet 4 kilogrammot megmérni? És 11 kilogrammot?
a) 4 kg; b) 10 kg; c) 11 kg; d) 5 kg

További kérdés:
e) Mely egész kilogrammokat tudjuk megmérni e három súllyal?

Megoldás:
4 kg: az egyik serpenyőbe a mérendő súlyt, a másikba az 1 kg-osat és a 3 kg-osat rakjuk
11 kg: az egyik serpenyőbe a mérendő súly mellé az 1 kg-os súlyt tesszük, a másik serpenyőbe a 3 kg-os és a 9 kg-os kerül.
A leírás: $4 = 1 + 3$ és $11 + 1 = 9 + 3$
e) 1-től 13-ig bármely egész kilogramm megmérhető.

II. TÖRDELÉS

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

A tanulók által hozott gyufarejtvények megbeszélése. Ha egy tanuló sem hozott rejtvényt, akkor a csoport készítsen közösen egy-két rejtvényt. Ehhez elég, ha egy igaz egyenlőséget felírunk, és abban egy (vagy több) gyufát áthelyezünk.
A tanulók írják fel a táblára az általuk hozott rejtvényeket, és a csoport közösen oldja meg azokat. Ha valakinek van megoldása, akkor menjen ki a táblához, és mutassa meg a csoportnak.

1. Közönséges törtalakban megadott számokkal végzett műveletek

(Javasolt idő: 25 perc; Eszköz: számokat és műveleteket tartalmazó kártyák; Munkaforma: egyénileg vagy párban végül frontális)

Játszunk most törtrejtvényekkel! Egy-egy feladaton belül az ábrákon az azonos jelek azonos, a különböző jelek különböző természetes számokat jelölnek. Ki tudja megmondani a megoldásokat?
Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **C** feladatlap és megoldása

A tanár bíztassa a tanulókat az önálló munkára! Ha valamely tanuló bizonytalan, nincs ötlete arra, hogy miként kezdjen a rejtvények megoldásába, akkor javasolja a tanár, hogy keressen egy olyan párt magának, aki már valamennyire előrehaladt a rejtvény megoldásában, és közösen folytassák a megoldást.
Ha a tanulók nagy részének már van legalább egy rejtvényre megoldása, és minden rejtvényre született már megoldás, akkor beszélje meg az osztály azokat. A megoldásokat a tanulók ismertessék! Írják fel a táblára az eredeti jelekkel a rejtvényt, és a megoldás magyarázata közben töröljék le a jelet, és írják fel helyette a megfelelő számot.

A tanár készítsen elő 13 egyforma kártyalapot, négyen egy-egy műveleti jel, kilencen pedig 1-től 9-ig a számok szerepeljenek.
Most tördelős játékot fogunk játszani!
Mindenki rajzoljon két törtvonalat!
A kezemben van négy olyan kártya, amelyeken a négy alapművelet jele van, és kilenc olyan kártya, amelyre 1-től 9-ig felírtam az egész számokat. Először a műveleti jelek közül húzok egyet, ezt a műveleti jelet kell a törtvonalak közé beírni. Ezután négyszer húzok majd egymás után a számok közül. Amit már kihúztam, azt nem teszem vissza. A kihúzott számokat kell a törtek számlálójába vagy nevezőjébe beírni. Utólag már nem lehet változtatni.
Cél a minél nagyobb (kisebb), vagy ahhoz legközelebbi eredmény elérése!
Játssza le a csoport egy párszor a játékot, és jegyezzék, hogy kinek hányszor sikerült nyerni!
A játék végén beszélje meg az osztály, hogy az egyes műveletek esetén mi a nyerő stratégia a számok beírására.
Megoldás:
Legyenek a kihúzott számok: $a < b < c < d$. $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$
Összeg esetén a legnagyobb az eredmény, ha a két tört $\frac{d}{a} + \frac{c}{b}$.
Különbség esetén a legnagyobb az eredmény, ha a két tört $\frac{d}{a} - \frac{b}{c}$.

Szorzat esetén a legnagyobb az eredmény, ha a két tört $\frac{d}{a}\cdot\frac{c}{b}=\frac{c}{a}\cdot\frac{d}{b}$.
Hányados esetén a legnagyobb az eredmény, ha a két tört:
$\frac{d}{a}:\frac{b}{c}=\frac{d}{a}\cdot\frac{c}{b}=\frac{d}{b}:\frac{a}{c}=\frac{c}{a}:\frac{b}{d}=\frac{c}{b}:\frac{a}{d}$.

Melléklet a tanároknak: Kártyák a tördelős játékhoz

Próbálja meg a tanár elérni, hogy a többiek ünnepeljék meg a legjobb eredményt elért tanulót (tanulókat).
Ha a tanulóknak tetszik a játék, akkor csoportokba rendeződve folytathatják, esetleg általuk kitalált új szabállyal. Ilyenkor készítsék el maguk a számokat és a műveleti jelekkel ellátott kártyákat.

2. A tizedestörtek fajtái

A tizedestörtek lehetnek:

- véges tizedestörtek
- végtelen tizedestörtek:
  i. szakaszos végtelen tizedestörtek
  ii. nem szakaszos végtelen tizedestörtek

Nevezzük meg, hogy a következő tizedestörtek melyik csoportba tartoznak!

$0{,}3;\ 0{,}\dot{3};\ 7{,}0207;\ 3{,}66;\ 3{,}14;\ 6{,}808008000800008...;\ 23{,}80808080...$

a) Írjátok le rövidebb alakba a következő tizedestörteket!

4,777777…	=	$4{,}\dot{7}$
4,077777…	=	$4{,}0\dot{7}$
4,07070707…	=	$4{,}\dot{0}\dot{7}$
4,0207207207207…	=	$4{,}0\dot{2}0\dot{7}$
4,020702070207…	=	$4{,}\dot{0}20\dot{7}$
4,0207070707…	=	$4{,}02\dot{0}\dot{7}$
4,0207777777…	=	$4{,}020\dot{7}$

b) Fejtsétek ki!

$3{,}0\dot{6}$	=	3,06666…
$3{,}06\dot{3}$	=	3,063333…
$3{,}\dot{0}6\dot{3}$	=	3,063063063…
$3{,}0\dot{6}\dot{3}$	=	3,0636363…

Tudjátok-e, hogy a tizedesvessző után álló 100-adik számjegy mennyi?

Gyártsunk végtelen, nem szakaszos tizedestörteket!
Melyik szám esetén tudod meghatározni, hogy milyen számjegy áll a tizedesvessző után a 100-adik helyen?

Például:
4,123456789101112… (A pozitív egész számokat írjuk egymás után.)
4,707007000700007000007… (Mindig eggyel több 0 kerül a 7-es után.)
4,7077077707777…(Mindig eggyel több 7-es kerül a 0 után.)
4,1249162536… (A négyzetszámokat írjuk egymás után.)
4,23571113171923… (A prímszámokat írjuk egymás után.)
4,3544222163456… (Az egymást követő számjegyek szabályos dobókockával dobott számok.)

3. A racionális számok közönséges és tizedes tört alakja

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: közösen, majd egyénileg vagy párban)

Ki tudná más alakban felírni a $\frac{9}{7}$ alakban megadott számot?

Bíztassa a tanár a diákokat, hogy ne csak egy megoldást keressenek! Várhatóan megjelenik a vegyes tört és a bővített alak, valamint a tizedes tört alak is. Ha valamelyik kimaradna, akkor ötletként a tanár vesse azt fel.

Ki tudná más alakban, például közönséges törtként felírni a következő tizedes tört alakban megadott számokat: $0,\dot{3}; 0,\dot{1}; 0,\dot{9}$? Hogyan lehet egy ilyen (végtelen szakaszos) tizedes törtről megmondani, hogy mi a közönséges tört alakja?

Valószínűleg a gyerekek hamar felismerik, hogy $0,\dot{3} = \frac{1}{3}$. A következő szám az $\frac{1}{9}$, az előző szám harmada. A harmadik számra közönséges törtként az 1 adódik, hiszen ez az első szám háromszorosa. Ez általában meglepi a tanulókat.
Ha ezek a számok megvannak, akkor kérje meg a tanár a tanulókat, hogy javasoljanak ők is egy-két végtelen tizedes törtként megadott számot, és azt írják át közösen közönséges tört alakba!
Javasolja a tanár, hogy a kapott eredményeket ellenőrizzék a diákok.
Melléklet a tanároknak: Módszer az átírásra

A továbbiakban egyénileg vagy párban dolgozzanak a tanulók.

Most próbáljon meg mindenki olyan végtelen szakaszos tizedes törtet alkotni, hogyha annak a tizedesvessző utáni első valahány jegyét összeadjuk, akkor éppen 100-at kapunk, miközben a tizedestörtben hármasával ismétlődnek a jegyek!
Írjátok át ezt a számot közönséges tört alakba!

Tudtok-e így olyan számot alkotni, amelynek közönséges tört alakja számlálójának és nevezőjének a különbsége osztható 100-zal?
A tanulók dolgozhatnak egyénileg, a bizonytalanabbaknak keressen a tanár egy olyan párt segítségnek, aki biztosan mozog a témakörben.
Próbálják a tanulók minél kevesebb szakaszból előállítani a 100-at! (Négyből előállítható, ha a szakaszban lévő számjegyek összege 25. Pl. $0,\dot{9}9\dot{7}$. Ennél kevesebb szakaszból nem, mert pl. három szakasz esetében 9 db 9-es összege csak 81.
Ha megvan a kellő tizedes tört alak, akkor írják át azt közönséges tört alakba! Ha a számláló és a nevező különbsége nem osztható100-zal, akkor a megfelelő számmal bővítve a törtet biztosan ilyenhez jutnak.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Közönséges törtalakban megadott számokkal végzett műveletek

1. rejtvény:

$\frac{1}{\spadesuit}$	+	$\frac{1}{\spadesuit}$	+	$\frac{1}{\spadesuit}$	=	1
$\frac{1}{\clubsuit}$	+	$\frac{1}{\spadesuit}$	+	$\frac{1}{\diamondsuit}$	=	1
$\frac{1}{\clubsuit}$	+	$\frac{1}{\heartsuit}$	+	$\frac{1}{\heartsuit}$	=	1

2. rejtvény:

$\frac{1}{\spadesuit}$	–	$\frac{1}{\clubsuit}$	–	$\frac{1}{\heartsuit}$	=	0
$\frac{1}{\clubsuit}$	+	$\frac{1}{\clubsuit}$	+	$\frac{1}{\diamondsuit}$	=	1
		$\frac{1}{\diamondsuit}$	:	$\frac{1}{\clubsuit}$	=	2

3. rejtvény:

$\frac{1}{\heartsuit}$	–	$\frac{1}{\spadesuit}$	+	$\frac{\heartsuit}{\diamondsuit}$	=	0
$\frac{\diamondsuit}{\heartsuit}$	·	$\frac{\heartsuit}{\spadesuit}$	+	$\frac{1}{\heartsuit}$	=	1
$\frac{1}{\clubsuit}$	:	$\frac{1}{\spadesuit}$	:	$\frac{1}{\heartsuit}$	=	2

Megoldás:

1. rejtvény:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

2. rejtvény:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=0$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$
$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2$$

3. rejtvény:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=1$$
$$\frac{3}{2}*\frac{2}{6}+\frac{1}{2}=1$$
$$\frac{1}{12}:\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=1$$

Kártyák a tördelős játékhoz

+	–	·	/
1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9			

2. A racionális számok közönséges- és tizedes tört alakja

Módszer az átírásra

Egy végtelen szakaszos tizedes tört átírása közönséges tört alakba:

Legyen a szám például $X = 0,\dot{a}bc\dot{d}$ alakú. Ekkor

$10000 \cdot X = abcd,\dot{a}bc\dot{d}$, és

$1000 \cdot X - X = abcd,\dot{a}bc\dot{d} - 0,\dot{a}bc\dot{d}$,
amiből

$9999 \cdot X = abcd$, vagyis $X = \dfrac{abcd}{9999}$.

A módszer lényege: Állítsuk elő *X*-nek két olyan különböző tízhatványos szorzatát, ahol a tizedesvessző után már csak az ismétlődő szakasz áll, hiszen ezen számok különbsége révén szabadulhatunk meg az ismétlődő szakaszoktól.

Ha $X = 0,031\dot{a}bc\dot{d}$

$10^7 X = 31abcd,\dot{a}bc\dot{d}$

$10^{11} X = 31abcdabcd,\dot{a}bc\dot{d}$

$10^3 X = 31,\dot{a}bc\dot{d}$

$(10^7 - 10^3)X = \overline{31abcd} - 31$

$$X = \frac{\overline{31abcd} - 31}{10^7 - 10^3}$$

III. A SZÁZADOS

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

A százalékszámítással már az időszámításunk előtti 300-as évekből származó babiloni leleteken is találkozhatunk, kamatszámítással kapcsolatban. A százalékszámítással gyakran találkozunk a hétköznapi életben. Keressünk példákat!

Beszélgessen a csoport a százalékszámításról, mi a jelentősége a hétköznapokban, hol találkozik ezzel az ember. Ha a tanulók nem eléggé aktívak, akkor a tanár hozzon fel példákat.
Melléklet a tanároknak: Lehetséges példák
A százalékszámítással kapcsolatban felmerülő példákat pontosan beszélje meg a csoport. Például az adók esetében az adott százalékláb az egyik esetben levonást (személyi jövedelemadó esetén), egy másik esetben további költséget (ÁFA esetén) jelent.

1. Százalékszámításra visszavezethető társasjáték

(Javasolt idő: 20 perc; Eszközök: dobókocka, Munkaforma: 3-4 fős csoportokban)

Játszunk társasjátékot! Rendeződjetek 3-4 fős csoportokba!

Melléklet a tanároknak: Játékkártyák

Minden csoport rajzoljon egy 20 mezőből álló versenypályát, és számozzátok be a mezőket 1-től 20-ig sorban!
Mindenki az 1-es sorszámú mezőről indul, és az nyer, aki legelőször ér a 20-as mezőre! A bábuként használjátok a radírotokat, hegyezőtöket vagy egy pénzérmét! Minden csoport kap egy adag játékkártyát, a játékosok felváltva húzzanak egyet-egyet ezek közül. Ha egy játékosnak sikerül válaszolnia a kártyán feltett kérdésre, akkor annyit léphet előre, amennyi a kártya jobb oldalán látható szám. Számoljatok fejben!

Ossza ki a tanár a kártyákat a csoportoknak, vagy adja nekik oda egy fénymásolt lapon, és azt a tanulók is szétvághatják. A tanár ezután felügyelje a játékot. Ha kell, a kérdésekre adható válaszokat tartalmazó lapot is kioszthat a csoportoknak, hogy a vitás kérdéseket rendezhessék, vagy a válaszok helyességét ellenőrizhessék.
Melléklet a tanároknak: A játékkártyák megoldásai
Ha szükséges, akkor megegyezhet a csoport abban, hogy a válaszadásra a húzás után csak meghatározott idő áll rendelkezésre, körülbelül 5-15 másodperc. Addig érdemes a játékot játszani, amíg a tanulók meg nem unják. Ha tetszik a csapatoknak a játék, de már ismerik a kártyákat, akkor minden csapat készítsen százalékszámítással kapcsolatos kérdéseket tartalmazó kártyákat, amit átad egy másik csoportnak. A lehetséges játékváltozatokra példák találhatóak a mellékletben.
Melléklet a tanároknak: Példák játékváltozatokra

2. Százalékszámítással kapcsolatos feladatok

(Javasolt idő: 20 perc, Munkaforma: párban)

Rendeződjetek párokba!

Melléklet a diákoknak: **D** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **D** feladatlap és megoldása

Páronként elemezzétek a grafikont, valamint egy ahhoz kapcsolódó kérdéssort! A grafikon úgynevezett halmozott százalékos diagram. Ki tudná megmondani, hogy ez mit jelent?

Hogyan ábrázolták ezen a grafikonon az adatokat?

Próbáljatok meg válaszolni a feltett kérdésekre! Vigyázat, vannak közöttük olyan kérdések is, amelyekre a grafikon alapján nem lehet válaszolni! Melyek ezek?

Beszélje meg a csoport, hogy a grafikonon miként ábrázolták az adatokat! Ezután a tanár már csak felügyelje a párosok munkáját, ha szükséges, segítsen nekik.
Ha valamelyik páros rájött arra, hogy a megkérdezettek számát is meg kell adni ahhoz, hogy minden kérdésre válaszolni lehessen, majd megválaszolták a kérdéseket, és tudják, hogy melyekre nem lehet válaszolni, akkor a tanár adja meg a hiányzó adatokat a tanulóknak.
A megoldásokat csak abban az esetben beszélje meg közösen az egész csoport, ha erre igény jelentkezik, egyéb esetben elég, ha a tanár ellenőrzi azokat páronként.

Most a páros mindkét tagja írjon a grafikon alapján fejenként 4 darab a feladatlapon szereplőkhöz hasonló kérdést. Legyen közöttük olyan, amit a megkérdezettek létszáma ismerete nélkül is meg lehet válaszolni, és olyan is, amit ezen adatok nélkül nem lehet megválaszolni. Ha készen vagytok, akkor cseréljék ki a párosok tagjai egymás között a kérdéseket, és keressétek meg ezekre is a válaszokat, ha lehet.

A tanár most is felügyelje a munkát, és segítsen, ha ez szükséges. Ha valamelyik páros tagjai úgy gondolják, hogy sikerült egy igazán jó kérdést feltenniük, akkor azt megoszthatják az egész csoporttal. Ebben az esetben keresse meg az egész csoport közösen a választ.

A feladatlapon szereplő 7. kérdésre többféle válasz is adható, attól függően, hogy a megkérdezettek között hány nő, és hány férfi található. Keressetek legalább 3 különböző esetet, vagyis amikor a megkérdezettek száma más-más (ezen belül a nemek aránya is), és így más-más lesz a helyes válasz a kérdésre!

Ha a párosok többségének van már legalább két esetre megoldása, és a megoldások között szerepel három különböző eset, akkor beszélje meg az osztály közösen a megoldásokat. A párosok ismertessék az eredményeiket, lehetőleg úgy, hogy a különböző eseteket különböző párosok mutassák be.

Kaptok egy újabb feladatsort! Próbáljatok meg minél több feladatot megoldani közülük! A feladatok nem egyforma nehézségűek, és nem kell sorban megoldani őket! Válogassatok kedvetekre közülük!

Melléklet a diákoknak: **E** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **E** feladatlap és megoldása

A tanár felügyelje a párosok munkáját, bíztassa őket, hogy legalább egy feladatot próbáljanak megoldani. Ha valamilyen, a feladatban szereplő fogalmat nem ismernek, vagy értenek a tanulók, azt magyarázza el nekik a tanár. Ha egy páros készen van egy feladattal, akkor bíztassa őket, hogy válasszanak a maradék feladatok közül újat, és oldják meg azt is.

Közösen nem kell a feladatokat megbeszélni, csak akkor, ha ennek igénye több tanulóban is felmerül. Ekkor a megoldást lehetőleg egy olyan páros ismertesse, amelynek sikerült az adott feladatot jól megoldania. Pontatlanság vagy nem kielégítő magyarázat esetén a tanár is pontosíthatja a válaszokat. Ha egy páros hamarabb elkészül az összes feladat megoldásával, akkor játszhatnak az óra elején megismert játékkal.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

Ráhangolódás

Lehetséges példák:

1. Adók:
ÁFA: Ennél az adófajtánál a termék ára az adott százalékkal felnövelt érték. Ha azt mondjuk, hogy az ÁFA 20%, akkor az 1000 Ft-ba kerülő termék ára 1200 Ft, vagyis az ár 120%-a.
Jövedelemadó: Ilyenkor a kereset valahány százalékát kell adóban kifizetni, vagyis nem a 100%-át kapja meg az ember a fizetésének, hanem pl. 20%-os adó esetén csak a 80%-át. Itt megbeszélheti a csoport például a sávos adózás lényegét is.

2. Árleszállítás:
Ez csalóka lehet, mert van arra példa, hogy a kereskedő azt írja ki, hogy 10%, ebben az esetben az eredeti ár 90%-át kell kifizetni, és van arra is példa, hogy a kiírt érték 70%, ekkor pedig az eredeti ár 70%-át kell kifizetni, vagyis nem minden esetben a leszállítás mértékét adják meg a kereskedők.

3. Banki kamat:
Olyan fogalmakat beszélhet meg a csoport, mint havi és éves kamat, kamatos kamat. Ha pl. 100 000Ft-ot beteszünk egy olyan bankba, amelyik havi 0,5% kamatot számol, és ezt a kamatot a bank havonta jóváírja (azaz a tőkéhez csatolja), akkor a következő hónapban (ha nem veszünk ki pénzt a számláról) már a kamattal megnövelt tőke kamatozik. Tehát 1 hónap elteltével az „új” tőke 100 000 + 500 = 100 500 (Ft).

4. Infláció (A pénz vásárlóértéke csökken. Tehát pl. egy bizonyos fajta tej literjének ára 160 Ft-ról 180 Ft-ra nő.)

1. Százalékszámításra visszavezethető társasjáték

Játékkártyák

1.	Mennyi a 300-nak a 30%-a?	1	**21.**	Mennyi a 100-nál a 17%-ával nagyobb szám?	1
2.	Mennyi a 200-nak a 150%-a?	1	**22.**	Mennyi a 200-nál a 30%-ával kevesebb szám?	2
3.	Mennyi a 88-nak a 200%-a?	1	**23.**	Mennyi a 80-nál a 25%-ával nagyobb szám?	1
4.	Mennyi a 20-nak a 40%-a?	2	**24.**	Mennyi a 250-nél a 12%-ával kisebb szám?	3
5.	Mennyi a 70-nek a 70%-a?	2	**25.**	Mennyi a 170-nél a 120%-ával nagyobb szám?	3
6.	Hány százaléka a 121 a 100-nak?	1	**26.**	Egy szám 10%-a hányszorosa a számnak?	1
7.	Hány százaléka a 180 a 200-nak?	1	**27.**	Egy szám 150%-a hányszorosa a számnak?	2
8.	Hány százaléka a 20 a 80-nak?	1	**28.**	Hány százaléka egy számnak a szám háromszorosa?	1
9.	Hány százaléka a 12 a 60-nak?	2	**29.**	Hány százaléka egy számnak a szám négyötöd része?	3
10.	Hány százaléka az 1,6 a 20-nak?	2	**30.**	Egy szám fele hány százaléka a számnak?	1

11.	Melyik szám 50%-a a 20?	1	**31.**	Egy 2000 Ft-ba kerülő könyv árát felemelték 25%-kal. Mennybe kerül most a könyv?	3
12.	Melyik szám 30%-a a 36?	2	**32.**	Egy 2000 Ft-ba kerülő könyv árát felemelték 25%-kal. Mennyivel kerül most többe a könyv?	3
13.	Melyik szám 15%-a a 45?	2	**33.**	Egy 2000 Ft-ba kerülő könyv árát felemelték 25%-kal. Hány %-kal kell csökkenteni az új árat, hogy ismét 2000 Ft-ba kerüljön?	3
14.	Melyik szám 150%-a a 600?	1	**34.**	Egy cipő árát 20%-kal növelték. Hány százaléka az új ár az eredeti árnak?	2
15.	Melyik szám 110%a a 220?	1	**35.**	Egy könyv árát 12%-kal csökkentették. Hány százaléka a könyv új ára a régi árának?	2
16.	Hány százalékkal több a 115 a 100-nál?	1	**36.**	Egy kabát árát a kiárusításon 50%-kal csökkentették. Hányszorosa a kabát régi ára az új árának?	2
17.	Hány százalékkal kevesebb a 82 a 100-nál?	1	**37.**	Egy nadrág árát 25%-kal emelték. Hányszorosa az új ár a régi árnak?	3
18.	Hány százalékkal több a 120 a 60-nál?	1	**38.**	Egy televízió árát 25%-kal csökkentették. Hányszorosa az új ár a régi árnak?	2
19.	Hány százalékkal több a 30 a 25-nél?	2	**39.**	Egy 3000 Ft-ba kerülő ing árát felemelték, új ára 3600 Ft. Hány százaléka az ing új ára a régi árának?	3
20.	Hány százalékkal kevesebb a 30 a 40-nél?	2	**40.**	Egy cipő ára 30%-os csökkentés után 2100 Ft. Mennyibe került eredetileg a cipő?	3

A játékkártyák megoldásai

1. 90
2. 300
3. 176
4. 8
5. 9
6. 121%
7. 90%
8. 25%-a
9. 20%-a
10. 8%-a
11. 40
12. 120
13. 300
14. 400
15. 200
16. 15%-kal
17. 18%-kal
18. 100%-kal
19. 20%-kal
20. 25%-kal
21. 117
22. 140
23. 60
24. 220
25. 374
26. 0,1
27. 1,5
28. 300%
29. 80%
30. 50%-a
31. 2500 Ft
32. 500 Ft-tal
33. 20%
34. 120%
35. 88%
36. 2
37. $\frac{5}{4}$ vagy 1,25
38. vagy 0,75
39. 120%
40. 3000 Ft

Példák játékváltozatokra:

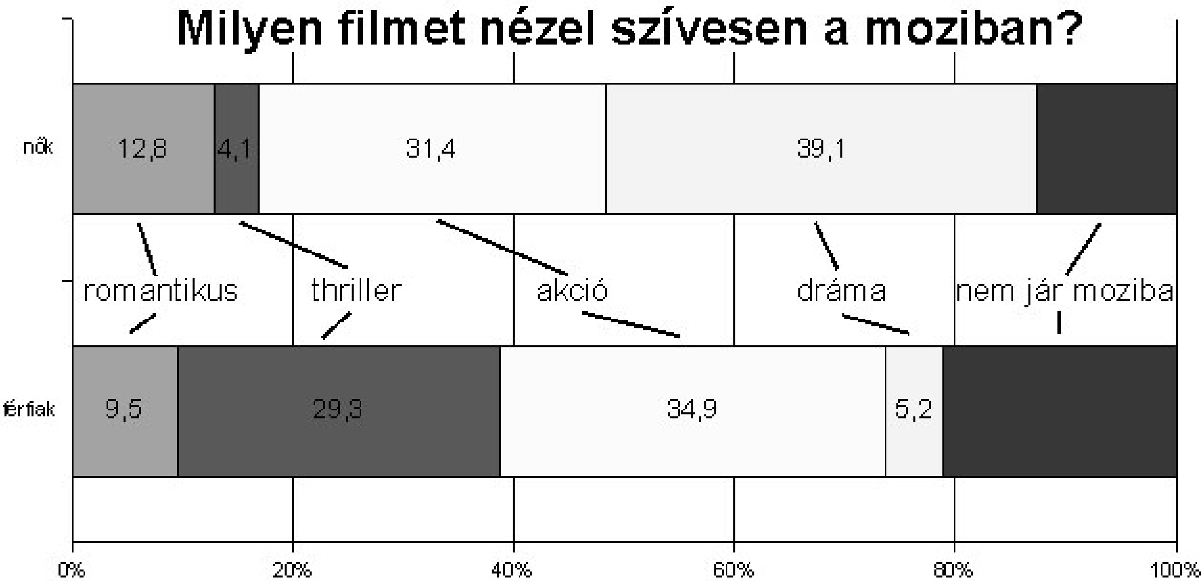
1. A játékosok dobnak egyet a dobókockával, és húznak egy kártyát. Ha sikerül a kártyán feltett kérdésre válaszolnia egy játékosnak, akkor annyit lép, amennyit a kockával dobott. Ebben az esetben használhatunk 20-nál több mezőből álló táblát is.

2. A pálya egyes mezői között nyilakat helyezünk el, és ha valamely játékos olyan mezőre lép, amiből nyíl indul ki, akkor átlép arra a mezőre, amelyikre a nyíl mutat. Ilyenkor izgalmassá teszi a játékot, ha az utolsó mezők valamelyikéről nyíl mutat az elsők valamelyikére.

2. Százalékszámítással kapcsolatos feladatok

D feladatlap

Nagyobb bevásárlóközpontok fiatal vásárlóközönségét kérdezték meg arról, hogy milyen típusú filmeket néznek meg a moziban a legszívesebben. A válaszok összesítése alapján készült grafikont mutatja az alábbi ábra:



Válaszoljatok az alábbi kérdésekre a grafikon alapján! Minden kérdésre meg lehet adni a választ?

1. A megkérdezett nők és a férfiak hányad része nem szokott moziba járni?

2. A férfiak vagy a nők között nagyobb-e azok aránya, akik akciófilmet néznek szívesebben?

3. A drámát szerető nők, vagy az akciófilmeket kedvelő férfiak vannak-e többen?

4. Hányszor annyi férfi szereti a thrillert, mint a romantikus filmeket? Hogyan van ez a nők körében?

5. Milyen típusú filmet kedvelnek a legjobban a férfiak?

6. A megkérdezettek között kik vannak többen: akik a romantikus, vagy akik az akciófilmeket kedvelik jobban?

7. Melyik típusú filmet kedveli a legkevésbé a legtöbb megkérdezett?

8. A megkérdezettek hányad része nem jár moziba?

Milyen adatot kellene még ismerni ahhoz, hogy az összes kérdésre válaszolni tudjunk?

*A **D** feladatlap megoldása:*

1. Nők: 12,5%, férfiak: 21,1%

2. A férfiak.

3. Nem lehet megmondani.

4. A férfiaknál: $29{,}3 : 9{,}5 \approx 3$-szor annyian, a nőknél: $4{,}1 : 12{,}8 \approx 0{,}3$-szor annyian.

5. Akció

6. Az akciófilmeket kedvelők vannak többen. Ez megmondható, hiszen mindkét nemen belül magasabb az arányuk.

7. Ezt nem tudjuk megmondani, ha sokkal több nőt kérdeztek meg, mint férfit, akkor a thrillereket, ha sokkal több férfit, akkor a drámákat kedvelik a legkevésbé. Ha közel egyforma számban kérdeztek meg férfiakat és nőket, akkor a romantikus filmeket kedvelik a legkevésbé a megkérdezettek.

8. Ezt nem tudjuk megmondani.

Ahhoz, hogy minden kérdésre válaszolni tudjunk, ismernünk kell a megkérdezettek számát. A grafikon 797 nő és 918 férfi válaszai alapján készült. Ekkor a hiányzó válaszok:

3. Az akciót kedvelő férfiak (320 fő) vannak többen, mint a drámát kedvelő nők (312 fő).

7. A romantikus filmeket (189 fő).

8. 0,17 része nem jár moziba a megkérdezetteknek.

E feladatlap és megoldása

1. Egy mobiltelefon-társaság az egyik díjcsomagot a következő feltételekkel hirdeti:
- A kapcsolási díj 2 Ft. (Ezt minden kapcsolt beszélgetésnél meg kell fizetni.)
- A beszélgetés percdíja 10 Ft, ezt minden megkezdett perc után meg kell fizetni.
- 5 perc beszélgetés után 20%, 10 perc beszélgetés után a társaság 30% kedvezményt ad a percdíjból.

Mennyibe kerül így egy 14 perc 32 másodperc időtartamú beszélgetés?
Hány százalék a megtakarítás ennél a beszélgetésnél ahhoz képest, ha nem lenne kedvezmény?

Megoldás:
$2+5\cdot 10+5\cdot 10\cdot 0{,}8+5\cdot 10\cdot 0{,}7=127$ Ft. (Összesen 15 percnyi beszélgetést kell kifizetni.)
15 percnyi beszélgetés eredetileg $2+10\cdot 15=152$ Ft-ba kerülne, így a kedvezmény $100-127/152\cdot 100=16{,}4$%-os.

2. Egy bank a lekötött betétre kétféle kamatozást kínál:

- Ha a pénzünket 3 havi lekötésre tesszük be, akkor 3 hónap múlva a kamat 2,3%.
- Ha a pénzünket 12 havi lekötésre tesszük be, akkor a kamat 12 hónap múlva 10%.

Megtakarított pénzünkre egy év múlva lesz szükségünk. Melyik lekötési formát érdemes választanunk? (Számolhatsz konkrét értékkel, például 100 000 Ft-tal!)

Megoldás:

Számoljunk például 100 000 Ft-tal:

3 havi lekötés esetén $100000 \cdot 1{,}023^4 \approx 109522$ Ft-ot kapunk,

12 havi lekötés esetén $10000051{,}1 = 110000$ Ft-ot, így az utóbbival járunk jobban.

3. Két évvel ezelőtt András fizetése 80 000 Ft volt, ezért akkoriban valamilyen termékből összesen 20 kg-ot tud vásárolni. Megegyezett a főnökével, hogy az első évben 5%-os, a következő évben 10%-os fizetésemelést kap. Ez alatt a két év alatt reálértékben nőtt, nem változott, vagy csökkent András fizetése, ha az első évben az infláció 8%-os, a másodikban 7,5%-os volt?

Megoldás:

Két év elteltével András fizetése $80000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}1 = 92400$ Ft lett.

A termék ára eredetileg $80000 : 20 = 4000$ Ft volt, mostani ára $4000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}075 = 4644$ Ft.

András tehát ebből kb. 19,9 kg-ot tud vásárolni, vagyis reálértékben csökkent a fizetése.

4. Egy 25 fős osztály 20%-a kék szemű, 40%-a fiú. A fiúk 30%-a kék szemű. Hány olyan lány van az osztályban, akinek a szeme színe nem kék?

Megoldás:

Az osztályba $25 \cdot 0{,}6 = 15$ lány és $25 \cdot 0{,}4 = 10$ fiú jár.

A kék szeműek száma $25 \cdot 0{,}2 = 5$, a kék szemű fiúké $10 \cdot 0{,}3 = 3$.

Így 2 kék szemű lány van, tehát $15 - 2 = 13$ nem kék szemű lány jár az osztályba.

IV. HATVÁNYOZZUNK!

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

Ki tudná megmondani, hogy hány őse élt István király idejében, körülbelül 1000 évvel ezelőtt?
Számoljatok úgy, hogy az egyes generációk között átlagosan 30 év telik el.

Ha kell, beszélje meg az osztály, hogy mit értünk egy generáció alatt, és hogy az embernek 2 szülője, 4 nagyszülője, 8 dédszülője, 16 ükszülője stb., van/volt. A tanulókat valószínűleg meglepi majd az eredmény, ami kb. 8,5 milliárd (pontos szám a mellékletben). Hívja fel a tanár a tanulók figyelmét arra, hogy az eredmény nagyobb, mint a Föld jelenlegi lakossága, valamint azt is érdemes tudni, hogy a Kárpát-medencében akkoriban kb. 500 000 ember élt. Próbálja meg a csoport ezek után megmagyarázni, hogy miért jött ki a hibás eredmény.
Melléklet a tanároknak: Őseink száma

1. Hatványozással kapcsolatos feladatok

(Javasolt idő: 25 perc; Munkaforma: 3-4 fős csoportban, majd frontális)

Alakítsatok csoportokat 3-4 fővel!

Tanulói munkafüzet: **F** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **F** feladatlap és megoldása

Minden csoport kap egy feladatsort, próbáljatok meg minél több feladatot megoldani! Csak pár perc áll rendelkezésetekre! Ha kell, osszátok el magatok között a feladatokat!

A tanár felügyelje a csoportok munkáját! Hagyja a tanulókat akár közösen, akár külön-külön dolgozni!
Pár perc után szólítsa fel a tanár a tanulókat, hogy fejezzék be a munkát, és beszélje meg az osztály együtt a megoldásokat! A tanulók ismertessék az eredményeiket! Minden esetben kérjen a tanár magyarázatot is a megoldást ismertető tanulótól! Ha az eredmény rossz vagy hibás a gondolatmenet, akkor hagyja a tanár, hogy azt egy másik tanuló javítsa ki!

Valakinek hatványozással kapcsolatos feladatokat kellett megoldania. Sajnos nem ismerte jól az azonosságokat, vagy talán nem figyelt eléggé, így egy pár feladatot elrontott. Keressétek meg a hibákat!
Tanulói munkafüzet: **G** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **G** feladatlap és megoldása

Ha jó a megoldás, akkor pipáljátok ki az eredményt, ha rossz, akkor húzzátok át az egyenlőségjelet, és a jó eredményt írjátok a hibás alá! Az egyenlőségjelek baloldalán találjátok a feladatokat, a jobb oldala a „megoldás". Dolgozzatok most is csoportokban!

A tanár felügyelje a csoportok munkáját, és ha szükséges, akkor segítsen. Amennyiben szükséges, ismételje át velük a hatványozás azonosságait! Ez történhet kisebb csoportonként, vagy az egész csoportban közösen. Ha kell, hívja fel a figyelmet a tanár arra, hogy a legtöbb összeg alakban szereplő kifejezést fel lehet szorzat alakban is írni!

Ha igénylik a tanulók, akkor az egész csoport közösen is megbeszélheti a megoldásokat, de a tanár megbeszélheti azokat külön-külön a kisebb csoportokkal is, esetleg részletekben (vagyis nem minden feladatét egyszerre).

2. Számolás normálalakkal

(Javasolt idő: 15 perc, Munkaforma: 2-3 fős csoportban)

Alakítsatok 2-3 fős csoportokat!
Csoportonként vizsgáljatok egy-egy táblázatot, amelyben különböző dolgok hosszát találjátok.

Tanulói munkafüzet: **H** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **H** feladatlap és megoldásai

Töltsétek ki a táblázat utolsó oszlopát úgy, hogy könnyebben össze lehessen hasonlítani ezeket a hosszúságokat! Legyen a méter a közös mértékegység! Hogyan lehet a legegyszerűbben ezt megoldani? Segítségül találtok az átváltásokhoz egy kisebb táblázatot is a hosszúságokat tartalmazó után!

Ha a tanulók maguktól nem alkalmazzák, akkor a tanár javasolja nekik a normálalak használatát. A segítség első lépése lehet, hogy a különböző, a segédtáblázatban szereplő hosszúságegységeket váltatja át a tanár a diákokkal méterbe, majd ezt felhasználva írják a hosszúságokat méterben megadva a nagy táblázatba a diákok.
Ha valamelyik csoport hamar készen van, akkor kérdezze meg a tanár, hogy hogyan kell ezek után cm-ben, km-ben stb. felírni az előző hosszúságokat!
Ha valamely, a táblázatban szereplő fogalommal nincs tisztában valamely tanuló, akkor kérdezze meg az osztály többi tagját, hátha ismeri közülük valaki. Ha egyik tanuló sem ismeri a fogalmat, akkor magyarázza el a tanár a tanulóknak! Érdeklődő csoport esetén a tanulók is utánanézhetnek az adott fogalmaknak, és valamely következő foglalkozáson elmesélhetik a csoport többi tagjának.

Maradjatok ugyanebben az elrendezésben, és válaszoljatok a következő feladatlapon található kérdésekre is az iménti táblázat alapján!

Tanulói munkafüzet: **I** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **I** feladatlap és megoldásai

Ha evvel készen vagytok, akkor mindenki írjon le egy papírra még pár hasonló kérdést, amelyek a táblázat alapján megválaszolhatók! A párosok cseréljék ki egymás között a kérdéseiket, és adják meg ezekre is a válaszokat!

Az első kérdésre az egész csoport együtt számíthatja ki a megoldást, ha ez szükséges. Ha általában megy a tanulóknak a normálalakkal való számolás, akkor csak azoknak segítsen a tanár, akik bizonytalanok abban.
Ha valamelyik tanulónak sikerült olyan kérdést kitalálnia, ami szerinte a többieket is érdekelheti, akkor olvassa azt fel az egész csoportnak, majd számolja ki minden tanuló arra is a választ.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

Ráhangolódás

Őseink száma
1000 év alatt kb. $1000 : 30 \approx 33$ generációváltással számolhatunk, vagyis 1000 évvel ezelőtt az őseink száma $2^{33} = 8\,589\,934\,592$-nek adódik.

A számítás nyilván hibás, hiszen ekkoriban a Kárpát-medencében kb. 500 000 fő élt, valamint ez a szám nagyobb a Föld jelenlegi lakosságánál. Nyilván sok-sok ősünket többször is számoltuk, ezért jött ki ekkora szám.
Az eredmény két érdekes következtetésre vezet: egyrészt valószínűleg a csoport minden tagjának van egy másik taggal közös őse még ilyen „rövid" időszakon belül is. Másrészt azt szokás rokonnak tartani, akivel maximum 6 generációra visszamenőlegesen találunk közös őst.

1. Hatványozással kapcsolatos feladatok

F feladatlap és megoldása

1. Megfigyelések szerint a pletyka úgy terjed, hogy ha valaki megtudja azt, akkor 2 perc múlva elmondja azt két embernek. Ők is 2 perc múlva elmondják újabb 2-2 embernek, és így tovább. Mindenki két olyan emberrel közli a pletykát, aki még nem ismerte. Ha valaki elindít egy pletykát, akkor hányan fogják azt megtudni azt 12 perc múlva? Hányan fogják ekkor összesen tudni ezt a pletykát? És 20 perc múlva?

Megoldás:
12 perc múlva $2^6 = 64$ ember tudja meg a pletykát, ekkor összesen
$1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64 = 127$ ember tudja. 20 perc múlva
$2^{10} = 1024$ ember tudja meg, és ekkor összesen $1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047$
ember tudja azt.

2. Készíts olyan 3 × 3-as bűvös négyzetet, ahol a sorokban, oszlopokban és az átlókban a számok szorzata állandó! Segítségül itt van egy olyan bűvös négyzet, ahol a szokásos módon a sorokban, oszlopokban és az átlókban a számok összege állandó:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Megoldás:
A hatványozást felhasználva az eredeti bűvös négyzetben szereplő számok legyenek a kitevői ugyanannak a számnak, például a 2-nek az új négyzetben:

2^4	2^3	2^8
2^9	2^5	2^1
2^2	2^7	2^6

vagyis

16	8	256
512	32	2
4	128	34

3. Tündérország királyának vára mellett található egy tó, amiben egy tavirózsa van. Ez a tavirózsa minden nap a kétszeresére nő, így egy hónap (30 nap) alatt benőtte a tavat. Melyik napon volt a tó fele benőve tavirózsával?

Megoldás:
A 29. napon.

4. Egy petricsészébe betettünk egy olyan sejtet, amelyik félpercenként kettéosztódik. Az új sejtek is olyanok, mint a régiek, és ezek is fél perc múlva kettéosztódnak. Hány perc múlva lesz 256 sejt az edényben? Hány perc alatt lépi át a sejtek száma az ezret? Ha a petricsészét fél óra alatt töltik meg a sejtek, akkor mikor volt a csésze a negyedéig tele?

Megoldás:
$256 = 4^4$, vagyis 4 perc múlva lesz ennyi sejt a csészében. $4^5 = 1024$, vagyis az 5. perc végén lépi át a sejtek száma az 1000-et. A sejtek a 29. percben töltik meg negyedéig a poharat.

G feladatlap és megoldása

Melyik igaz az alábbiak közül?

a) $2^5 + 2^5 = 2^{10}$
b) $2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 = 4^3$
c) $\dfrac{2^4 + 2^4}{4^4} = 1$

d) $\left(2^{10}\right)^{10} = 2^{20}$
e) $3^2 + 2 \cdot 3^2 + 3^2 = 6^2$
f) $2^4 \cdot 5^5 + 2^4 \cdot 5^5 = 10^5$

g) $\left(2^{10} + 2^{10}\right)^2 = 2^{22}$
h) $2 \cdot \left(2^{10} + 2^{10}\right) = 2^{21}$
i) $\dfrac{6^3 + 6^3}{3^3} = 4^3$

j) $4^3 + 4^3 = 2^{12}$
k) $3^3 + 3^3 + 3^3 = 9^2$
l) $3^5 \cdot 9^2 = 27^3$

m) $(-1)^{3^2} + (-1)^{2^3} = 0$
n) $3^2 + 3^3 = 6^2$
o) $\left((-1)^2\right)^3 + \left((-1)^3\right)^2 = 0$

p) $2^0 + 3^0 = 2 \cdot 1^{23}$
q) $0^7 - 0^6 = 0^3$
r) $0^7 - 0^7 = 0^0$

Megoldások:

A feladatlapon hibásan feltűntetett egyenleteket bekereteztük.

$\boxed{\text{a) } 2^5+2^5=2^6}$ b) $2^4+2^4+2^4+2^4=4^3$ $\boxed{\text{c) } \frac{2^4+2^4}{4^4}=2^{-3}}$

$\boxed{\text{d) } \left(2^{10}\right)^{10}=2^{100}}$ e) $3^2+2\cdot 3^2+3^2=6^2$ f) $2^4\cdot 5^5+2^4\cdot 5^5=10^5$

g) $\left(2^{10}+2^{10}\right)^2=2^{22}$ $\boxed{\text{h) } 2\cdot\left(2^{10}+2^{10}\right)=2^{12}}$ $\boxed{\text{i) } \frac{6^3+6^3}{3^3}=4^2}$

$\boxed{\text{j) } 4^3+4^3=2^7}$ k) $3^3+3^3+3^3=9^2$ l) $3^5\cdot 9^2=27^3$

m) $(-1)^{3^2}+(-1)^{2^3}=0$ n) $3^2+3^3=6^2$ $\boxed{\text{o) } \left((-1)^2\right)^3+\left((-1)^3\right)^2=2}$

p) $2^0+3^0=2\cdot 1^{23}$ q) $0^7-0^6=0^3$ $\boxed{\text{r) } 0^7-0^7=0^0}$

2. Számolás normálalakkal

H feladatlap és megoldásai

	Távolság	**Távolság méterben**
egy hidrogénatom sugara	25 pm	$2{,}5\cdot 10^{-11}$ m
egy tipikus kovalens kötés (C-C) hossza	154 pm	$1{,}54\cdot 10^{-10}$ m
a DNS-hélix átmérője	2 nm	$2\cdot 10^{-9}$ m
a legnagyobb részecske mérete, amely átjut-hat egy sebészmaszkon	100 nm	10^{-7} m
a pókháló fonalának szélessége	7 µm	$7\cdot 10^{-6}$ m
egy emberi hajszál átlagos szélessége	80 µm	$8\cdot 10^{-5}$ m
egy emberi petesejt átmérője	500 µm	$5\cdot 10^{-4}$ m
egy átlagos vöröshangya hossza	5 mm	$5\cdot 10^{-3}$ m
egy golflabda átmérője	4,267 cm	$4{,}267\cdot 10^{-2}$ m
egy lilliputi mérete a Gulliver utazásaiban	15 cm	$1{,}5\cdot 10^{-1}$ m
1 láb	30,48 cm	$3{,}048\cdot 10^{-1}$ m
1 yard	91 cm	$9{,}1\cdot 10^{-1}$ m
a kosár magassága a kosárlabdában	3,048 m	3,048 m
a legmagasabb állat, a zsiráf magassága	5,5 m	5,5 m
a kék bálna, a legnagyobb állat hossza	30 m	$3\cdot 10^{1}$ m
a Niagara-vízesés magassága	52 m	$5{,}2\cdot 10^{1}$ m
a pisai ferde torony magassága	55 m	$5{,}5\cdot 10^{1}$ m
egy futballpálya hossza	105 m	$1{,}05\cdot 10^{2}$ m
a Gellért-hegy magassága	235 m	$2{,}35\cdot 10^{2}$ m
az Eiffel-torony magassága	300 m	$3\cdot 10^{2}$ m
az a táv, amit a hang egy másodperc alatt megtesz a levegőben; lásd hangsebesség	340 m	$3{,}4\cdot 10^{2}$ m
Erzsébet kilátó, János-hegy (Budapest leg-magasabb pontja)	527 m	$5{,}27\cdot 10^{2}$ m

1 tengeri mérföld	1852 m	$1{,}852 \cdot 10^{3}$ m
a legmagasabb hegycsúcs, a Mount Everest (Csomolungma) magassága	8848 m	$8{,}848 \cdot 10^{3}$ m
a Mariana-árok, az óceán legmélyebb pontjának mélysége	10 911 m	$1{,}0911 \cdot 10^{4}$ m
a Balaton legnagyobb szélessége	14 km	$1{,}4 \cdot 10^{4}$ m
Magyarország legnagyobb kiterjedése észak-déli irányban	268 km	$2{,}68 \cdot 10^{5}$ m
a Duna magyarországi szakaszának hossza	417 km	$4{,}17 \cdot 10^{5}$ m
Budapest–Párizs-távolság légvonalban	1266 km	$1{,}266 \cdot 10^{6}$ m
a Tisza teljes hossza	1358 km	$1{,}358 \cdot 10^{6}$ m
a Hold átmérője	3480 km	$3{,}48 \cdot 10^{6}$ m
a Kínai Nagy Fal hossza	6400 km	$6{,}4 \cdot 10^{6}$ m
a Föld egyenlítői átmérője (a Föld sugara ennek fele)	12 756 km	$1{,}2756 \cdot 10^{7}$ m
Budapest–Wellington-távolság légvonalban (majdnem a Föld átellenben lévő pontja)	17 958 km	$1{,}7958 \cdot 10^{7}$ m
a Jupiter átmérője	142 984 km	$1{,}42984 \cdot 10^{8}$ m
a fény által egy másodperc alatt megtett út	299 792 458 m	$2{,}99 \cdot 10^{8}$ m
a Hold keringési távolsága a Földtől	384 000 km	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m
a Nap átmérője	1 390 000 km	$1{,}39 \cdot 10^{91}$ m
csillagászati egység (CSE): a Föld és a Nap közötti átlagos távolság	150 millió km	$1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
a Plútó keringési távolsága a Naptól	5,9 Tm	$5{,}9 \cdot 10^{12}$ m
a legközelebbi csillag (a Proxima Centauri) távolsága	39,9 Pm	$3{,}99 \cdot 10^{16}$ m
a Nagy Magellán-felhő távolsága (egy, a Tejút körül keringő törpegalaxis)	1,6 Zm	$1{,}6 \cdot 10^{21}$ m

Átváltások:

1000 pikométer (pm)	=	1 nanométer (nm)
1000 nanométer (nm)	=	1 mikrométer (μm)
1000 mikrométer (μm)	=	1 milliméter (mm)
10 milliméter (mm)	=	1 centiméter (cm)
10 centiméter (cm)	=	1 deciméter (dm)
10 deciméter (dm)	=	1 méter (m)
1000 méter (m)	=	1 kilométer (km)
1000 kilométer (km)	=	1 megaméter (Mm)
1000 megaméter (Mm)	=	1 gigaméter (Gm)
1000 gigaméter (Gm)	=	1 teraméter (Tm)
1000 teraméter (Tm)	=	1 petaméter (Pm)
1000 petaméter (Pm)	=	1 examéter (Em)
1000 examéter (Em)	=	1 zettaméter (Zm)
1000 zettaméter (Zm)	=	1 yottaméter (Ym)

Ha a hosszúságokat cm-ben akarjuk megadni, akkor minden kitevőhöz kettőt kell adni, ha kilométerben, akkor hármat le kell vonni.

I feladatlap és megoldása

Az előző táblázat alapján válaszoljatok az alábbi kérdésekre!

1. Hány láb magasan van a kosár a kosárlabdában?

2. Legfeljebb hány kék bálna férne el egymás mögött a Balatonban széltében?

3. Hány Eiffel-tornyot kellene egymásra rakni, hogy ez az „építmény" elérjen a Holdig?

4. Mennyi idő alatt ér a fény a Naptól a Földre?

5. Hányszor távolabb kering a Plútó a Naptól, mint a Hold a Földtől?

6. Hány csillagászati egységre van tőlünk a legközelebbi csillag, a Proxima Centauri?

7. 1 fényév hány kilométer?

8. Hány fényév az 1 CSE?

Megoldások:

1. 10

2. 466

3. 1 280 000

4. kb. 500 másodperc

5. kb. 13 000

6. $2{,}66 \cdot 10^5$

7. $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km

8. $1{,}58 \cdot 10^{-5}$ fényév

1 CsE = 149 600 000 km = 8,33 fényperc

1 fényév = 63 240 CsE

V. VÉGJÁTÉK

Ráhangolódás (kb.5 perc)

Ki tudja, hogy a számológépek nagy része ma már közönséges és vegyes tört alakú számokkal is tud számolni? Nézzük meg, hogy mi mindet tud a számológépetek!

Tekintse át a csoport a számológép nyújtotta fontosabb lehetőségeket: az alapműveletek mellett a zárójelezés, tört alakok, hatványozás, normálalakkal való számolás lehetőségét. Ha érdeklődnek a tanulók, akkor mesélhet a tanár nekik a későbbi tanulmányok során használandó lehetőségekről: gyökvonás, szögfüggvények, logaritmus stb.
Ha igény van rá, hívja fel a tanulók figyelmét arra is a tanár, hogy két típusú számológép van forgalomban, az egyiknél először a függvényt, és utána a számot kell beütni (mintegy fonetikusan), a másik típusnál ez pont fordítva van, a beadott számra kell a függvényt alkalmazni. (Ennek igazán a későbbi tanulmányok során van jelentősége, a 8. évfolyamon a probléma a gyökvonásnál kerül először elő.)
Vannak nagyon egyszerű számológépek, amelyek a négy alapművelet mellett még a négyzetgyökvonást tudják elvégezni. Ezek a gépek nem tudják a műveletek sorrendjét, minden műveletet rögtön végrehajtanak a kijelzőn lévő számon. Pl.: a $2 + 3 \cdot 5$ műveletsorra 25-t adnak eredményül a helyes 17 helyett.

1. Törtek a számológépen

(Javasolt idő: 10 perc; Munkaforma: egyénileg)

Tanulói munkafüzet: **J** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **J** feladatlap és megoldása

Mindenki kap törteket tartalmazó műveletsorokat, ezek végeredményét kell megadnotok. A lényeg most az, hogy mindenki a számológépe segítségével számolja ki a végeredményt úgy, hogy az egész műveletsort egyszerre írja be a gépébe!

Ha szükséges, akkor egy-két műveletsor beírásánál segítsen a tanár!
Ha tetszik a tanulóknak a számológéppel számolás, akkor verseny rendezhető, ekkor egy feladatgyűjteményből vagy fejből írjon fel a tanár egy műveletsort a táblára, és az a tanuló nyer, aki a leggyorsabban kapja meg a helyes végeredményt a számológépe segítségével.
Ha a törtekkel való számolással végeztek a tanulók, akkor ellenőrizzék az előző foglalkozás végén kapott eredményeiket is a számológépük segítségével.

2. Tesztfeladatok megoldása

(Javasolt idő: 25 perc; Munkaforma: egyénileg, majd frontális)

Tanulói munkafüzet: **K** feladatlap
Melléklet a tanároknak: **K** feladatlap és megoldása

Töltsetek ki egy 10 kérdésből álló tesztlapot! A jó válasz 3 pontot ér, rossz válasz esetén 1 pontot le kell vonni. Ha nem jelöltél meg egyetlen választ sem, akkor 0 pontot kapsz arra a feladatra. A munkaidő 15 perc! A válaszokat utána közösen beszéljük meg!

A megoldások megbeszélése közben a tesztlapokat a tanulók maguk javítsák! A végén számítsák ki a tanulók az eredményüket, és a legjobb eredményt elért tanulót (tanulókat) ünnepelje meg valamilyen formában a csoport.
Ha marad még idő a foglalkozás végén, akkor a tanulók játszhatnak a 3. foglalkozáson megismert játékkal.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Törtek a számológépen

J feladatlap és megoldása

Számítsátok ki számológéppel a következő kifejezések értékét! Ha a végeredmény tört szám, akkor próbáld meg minél több alakban megadni az eredményt!

1. $\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{8}{5}=1\frac{16}{35}=\frac{51}{35}\approx 1{,}457$

2. $\left(2\frac{3}{8}-1\frac{1}{3}\right):\frac{17}{9}=\frac{75}{136}\approx 0{,}551$

3. $\left(7-3\frac{2}{5}\right):\left(-1\frac{3}{5}\right)=-2\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}=-2{,}5$

4. $\dfrac{2\frac{1}{5}\cdot 3\frac{3}{4}+2\frac{2}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{5\frac{5}{6}\cdot 2\frac{4}{7}}=1\frac{3}{20}=\frac{23}{20}=1{,}15$

Ennél a feladatnál figyelni kell arra, hogy a nevezőben lévő kifejezést is zárójelbe kell tenni a számológépbe való beíráskor.

5. $\dfrac{\frac{7}{2}+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{1\frac{1}{20}+4{,}1}=1\frac{239}{309}=\frac{548}{309}\approx 1{,}77$

6. Az előző foglalkozáson normálalakban megadott számokkal számoltunk. Tegyétek ezt meg most számológéppel is, ellenőrizzétek az eredményeiteket!

2. Teszteljünk

K feladatlap és megoldása

1. A következő mennyiségek közül melyiket nem lehet megmérni egy kétkarú mérlegen, ha csak négy darab súlyunk van (1, 3, 9 és 11 kg-os), és csak ezeket használhatnánk mérésre?

A) 13 B) 17 C) 15 **D**) Mindegyiket meg lehet mérni

2. Hány igaz állítás van az alábbiak között?

$3^4 \cdot 3^3 = 3^{12}$ $\left(2^5\right)^2 = 2^{10}$ $25 \cdot 5^3 = 5^5$ $\frac{7^7}{7^7} = 2^0$

A) 1   B) 2   **C**) 3   D) 4

3. Mivel egyenlő $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}\right):\frac{4}{6}$?

A) 6   B) $\frac{4}{3}$ **C**) 3   D) $\frac{3}{4}$

4. Mennyi a $2+\frac{1}{3}$ szám reciproka?

A) $\frac{1}{2}+3$ **B**) $\frac{3}{7}$ C) 3,5   D) egyik eddigi válasz sem helyes

5. Ha két szám szorzata 1, akkor az egyik szám a másik

A) ellentettje   B) abszolút értéke   **C**) reciproka   D) egyik eddigi válasz sem helyes

6. Mennyi az $\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)$ szorzat értéke?

A) 2   B) 3   C) 4   D) 5

7. Egy négyzet két szemközti oldalát csökkentettük a 60%-ával. Hogyan kell megváltoztatni a másik két párhuzamos oldal hosszát, hogy a kapott téglalap területe megegyezzen a négyzet területével?

A) növelni kell a 60%-ával   **B**) a $\frac{5}{2}$-szeresére kell változtatni

C) növelni kell a 40%-ával   D) egyik eddigi válasz sem helyes

8. Egy kereskedő egy kabát árát 20%-kal csökkentette. Hány százalékkal kell az új árat felemelnie, hogy a kabát újra annyiba kerüljön, mint eredetileg?

A) 80%-kal   **B**) 25%-kal   C) 20%-kal   D) 75%-kal

9. Ha egy osztályban a fiúk száma a lányok számának $\frac{1}{3}$-ad része, akkor a lányok száma az osztály létszámának

A) 66,6%-a B) 50%-a **C**) 75%-a D) 33,3%-a

10. Egy osztályba 40 tanuló jár. 14 tanuló kézilabdázik, 36 tanuló kosárlabdázik. Mindegyik tanuló legalább az egyik sportágat űzi. Az osztály hány százalékát teszik ki azok a tanulók, akik csak kézilabdáznak?

A) 10% B) 35% C) 90% D) 25%

Megoldások:
D, C, C, B, C, A, B, B, C, A