MATEMATIKA „C”
8. évfolyam

1. modul
HOGY IS VAN?

Készítette: Surányi Szabolcs

A modul célja	A logikus gondolkozás, a logikai képességek és a gondolkozási módszertan eszköztárának fejlesztése.
Időkeret	3 x 45 perc
Ajánlott korosztály	13–14 évesek; 8. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Képzőművészetek. Szűkebb környezetben: A 8.-os „C"anyag 4. modulja Ajánlott megelőző tevékenységek: Kombinatorikai, geometriai, számelméleti alapismertek
A képességfejlesztés fókuszai	Gondolkodási képességek: Induktív és deduktív következtetés, érvelés, a gondolkodási sebesség fejlesztése. Kommunikációs képességek: Szövegértés, szövegértelmezés, nyelvi fejlettség.

AJÁNLÁS

Lépten-nyomon találkozunk a logikával a hétköznapi életben, még ha ez nem is tudatosul bennünk. Sokszor teszünk kijelentéseket, fogalmazunk meg állításokat, vonunk le következtetéseket.
Gyakran találkozom a tanítványaim azon kívánságával, hogy érdekes „logikai" feladatokkal szeretnének foglalkozni. Sok matematikai probléma bújtatható ilyen köntösbe, és e feladatok segítségével könnyen felkelthetjük a tanulók matematika iránti érdeklődését. A vizuális és logikai paradoxonok vizsgálata felkeltheti a matematika iránt kevéssé fogékony tanulók érdeklődését is, emellett az absztrakciós képesség fejlesztésében is fontos szerepet játszhat.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Mérő László: *Mindenki másként egyforma* (Tericum)
Raymond M. Smullyan: *Mi a címe ennek a könyvnek?* (Typotex)
Raymond M. Smullyan: *A hölgy meg a tigris* (Typotex)
Raymond M. Smullyan: *Alice rejtvényországban* (Typotex)

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Logikus!			
1.	Játékos vetélkedő	Deduktív és induktív következtetés, eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, metakogníció, szövegértés, szövegértelmezés	Eszköz: egy pakli francia kártya Melléklet a tanároknak: Megoldás a játékos vetélkedőhöz
2.	A hétköznapi tapasztalatokon alapuló logikai feladatok	Deduktív és induktív következtetés, eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, metakogníció, szövegértés, szövegértelmezés	Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap és megoldása
3.	Logikai feladatok megoldása		Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása
II. Hihetetlen?!			
1.	Vizuális paradoxonok elemzése.	Deduktív és induktív következtetés, eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, rész–egész észlelése	Eszközök: Másolatok a képekről Melléklet a tanároknak: Vizuális paradoxonok vizsgálata Escher képei

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
2.	Híres paradoxonok vizsgálata	Deduktív és induktív következtetés, eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, rész–egész észlelése	Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **C** feladatlap és megoldása
III. Szitáló			
1.	Az eratosztenészi szita.	Eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, számolási képesség	Eszközök: különböző színű tollak (ceruzák) Tanulói munkafüzet: Számtáblázat
2.	Tapasztalatszerzés a logikai szitaformulával kapcsolatban	Eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, számolási képesség	Tanulói munkafüzet: **D** feladatlap Melléklet a tanároknak: A **D** feladatlap és megoldása
3.	Modell a logikai szitaformula alkalmazásához, a formula alkalmazása	Eredetiség, kreativitás, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, számolási képesség	Eszközök: színes papír, olló, ragasztószalag, 1. melléklet fénymásolata csoportonként egy darab Tanulói munkafüzet: **E** feladatlap Melléklet a tanároknak: Az **E** feladatlap és megoldása

I. LOGIKUS!

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

Amerikában volt egy televíziós vetélkedő (Let's make a deal! – Kössünk üzletet!), ahol az utolsó feladat a következő volt:
Három ajtó közül választhatott a játékos, melyek közül az egyik nagy értékű nyereményt rejtett, a másik kettő mögött viszont nem volt semmi. A játékos nyereménye az általa választott ajtó mögötti tárgy volt. Miután a játékos kiválasztotta az ajtót, a műsorvezető a másik két ajtó közül mutatott neki egy olyat, ami mögött biztosan nincs nyeremény. A játékos ezután mérlegelhetett, és megváltoztathatta a döntését, vagyis választhatta a harmadik ajtót. A kérdés az, hogy érdemes-e változtatni a játékosnak, vagy maradjon az eredetileg választott ajtó mellett.
(Ehhez hasonló vetélkedőműsor a Magyar Televízióban is ment, Fekete Macska néven, Rózsa György vezetésével.)

1. Játékos vetélkedő

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: kártyalapok egy pakli francia kártyából a játékhoz; Munkaforma: frontális, majd csoportos)

A kártyapakliból vegyünk ki két fekete és egy piros kártyalapot a Ráhangolódásban elhangzott játékban szereplő ajtók jelképeként.

Játsszuk le közösen a játékot, az egyszerűség kedvéért kártyalapokat használunk. A piros lap jelenti a nyereményt, a fekete azt, hogy nem nyert. A tanár legyen a műsorvezető, és valaki a játékos. Ki kell találnotok, hogy a három leborított kártya közül melyik a piros!
Gondoljátok végig, hogy ha rátok kerül a sor, akkor fogtok-e változtatni az eredeti döntéseteken vagy nem!
A nyeremény legyen egy-egy szelet csoki!
Először beszélje meg az osztály, hogy érdemes-e változtatni vagy nem. Nem kell a véleményt indokolni, elég, ha minden tanuló eldönti, hogy melyik a jobb stratégia. Esetleg szavazásra is bocsáthatjuk a kérdést. Ezután jöhet a játék.
A tanár a tanulók előtt keverje meg a lapokat, majd egymás mellé tegye le őket a tanári asztalra úgy, hogy csak ő tudja, melyik a piros lap. A tanulók sorban játszanak egyet-egyet, és aki nyer, az kapja meg a nyereményét.
A játék közben jegyezzük fel, hogy milyen arányban nyertek a tanulók akkor, ha változtattak, és akkor, ha nem!

Rendeződjetek párokba!
Minden pár kap 3-3 darab kártyát – egy pirosat és két feketét. A piros lap jelenti a nyereményt, a fekete, hogy nem nyert. Játsszátok el ti is többször a játékot! Az egyikőtök lesz a műsorvezető, a másik a játékos. Minden esetben jegyezzétek fel, hogy változtatott-e a játékos az eredeti döntésén, és hogy nyert-e!
Tanulói munkafüzet: Táblázat a tippek lejegyzéséhez
Beszéljétek meg, hogy a lehelyezett lapok hányadik „ajtónak" felelnek meg!
(Például: a játékos a 2. ajtóra tippel – 2. kártyára mutat, és ezt lejegyezzük –, a nyeremény a 3. ajtó mögött van.
Felfordítja a játékvezető a lapot.
A játékos eldönti, hogy változtat-e a tippjén, például: nem változtat. Ezt is lejegyezzük.

Végezetül az eredményt is lejegyezzük!)

1. Tipp	**Változtat (igen / nem)**	**2. Tipp**	**Nyert? (igen / nem)**
második	nem	második	nem

Ha már minden páros lejátszotta a játékot legalább tízszer, akkor közösen összesítjük az eredményt. Ez után eldöntjük, hogy érdemes-e a játékosnak változtatni a döntésén, vagy nem!

A tanár kísérje figyelemmel a párok munkáját, és hogy rendesen jegyzik-e az eredményeket! Ha már minden páros eleget játszott, akkor a csoport közösen összesítse az eredményeket, és indokolják meg, miért érdemes változtatni.
Melléklet a tanároknak: Megoldás

2. A hétköznapi tapasztalatokon alapuló logikai feladatok

(Javasolt idő: 25 perc; Eszközök: **A** és **B** feladatlap; Munkaforma: 3-4 fős csoportokban, majd frontális)

Rendeződjetek 3-4 fős csoportokba! Oldjátok meg az **A** feladatlapot!
Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap
Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap és megoldása

Minden csoport ugyanazon a „logikai” feladatokból álló feladatsort kapja meg! Igyekezzetek minél több feladatot megoldani! A feladatok nem kell sorrendben megoldani!

Felügyelje a tanár a tanulók munkáját! Hagyja, hogy a csoport tagjai egymás között megvitassák a felmerülő ötleteket, csak arra ügyeljen, hogy ez ne menjen egy másik csoport munkájának a rovására! Ha valamelyik csoport tagjai nagyon tanácstalanok, akkor segítse őket egy-két megjegyzéssel!
Ha valamelyik csoport tagjai hamar készen vannak (esetleg több feladatot is ismertek a kitűzöttek közül), akkor bíztassa őket további megoldások keresésére!
Ha már több csoportnak is van (a csoport tagjai szerint helyes) megoldása legalább a feladatok felére, akkor az egész osztály közösen vitassa meg a feladatok megoldását! Hagyjuk a tanulókat érvelni a saját megoldásuk mellett, és hogy a hibás megoldásokat valamelyik másik csoporthoz tartozó tanuló bírálja. A tanár csak akkor közölje a megoldást, ha az osztályból senkinek sem sikerült megtalálnia egyetlen megoldást sem.

Érdeklődő tanulók esetén előfordulhat, hogy előre megoldják a tanulói füzetben található feladatokat, vagy már ismerik az itt kitűzött feladatokat. Ilyen esetre vigyen be a tanár tartalék feladatokat. Remek példák találhatók többek között Raymond M. Smullyan könyveiben: *Mi a címe ennek a könyvnek?; A hölgy meg a tigris; Alice rejtvényországban.* (A Typotex kiadónál jelent meg mindegyik kötet.)

Maradjatok továbbra is csoportokban!
Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása

Kaptok egy újabb feladatsort. Osszátok fel egymás között a feladatokat, és először próbálja mindenki önállóan megoldani a feladatát, majd beszéljétek meg a feladatokat a csoporton belül!

A tanár most is csak felügyelje a tanulók munkáját! Hagyja, hogy a csoport tagjai egymás között megvitassák a felmerülő ötleteket, csak arra ügyeljen, hogy ez ne menjen egy másik csoport munkájának a rovására! Ha valamelyik csoport tagjai nagyon tanácstalanok, akkor segítse őket egy-két megjegyzéssel!
Frontálisan ne beszéljék meg a megoldásokat!
Javasolhatjuk a tanulóknak, hogy otthon is gondolkozhatnak azokon a feladatokon, amelyekkel most nem sikerült megbirkózniuk, de erre ne kötelezzük őket!

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Játékos vetélkedő

Megoldás:
Valószínűleg sok tanulót meglep majd az eredmény, hiszen a „józan ész” azt diktálná, hogy ha két ajtó/lap közül egyik a nyerő, a másik nem, akkor 50%-50% az esélye az embernek, hogy eltalálja a jót. Valójában ez nem így van. Kezdetben 1/3 a valószínűsége annak, hogy eltaláltuk a nyerő ajtót/lapot, és ez a játék során nem változik. Annak a valószínűsége, hogy a másik kettő között van a nyerő 2/3, és ez sem változik, tehát dupla annyi az esély a nyerésre, ha nem tartjuk magunkat az eredeti döntéshez.
Ezt egy táblázat segítségével is megindokolhatjuk, az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy kezdetben az első ajtót/lapot választjuk.
Ha a játékos nem változtat:

első	második	harmadik	
piros	fekete	fekete	*nyer*
fekete	piros	fekete	*veszít*
fekete	fekete	piros	*veszít*

Ha a játékos változtat:

első	második	harmadik	
piros	fekete	fekete	*veszít*
fekete	piros	fekete	*nyer*
fekete	fekete	piros	*nyer*

Ugyanilyen táblázatokat készíthetünk abban az esetben is, ha a játékos kezdetben nem az első, hanem a második vagy harmadik ajtót/lapot választja, így ezekben az esetekben is ugyanez a helyzet.

2. A hétköznapi tapasztalatokon alapuló logikai feladatok

A feladatlap

1. Egy vándor a vasúti töltés mellett gyalogol, és csak azt tudja, hogy az úti célja a sínek mellett van, valamint azt, hogy nemsokára utoléri egy olyan vonat, amely az ő célállomása felé megy. Percek múlva el is robog mellette a vonat. Néhány perc múlva a vándor egy pályaelágazáshoz ér, ahol az egyik vágány élesen elkanyarodik. Merre folytassa a vándor az útját?

Megoldás:
Arra, amerre a vonat ment, vagyis arra, amerre melegebb a sín, vagy a sínpár olajos, vagy a váltó áll, vagy amelyik irányból vonatfütty hallatszik, vagy amerre csillapodva rezeg a sínpár …, stb.

2. Egy ember egy harmincemeletes ház huszonötödik emeletén lakik. Minden reggel (szombat és vasárnap kivételével) beszáll a liftbe, lemegy a földszintre, és elindul dolgozni. Este hazaér, beszáll a liftbe, és felmegy vele a huszonnegyedik emeletig, és felsétál egy emeletet. Miért száll ki mindig a huszonötödik helyett a huszonnegyediken?

Megoldás:
Mert túl alacsony ahhoz, hogy elérje a huszonötödik gombját.

Segíthetünk úgy a tanulóknak, ha kiegészítjük a feladatot: Ha tudja előre, hogy esős idő lesz aznap, akkor hazafelé menet a huszonötödiken száll ki, az esernyővel ugyanis eléri a huszonötödik szint gombját.

3. Egy teremben a falra 3 izzólámpát szereltek. Mindegyik lámpához egy-egy kapcsoló tartozik, de a kapcsolók a termen kívül, a bejáratnál vannak. Kezdetben mindhárom lámpa le van kapcsolva. Mielőtt bemegyünk a terembe, hozzányúlhatunk a kapcsolókhoz, de a bezárt ajtón keresztül nem láthatjuk, melyik lámpa gyulladt fel. Ezután bemehetünk a terembe, és odabent el kell döntenünk, melyik kapcsoló melyik lámpához tartozik. Hogyan csináljuk?

Megoldás:
Az egyik kapcsolót felkapcsoljuk, majd kis idő múlva lekapcsoljuk, és felkapcsolunk egy másikat. A terembe bemenve a másodikként felkapcsolt kapcsolóhoz tartozó izzó ég, a nem világító izzók közül pedig az tartozik az elsőre felkapcsolt kapcsolóhoz, amelyik meleg.

4. Egy katonának egyetlen egy bátyja meghal. Ügyvéd jelenlétében a család és a rokonság felbontja a végrendeletet, amiben ez áll: „Minden vagyonomat egyetlen öcsémre hagyom." A katona mégsem kap semmit.

Megoldás:
A katona az illető húga volt, és nem az öccse.

5. Portisch Lajos vagyok, az 1978-ban olimpiai bajnok sakkcsapat éltáblása. Mindig szerettem volna, ha feleségem is megtanul rendesen sakkozni. Sajnos éppen csak a lépéseket ismeri. Múlt vasárnap látogatóba jött hozzánk két barátom, Ribli Zoltán és Sax Gyula, akikkel, szokásunkhoz híven, szimultán játszottam egyszerre egy-egy partit. Sajnos, ez alkalommal, mindketten legyőztek.
Amikor nejem a frissítőket behozta, gúnyos pillantásokat eresztett meg felém, sőt, mintha az ördög bújt volna bele. Kijelentette, hogy hajlandó ő is játszani „szimultán" egy-egy partit barátaimmal, ha az egyik partit világossal, a másikat pedig sötéttel játszhatja ellenük. Kérése csak az volt, hogy Ribli Zoltán kezdjen fehérrel. Fogadást ajánlott nekik, hogy jobb eredményt ér el, mint én. Barátaim először hüledeztek, de aztán ráálltak, és le is játszották a játszmákat.
Így indult a játék: Ribli kezdett az egyik táblán világossal, a feleségem ezek után átült a másik táblához, és nyitott. Megvárta, hogy Sax meglépje válaszlépését, majd visszatért az 1. táblához, hogy megadja válaszlépését Ribli lépésére. Miután az 1. táblán Ribli meglépte második lépését a világossal, a nejem visszatért a 2. asztalhoz meglépni válaszát a feketével játszó Sax barátom első lépésére.
Végül, annak ellenére, hogy olimpiai bajnok társaim legjobb tudásuk szerint játszottak, feleségem megnyerte a fogadást! Jobb eredményt ért el, mint én! Vajon hogyan csinálta?

Megoldás:
A feleség tulajdonképpen egymás ellen játszatta a két vendéget. Azon a táblán kezdtek, ahol Ribli indult világossal, és ő a sötéttel játszott. Ribli lépéseit tette meg a másik táblán, a sötét válaszlépéseit pedig emitt sötéttel. Így garantált volt az egy pont.

Megjegyzés:
Ez egy híres történet, egyszer egy fiatal lány levélben játszott két nagymesterrel úgy, hogy egymás ellen játszatta őket, tehát az egyik által küldött lépést küldte tovább a másiknak, és viszont.

B feladatlap

1. Egy vonaton Smith, Robinson, és Jones a fűtő, a fékező és a mozdonyvezető, de nem biztos, hogy ebben a sorrendben. A vonaton utazik továbbá három üzletember, akiket ugyanígy hívnak: Smith, Robinson és Jones.
– Robinson Detroitban lakik.
– A fékező pontosan félúton lakik Chicago és Detroit között.
– Jones pontosan 20 ezer dollárt keres évente.
– A fékező közvetlen szomszédja, az egyik utas, pontosan háromszor annyit keres, mint a fékező.
– Smith biliárdban meg szokta verni a fűtőt.
– A fékezővel azonos nevű utas Chicagóban lakik.
Hogy hívják a mozdonyvezetőt?

Megoldás:
Smith

2. Mackóéknál 6 csupor méz van a pincében: egy 6, egy 7, 9, 10, 11, és 19 literes. Egy vendégség alkalmával a nagyon erős Mackó mama felhozott néhány liter mézet. Az olyan gyorsan elfogyott, hogy hamarosan újra le kellett mennie, viszont akkor már kétszer annyit hozott, mint először. Így egy csupor maradt a pincében. Melyik csupor maradt meg? (Mindig egész csuprot vagy csuprokat hozott, csak a vendégek előtt bontotta fel őket.)

Megoldás:
Mivel másodszor kétszer annyi mézet hozott fel Mackó mama, mint először, ezért összesen az első alkalom háromszorosát hozta fel. Ha összeadjuk az összes mézet, az $6+7+9+10+11+19=62$ liter. Ebből az egyiket elvéve kapjuk azt a mennyiséget, amit felhozott, és ami egy 3-mal osztható szám. Ez csak úgy lehetséges, ha a 11-et vonjuk ki a 62-ből, és az 51. Így: $51:3=17$, tehát először a 7 és a 10 litereset hozta fel, másodszor a 6, 9, 19 litereseket és lent maradt a 11 literes.

3. Mackó mama egy játékot játszott a 3 nagyon okos bocsával. Leültette őket egymás mögé úgy, hogy Mackó Misi az előtte ülő két testvérét, Mackó Lackót és Mackó Mártit láthatta, Mackó Lackó csak Mackó Mártit, míg Mackó Márti egyiküket sem. Mackó mama bekötötte a bocsok szemét. Elmondta nekik, hogy egy zsákból - amelyben három piros és két kék sapka van - mindegyiküknek a fejére tesz egy sapkát. Miután ezt megtette, levette a szemükről a kendőt, és először megkérdezte Misit, hogy szerinte milyen sapka van a fején. Misi nem tudta megmondani. Ez után kérdezte Lackót, hogy ő tudja-e, milyen sapka van a fején. Ő sem tudta megmondani. Majd végül Mártit is megkérdezte. Meg tudta-e mondani Márti, hogy milyen sapka van a fején, és ha igen, akkor mit mondott?

Megoldás:
Jelölje P a piros, K a kék sapkát. PP, PK, KP, KK - ezeket láthatta Misi. Mivel nem tudta megmondani, így két kéket nem láthatott, marad tehát az első három lehetőség. Tehát az biztos, hogy látott piros sapkát. Lackó, ha kéket lát Mártin, ebből tudja, hogy a fején piros van, de nem tudja megmondani a sapkája színét, így ő pirosat lát, innen Márti tudja, hogy az ő sapkájának színe PIROS.

4. Három indián ül a tűz körül: Fehér Tigris, Szürke Egér, Sárga Irigység. Egyszer csak megszólal Fehér Tigris:
– Mindhárman fehér, szürke vagy sárga ruhát viselünk, de egyikünk sem olyan színűt, mint a neve.
– Valóban! - mondta a sárga ruhás.
Melyikük milyen színű ruhát viselt?

Megoldás:
Fehér Tigris nem viselhetett fehér ruhát, és sárgát sem, mert azt a másik megszólaló viselte, így rajta szürke ruha van. Ezért Szürke Egéren van a sárga ruha (ő szólalt még meg), és Sárga Irigységen van a fehér ruha.

5. A hét vezér közül valaki eldugta Lehel kürtjét. Tudták, hogy a tettes csak Előd, Ond vagy Tas lehetett. Ezért gyűlést szerveztek, ahol meghallgatták a gyanúsítottakat. Ők a következőket állították:
– Nem Ond a tettes – mondta Előd.
– Tas biztosan ártatlan – mondta Ond.
Viszont Tas olyan halkan beszélt, hogy nem értették, mit mondott.
Álmos látta, ki a tettes, de csak annyit árult el, hogy a bűnös igazat mondott, a két ártatlan pedig hazudott. Ki dugta el Lehel kürtjét?

Megoldás:
Tegyük fel, hogy Előd a bűnös, így akkor ő igazat mondott. Ez rendben is van, nem Ond a tettes (hiszen Előd az.) Ond ekkor ártatlan, tehát hazudik, azaz Tas a tettes. Ez viszont ellentmondás, mert csak egyikük a tettes, nem lehet Előd és Tas is. Ez a feltevés tehát nem jó, azaz Előd nem bűnös, így tehát hazudik. Ha pedig hazudik, akkor Ond a tettes, és mivel ekkor Ond igazat mond, valóban nem Tas a tettes, ez így rendben is van.

II. HIHETETLEN?!

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

Tegyük fel, hogy létezik feltartóztathatatlan ágyúgolyó és mozdíthatatlan oszlop! A feltartóztathatatlan ágyúgolyó olyan lövedék, ami mindent feldönt, ami az útjába kerül. A mozdíthatatlan oszlop olyan oszlop, amit semmi sem tud feldönteni. Mi történik akkor, ha egy feltartóztathatatlan ágyúgolyó egy mozdíthatatlan oszloppal találkozik?

Vitassa meg közösen a csoport a kérdést. Hagyja a tanár a tanulókat véleményük mellett érvelni, csak a logikailag hibás lépésekre hívja fel a figyelmet. Egyes tanulóknak gondot okozhat, hogy sem feltartóztathatatlan ágyúgolyó, sem kidönthetetlen oszlop nem létezik a valóságban, őket bíztassa a tanár, hogy fogadják el, hogy legalább az egyik létezhet.

Megoldás:
Önmagában sem a feltartóztathatatlan ágyúgolyó, sem a mozdíthatatlan oszlop létezése logikailag nem vezet ellentmondásra (ha a hétköznapi tapasztalatainkon túllépve feltételezzük valamelyikük létezését). Az ellentmondás a kettő együttes létezésében van, tehát az a feltevés hibás (logikailag), hogy mindkettő egyszerre létezik. Tehát nem történik semmi, mert nem találkozhatnak.

1. Vizuális paradoxonok vizsgálata

(Javasolt idő: 10-10 perc; Eszközök: a tanári mellékletben található képekről másolatok (csoportonként minden képből egy); Munkaforma: 2-3 fős csoportokban)

Rendeződjetek csoportokba!
Minden csoport kap egy pár furcsa képet, próbáljátok meg megfogalmazni, hogy mi rajtuk a furcsa! Mivel lehet ezt magyarázni? Hogyan csapja be a szemünket a rajzoló? Próbáljatok meg egyet-kettőt lemásolni, lerajzolni a képek közül!
Melléklet a tanároknak: Vizuális paradoxonok
Adjon a tanár minden csoportnak a képekből másolatot! Hagyja egy ideg a tanulókat, hogy magukban foglalkozzanak a képekkel! Frontálisan ne beszéljék meg a furcsaságokat! A jó rajzolók esetleg az elefántos képet is megpróbálhatják lemásolni, a gyengébben rajzolóknak javasolhatjuk a háromszöges, a hasábos, esetleg az ördögvillás képet.

Az előző ábrák vizsgálatának befejeztével osszunk ki egy-egy másolatot csoportonként a mellékletben felsorolt Escher-képekről!
Melléklet a tanároknak: Escher képei

Maurits Cornelis Escher holland grafikus sok ilyen becsapós képet készített, ezek közül kap most minden csoport néhányat. Keressetek rajtuk furcsaságokat!

Az ügyes szemlélő egyes képeken felfedezhet olyan alakzatokat, melyek az előzőekben látott képek valamelyikére hasonlítanak!
Hagyja a tanár egy ideg a tanulókat, hogy magukban foglalkozzanak a képekkel. Frontálisan ne beszélje meg a csoport a furcsaságokat, csak a tanár hívja fel a csoportok figyelmét arra, hogy mely képen melyik alakzattal találkozhatnak. Valószínűleg elég egy képen megmutatni az alakzatot, a többin már a tanulók is észrevesznek egyet-kettőt.

2. Híres paradoxonok vizsgálata

(Javasolt idő: 20 perc; Munkaforma: 2-3 fős csoportokban, majd frontális)

Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **C** feladatlap és megoldása

Vizsgáljunk meg néhány problémát! Mindegyik esetében próbáljatok válaszolni a feltett kérdésre! Adható-e mindegyik esetben jó válasz?

Hagyja a tanár, hogy a csoportok megvitassák a problémákat, kialakítsák a közös álláspontjukat, csak arra ügyeljen, hogy a vita ne menjen a munka rovására. Ezúttal is gondot okozhat egyes tanulóknak, hogy feltételezésekből kell kiindulnunk, ilyenkor bíztassa őket a tanár, hogy fogadják el a szabályokat (például az 5. feladat esetében)! Ha a csoportnak van olyan tagja, akinek e feltételezések elfogadása nem jelent gondot, akkor próbálja meg e tanuló meggyőzni a többieket, akár tanári segítséggel.

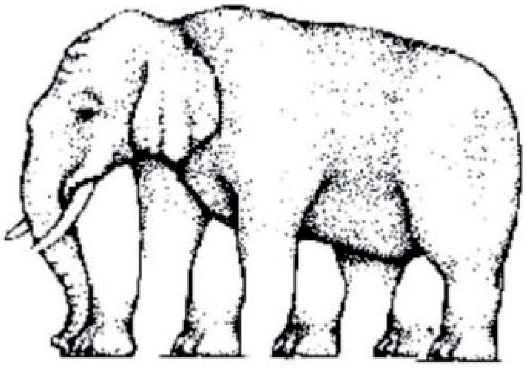
A foglalkozás végén, amikor már több csoportnak is van véleménye a legtöbb problémáról, beszélje meg az osztály közösen azokat. Csoportonként egy-egy tanuló ismertesse a csoport álláspontját! Ha egy másik csoport az elhangzó véleménnyel ellentétes véleményt alakított ki, akkor annak egyik tagja érveljen az ő véleményük mellett. A tanár felügyelje a vitát, és csak abban az esetben szóljon bele, ha a tanulók teljesen tévúton járnak!

Ha feloldható a paradoxon, akkor a vita végén keressen az osztály feloldást a problémára.

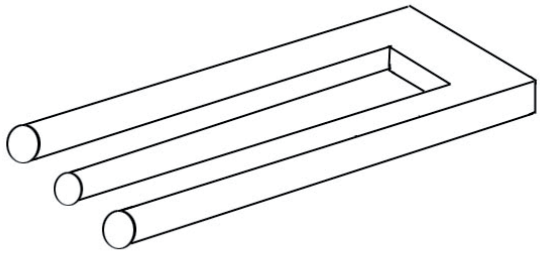
MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Vizuális paradoxonok vizsgálata

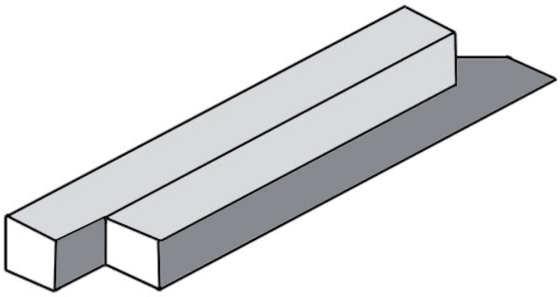
Elefánt



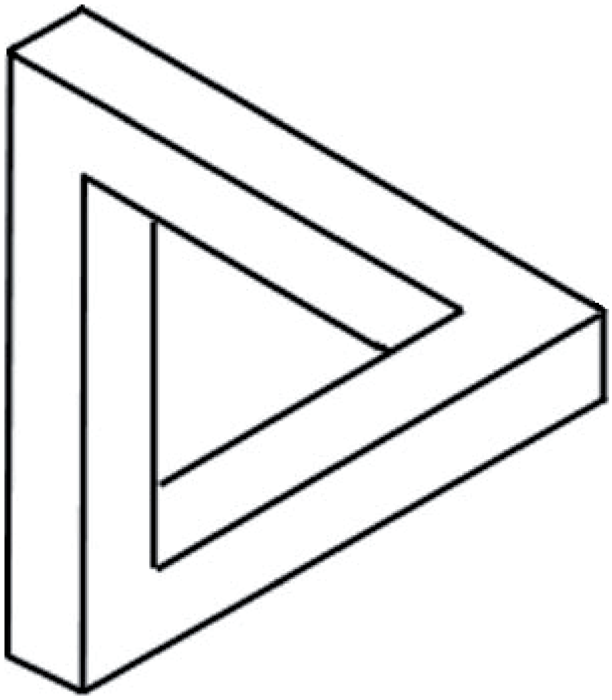
Ördögvilla



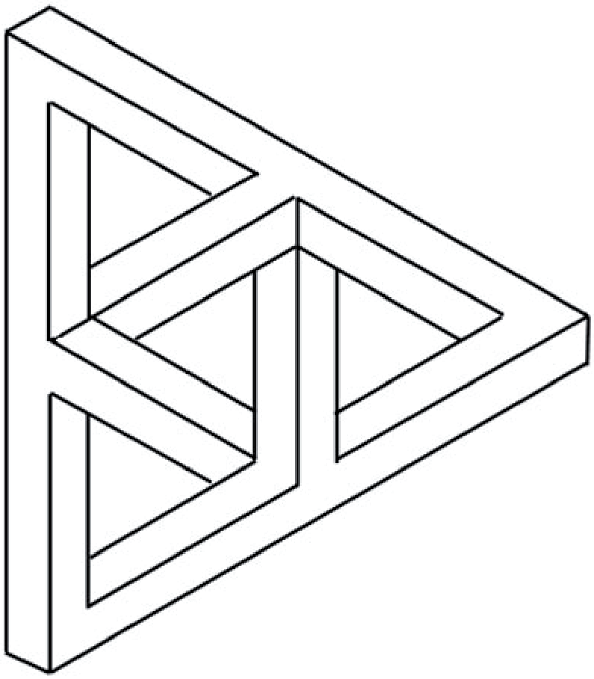
Hasábok



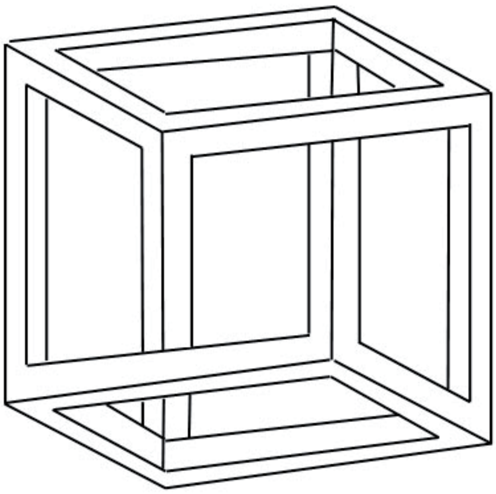
Háromszög



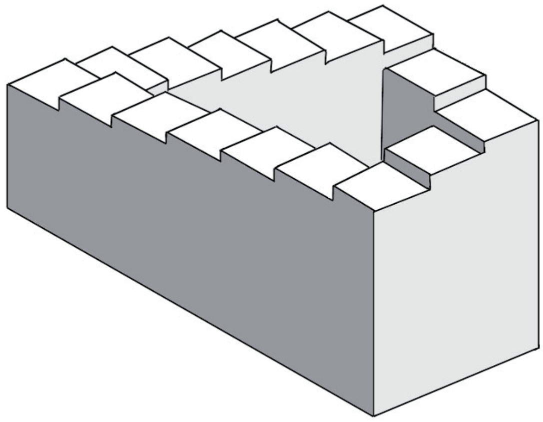
Háromszögek:



Kocka



Lépcső



Escher képei

Az Escher képek listája:
1. M. C. Escher: Vízesés (litográfia, 1961) – itt a háromszögek jelennek meg
megtalálható: http://www.worldofescher.com/gallery/internet/waterfall.html*
2. M. C. Escher: Belvedere (kilátó) Litográfia, 1958. – itt a kocka látható a kép jobb alsó sarkában, a fiú kezében
megtalálható: http://www.artchive.com/artchive/e/escher/escher_belvedere.jpg*
3. M. C. Escher: Konvex és konkáv, litográfia, 1955
megtalálható:
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/1999/Escher/Im21.gif*
4. M. C. Escher: Fent és lent, litográfia, 1947.
megtalálható:
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/1999/Escher/Image23.gif*
5. M. C, Escher: Lépcsőn fel és le, litográfia 1960. – itt a végtelen lépcső jelenik meg
megtalálható:
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/1999/Escher/Image18.jpg*

2. Híres paradoxonok vizsgálata

C feladatlap

1. Egy Epimenidesz nevű krétai egyszer azt mondta: „Minden krétai hazudik."
Igazat mondott?
Mi lenne akkor, ha azt mondaná: „Minden krétai mindig hazudik."? Most igazat mondott?
És akkor, ha azt mondta volna, hogy „Mindig hazudok."?

Megoldás:
Az első mondata nem tekinthető kijelentésnek, mert pontatlan a megfogalmazása. Nem derül ki, hogy minden krétai mindig hazudik, vagy általában hazudik stb. A második mondata nyilvánvalóan hamis, ő hazudik, tehát van olyan krétai, aki legalább egyszer nem hazudott életében. Azért tartják ezt paradoxonnak sokan, mert rosszul fogalmazzák meg a tagadását („Minden krétai mindig igazat mond" – ahelyett, hogy „Van olyan krétai, amelyik valamikor igazat mond."). A harmadik mondata viszont valóban belső ellentmondást tartalmaz.

2.

Az alsó keretben lévő mondat igaz.
A felső keretben lévő mondat hamis.

Igazak, vagy hamisak ezek a mondatok?

Megoldás:
Ez a mondatpár belső ellentmondást tartalmaz, nem rendelhető hozzá igazságérték, valóban paradoxon. Ez az előző feladat harmadik mondatának egy változata.

* 2007 augusztusában a honlap elérhető

3.

Ez a mondat öt szóból áll.
Ez a mondat hat szóból áll.
Ebben a keretben pontosan egy igaz állítás van.

Igazak, vagy hamisak ezek a mondatok?

Megoldás:
Ez is egy újabb változat, és attól még, hogy az első két mondatnak egyértelmű az igazságértéke, a harmadik mondat megalapozatlan kijelentés.

4. Egy gyerek vitatkozik az anyjával, hogy melyik pulcsit kell felvennie, a pirosat vagy a kéket. Az anya kompromisszumot javasol: mondjon a gyerek egy állítást, ha az igaz, akkor a pirosat, ha hamis, akkor a kéket veszi fel. A gyerek erre a következőt mondja: „A kék pulcsit kell majd felvennem." Melyik pulcsit kell felvennie?

Megoldás:
Ha a gyerek a piros pulcsit veszi fel, akkor az általa mondott kijelentés hamis, vagyis nem vehette volna fel a piros pulcsit. Ha a kéket veszi fel, akkor a kijelentése hamis volt, viszont ebben az esetben lenne igaz. Itt valódi ellentmondással találkozunk, a legegyszerűbb, ha az anyuka vita nélkül ráadja valamelyik pulóvert.

5. Egy kisvárosban az a szabály, hogy az ott lakó borbély borotvál minden olyan városlakót, aki nem maga borotválkozik, de soha nem borotvál meg senkit, aki maga borotválkozik. A borbély maga borotválkozik?

Megoldás:
Bajba csak akkor kerül a borbély, ha meg akar borotválkozni, mert akkor a szabályok ellentmondanak egymásnak. (Ez egy változata a ráhangolódásban felvetett problémának.) Valószínűleg szakállat növesztett ez a borbély, hogy ne szegje meg a szabályokat.

6. Protagorasz jogász-tanár volt, és egyszer elvállalt egy tanítványt, akinek nem volt pénze. Abban egyeztek meg, hogy ha a tanítvány befejezi tanulmányait és megnyeri első perét, akkor bizonyos összeget fizet tanárának. A diák, miután befejezte a tanulmányait, nem vállalt egyetlen pert sem, így egy idő után Protagorasz beperelte, hogy fizessen. A bíróság előtt így érveltek:
Tanítvány: „Ha megnyerem a pert, akkor nem kell fizetnem, hiszen erről folyik a per. Ha elvesztem, akkor sem kell fizetnem, hiszen akkor még nem nyertem meg az első peremet, így nem vagyok adósa tanítómnak."
Protagorasz: „Ha elveszti a pert, akkor fizetnie kell, hiszen éppen erről folyik a per. Ha megnyeri a pert, akkor is fizetnie kell, hiszen az első nyert pere után fizetnie kell."
Melyiküknek van igaza?

Megoldás:
Itt is ellentmondással találkozunk. A megoldás a következő lehet: a bíróság a tanítvány javára dönt, így annak nem kell fizetnie, de megnyerte első perét. Protagorasz ekkor újra bepereli, és ekkor már a bíróság az ő javára dönt.

III. SZITÁLÓ

Ráhangolódás (1–2 perc)

Gondoltátok volna, hogy a szitát a matematikában is használhatjuk?
Eratoszthenész görög matematikusnak tulajdonítják azt a módszert – az úgynevezett eratoszthenészi szitamódszert –, amelynek segítségével az egész számok között viszonylag gyorsan megkereshetjük a prímszámokat. Most mi is kiszitáljuk a 400-nál nem nagyobb pozitív egészek közül a prímeket!
Először tisztázza az osztály a prímszám fogalmát! Valószínűleg több tanuló az 1-re is azt mondja majd (helytelenül), hogy prímszám.

1. A 400-nál kisebb prímszámok megkeresése a szitamódszerrel

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: a számokat tartalmazó táblázat (tanulónként), különböző színű tollak vagy ceruzák (minden tanulónál); Munkaforma: egyénileg)

Mindenki kap egy táblázatot, amiben a pozitív egész számok szerepelnek 1-től 400-ig.
Tanulói munkafüzet: Számtáblázat
Melléklet a tanároknak: A számtáblázat kitöltve
Alkalmazzuk Eratoszthenész módszerét, és keressük meg az összes 400-nál kisebb prímszámot!
Az 1-et húzzuk ki, majd karikázzuk be a 2-est kék színnel!
Húzzuk át kékkel a kettő többszöröseit!

Ha végeztetek, keressétek meg a legkisebb olyan számot, amelyik nincs sem áthúzva, sem bekarikázva! Karikázzátok ezt be pirossal, majd ennek a többszöröseit húzzátok át pirossal (az összest, amit már áthúztatok, azt is!)

Ismételjétek ezt meg a következő olyan számmal is, ami nincs sem bekarikázva, sem áthúzva, de most zölddel! Ezután a munkát folytassátok feketével, és innentől elég majd csak azon többszörösüket áthúzni, melyeket még nem húztunk át!

Melyik számig kell folytatni az eljárásunkat, vagyis mikortól lehetünk benne biztosak, hogy minden bekarikázandó szám összes többszörösét kihúztuk már, és csak az át nem húzottakat kell innentől karikázni?
A tanár irányítsa a tanulók munkáját, ügyelve arra, hogy nagyjából egy ütemben haladjanak. Kérdezze meg a tanulókat, hogy melyek azok a számok, amiket pirossal, kékkel, zölddel karikáztak! Milyen számok ezek?
Kérdezze meg a tanulókat, hogy a 7 esetében miért a 49 volt az első többszörös, amit át kellett húzni? És mely többszöröseit kellett ezután áthúzni? Milyen kapcsolatban van ez a még be sem karikázott és ki sem húzott számokkal?
Meddig kell elmenni? ($19 \cdot 19 = 361$ az utolsó szám.)
A színezés fontos a későbbi feladatok szempontjából. A táblázatokra szükség lesz még a későbbiekben!

2. Tapasztalatszerzés a logikai szitaformulával kapcsolatban

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: **D** feladatlap; Munkaforma: párban)

Tanulói munkafüzet: **D** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **D** feladatlap és megoldása

Minden páros kap egy feladatlapot. Válaszoljatok az ott feltett kérdésekre! Ebben segítségetekre lehet az előbb készített táblázat.

Hagyja a tanár a párosokat közösen dolgozni, nyugodtan vitassák meg egymás között a feladatok megoldásait. Ha az osztály nagy része készen van, akkor ismertessék a tanulók a végeredményeket, és azt, hogy hogyan kapták meg azokat.

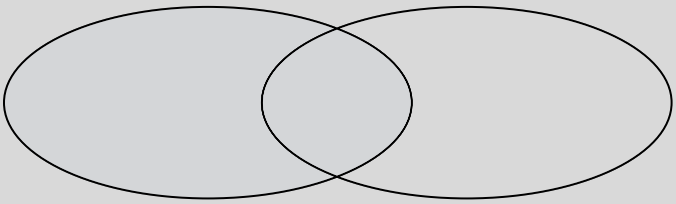
3. Modell a logikai szitaformula alkalmazásához, a formula alkalmazása

(Javasolt idő: 25 perc; Eszközök: színes papír, olló, ragasztószalag minden párosnál.
Munkaforma: párban, majd frontális, végül 2-3 fős csoportok)

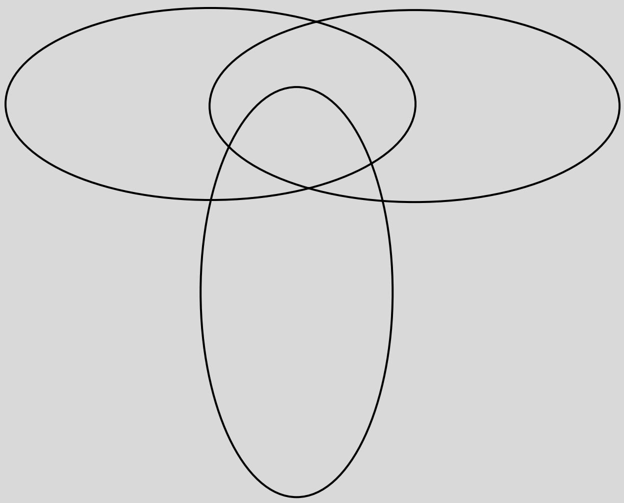
Vágjátok ki színes papírból a **D** feladatlap utáni ellipszisformát 4 példányban! (Tanulói munkafüzet 11. o.) Ezekből kell majd kiraknotok a következő ábrákat:

A táblára felrajzolandó ábrák:

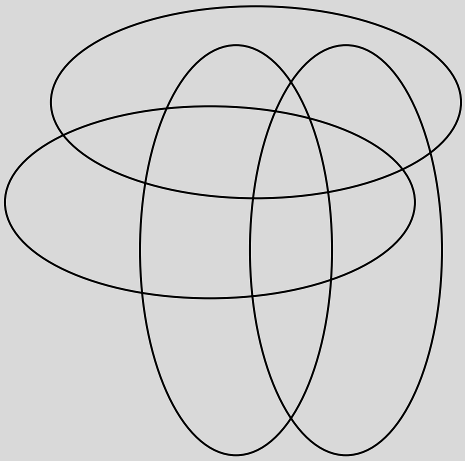
1. ábra:



2. ábra:



3. ábra:



Ha készen vagytok a kivágással, akkor rendezzétek el az asztalon azokat a táblán látható módon!
Hány réteg fedi az egyes részeket? Számoljátok meg!
A tanár rajzolja fel a fenti halmazábrákat a táblára, majd ügyeljen arra, hogy megfelelő méretű darabokat vágjanak ki a tanulók!

Oldjuk meg a következő feladatot közösen!
Tanulói munkafüzet: Feladat a modellezéshez
Melléklet a tanároknak: A modellezéshez feladott feladat megoldása

> Egy csokoládékat gyártó cég három új termékéről kérdezte egy áruház vásárlóit. Arra voltak kíváncsiak, hogy a megkérdezettek közül kinek melyik csoki ízlik: a mogyorós, az epres vagy a fehér.
> Az mogyorós csokit 60-an, az epres csokit 54-en, a fehér csokoládét 47-en tartották ízletesnek. Az elsőt és a másodikat is 16-an, az elsőt és a harmadikat is 19-en, míg a másodikat és a harmadikat 24-en mondták ízletesnek. Mindhárom csokit 8 ember tartotta ízletesnek.
> Hány embert kérdeztek meg összesen?

Használjuk a megoldáshoz az előbb összeállított egyik ábrát! (a 2. ábrát)

Jelöljétek be mindegyik ellipszisen az egyik olyan részt, ahol egy másik ellipszissel érintkezik (ahol fedik egymást). A jelölést úgy végezzétek, hogy mindegyik ellipszisre csak egy jelölés kerüljön: az elsőre a másodikkal, a másodikra a harmadikkal, a harmadikra az elsővel való érintkezés helye!
Vágjátok le a bejelölt részeket, és rögzítsétek vissza őket ragasztószalaggal úgy, hogy felhajthatóak legyenek!

Most jöhet a feladat megoldása! Kövessük végig ezt az eszközünkkel! Ha összeadjuk a legalább egy csokit ízletesnek tartók számát, akkor $60+54+47=161$-et kapunk, de ez több mint ahány embert megkérdeztek. Miért?

Rendezzétek az eredeti alakba az ellipsziseket! Látható, hogy van olyan rész, amit az előbb kétszer, és van olyan rész is, amit háromszor számoltunk. Vonjuk le azokat, akiket legalább kétszer számoltunk – hajtsátok fel az ellipszisek előbb levágott részeit!
Ha most összeszámoljuk a csokit kóstoló embereket, akkor $161-16-19-24=102$ -t kapunk, de ez még nem a végeredmény, hiszen láthatjátok, középen üres az ábra. Tehát azok számát, akik mind a hármat finomnak találták, még hozzá kell adni az eredményhez. Így összesen $102+8=110$ embert kérdeztek meg.
A számítás menete tehát:
$60+54+47-16-19-24+8=110$.
Mikor kell levonni, mikor hozzáadni az értékeket, ki tudná megmondani?
A tanulók hozzáállásától függően dönthet a tanár úgy, hogy részletes utasításokat ad a tanulóknak a leírtak szerint, vagy csak bíztatja őket, egy-két lépést mond csak el, és hagyja, hogy a többit a tanulók találják ki, és magyarázzák el egymásnak. A modell alkalmazása a fontos, és annak megfigyelése, hogy a számolás során melyik metszethalmaz elemeit éppen hányszor számoljuk. A feladat megoldásának elején érdemes például azt pontosítani, hogy az „első csokit 60-an tartották ízletesnek” azt jelenti, hogy az első csokit legalább ennyien tartották finomnak.
A tanulóknak gondot szokott okozni, hogy mikor jelenti a szöveg, hogy egy (rész)halmaz pontos elemszámát adjuk meg, és mikor azt, amikor több (rész)halmaz uniójának elemszámáról beszélünk (pontosan annyi – legalább annyi).

Rendeződjetek 2-3 fős csoportokba!

Tanulói munkafüzet: **E** feladatlap
Melléklet a tanároknak: Az **E** feladatlap és megoldása
Minden csoport kap egy feladatlapot.
Válasszatok nektek tetszőt a feladatok közül, és próbáljátok megoldani! Sokat segíthet a feladatok megoldásánál az előbbi gondolatmenet.

Hagyja a tanár, hogy a csoportok maguk válasszanak feladatot, ne javasoljon nekik problémát, csak abban az esetben, ha a tanulók ezt kifejezetten kérik! Ekkor kérdezze meg, hogy könnyűt vagy nehezet szeretnének-e választani, és ez alapján javasolja nekik a feladatot! Ennek során felmérheti a tanár a csoport tagjainak önbizalmát, hogy mennyire bíznak problémamegoldó képességükben, matematikatudásukban, valamint azt, hogy mennyire motiváltak a matematikai problémákkal kapcsolatban. Ha egy csoport kifejezetten könnyű feladatot akar választani, akkor javasoljon könnyebb feladatot a tanár, de bíztassa őket, hogy válasszanak nehezebbet, mert azt gondolja, hogy azt is meg tudják oldani.
Közösen csak annak a feladatnak a megoldását beszélje meg az egész csoport, amire sokan kíváncsiak. Ekkor lehetőleg egy olyan csoport ismertesse a megoldás menetét, amelyiknek sikerült azt megoldania. Javasolja a tanár, hogy a feladatsort vigyék haza a tanulók, hátha kedvet kapnak arra, hogy a még megoldatlan feladatokkal otthon is foglalkozzanak, de ezt ne tegye kötelezővé.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. A 400-nál kisebb prímszámok megkeresése a szitamódszerrel

A számtáblázat kitöltve:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~	**11**	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	**31**	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~	**71**	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	**103**	~~104~~	~~105~~	~~106~~	**107**	~~108~~	**109**	~~110~~	~~111~~	~~112~~	**113**	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	**127**	~~128~~	~~129~~	~~130~~	**131**	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	**137**	~~138~~	**139**	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~	**151**	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	**157**	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	**163**	~~164~~	~~165~~	~~166~~	**167**	~~168~~	~~169~~	~~170~~	~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	**179**	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~	**191**	~~192~~	**193**	~~194~~	~~195~~	~~196~~	**197**	~~198~~	**199**	~~200~~
~~201~~	~~202~~	~~203~~	~~204~~	~~205~~	~~206~~	~~207~~	~~208~~	~~209~~	~~210~~	**211**	~~212~~	~~213~~	~~214~~	~~215~~	~~216~~	~~217~~	~~218~~	~~219~~	~~220~~
~~221~~	~~222~~	223	~~224~~	~~225~~	~~226~~	227	~~228~~	**229**	~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~	**239**	~~240~~
241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	~~247~~	~~248~~	~~249~~	~~250~~	**251**	~~252~~	~~253~~	~~254~~	~~255~~	~~256~~	**257**	~~258~~	~~259~~	~~260~~
~~261~~	~~262~~	**263**	~~264~~	~~265~~	~~266~~	~~267~~	~~268~~	**269**	~~270~~	**271**	~~272~~	~~273~~	~~274~~	~~275~~	~~276~~	**277**	~~278~~	~~279~~	~~280~~
281	~~282~~	**283**	~~284~~	~~285~~	~~286~~	~~287~~	~~288~~	~~289~~	~~290~~	~~291~~	~~292~~	**293**	~~294~~	~~295~~	~~296~~	~~297~~	~~298~~	~~299~~	~~300~~
~~301~~	~~302~~	~~303~~	~~304~~	~~305~~	~~306~~	**307**	~~308~~	~~309~~	~~310~~	**311**	~~312~~	**313**	~~314~~	~~315~~	~~316~~	**317**	~~318~~	~~319~~	~~320~~
~~321~~	~~322~~	~~323~~	~~324~~	~~325~~	~~326~~	~~327~~	~~328~~	~~329~~	~~330~~	**331**	~~332~~	~~333~~	~~334~~	~~335~~	~~336~~	**337**	~~338~~	~~339~~	~~340~~
~~341~~	~~342~~	~~343~~	~~344~~	~~345~~	~~346~~	**347**	~~348~~	**349**	~~350~~	~~351~~	~~352~~	**353**	~~354~~	~~355~~	~~356~~	~~357~~	~~358~~	**359**	~~360~~
~~361~~	~~362~~	~~363~~	~~364~~	~~365~~	~~366~~	**367**	~~368~~	~~369~~	~~370~~	~~371~~	~~372~~	**373**	~~374~~	~~375~~	~~376~~	**377**	~~378~~	**379**	~~380~~
~~381~~	~~382~~	**383**	~~384~~	~~385~~	~~386~~	~~387~~	~~388~~	**389**	~~390~~	~~391~~	~~392~~	~~393~~	~~394~~	~~395~~	~~396~~	**397**	~~398~~	~~399~~	~~400~~

2. Tapasztalatszerzés a logikai szitaformulával kapcsolatban

D feladatlap

1. Töltsd ki az alábbi táblázatot!

<table>
<tr><td colspan="7">A</td></tr>
<tr><td>kékkel</td><td>pirossal</td><td>zölddel</td><td>kékkel és pirossal</td><td>kékkel és zölddel</td><td>pirossal és zölddel</td><td>kékkel, pirossal és zölddel</td></tr>
<tr><td colspan="7">áthúzott számok száma</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2. Hogyan lehetett volna a táblázatot kitölteni anélkül, hogy az előbb készített táblázatot használnánk?

3. Milyen tulajdonsága van azon számoknak, melyek pirossal és kékkel is át vannak húzva? És akik kékkel és zölddel? Vagy pirossal és zölddel? És akik mindhárom színnel?

4. Hány olyan szám van, amelyik csak az egyik színnel van áthúzva? Hogyan kaphatjuk meg ezek számát csak a fenti táblázatból, nem használva az előbb készített számtáblázatot?

5. Hány olyan szám van, ami pirossal vagy kékkel (esetleg mindkettővel) át van húzva? Milyen tulajdonságúak ezek a számok?

6. Melyek azok a számok, amik csak kékkel, vagy csak pirossal vagy csak zölddel vannak áthúzva?

A D feladatsor megoldásai:

1.

199	132	79	66	40	26	13

2. A négyszázat elosztjuk 2-vel, 3-mal, 5-tel, 6-tal, 10-zel, 15-tel, 30-cal, és ha nem egész az eredmény, akkor lefelé kerekítünk (vesszük az alsó egészrészét). Az első három esetben le kell vonni egyet, mert csak a számok többszörösei vannak áthúzva.

3. 6-tal, 10-zel, 15-tel, 30-cal oszthatóak.

4. Kékkel: $199-66-40+13=106$
Pirossal: $131-66-26+13=52$
Zölddel: $79-40-26+13=26$

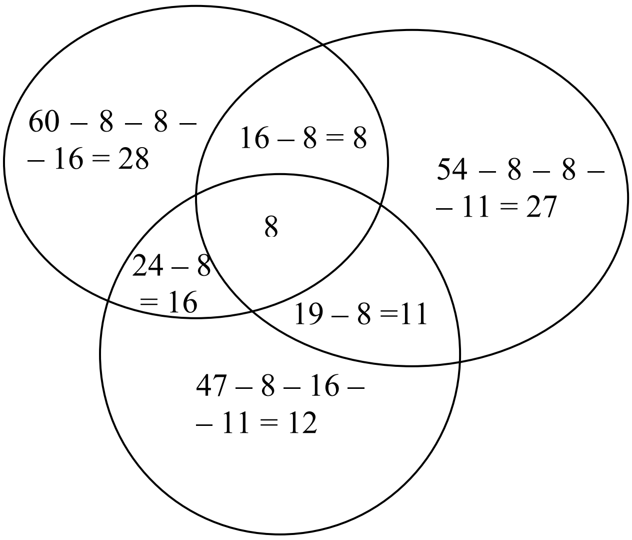
5. $199 + 132 - 66 = 256$. Ezek a kettővel vagy hárommal oszthatók.

6. Csak 2-vel, de 3-mal és 5-tel nem oszthatók; 3-mal igen, de 2-vel vagy 5-tel nem oszthatók; 5-tel igen, de 2-vel vagy 3-mal nem oszthatók.

3. Modell a logikai szitaformula alkalmazásához, a formula alkalmazása

A modellezéshez feladott feladat megoldása

Logikai szitaformulával: $60 + 54 + 47 - 16 - 19 - 24 + 8 = 110$
Halmazábrával: $28 + 8 + 27 + 16 + 8 + 11 + 12 = 110$



E feladatlap

1. Egy matematikaversenyen két feladatot kellett megoldani. Az első feladatot az indulók 70%-a oldotta meg helyesen, a második feladatot az indulók 60%-a. Mindkét feladatot 12-en oldották meg, és minden induló legalább az egyik feladatot megoldotta. Hányan indultak a versenyen?

Megoldás:
(Nehezebb feladat.)
A tanulók $60\% + 70\% - 100\% = 30\%$ -a oldotta meg mindkét feladatot, ami 12 fő, tehát 40-en indultak a versenyen.

2. Egy iskola 500 tanulója közül 300 olvas angolul, 200 németül és 50 franciául. 20 olvas angolul és franciául, 30 angolul és németül, 20 németül és franciául. 10 olvas mindhárom nyelven. Hányan vannak azok, akik legalább az egyik nyelven olvasnak? Hányan vannak azok, akik egyik említett nyelven sem olvasnak?

Megoldás:
(Átlagos feladat)
$300+200+50-20-30-20+10=490$-en olvasnak legalább az egyik nyelven, és 10-en egyiken sem.

3. Az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amely:
a) a 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 számok mindegyikével osztható?
b)a 2, 3, 5 közül legalább az egyikkel osztható?

Megoldás:
a) (Könnyű feladat)
Egy szám pontosan akkor osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel, ha osztható 30-cal. A 30-cal osztható számok a felsorolt számok mindegyikével osztható. Így a kérdéses számok száma: $\frac{1000}{30}\text{egészrésze}=33$
b) (Nehezebb feladat)
2-vel osztható: $\frac{1000}{2}=500$ szám van
3-mal osztható: $\frac{1000}{3}\text{egészrésze}=333$ szám van
5-tel osztható: $\frac{1000}{5}=200$ szám van
2-vel és 3-mal, vagyis 6-tal osztató: $\frac{1000}{6}\text{egészrésze}=166$ szám van
2-vel és 5-tel, vagyis 10-zel osztható: $\frac{1000}{10}=100$ szám van
3-mal és 5-tel, vagyis 15-tel osztható: $\frac{1000}{15}\text{egészrésze}=66$ szám van
Mindhárommal, vagyis 30-cal osztható: $\frac{1000}{30}\text{egészrésze}=33$ szám van.
Így legalább az egyik számmal osztható számok száma:
$500+333+200-166-100-66+33=734$

4. Egy cég eladója, aki háromfajta árucikk eladásával volt megbízva, a következőképpen számolt be napi munkájáról: 30 lehetséges vevővel tárgyalt. Ebből 15 vásárolt az *A* árucikkből, 12 vásárolt a *B* árucikkből, 10 vásárolt a *C* árucikkből. Hatan vásároltak *A*-ból és *B*-ből, 1 vevő vásárolt *B*-ből és *C*-ből, három pedig *A*-ból és *C*-ből. Ezután a főnök elbocsátotta az eladót az állásából. Miért?

Megoldás:
(Átlagos nehézségű feladat)
Jelölje x azon vásárlókat, akik mindhárom árucikkből vásároltak. Ekkor
$15+12+10-6-1-3+x=30$, amiből $x=3$, ami több, mint a *B*-ből és *C*-ből vásárlók száma, tehát az eladó nem mondott igazat.

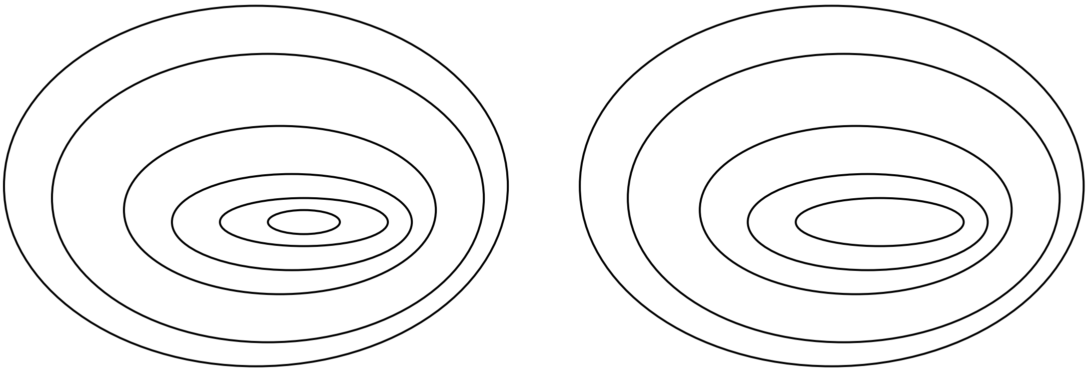
5. Egy szórakozott titkárnőnek az a feladata, hogy négy levelet tegyen bele a hozzájuk tartozó négy borítékba.
a) Hányféleképpen tudja végrehajtani ezt a feladatot „teljesen rosszul”, azaz oly módon, hogy semelyik levél se kerüljön a neki megfelelő borítékba?
b) Számoljátok ki ezt 5 levél és öt boríték esetére is!

Megoldás:
(Nehéz feladat)
a) Az összes lehetőség $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ db, ezekből kiválogathatók a nem túl nagy esetszám miatt azok az esetek, ahol egy levél sem kerül a megfelelő címzetthez: 9.

b) A második kérdésnél ez a módszer nem alkalmazható (az esetek száma $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$), de segíthet a logikai szita.
Négy levélre:
Összes eset: 24
Legalább egy levél célba jut: $4\cdot 6 = 24$ (ami célba jut, az négyféle lehet, a maradék hármat $3\cdot 2\cdot 1 = 6$-féleképpen lehet sorba rakni.)
Legalább két levél célba jut: $6\cdot 2 = 12$ (az a kettő, amelyik célba jut, $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$-féleképpen választható ki, a maradék kettőnek 2 sorrendje van)
Legalább három célba jut: 4 (itt azt választjuk ki, ami „nem feltétlenül jut célba”).
Mindegyik célba jut: 1.
A megoldás: $24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$
Öt levélre hasonlóan:
Összesen: 120 eset
Legalább 1 jut célba: $5\cdot 24 = 120$ (azt, amelyik célba jut, 5-féleképpen választhatjuk, a maradék 4-nek 24 sorrendje van)
Legalább 2 jut célba: $10\cdot 6 = 60$ (kettő célba jut, ezt $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$-féleképpen választhatjuk, a maradék háromnak 6 sorrendje van)
Legalább 3 jut célba: $10\cdot 2 = 20$ (itt azt a kettőt, amelyik „nem feltétlenül jut célba” $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$-féleképpen választhatjuk, ezeknek 2 sorrendje van)
Legalább 4 jut célba: $5\cdot 1 = 5$.
Legalább 5 jut célba: 1.
A megoldás: $120 - 120 + 60 - 20 + 4 - 1 = 44$.

Ez a feladat nehéz, valószínűleg kevés tanuló tud magától belekezdeni. A tanár kezdetben javasolhatja, hogy milyen módon közelítsenek a megoldáshoz a tanulók, és lerajzolhatja nekik a megfelelő halmazábrát (itt 5 vagy 6 halmaz kell, ezek egymást tartalmazó halmazok). Ha további segítség kell a tanulóknak, akkor először megadja, hogy az egyes halmazok elemeit hogyan kell kiszámolni, majd a szitaformula alkalmazását javasolhatja.

A halmazábrák:



A megoldás megközelíthető egyszerű leszámlálással is a logikai szimmetriák miatt.