MATEMATIKA „C”
7. évfolyam

5. modul
KI MARAD A VÉGÉN?

Készítette: Kovács Károlyné

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A számelméleti ismeretek elmélyítése (kiszámolós mondókák elemzésén, táblai társasjáték tervezésén, szabályjátékokon, mutatványok bemutatásán, hármas számrendszerben számoló család költségvetésének megtervezésén keresztül).
Időkeret	5 foglalkozás
Ajánlott korosztály	13 évesek (7. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: irodalom Szűkebb környezetben: ennek a modulnak a feldolgozását előzze meg az 1. modul.
A képességfejlesztés fókuszai	Számlálás elemzés rendszerezés deduktív és induktív következtetés érvelés, bizonyítás problémamegoldás

AJÁNLÁS

Ezeken a foglalkozásokon a számelméleti ismeretek elmélyítése nagyon sokféle játékon keresztül történik. A játékok mindig egy-egy részismeret alkalmazására épülnek. Feltételezhető, hogy ez a modul nem a tanév elején kerül feldolgozásra (annál is inkább, mert meg kell, hogy ezt előzze az 1. modul feldolgozása), így már a tanulók könnyebben dolgoznak önállóan, s a csoportmunka is megszokottá válik. Ez a modul, kidolgozásában már egy „érett" tanulócsoportot feltételez.
A számokkal kapcsolatos stratégiai játék alsó tagozatra nyúló gyökere az úgynevezett számlétra nevű játék. Még az ötödik évfolyamon is nagy sikert aratott a tanítványok körében. Most ebben a modulban egy „fejlettebb változat"-tal találkozunk, mely az életkornak is jobban megfelel.
A prímszámok milliónyi lehetőséget adnak érdekesebbnél érdekesebb fejtörőkre. Ugyanígy a számrendszerek, a kettes számrendszer is. A kétujjú és háromujjú lények világával való megismerkedés lehetőséget nyújt a különböző (kettes és hármas) számrendszerekben való számolásra. E lények országában egy család költségvetésének megtervezése a tanuló saját családjának „költségvetéséhez" is közelebb kerül.
Az egyes foglalkozásokra szánt időkeret hozzávetőleges, ugyanis egy-egy problémafelvetés megoldásához szükséges idő több, előre nem ismert tényezőtől függ. Az esetleg elmaradt problémafelvetéseket a következő foglalkozáson is meg lehet oldani, vagy ha a tanár nehéznek ítéli egyiket-másikat, el is hagyható.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, mellékletek**
I. Ec, pec, kimehetsz			
	Ráhangolódás **Munkaforma:** közösen		
1.	Oszthatóság, maradékos osztás **Munkaforma:** egyéni, frontális az idézetnél	Számlálás, becslés, problémaérzékenység	
2.	Maradékos osztás **Munkaforma:** egyéni	Eredetiség, induktív következtetés	
3.	Levezető játék **Munkaforma:** csoportban		
II. Játszva osztható			
1.	Oszthatóság. Legkisebb közös többszörös. **Munkaforma:** egyéni, majd a játék párban	Rendszerezés, leszámlálás, deduktív következtetés, kombinativitás, eredetiség, kreativitás	Négyzethálós papír Páronként 2 db dobókocka, 2 db bábu és a foglalkozáson elkészült társasjáték táblája Játékszabály

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
III. A szabály, az szabály			
1.	Oszthatósági szabályok, maradékos osztály **Munkaforma:** egyéni, majd a „bűvészmutatvány" párban, a második „mutatvány" frontális	Mennyiségi következtetés, analógiák felismerése, induktív következtetés, szövegértés, megfigyelőképesség, deduktív következtetés	
2.	Stratégiai játék **Munkaforma:** párban	Elemzés	
IV. Az „építő mesterek"			
	Ráhangolódás **Munkaforma:** frontális		
1.	Prímszámok, összetett számok, számelmélet alaptétele, két szomszédos prímszám között tetszőleges számú összetett szám lehet, nincs legnagyobb prímszám. **Munkaforma:** egyéni	Koncentráló képesség, rendszerezés, elemzés, számlálás, induktív sejtés	Táblázat Eratoszthenész szitájához Négyjegyű függvénytáblázat vagy a megfelelő táblázat fénymásolata
2.	Indukciós következtetések **Munkaforma:** csoportban	Induktív következtetés, számolás	1. feladatlap

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
V. Kétujjú, háromujjú lények			
1.	Számrendszerek (kettes és hármas) – A háromujjú lények országában csak 1, 3, 9, 27,… talléros pénznemek vannak. Áruházi vásárlás (különböző összegek kifizetése lehető legkevesebb számú tallérral.) 3 ujjú lények országában egy család egy heti költségvetésének megtervezése. Játék számkártyával (kettes számrendszer) 2 jellel információközlés **Munkaforma:** csoportban	Számolás, problémareprezentáció, modellalkotás	2. feladatlap
2.	Kettes számrendszer **Munkaforma:** párban	Gondolkodási sebesség, kombinativitás, kreativitás, eredetiség, problémaérzékenység	Személyenként: 4 számkártya Páronként: a kezdő játékos nyereségét megadó táblázat

I. EC, PEC, KIMEHETSZ

Ráhangolódás

(Javasolt idő: 5 perc; Munkaforma: közösen)
Ha fogócskát játszanánk, hogyan számolnátok ki, hogy ki legyen a fogó?
Ha ismernek ilyen mondókát, azzal, ha nem, javasolja a tanár az „Ec, pec, kimehetsz, holnap után bejöhetsz, cérnára, cinegére, ugorj cica az egérre, fuss!" kiszámolós mondókát. A csoport tagjai körben állnak. A kiszámoláskor, akire a „fuss" szó jut, kiesik. Az lesz a fogó, aki utoljára bennmarad a körben. Előre beszéljék meg, hogy kinél kezdik a kiszámolást, s a gyerekek tegyenek javaslatot a körben utolsónak maradó (a fogó) személyére.

OSZTHATÓSÁG, MARADÉKOS OSZTÁS

(Javasolt idő: 20 perc; Munkaforma: egyéni, frontális az idézetnél)

1. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Az „Ec, pec" mondóka 17 szótagból áll, tehát minden 17-edik ember kiesik a körből. Próbáljuk most ki kisebb számmal is a kiszámolást! Mondjuk 15 emberrel úgy, hogy minden 7-edik esik ki. Az embereket megszámozzuk, az legyen az 1, akivel kezdjük a kiszámolást. Írjátok a számokat egy kör köré! Szerintetek ki nem esik ki a 15 közül? Ellenőrizzétek a becsléseteket!
Mellékletben: 15 fő hetes leszámlálása – Megoldás:)
Kiemelt készségek, képességek
Számlálás, becslés

1. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Lehet, hogy ezt is le akarják játszani. Ekkor is számozzák meg a gyerekek az embereket!

1. Foglalkozás – 1. lépés/3.

Ha szeretnénk azt is látni, hogy melyik szám hányadikként esik ki, érdemes menet közben átszámozni a számokat! Egyszerűbben áttekinthető az átszámozás, ha a 15 számot egymás után sorban írjuk le, s persze áthúzzuk azt a számot, amelyik kiesik: először a 7-es, azután a 14-es. Innen folytatva a számolást, a 15 után ismét az 1-es jönne. Adjunk neki új számot, legyen most ő a 16, a 2-es 17, és így tovább. Az új számot írjuk a régi alá. Persze, amelyik szám már kiesett, az nem kap új számot. Folytassátok!
Mire jöttetek rá? Most honnan lehet tudni, ki hányadikként esett ki?
Kiemelt készségek, képességek
Probléma-érzékenység

1. Foglalkozás – 1. lépés/4.

Ennyi előkészítés után nem biztos, hogy minden tanuló számára világos, hogy hogyan történik az újabb és újabb átszámozás. Fontos, hogy a tanár folyamatosan figyelje a tanulók egyéni munkáját!

1. Foglalkozás – 1. lépés/5.

Jókai Mór A névtelen vár című regényében egy anekdotázó magyar alispánnal mondatja el a következő történetet:
Mellékletben: Regényrészlet
Mi köze az emlékeztető latin szövegnek a matrózok felállításához?
Valóban minden ír kiesik? Ellenőrizzétek!

1. Foglalkozás – 1. lépés/6.

A tanár segíthet a gyerekeknek azzal, hogy mesélés közben felrajzolja a táblára a kerek és szögletes „palackokat", és aláírja (vagy fölé) a latin szöveg megfelelő szótagját.

MARADÉKOS OSZTÁS

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: egyéni)

1. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Itt van három doboz (táblára rajzolva). Helyezzétek el a természetes számokat a dobozokba úgy, hogy egy sem maradjon ki, és minden dobozban ugyanannyi szám legyen!

Kiemelt készségek, képességek

Eredetiség

1. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Hetedik osztályban ez nem egyszerű feladat. De valószínűleg lesz olyan tanuló, aki a „legegyszerűbb” utat választja, s sorban „bepotyogtatja” a számokat a dobozokba. Az, hogy a dobozokban lévő számhalmazok között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető, már könnyebben elfogadható számukra. Nevezzék meg a gyerekek az egy dobozba került számokat (Pl. 3-mal osztva 1 maradékot adók), s vizsgálják meg, hogy hogyan lehet egy nagyobb számról könnyen eldönteni, hogy melyik dobozba kerül.

1. Foglalkozás – 2. lépés/3.

Végezzetek műveleteket az egyes dobozban lévő számokkal, és nézzétek meg, hogy a művelet eredménye melyik dobozba kerül! Gyűjtsetek tapasztalatokat!

Kiemelt készségek, képességek

Induktív következtetés

1. Foglalkozás – 2. lépés/4.

Hetedik osztályban nem célszerű általános alakban is felírni a felismert törvényszerűségeket, elég szóban megfogalmazni.

1. Foglalkozás – 2. lépés/5.

Most a természetes számokat 4, 5, illetve 6 dobozba helyezzétek el, megint úgy, hogy minden dobozba ugyanannyi szám kerüljön! Válasszatok egy történelmi eseményt, és vizsgáljátok meg, hogy annak évszáma a 3, a 4, az 5, illetve a 6 doboz közül melyikbe kerül!

LEVEZETŐ JÁTÉK

(Javasolt idő: 5 perc; Munkaforma: csoportban)

1. Foglalkozás – 3. lépés/1.

Ismertek „kiesős” játékot? Például a „Székre leülőst”? Játsszuk el!

Mellékletben: A székre leülős játék menete

1. Foglalkozás – 3. lépés/2.

A játék lehetőséget nyújt a tanárnak, hogy a csoport tagjait, azok bizonyos tulajdonságait (ügyesség, önzőség, erőszakosság, stb.) megfigyelje.

II. JÁTSZVA OSZTHATÓ

OSZTHATÓSÁG, LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

(Javasolt idő: 45 perc; Eszközök: négyzethálós papír, páronként két dobókocka, két bábu és a foglalkozáson elkészült társasjáték táblája, Játékszabály; Munkaforma: egyéni, majd a játékot párban)

2. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Készítsünk egy táblás társasjátékot! A társasjáték táblája 100 db egymáshoz kapcsolódó négyzetből (mezőből) álló „kígyó" lesz. Minden második négyzet bal felső sarkába rajzoljunk egy csillagot; továbbá minden harmadik négyzet jobb felső sarkába; minden negyedik jobb alsó sarkába; minden ötödik bal alsó sarkába és minden hatodik közepére rajzoljunk egy csillagot. Rajzoljátok le a tábla első 15 négyzetét, majd az utolsó 10 négyzetet!

Mellékletben: A játéktábla első 15 és utolsó 10 mezője - Megoldás

Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, deduktív következtetés

2. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Számoljátok össze, hogy ezek a négyzetek hányszor fognak szerepelni a táblán?

Mellékletben: Mezők száma

Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, leszámlálás

2. Foglalkozás – 1. lépés/3.

Lehet, hogy lesz olyan tanuló, aki lerajzolja mind a 100 mezőt. Célszerű rábeszélni a tanulót, hogy inkább következtesse ki.

2. Foglalkozás – 1. lépés/4.

A 40. és az 50. mezők között lévők közül melyeken nincs egy csillag sem?

A 41., 43., 47. és 49. mezőkön nincs csillag.

Kiemelt készségek, képességek

deduktív következtetés

2. Foglalkozás – 1. lépés/5.

Itt az is jó, ha lerajzolja a 10 mezőt.

2. Foglalkozás – 1. lépés/6.

Legyen a játékszabály a következő:

A játékosok felváltva dobnak két játékkockával, s a bábujukkal a dobott számok összegével megegyező lépést tesznek.

Ha azon a mezőn, amelyre a játékos a dobás után a bábujával lépett pontosan 3 csillag van, akkor előre léphet a következő ugyancsak 3 csillagot tartalmazó mezőre, vagy ha már nincs ilyen, akkor a célba.

Ha azon a mezőn, amelyre a játékos a dobás után a bábujával lépett, 4 vagy 5 csillag van, akkor visszalép az előző, ugyanannyi csillaggal ellátott mezőre, vagy ha nincs ilyen, akkor a kezdő állásra.

Az nyer, aki előbb jut túl a 100. mezőn.

Tegyük fel, hogy egy játékos a 77. mezőn áll. Mi a legrövidebb lépéssorozat, amellyel célba érhet? Hány különböző összegdobás sorozatával juthat így el a célba?

Mellékletben: A játék nyerő stratégiája

Kiemelt készségek, képességek

kombinativitás

2. Foglalkozás – 1. lépés/7.

Játsszuk is le a játékot! Minden pár egy elkészült játéktáblán játszik két kockával. A játékszabály leírását is megtaláljátok a dobozban.

Mellékletben: A teljes játéktábla

2. Foglalkozás – 1. lépés/8.

Találjatok ki más játékszabályt!

2. Foglalkozás – 1. lépés/9.

Ha kevés az idő, a játékszabály kitalálása otthoni munkára is adható.

III. A SZABÁLY, AZ SZABÁLY

OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK, MARADÉKOS OSZTÁS

(Javasolt idő: 35 perc; Munkaforma: egyéni, a "bűvészmutatványt" párban, a második mutatvány frontális)

3. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Egy családban három gyermek van. A szülők minden utazáskor ugyanolyan fajtájú és minőségű csokoládét szoktak vásárolni a gyerekek számára, de az összegyűlt csokoládékat egy-egy születésnapon osztják szét a gyerekek között. Egyik születésnapra 5 szeletes, 9 és 4 szeletes csomagolású csokik gyűltek össze. Az elsőből 1 db, a másodikból 10 db, a harmadikból 100 db volt. Hogyan osztanád szét a gyerekek között a csokoládékat, úgy, hogy minden gyerek ugyanannyi egész szelet csokoládét kapjon, és a lehető legkevesebb csokit kelljen felbontani?

Kiemelt készségek, képességek

Mennyiségi következtetés

3. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Megbeszéléskor célszerű, ha a tanár felírja ezt a lehetőséget is (ilyen alakban):

$495 = 4 \cdot 99 + 9 \cdot 9 + 4 + 9 + 5$

A 3-as oszthatósági szabály emlékezetbe idézése.

3. Foglalkozás – 1. lépés/3.

Ugyanezeket a csokoládékat hogyan osztanád szét az előbbi feltételek szerint 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 gyerek között?

Kiemelt készségek, képességek

Analógiák felismerése

3. Foglalkozás – 1. lépés/4.

A 11 gyerek közötti szétosztás megbeszélésekor a tanár írja fel a 495-öt

$495 = 99 \cdot 4 +$

$11 \cdot 9 + 4 - 9 + 5$

alakban is, így lehet, hogy valamelyik tanuló „megalkotja” a 11-el való oszthatósági szabályt.

3. Foglalkozás – 1. lépés/5.

Egy másik alkalommal 2 és 7 szeletes csokoládékat gyűjtöttek össze a szülők, mégpedig a 2 szeletesből 1001 darabot, a másikból 110-et. Szét lehet-e osztani az előzővel azonos feltételek mellett 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 gyerek között? Hogyan?

Mellékletben: 7-tel való oszthatósági szabály háromjegyű számokra

3. Foglalkozás – 1. lépés/6.

A gyerekek önállóan vizsgálják meg a különböző eseteket.

Az oszthatósági szabályok felelevenítése.

7-tel való oszthatósági szabályt próbáljanak a gyerekek különböző nagyságrendű számokra gyártani. (Lásd. Melléklet.)

3. Foglalkozás – 1. lépés/7.

Írd le a betöltött éveid számát háromszor egymás után! A kapott hatjegyű számot vizsgáld meg, hogy milyen egyjegyű számokkal osztható! Alkoss a családod 9 évesnél idősebb tagjainak az életkoraival is alkoss egy-egy hatjegyű számot!

Vizsgáld meg, hogy van-e olyan egyjegyű szám, amelyik osztója a te „életkoros” hatjegyű számodnak és a többiekének is! Mit gondolsz miért?

Bármilyen kétjegyű számból alkotjuk a hatjegyű számot, ez a szám a kétjegyű szám 10101-szerese lesz, s mivel ez a szám osztható 7-tel, így a hatjegyű is minden esetben osztható lesz 7-tel.

Kiemelt készségek, képességek

Induktív következtetés

3. Foglalkozás – 1. lépés/8.

A gyerekek tapasztalatgyűjtéssel megsejthetik a megoldást. Ne várjuk el a bizonyítást! Cél: minél többet alkalmazzák az ismert oszthatósági szabályokat

3. Foglalkozás – 1. lépés/9.

Tanuljunk meg néhány „bűvészmutatványt"! (Alakítsatok ki párokat!)

Az első: Írjatok le egy akármilyen nagy számot, azután keverjétek össze a számjegyeit, és az így kapott számot is írjátok le! Most a két szám közül vonjátok ki a kisebbet a nagyobból! A kapott szám számjegyei közül egyet válasszatok ki (csak a nullát nem), és a többi számjegyet írjátok fel egy cédulára, s ezt mutassátok meg a társatoknak! Próbálja mindenki kitalálni a cédulán látott számjegyek alapján a hiányzó számjegyet!

Az 1. mutatvány megoldása

Kiemelt készségek, képességek

Szövegértés

3. Foglalkozás – 1. lépés/10.

Játsszák is el a párok! Melyik pár jön rá leghamarabb? (Súgja meg a tanárnak, ha rájött az okra.)

3. Foglalkozás – 1. lépés/11.

A második mutatvány.

Mellékletben: A 2. mutatvány

Kiemelt készségek, képességek

Megfigyelőképesség, deduktív következtetés

3. Foglalkozás – 1. lépés/12.

A gyerekek találgatnak közben. Ha valaki úgy érzi, hogy rájött a megoldásra, vegye át a tanár szerepét, ő írjon fel kezdő számot, s írja le a végeredményt is. Azután magyarázza el az okot is.

STRATÉGIAI JÁTÉK

(Javasolt idő: 10 perc; Munkaforma: párban)

3. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Végül játsszuk el a „Ki éri el előbb a 100-at?" játékot! A párok felváltva mondanak számokat. A kezdő játékos 1-től 10-ig bármilyen egész számot mondhat, a partnere ennél a számnál legalább 1-gyel, de legfeljebb 10-zel nagyobb számot mondhat. (Ha pl. a kezdő játékos 6-ot mondott, a másik játékos legalább 7-et, de legfeljebb 16-ot mondhat.) Ezután ismét az első játékos mond számot, de ő is legalább 1-gyel, de legfeljebb 10-zel nagyobb számot mondhat, mint amit az ellenfele mondott. Az a nyertes, aki először mondja ki a 100-at.

Jegyezzétek le a játék menetét, ki milyen számot mondott!

Kiemelt készségek, képességek

Elemzés

3. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Érdemes figyelni arra, hogy a jegyzőkönyvet valóban vezetik-e a gyerekek, annak elemzése sok tanulsággal járhat.

IV. AZ „ÉPÍTŐMESTEREK”

Ráhangolódás

(Javasolt idő: 10 perc; Munkaforma: frontális és együtt)

Emlékeztessük a tanulókat arra, hogy a természetes számországot hogyan mutattuk be: A király a 0, a királynő az 1, további „lakosok” a 2 és annál nagyobb egész számok. A 0 minden természetes számnak többszöröse, ugyanis nulla szorosa (ezért az a király). Az 1 minden természetes számnak osztója (ezért az a királynő). Vannak olyan „lakosok”, amelyeknek pontosan két osztója van a természetes számok között, ezek a prímszámok (építőmesterek). A király, a királynő és az építőmesterek kivételével minden további „lakos” előállítható szorzás művelettel egy vagy több „építőmesterből”. Ezeket a „lakosokat” a matematikában összetett számoknak nevezzük. Bármilyen módon is bontjuk fel az összetett számokat prímszámok szorzatára, mindig pontosan ugyanazokból a prímekből álló szorzatot kapjuk, legfeljebb a tényezők sorrendje más.

Sok olyan prímszámokra vonatkozó kérdés van, amelyekre nem sikerült, és talán soha nem is sikerül választ kapni.

Nézzük ezt a kérdést: megadunk egy számot, hány ennél kisebb prímszám van? Pl. 10-nél kisebb hány van? 100-nál kisebb hány van?

(25)

Unalmas munka a megkeresésük. Kérdezhetnénk, hogy nincs valami képlet, amely segítségével könnyedén megkaphatnánk a kérdéses számot? Sajnos nincs, s bizonyítható, hogy sohasem lesz. Persze a számítógép felgyorsíthatja a keresést. A prímszámok felírására egy ismert utat „Eratoszthenész szitája” néven ismerünk, arról a görög tudósról, aki feltalálta. (5 perc)

PRÍMSZÁMOK, ÖSSZETETT SZÁMOK, SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE, KÉT SZOMSZÉDOS PRÍMSZÁM KÖZÖTT TETSZŐLEGES SZÁMÚ ÖSSZETETT SZÁM LEHET, NINCS LEGNAGYOBB PRÍMSZÁM

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: Táblázat Eratoszthenész szitájához, Négyjegyű függvénytáblázat vagy a megfelelő táblázat fénymásolata; Munkaforma: egyéni)

4. Foglalkozás – 1. lépés/1.

Fel szeretnénk írni az összes prímszámot, amely 200-nál kisebb. Felírjuk egy 10x20-as négyzetrácsos téglalapba a természetes számokat 0-tól 199-ig, és kihúzzuk azokat, amelyek nem prímszámok. A 0 és az 1? A 2 prím, meghagyjuk, de a többszörösei nem prímszámok, tehát minden másodikat kihúzzuk. Folytassátok az eljárást!

Kiemelt készségek, képességek

Koncentráló képesség

4. Foglalkozás – 1. lépés/2.

Minden tanuló kap egy táblázatot, abban végzi a „szitálást”.

Valószínűleg már közben lesz, aki észreveszi, hogy a 17-nek nincs további kihúzható többszöröse. Miért? A választ a gyerekek próbálják megfogalmazni. A tanár az indoklás végén adjon hangsúlyt ennek olyan formában is, hogy ha egy szám prímosztóit keressük, elég addig a prímig vizsgálódni, amelynek a négyzete már éppen nagyobb a számnál.

4. Foglalkozás – 1. lépés/3.

Hány prímszám van minden egyes tízes csoportban (0-9, 10-19, és így tovább)? Van valami szabályszerűség vagy rendszer a számukban? Hány prímszám van minden egyes húszas csoportban? És a százas csoportokban? A négyjegyű függvénytáblázatban megtalálható a 2-vel, 3-mal, illetve 5-tel nem osztható számok prímtényezős felbontása. Számoljátok össze a táblázat segítségével, hogy az egyes százas csoportban hány prímszám van!

(Ellenőrizze a csoport, hogy mindenki ugyanannyi prímszámot talált-e!)

Van valamilyen rendszer a százas csoportokban lévő prímszámok számában?

(0–100-ig: 25; 100–200-ig: 21; 200–300-ig: 16; 300–400-ig: 16; 400–500-ig: 17; 500–600-ig: 14; 600–700-ig: 16; 700–800-ig: 14; 800–900-ig: 15; 900–1000-ig: 14.)

Kiemelt készségek, képességek

Rendszerezés, elemzés, számlálás

4. Foglalkozás – 1. lépés/4.

Használják a gyerekek a táblázatot, vagy annak fénymásolatát, később könnyebben eligazodnak benne.

4. Foglalkozás – 1. lépés/5.

Mire lehetne következtetni az eddigiek alapján? Vajon nagyobb számok közötti százas csoportban is mindig van prímszám? Keressetek táblázatban olyan prímszámokat, amelyek között legalább 10 összetett szám van! Vajon található a természetes számok között 20 egymás után következő összetett szám is?

Kiemelt készségek, képességek

Induktív sejtés

4. Foglalkozás – 1. lépés/6.

Ennek a kérdésnek a megválaszolásához tanári segítségre van szükség. Segíthetnek a következő kérdések: Az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 20 \cdot 21$
összetett szám? És az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 20 \cdot 21 + 2$
is összetett szám? És az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 20 \cdot 21 + 3$ összetett szám?

INDUKCIÓS KÖVETKEZTETÉSEK

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 1. feladatlap: A csoportok feladata; Munkaforma: 4-5 fős csoportban)

4. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Minden csoport kap egy feladatot!

Munkaidő: 5 perc.

Kiemelt készségek, képességek

Induktív következtetés, számolás

4. Foglalkozás – 2. lépés/2.

A munkaidő végén három csoport ismerteti a feladatát és beszámol a tapasztalatairól.

V. KÉTUJJÚ, HÁROMUJJÚ LÉNYEK

HÁRMAS SZÁMRENDSZER

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 2. feladatlap: Információk a költségvetéshez; Munkaforma: 4 fős csoportban)

5. Foglalkozás – 1. lépés/1.

A háromujjú lények országában 5-féle pénzérme van: krajcár, fillér, pengő, forint és tallér.
1 fillér = 3 krajcár; 1 pengő = 3 fillér; 1 forint = 3 pengő és 1 tallér = 3 forint.
Az áruházukban vásárolunk száztizenhárom krajcár értékű árut. A lehető legkevesebb számú pénzérmével szeretnénk fizetni. Hogyan tegyük?
Mit gondoltok, hogyan írják a számlára az áru árát?

1 tallér+1 forint +1 fillér+2 krajcár; 11012 krajcár van a számlára írva.

Legközelebb többféle árut is vettünk. Az árcédula szerint az áruk: 11, 121, és 1001. Mennyi volt a számla végösszege? Ellenőrizzük a gép összeadását krajcárra átszámított árakkal is!

Kiemelt készségek, képességek

Számolás, problémareprezentáció

5. Foglalkozás – 1. lépés/2.

A számlán a végösszeget krajcárban kérje a tanár!
Lehetőleg 3-as számrendszerben végezzék a gyerekek az összeadást! A szöveg is ezt sugallja, hiszen 1+1+1 krajcár = 1 fillér+0 krajcár.
Kérdés, hogy felismerik-e a gyerekek, hogy 3-as számrendszerben számolnak a lények? Ha nem, nem célszerű közölni.

5. Foglalkozás – 1. lépés/3.

A háromujjú lények országában papírpénz is van: 1 korona = 3 tallér és 1 arany = 3 korona.
Egy 4 tagú család havi jövedelme 2222220 krajcár. Minden csoport tervezze meg a család 1 heti kiadását! A tervezéshez szükséges információkat a munkafüzetben megtaláljátok.

Kiemelt készségek, képességek

Modell alkotás

5. Foglalkozás – 1. lépés/4.

A költségvetéseket a következő szempontok szerint lehetne összehasonlítani: Mennyit költene a család a lakás rezsijére, az étkezésre, a szórakozásra, a közlekedésre?
Az összköltség nem haladja-e meg lényegesen a havi jövedelem negyedét, azaz a 202 020 krajcárt.
Megbeszéléskor lehetőleg a diákok döntsék el, hogy melyik költségvetést találják a legreálisabbnak, a legjobbnak!

KETTES SZÁMRENDSZER

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközök: 2. feladatlap: személyenként: 4 számkártya. Táblázat a kezdő játékos nyereségéről; Munkaforma: párban)

5. Foglalkozás – 2. lépés/1.

Játsszunk számkártyákkal! A játék a következő: Párokat alakítunk ki. Mindenki kap 4 kártyát, amelyek közül kettőn 0 áll, kettőn pedig 1. Az egyik játékos (a kezdő) letesz egy kártyát a padra lefelé fordítva. Ezután a másik játékos tesz le egyet az előbb lerakott kártya elé balról. Ekkor újra a kezdő játékos tesz le egy lapot ugyancsak balra, és végül a másik játékos lerakja az utolsó kártyát a sor elejére. Ezután megfordítják a 4 kártyát. Lehet, hogy mind nullás, lehet, hogy mind egyes, az is lehet, hogy nullás és egyes is lesz közöttük. Mindig a kezdő játékos nyer, a nyeresége a táblázatból leolvasható.

Lásd a munkafüzetben: Táblázat a kezdő játékos nyereményéről.

A játékot úgy kell játszani, hogy hol az egyik, hol a másik játékos legyen a kezdő. Előre döntsétek el, hogy hány játszma után álltok meg, és számoljátok össze, hogy az addigi játszmák alapján ki nyerte meg a játékot!

Kiemelt készségek, képességek

Gondolkodási sebesség, kombinativitás

5. Foglalkozás – 2. lépés/2.

Néhány játszma után célszerű megkérdezni: Hogyan játsszon a kezdő játékos, hogy sokat nyerjen? Hogyan játsszon a második játékos, hogy keveset veszítsen? Hogyan lehet a lerakott kártyákat látva gyorsan kiszámítani a nyereséget (a táblázat használata nélkül)?

5. Foglalkozás – 2. lépés/3.

Módosítsuk a játékot! Legyen a nyereség most is ugyanannyi, mint az előbb, de a kezdő játékos csak akkor nyer, ha a nyereség páros szám. Ha páratlan, akkor a másik játékos nyeri azt az összeget, amennyit a táblázat mutat.

5. Foglalkozás – 2. lépés/4.

Lehet, hogy a gyerekek egyéb módosítást is javasolnak. Érdemes kipróbálni az új módosításokat, még annak az árán is, hogy elmarad az utolsó problémafelvetés.

5. Foglalkozás – 2. lépés/5.

Egy balesetben megsérült ember lebénult, nem tud beszélni, s a végtagjait sem tudja mozgatni. A fejével tud tagadó mozdulatot tenni és bólintani. Hogyan tudná a kívánságait a környezetével közölni?

Kiemelt készségek, képességek

Kreativitás, eredetiség, probléma-érzékenység

5. Foglalkozás – 2. lépés/6.

Kényes kérdés lehet, hogy szerepeljen-e a szövegben mozgássérült ember. Döntse el a tanár az adott csoport ismeretében!

MELLÉKLET A TANÁR SZÁMÁRA

I. EC, PEC, KIMEHETSZ

Megoldás:

1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	**14**	15
16	17	18	19	20	**21**		22	23	24	25	26	27		**28**
29	30	31	32	33			34	**35**	36	37	38	39		
40	41	**42**	43	44			45		46	47	48	**49**		
50	51		52	53			54		55	**56**	57			
58	59		60	61			62		**63**		64			
65	66		67	68			69				**70**			
71	72		73	74			75							
76	**77**		78	79			80							
81			82	83			**84**							
85			86	87										
88			89	90										
91			92	93										
			94	95										
			96	97										
			98	**99**										

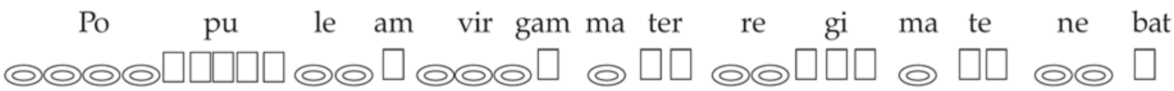
Regényrészlet:

Jókai Mór A névtelen vár című regényében egy anekdotázó magyar alispánnal mondatja el a következő történetet:

„Nem ismeri Ön azt az adomát az angol hajóskapitányról, akinek egyszer a hajóslegényeit meg kellett tizedelnie, mert gyáván viselték magukat az ütközetben?

– Nem ismerem.

– Harminc matróz közül tizenötöt kellett neki lövetnie: aztán fele írlandi volt, fele ánglus. Az írlandiakat ki nem állhatta. Hát mit csinált? Felállította őket sorba ezen vers szerint: „populeam virgam mater regina tenebat". Hadd mutatom meg ezt sorba rakott palackokkal. A gömbölyűek az ánglusok, a négyszögletűek az írlandiak. Így állnak ni, szépen:



Akkor elkezdték számlálni sorba, minden kilencediket főbe lőtték: az ánglusok mind megmaradtak, az írlandiak meghaltak. Látják-e? Kilenc! Megint kilenc! Valamennyi négyszögletű a földön fekszik."

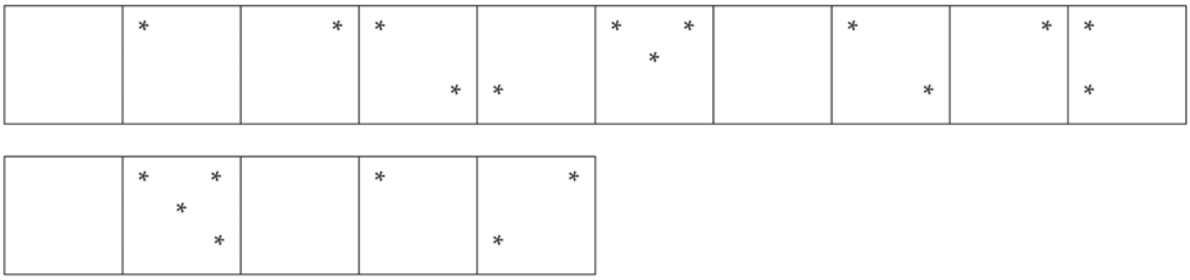
A „székre leülős" játék menete:

A teremben körbe leraknak 1-gyel kevesebb széket, mint ahány játékos részt vesz a játékban. A székek előtt körben sétálnak a játékosok addig, amíg a zene szól (vagy amíg a játékvezető nem tapsol), és amikor a zene elhallgat (vagy a játékvezető tapsol), minden játékos megpróbál leülni egy-egy székre. Akinek nem sikerül, kiesik a játékból. Ekkor egy széket kivesznek a körből, s kezdődik elölről a játék. A legvégén egy szék körül 2 ember sétál. Az nyeri meg a játékot, aki le tud ülni erre az utolsó székre.

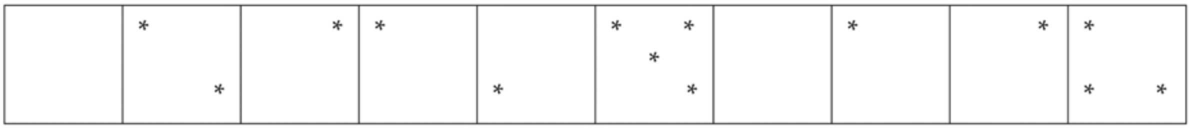
II. JÁTSZVA OSZTHATÓ

A játéktábla első 15 és utolsó 10 mezeje – Megoldás

Az első 15 mező:



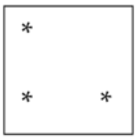
Az utolsó tíz mező:



Mezők száma:

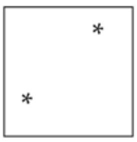
Számoljátok össze, hogy az alább lerajzolt négyzet hányszor fog szerepelni?

A:



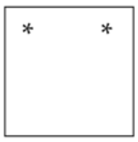
(A 20., 40., 80. és 100. mezőn)

B:



(A 15., 45. és 75. mezőn)

C:



(Nincs ilyen négyzet.)

D:

(A 6., 18., 42., 54., 66. és 78.)

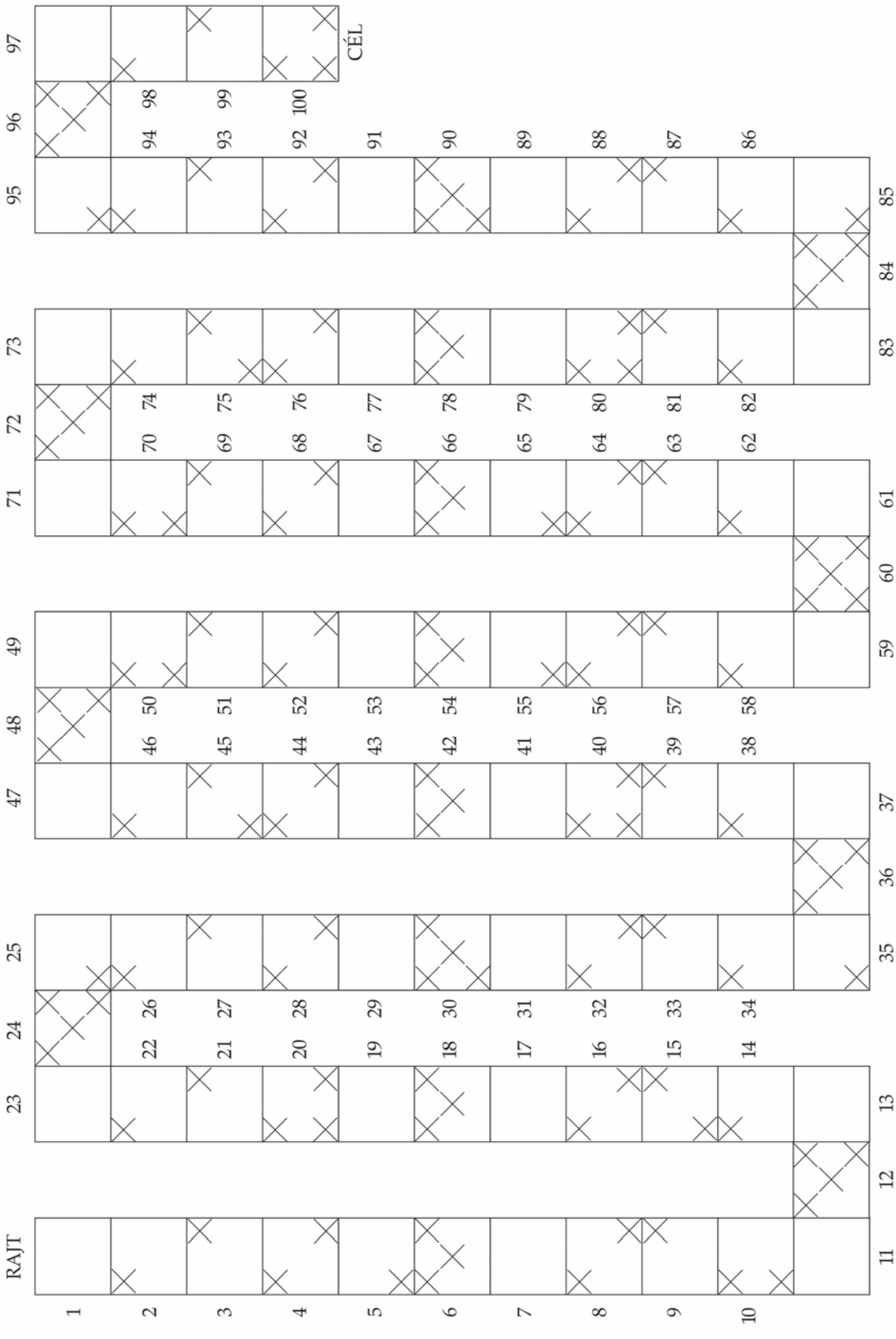
A játék nyerő stratégiája – Megoldás:

1 dobással nem juthat célba, mivel a dobott számok összege legfeljebb 12, így legfeljebb a 89. mezőre léphet, és ha a kedvezményezett 80-as mezőre lép, innen is csak a 100. mezőre juthat, tehát nem jut túl a 100-on.

2 dobással már célba érhet, a következőképpen:

- Vagy úgy, hogy először 3-at dob (ekkor a 80-as mezőről a 100-asra ugrik), s ezután bármilyen összeg dobása célba juttatja a játékost. Így tehát 11-féle összeg dobásával juthat a célba.
- Vagy úgy, hogy először 11-et dob (ekkor a 88-as mezőre jut). Ezután egy dobással csak úgy juthat célba, ha 12-t dob. Ez a célba jutás tehát egyféleképpen történhet.
- Vagy úgy, hogy először 12-t dob (ekkor a 89-es mezőre jut), és ezután vagy 12-t dob, vagy 11-et, és az utóbbi esetben a kedvezményezett 100-ról bemehet a célba. Ez két célba jutási lehetőség.

Másféleképpen két lépéssorozattal nem juthat be, mert ezen a szakaszon csak a 80-ason és a 100-on van pontosan 3 csillag, tehát innen léphet újabb dobás nélkül tovább, és a 77-estől a cél 24 négyzetnyire van.
Összesen tehát 11+1+2=14 különböző összegdobási sorozattal juthat leggyorsabban a célba.


RAJT
CÉL

III. A SZABÁLY, AZ SZABÁLY

7-tel való oszthatósági szabály háromjegyű számokra: Az utolsó számjegyet levágjuk, és az így maradt kétjegyű számból kivonjuk a levágott számjegy 9-szeresét.
Indoklás:
$100a+10b+c = 70a+7b+28c+30a+3b–27c = 7(10a+b+4c)+3(10a+b–9c)$.

Megoldás:
A kisebbítendő és a kivonandó is azonos maradékot ad 9-cel osztva, tehát a különbség 9-cel osztható lesz, így a hiányzó számjegy a megadott számjegyek összegét 9-cel oszthatóra kell, hogy kipótolja. Mivel 0 nem lehetett a hiányzó számjegy, így a keresett számjegy egyértelműen megadható.

A második mutatvány:
Ehhez a mutatványhoz kérek egy önként jelentkező partnert! Felírok egy 9000-nél kisebb négyjegyű számot a táblára. Ez alá a partnerem ír egy tetszőleges (9000-nél kisebb) négyjegyű számot, majd megint én írok egyet, és így felváltva, például leírunk összesen öt számot, majd összeadjuk ezeket a számokat. A bűvészség az a lesz, hogy amikor leírtam az első számot a táblára, egyúttal leírom erre a papírra az öt szám összegét is. A végén összehasonlítjuk, hogy helyes eredményt írtam-e le.

Megoldás:
A tanár által írt második illetve harmadik számot úgy képezi, hogy a partner által előzőleg leírt szám számjegyeit 9-re pótolja ki, így az öt szám közül a második és harmadik illetve a negyedik és ötödik összege egyaránt 9999 lesz tehát az összegük 20 000-2. Ha tehát például a tanár a 3457 számot írta le először, akkor

A tanár első száma:	3457
A partner első száma:	1927
A tanár második száma:	8072
A partner második száma:	7453
A tanár harmadik száma:	2546
Az összeg:	3457+20 000 – 2 = 23455

Hét vagy kilenc soros összeadásnál az első sorba írt számhoz 30 000 – 3-at, illetve 40 000 – 4-et kell hozzáadni.

IV. AZ „ÉPÍTŐMESTEREK”

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
130	131	132	133	134	135	136	137	138	139
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149
150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
170	171	172	173	174	175	176	177	178	179
180	181	182	183	184	185	186	187	188	189
190	191	192	193	194	195	196	197	198	199

1. feladatlap: A csoportok feladata

1. és 2. csoport:
Az $n^2 - n + 4$ kifejezésben található n helyére írjatok nyolc különböző természetes számot, és számítsátok ki mind a nyolc esetben a kifejezés értékét! Milyen számokat kaptatok eredményül? Fogalmazzatok meg ez alapján egy sejtést! Vajon igaz a sejtésetek? Ellenőrizzétek a sejtéseteket további számok beírásával is!

3. és 4. csoport:
A $2^p - 1$ kifejezésben található p helyére írjátok be a 2-t, majd a 3-at, az 5-öt és a 7-et, és számítsátok ki mind a négy esetben a kifejezés értékét! Milyen számokat kaptatok eredményül? Fogalmazzatok meg ez alapján egy sejtést! Ellenőrizzétek a sejtéseteket további prímszám beírásával is! (Ha szükséges, kérjétek el tanárotoktól a 2 hatványai táblázatot!)

5. és 6. csoport:
A $n^2 + n + 17$ kifejezésben található n helyére írjátok be sorban az első tíz természetes számot, majd mind a tíz esetben számítsátok ki a kifejezés értékét! Milyen számokat kaptatok eredményül? Fogalmazzatok meg ez alapján egy sejtést! Ellenőrizzétek a sejtéseteket az n helyére írt további természetes számmal!

A csoportfeladatok megoldása:

A csoportfeladatok megoldása:

1. és 2. csoport:

n	$n^2 - n + 41$	
0	41	prím
1	41	prím
2	43	prím
3	47	prím
4	53	prím
5	61	prím
6	71	prím
7	83	prím
8	97	prím
9	113	prím
10	131	prím
11	151	prím
12	173	prím
13	197	prím
14	223	prím
15	251	prím
16	281	prím
17	313	prím
18	347	prím
19	383	prím
20	421	prím
21	461	prím
22	503	prím
23	547	prím
24	593	prím
25	641	prím
26	691	prím
27	743	prím
28	797	prím
29	853	prím
30	911	prím
31	971	prím
32	1033	prím
33	1097	prím
34	1163	prím
35	1231	prím
36	1301	prím
37	1373	prím
38	1447	prím
39	1523	prím
40	1601	prím
41	$1681 = 41^2$	nem prím

3. és 4. csoport:

p	$2^p - 1$	
2	3	prím
3	7	prím
5	31	prím
7	127	prím
11	$2047 = 23 \cdot 89$	nem prím

Mersenne-prímek (Martin Mersenne (1588–1648) francia szerzetes.)
39 Mersenne – prímet ismerünk.
A legújabbat egy 20 éves kanadai fiatalember fedezte fel: $2^{13466917} - 1$.

5. és 6. csoport:

n	$n^2 + n + 17$	
0	17	prím
1	19	prím
2	23	prím
3	29	prím
4	37	prím
5	47	prím
6	59	prím
7	73	prím
8	89	prím
9	107	prím
10	127	prím
11	149	prím
12	173	prím
13	199	prím
14	227	prím
15	257	prím
16	$289 = 17^2$	nem prím

A $p = 2; 3; 5; 11; 17; 41$ számokra teljesül, hogy az $n^2 + n + p$ kifejezés értéke prímszám az $n = 0; 1; 2; ...; p - 2$ értékek mindegyikére.

V. KÉTUJJÚ, HÁROMUJJÚ LÉNYEK

2. Feladatlap: Infomrációk a költségvetéshez

Készítsétek el a család egy átlagos hetének költségvetését! Határozzátok meg, hogy mire mennyit költhetnek!
A körülményekről a következőt tudjuk:
A háromujjú család 4 főből áll: a két szülő és a két gyerek. A munkaidő és az iskola is heti ötnapos. A család minden tagja hét közben a munkahelyén, illetve az iskolában ebédel. Reggelizni és vacsorázni a hét minden napján együtt szoktak otthon. A hétvégén otthon ebédelnek. Busszal illetve villamossal járnak a munkahelyükre. Háromujjú országban heti bérletet lehet vásárolni.
A család havi jövedelme: 2 222 220 krajcár
A lakás havi rezsi költsége: 20 200 krajcár
Havonta gyerekenként 220 krajcárt fizetnek az iskolai étkezésre, a felnőttek pedig a munkahelyi étkezésre fejenként havonta 2012 krajcárt.
A heti bérlet ára: felnőtt: 12 krajcár
gyerek: 11 krajcár
Egy mozijegy ára általában 102 krajcár
Színház és koncertjegy ára: 120 krajcár
1 liter tej: 2 krajcár
1 kg kenyér ára: 2 krajcár
1 kg hús ára: 202 krajcár
1 liter olaj ára: 11 krajcár
4 zsemle ára: 1 krajcár
1 csomag vaj ára: 10 krajcár
A gyümölcs- és zöldségfélék ára kilogrammonként 11 és 22 krajcár között van.
Az 1 literes üdítőital ára (fajtától és minőségtől függően): 2, 10 vagy 12 krajcár

Táblázat a kezdő játékos nyereségéről:

A kártya állása 4.3.2.1.	A nyereség
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	2
0 0 1 1	3
0 1 0 0	4
0 1 0 1	5
0 1 1 0	6
0 1 1 1	7
1 0 0 0	8
1 0 0 1	9
1 0 1 0	10
1 0 1 1	11
1 1 0 0	12
1 1 0 1	13
1 1 1 0	14
1 1 1 1	15