MATEMATIKA „C”
12. évfolyam

4. modul
Még egyszer!

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A 12. osztályban tanult új ismeretek áttekintése.
Időkeret	1 foglalkozás (45 perc)
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, gazdaságtan Szűkebb környezetben: Függvények, síkgeometria Ajánlott megelőző tevékenységek: Térfogat- és felszínszámítás Ajánlott követő tevékenységek: Tanévvégi ismétlés
A képességfejlesztés fókuszai	Logikus gondolkodás, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, mennyiségi következtetés, becslés, rendszerezés, metakogníció

AJÁNLÁS

A tanévvégi ismétlés megkezdése előtt célszerű áttekinteni a 12. osztályban tanult új ismereteket. Ezen a foglalkozáson a sorozatokra, sokszögekre, testek felszínének és térfogatának kiszámítására vonatkozó egyszerű és összetett feladatok szerepelnek.

Az egyszerűbb kérdések sem az ismeretanyag mechanikus felidézését, hanem az arról való töprengést szolgálják.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Még egyszer!			
1.	Kérdések a négy témakör fogalmaira.	Metakogníció, rendszerezés, problémamegoldás, logikus gondolkodás	Feladatlap: 1– 9. feladat
2.	Sorozatokra vonatkozó összetett feladatok	Ismeretek elmélyítése, rendszerezése, érvelés, bizonyítás, prezentáció	Feladatlap: 10–11. feladat
3.	Testek egymáshoz való viszonya	Térlátás, térbeli viszonyok felismerése, mennyiségi következtetés, becslés, rendszerezés, metakogníció	Feladatlap: 12–13. feladat

I. MÉG EGYSZER!

Ezen a foglalkozáson három nagyobb témakörrel (sorozatok, síkidomok területe, testek felszíne és térfogata) kapcsolatos legfontosabb fogalmakat, és a rájuk vonatkozó ismereteket elevenítjük fel feladatokon keresztül

1. Egy szigorúan növő számtani sorozat öt egymást követő tagjának összege 100. Lehet-e tagja a (-2)? Indokold a döntésedet!

Megoldás: Igen. A sorozat harmadik tagja az $5a_3 = 100$ egyenletből 20. Mivel a sorozat szigorúan növő, ezért csak az első vagy a második tagja lehet (-2). Ha az első, akkor a differencia 11, ha pedig a második tagja, akkor a differencia 22.

2. Egy számtani sorozat első hat és első hét tagjának összege egyaránt 63. Mennyi a sorozat negyedik és harmadik tagja?

Megoldás: A hetedik tag nulla, és mivel az első hét tag összege 63, a sorozat negyedik tagja 9. Mivel $9 + 3d = 0$, így $d = -3$, és ebből adódik, hogy a sorozat harmadik tagja 12.

3. Egy háromszög oldalhosszai rendre egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Az oldalhosszak mértékszáma egész szám, szorzatuk 27. Mekkora a háromszög kerülete?

Megoldás: A háromszög oldalhosszait jelölheti $\frac{a}{q}$, a, aq. Az $\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 27$ egyenletből $a = 3$. A másik két oldal szorzata 9. A 9 két pozitív egész szám szorzataként kétféleképpen írható fel: $3 \cdot 3$ vagy $1 \cdot 9$. Az 1, 3, 9 hosszú szakaszok nem alkotnak háromszöget, így a háromszög szabályos, a kerülete 9 egység.

4. Egy mértani sorozat első négy tagjának összege tízszerese az első két tag összegének. A nulla nem tagja a sorozatnak. Mekkora lehet a sorozat hányadosa?

Megoldás: Ha sorozat első tagja *a* és hányadosa *q*, akkor $a + aq + aq^2 + aq^3 = 10(a + aq)$.

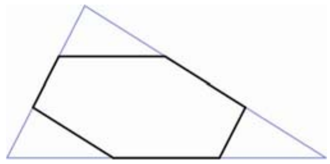
Mivel $a \neq 0$, így $1 + q + q^2 + q^3 = 10(1 + q)$.

$1 + q + q^2 + q^3 = 10(1 + q) \iff (1 + q) + q^2(1 + q) = 10(1 + q) \iff (1 + q)(q^2 - 9) = 0$.

$q = -1$ vagy $q = 3$, vagy $q = -3$. Mindhárom érték eleget tesz a feltételeknek.

5. Egy háromszög oldalainak harmadoló pontjai hatszöget határoznak meg. A háromszög területének hányadrésze e hatszög területe?

Megoldás:



A csúcsokban „maradt” háromszögek hasonlóak az eredeti háromszöghöz (a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$), így a területük annak $\frac{1}{9}$-e, a három kis háromszög területe összesen $\frac{1}{3}$ része az eredeti háromszög területének . A hatszög területe az eredeti háromszög területének $\frac{2}{3}$-a.

6. A (szabályos) hatszögletű „Kerek Erdő” közepén áll Mikkamakka, s tőle az erdő legtávolabbi pontja 10 méterre van. Mekkora a Kerek Erdő kerülete?

Megoldás: A szabályos hatszög köré írt kör sugara, így a hatszög oldala 10 m, a kerülete 60 m.

7. Egy r sugarú félgömb határkörére mint alapkörre $2r$ magasságú egyenes forgáskúpot illesztünk. Mekkora az így nyert „Keljfeljancsi”térfogata?

Megoldás: $V = \frac{2r^3\pi}{3} + \frac{r^2\pi \cdot 2r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}$.

8. Egy sokszög bizonyos csúcsait összekötő szakaszok hosszát a, b, c és d, az általuk bezárt szögeket pedig α, β jelöli. A sokszög területét melyik kifejezés adhatja meg?

A: $\frac{a+b}{2ab} \cdot c \cdot d \cdot \sin\alpha$;

B: $\frac{1}{2}(ab+bc+ac) \cdot d \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

C: $\sqrt{a^2+b^2} \cdot (bc+ad)$;

D: $\frac{a^2+b^2}{c^2} \cdot d^2 \cdot \pi \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

Megoldás: A helyes válasz a D.

Mivel minden sokszög területe a hosszúság négyzetével arányos, így csak az a képlet lehet területet megadó, amelyik ezt teljesíti. Ilyen pedig csak a D képlet , hiszen az A képlet a hosszúsággal arányos, a B és a C pedig a hosszúság köbével.

9. Egy poliéder bizonyos csúcsai közötti szakaszok hosszát *a, b, c, d* , és *e*, az általuk bezárt szögeket pedig α *és* γ jelöli. A poliéder térfogatát melyik kifejezés adhatja meg?

A: $\dfrac{(a+b)(a+d)(b+c)(c+d)}{(a+c)(b+d)} \cdot \sin\gamma$;   B: $ab\left(d-\sqrt{c^2+d^2}\right)$;

C: $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)(a+b+c+d)\cos\alpha\sin\gamma$;   D: $\dfrac{abcd}{ab+cd} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma$.

Megoldás: A helyes válasz a C.

Az előző feladat megoldásához hasonlóan, minden poliéder térfogata a hosszúság köbével arányos, így egy poliéder térfogatát csak az a képlet adhatja meg, amelyik ezt teljesíti. Ilyen pedig csak a C és a B képlet, hiszen az A és D képletek a hosszúság négyzetével arányosak. Mivel *a*, *b*, *c* és *d* a poliéder egy-egy csúcsa közötti távolságot jelöli, így mindegyik pozitív számot jelöl, ezért $\sqrt{c^2+d^2} > d$, de ez azt jelenti, hogy a B képlettel kapható eredmény értéke negatív szám, ami nem lehet a térfogat mértéke.

10. Egy szigorúan csökkenő számtani sorozat első három tagjának összege 24. A sorozat második tagja olyan mértani sorozat első tagja, amelynek a hányadosa megegyezik a számtani sorozat differenciájával. A mértani sorozat első három tagjának összege 104. Számítsd ki a sorozatok első tagját és differenciáját, illetve a hányadosát!

Megoldás: A számtani sorozat első három tagjának összege 24, így a második tag 8. A *d* differenciájú számtani sorozat első három tagja rendre: $8-d$, 8 és $8+d$.

A mértani sorozat hányadosa *d*-vel megegyező, első tagja 8, így az első három tagja rendre jelölhető 8, $8d$ és $8d^2$-tel.

$8+8d+8d^2=104 \Leftrightarrow d^2+d-12=0$. Az egyenlet megoldásai: $d=3$, illetve $d=-4$. Mivel a számtani sorozat szigorúan csökkenő, így $d=-4$ és ezzel együtt a mértani sorozat hányadosa is csak -4 lehet.

A számtani sorozat első tagja 12, a mértani sorozaté 8.

11. Évi 8%-os kamatlábbal, negyedévente tőkésítve 1,5 év múlva 112 616 Ft lett a számlánkon. Ekkor kivettünk 50 000 Ft -ot, és a maradék pénzt – kéthavonta tőkésítve – három éven át kamatoztattuk, változatlan éves kamatláb mellett. Mennyi pénzünk volt a számlán eredetileg?

Megoldás:

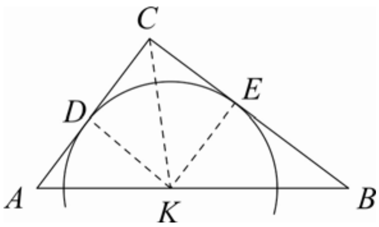
Ha eredetileg x Ft volt a számlánkon, akkor negyedévente 2% kamat kerül jóváírásra, és így 1,5 év múlva $1{,}02^6 x$ Ft. Mivel $1{,}02^6 x = 112\,616$, ebből $x \approx 99\,999{,}785 \approx 100\,000$. Eredetileg kb. 100 000 Ft volt a számlánkon.

12. Egy derékszögű háromszög átfogója 35 cm hosszú. Az átfogót 3:4 arányban osztó pont egy olyan kör középpontja, amely érinti a háromszög mindkét befogóját.

a) Mekkora ennek a körnek a sugara?

b) Mekkora a háromszög területe?

Megoldás:



Az ABC derékszögű háromszög átfogója: $AB = 35$ cm, és jelölje a rövidebb befogót AC. A kör K középpontja a háromszög derékszögének szögfelezőjének és az AB oldalnak a metszéspontja.

Mivel $\frac{AK}{KB} = \frac{3}{4}$ és $AB = 35\,(\text{cm})$, így $AK = 15\,(\text{cm})$ és $KB = 20\,(\text{cm})$ hosszú. Jelöljük a kör érintési pontjait D-vel és E-vel (lásd az ábrát). Ekkor $KD = KE = r$, és így a $DKEC$ téglalap négyzet. Legyen $AC = b$ és $BC = a$. Az AKD és KBE derékszögű háromszögek hasonlóak az ABC háromszöghöz, így $\frac{b-r}{15} = \frac{b}{35}$ és $\frac{a-r}{20} = \frac{a}{35}$. Az első egyenletből $b = \frac{7}{4}r$, a másodikból $a = \frac{7}{3}r$. Az ABC derékszögű háromszögre alkalmazva a pitagoraszi összefüggést: $\frac{49}{9}r^2 + \frac{49}{16}r^2 = 35^2$, és ebből $r = 12$.

a) A kör sugara 12 cm hosszú.

b) Mivel a derékszögű háromszög befogóinak hossza 21 cm és 28 cm, így a háromszög területe 294 cm^2.

13. Egy kocka éleinek hossza $b = 10$ dm. A kockába egy lehető legnagyobb térfogatú, kör alapú egyenes hengert helyezünk el, majd abba belerakunk egy lehető legnagyobb térfogatú téglalap alapú, egyenlő oldalélű gúlát, és végül ebbe belehelyezünk egy olyan egyenes csonkakúpot, amelynek az alapköre a gúla alaplapjába beírt kör, magassága $\frac{b}{2}$.

Számítsd ki az egymásba „skatulyázott” testek térfogatát!

Megoldás: A kockába írt henger térfogata akkor a legnagyobb, ha alap-, illetve fedőköre a kocka egy-egy párhuzamos oldallapjának beírt köre. Térfogata: $V_h = \frac{b^3}{4} \cdot \pi$.

A hengerbe írt gúla térfogata akkor a lehető legnagyobb, ha a magassága b hosszúságú, és az alaplapja a henger alapkörébe írt lehető legnagyobb területű téglalap. Mivel a közös átfogójú derékszögű háromszögek közül az egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a legnagyobb, ezért a területe is ennek a háromszögnek a legnagyobb. Így adott körbe beírt téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb. A gúla négyzet alapú. A b átmérőjű körbe írt négyzet oldalhossza $\frac{b}{\sqrt{2}}$, területe $\frac{b^2}{2}$.

A gúla térfogata: $V_g = \frac{b^3}{6}$.

A gúlába beírt csonkakúp alapkörének sugara $\frac{b}{2\sqrt{2}}$, területe $\frac{b^2}{8} \cdot \pi$. Mivel a csonkakúp fedőlapja hasonló az alaplapjához és a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, így a területe az alaplap területének negyede, azaz $\frac{b^2}{32} \cdot \pi$.

A csonkakúp térfogata: $V_{\text{csk}} = \frac{\pi \cdot b}{6} \cdot \left(\frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{32} + \frac{b^2}{16} \right) = \frac{7b^3\pi}{192}$.