MATEMATIKA „C”
12. évfolyam

3. modul
A mi terünk

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A térfogat- és felszínszámítási ismeretek alkalmazása.
Időkeret	4 foglalkozás (4×45 perc)
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, kémia, biológia Szűkebb környezetben: Szögfüggvények alkalmazása derékszögű háromszögben, sokszögek tulajdonságai Ajánlott megelőző tevékenységek: Területszámítás Ajánlott követő tevékenységek: Tanévvégi ismétlés
A képességfejlesztés fókuszai	Térlátás, térbeli viszonyok felismerése, ábrázolás, reprezentáció, térfogat és terület becslése, mennyiségi következtetés, rendszerezés, metakogníció, kombinatorikai gondolkodásmód, számolási képesség, szövegértés, probléma-reprezentáció

JAVASLAT

Az emberek a térszemléletük minősége szempontjából is különböznek. A térszemlélet hosszú idő alatt alakul ki, és annak fejlesztése folyamatos feladat. Most, 12. osztályban fogalmazunk meg olyan térgeometriai fogalmakat, amelyekről már eddig sok tapasztalata gyűlt össze a diákoknak. Ilyen alapvető fogalom a hosszúság, terület, térfogat is. A mindennapi életben is gyakran használt ismeretek sokirányú alkalmazása érdeklődést válthat ki a tanulókban (pl. papírdoboz készítése megadott testekhez a lehető legkevesebb papírból. De érdeklődésre tarthat számot pl. az is, hogy Charles Simonyi, a világűrben tett utazása során az űrhajó pályájának egy pontjából a Föld felszínének hány százalékát láthatta, vagy vajon a látott Föld a látóterének mekkora részét töltötte ki?

A középiskolai tanulmányok végére el kellene érnünk, hogy minden diák a tanult testekről helyes vázlatrajzot tudjon készíteni. Ezzel érdemes külön is foglalkozni, és a tanulóknak megmutatni, hogy hogyan készíthető egy egyszerű, jól áttekinthető vázlatrajz. Ha van rá lehetőség, használjuk a Word rajzprogramját is!

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE

1. foglalkozás: **Kockázás**
2. foglalkozás: **Szögletes testek**
3. foglalkozás: **Gömbölyű testek**
4. foglalkozás: **Síkban, térben**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Kockázás			
1	Kocka jellemző adatainak kiszámítása	Metakogníció, rendszerezés, problémamegoldás, értelmes memória	Feladatlap: 1–4., 7. feladat
2	Kocka vetülete síkra forgatása közben	Térlátás, térbeli viszonyok felismerése, mennyiségi következtetés, ábrázolás, probléma-reprezentáció, probléma-érzékenység	Feladatlap: 5. feladat
3	Kocka és a vektorok	Értelmes memória	Feladatlap: 6. feladat
II. Szögletes testek			
1	Különböző poliéderek lerajzolása, térfogatuk kiszámítása	Ismeretek elmélyítése, rendszerezés, számolási képesség, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, ábrázolás, térfogat becslése, probléma-reprezentáció.	Feladatlap: 1–7. feladat
III. Gömbölyű testek			
1	Hengerre (gömbre) vonatkozó feladatok	Ismeretek elmélyítése, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, ábrázolás, térfogat becslése, probléma-reprezentáció.	Feladatlap: 1., 2.. feladat
2	Kúpra vonatkozó feladatok	Ismeretek elmélyítése, térlátás, térbeli viszonyok felismerése	Feladatlap: 3., 5., 7. feladat
3	Gömb és részei	Ismeretek elmélyítése, térlátás, térbeli viszonyok felismerése	Feladatlap: 4., 6. feladat

IV. Síkban, térben			
1	Síkbeli alakzatok térbeli megfelelőjének keresése.	Ismeretek elmélyítése, rendszerezés, probléma-érzékenység, kreativitás, eredetiség, érvelés, metakogníció	Feladatlap: 1. feladat
2	Különböző testek egymáshoz és a gömbhöz való viszonya. („Test a testben")	Térlátás, térbeli viszonyok felismerése, mennyiségi következtetés, ábrázolás, probléma-reprezentáció	Feladatlap: 2–6. feladat

I. KOCKÁZÁS

Az alábbi feladatok megoldása közben hasznos, ha van előtted két kocka. Az egyik legyen lapok által határolt, a másik „átlátszó", csak az élei jelenítsék meg a kockát.

1. Állíts össze egy kockát a Polydron készlet elemeiből! Mérd le a kocka élének hosszát mm pontossággal, és számítsd ki a kocka lapátlójának, testátlójának a hosszát, a kocka felszínét és térfogatát!

Megoldás:

Az a élű kocka lapátlójának hossza $a\sqrt{2}$, testátlójáé $a\sqrt{3}$, felszíne $6a^2$, térfogata a^3. A mért értéket kell a helyére behelyettesíteni.

2. Hány átlósíkja van egy kockának? (Átlósíknak nevezünk minden olyan síkot, amely tartalmazza a kocka négy csúcsát, de a lapját nem.) Az átlósíkokból a kocka egy-egy síkidomot vág ki. Számítsd ki ezeknek a síkidomoknak a területét!

Megoldás: Az átlósík értelmezéséből következik, hogy annyi átlósíkja van a kockának, ahányféleképpen ki tudunk választani a kocka párhuzamos élei közül két olyat, amelyek nem a kocka egy oldallapjának élei. A kocka bármelyik 4 párhuzamos éle közül kétféleképpen választható ki két-két ilyen él, tehát összesen 6 átlósíkja van egy kockának.

Az átlósíkból az a élű kocka mindegyik esetben olyan téglalapot vág ki, amelynek szomszédos oldalai a és $a\sqrt{2}$ hosszúak, így a területe mindegyiknek $t = a^2 \cdot \sqrt{2}$.

3. Mekkora szöget zár be egymással a kocka egy csúcsából kiinduló

a) két lapátlója; b) lapátlója és testátlója; c) éle és testátlója?

Megoldás:

a) Az egy csúcsból induló két lapátló egy szabályos háromszöget határoz meg, így a hajlásszögük 60°-os.

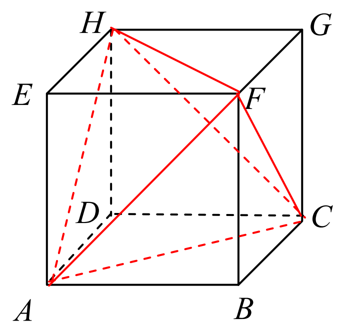
b) Az egy csúcsból induló lapátló és testátló a élű kocka esetében egy olyan derékszögű háromszöget határoz meg, amelynek átfogója $a\sqrt{3}$, befogói $a\sqrt{2}$ és a hosszúságú.

A kérdéses szöget α-val jelölve, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}8165$. Ebből adódik, hogy a lapátló és testátló hajlásszöge kb. $35{,}26^\circ$.

c) A feladat a b) kérdés megoldásában szereplő derékszögű háromszög másik hegyesszögének a kiszámítása. Az egy csúcsból induló él és testátló hajlásszöge kb. $54,74^\circ$.

4. Válassz ki a kocka csúcsai közül négyet úgy, hogy azok egy szabályos tetraéder csúcsai legyenek! (Szabályos tetraéder olyan gúla, amelynek minden lapja egyenlő oldalú háromszöglap.) Számítsd ki ennek a szabályos tetraédernek a térfogatát, ha a kocka élének hossza 6 cm!

*Megoldás***:**



A kapott szabályos tetraéder térfogatát a legkönnyebb úgy kiszámítani, hogy a kocka térfogatából kivonjuk a „leeső” 4 egybevágó gúla térfogatát. Mivel egy ilyen gúla térfogata: $\frac{a^3}{6}$, a szabályos tetraéder térfogata:

$a^3 - 4\cdot\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$, amely $a = 6\text{ cm}$ esetében 72 cm^3.

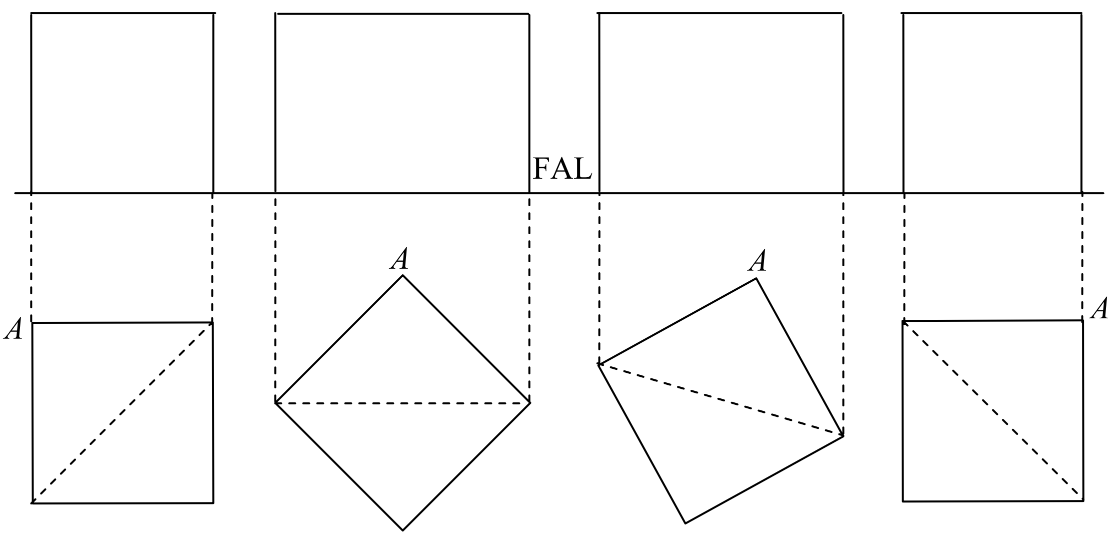
5. Tegyél egy tömör kockát az asztallapra úgy, hogy a kocka egyik lapja párhuzamos legyen az asztallapra merőleges fallal! Ebből a helyzetből kiindulva, forgasd a kockát a fallal párhuzamos forgástengelye körül! A forgatás során a kocka oldallapja maradjon végig az asztalon!

a) Ha a forgatás közben a falra merőlegesen megvilágítanánk a kockát egy párhuzamos fénynyalábbal, milyen lenne a kocka árnyéka a falon? Rajzold le az árnyékot 45°-os, 60°-os és 90°-os szögelforgatásnál! Mérd meg a kockád élének hosszát, és ennek alapján számítsd ki az árnyék által meghatározott síkidom területét mind a három szögelforgatás esetében!

b)* Az ilyen módon forgatott és megvilágított kocka árnyékának területe – adott élű kocka esetében – csak az elforgatás szögétől függ. Legyen az elforgatás szöge a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ intervallum eleme! Add meg képlettel, és ábrázold is ezt a függvényt! A kocka élének hosszát válasszuk 1 egységnek!

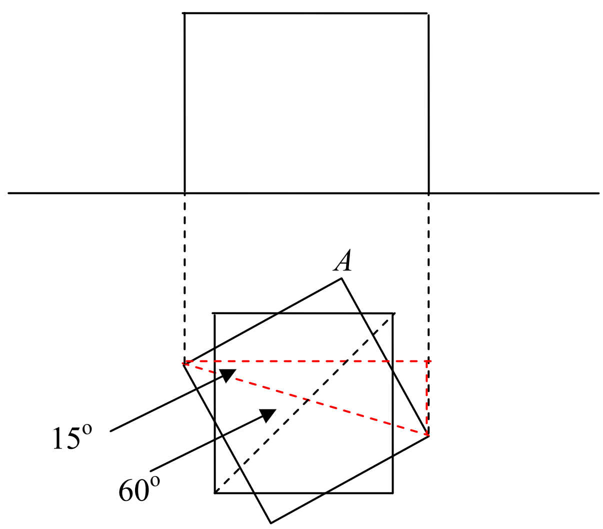
Megoldás:

a) A kocka felülnézete és az asztalra merőleges vetülete a kiindulási helyzetben és a három elforgatott esetben:



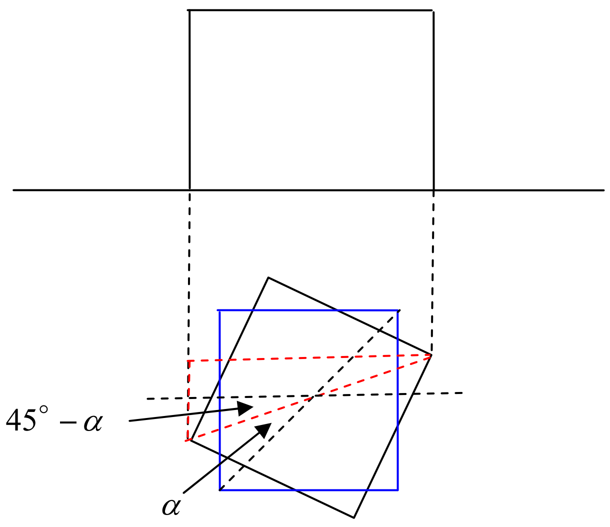
Mindhárom esetben a kocka merőleges vetülete téglalap. Ha a kocka élét a-val jelöljük, a 45°-os forgatásnál az árnyék területe $a^2\sqrt{2}$; 90°-osnál a^2.

A 60°-os forgatás esetében a vetület területe: $a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 15^\circ \approx 1{,}366a^2$.



Az ábrán az eredeti és a 60°-os elforgatással kapott kocka felülnézetben látható. Eközben a berajzolt lapátló is 60°-kal fordul el, és mivel a 45°-os forgatással kapott lapátló párhuzamos a fal merőleges vetületével, ezért a 60°-os forgatással kapott lapátló ehhez 15°-os szögben hajlik. Az ábrán piros színnel megrajzolt derékszögű háromszögből a lapátló merőleges vetülete: $a\sqrt{2}\cos 15^\circ$ hosszú.

b)



Jelöljük α-val a forgatás szögét. A függvény nyilván periodikus lesz, hiszen α és $\alpha + 90^\circ$-os forgatás esetén a kocka merőleges vetülete ugyanaz a téglalap. Az ábra egy $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ elforgatást szemléltet. Ekkor a kérdéses lapátló a fal „vonalával" $\frac{\pi}{4} - \alpha$ szöget zár be, és a piros színnel rajzolt derékszögű háromszögben a lapátló merőleges vetülete $a\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ módon számítható ki. Egységnyi oldalélű kocka esetében az árnyék területe: $t(\alpha) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, ahol. $0 \le \alpha < \frac{\pi}{4}$.

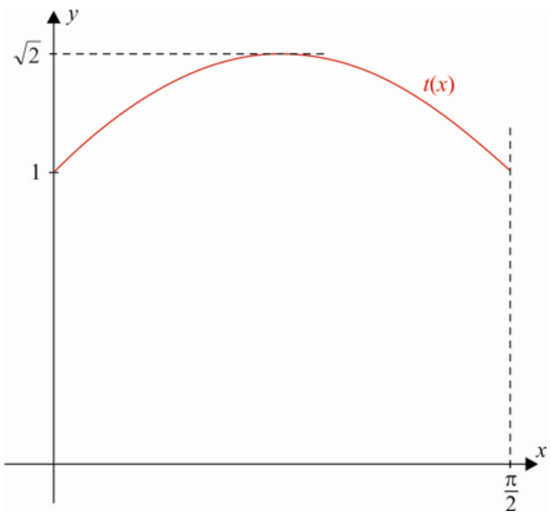
Ha $\frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor hasonló módon adódik, hogy a terület $t(\alpha) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Mivel a koszinuszfüggvény páros, ezért

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

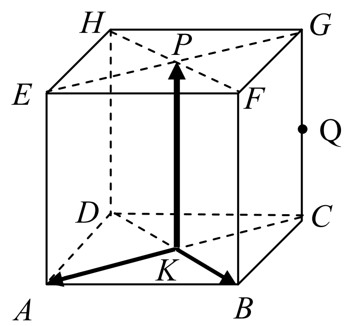
Ha $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, akkor

$$t(\alpha) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$



Ha a feladat felkelti a tanulók érdeklődését, további hasábok fogatását, és a vetület vizsgálatát is javasolhatjuk (pl. szabályos hatszögalapú egyenes hasáb).

6. Adott az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka három vektora: $\overrightarrow{KA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{KB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{KP} = \mathbf{p}$.



E három vektor és a vektorműveletek felhasználásával írd fel a következő vektorokat!

a) $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{DE}$; c) $\overrightarrow{BH}$;

d) $\overrightarrow{HC}$; e) $\overrightarrow{DQ}$, ahol Q a CG él felezőpontja.

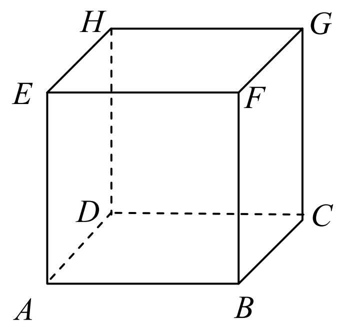
Megoldás:

a) $\overrightarrow{BC} = (-\mathbf{b}) + (-\mathbf{a}) = -\mathbf{b} - \mathbf{a}$; b) $\overrightarrow{DE} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{p}$;

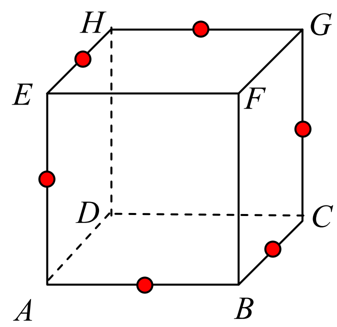
c) $\overrightarrow{BH} = -2\mathbf{b} + \mathbf{p}$; d) $\overrightarrow{HC} = -\mathbf{p} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -\mathbf{p} + \mathbf{b} - \mathbf{a}$;

e) $\overrightarrow{DQ} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \frac{\mathbf{p}}{2}$.

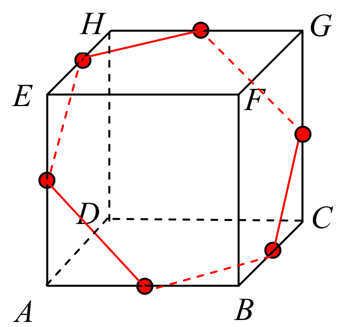
7. Keress a kocka lapjain olyan pontokat, amelyek egyenlő távolságra vannak a kocka *DF* testátlójának két végpontjától!



Megoldás: Hat ilyen pont könnyen található (Az ábrán piros színnel jelölt élt felező pontok. Ezek a pontok mind megfelelnek a feltételeknek, hiszen mindegyik a *DF* alapú, egyenlőszárú háromszög (a szár hossza $\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a$, ahol a a kocka élének hossza) szárszögének a csúcsa.



Kérdés, hogy van-e több ilyen pont. Mivel a *D* és *F* pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a *DF* szakasz felezőmerőleges síkja, így e hat pont



mindegyike ennek a síknak a pontja. A keresett ponthalmaz: ennek a síknak és a kocka oldallapjainak metszésvonalai.

II. SZÖGLETES TESTEK

A feladatok ismertnek tételezik fel néhány poliéder (hasáb, gúla, csonkagúla) térfogatának és felszínének kiszámítási módját.

1. A 4 cm oldalélű kocka minden lapjára kifelé olyan gúlát építünk, amelynek az oldalélei szintén 4 cm hosszúak. Mekkora az így keletkező csillagalakzat térfogata?

Megoldás: A gúlának a két szemközti oldalélén átmenő tengelymetszete olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek szára 4-4 cm, az alapja pedig $4\sqrt{2}$ hosszú. Pitagorasz tételének megfordítását alkalmazva a háromszög egyenlőszárú derékszögű, így az alaphoz tartozó magassága (a gúla testmagassága) $\frac{4\sqrt{2}}{2}$, azaz $2\sqrt{2}$ (cm) hosszú.

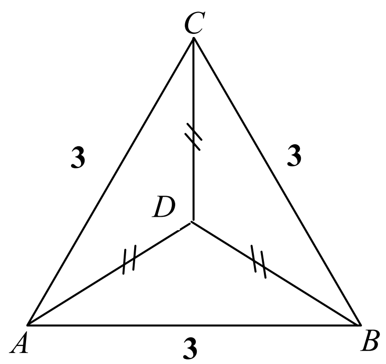
A térfogata $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ (cm^3). Így a csillagalakzat térfogata:

$$4^3 + 6\cdot\frac{32\sqrt{2}}{3} = 64\cdot(1+\sqrt{2}) \approx 154{,}5\ (\text{cm}^3)\,.$$

2. Egy téglatest térfogata 225 cm^3, továbbá három, közös csúcsú oldallapjának területaránya 1:3:5. Határozd meg a téglatest éleinek hosszát!

Megoldás: Jelölje a téglatest egy csúcsából induló éleinek hosszát *a*, *b* és *c*. Ekkor $abc = 225$ és $ab : bc : ac = 1:3:5$. Az utóbbi egyenletből $c = 3a$ és $b = \frac{3}{5}a$. Így $\frac{9}{5}a^3 = 225$, amelyből $a = 5$. A téglatest éleinek hossza: 3 cm, 5 cm és 15 cm.

3. Panni 12. osztályos tanuló, és ő is most különböző testek térfogatának és felszínének a kiszámítási módját tanulja matematika órán. Kezébe került egy japán nyelven írt matematika tankönyv. Az egyik feladathoz az alábbi ábra tartozott:



$ADB = BDC = CDA = 120^\circ$

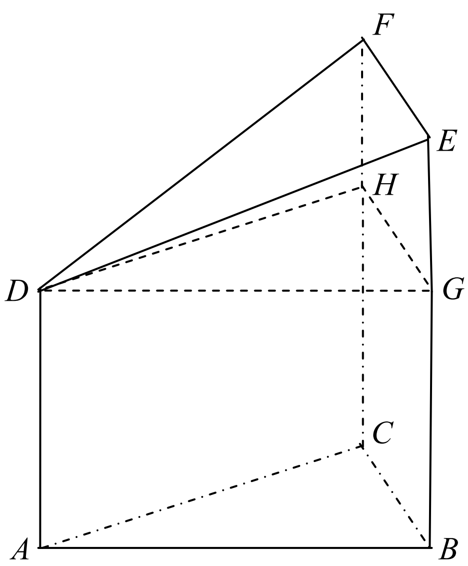
„Ez biztos egy *ABC* háromszög alapú, egyenlő oldalélű gúla. Gondolom, hogy a felszínét vagy a térfogát kell kiszámítani.” – gondolta Panni. Te hogyan értelmeznéd a látottakat?

Megoldás: Mivel a három, közös *D* csúcsú szög összege 360°, a *D* pont illeszkedik az *ABC* háromszög síkjára. Az ábra nem jeleníthet meg egy *ABCD* csúcsú gúlát, legfeljebb egy *ABC* alapú, egyenlő oldalélű gúla alapra merőleges vetületét. Ennyi adat viszont nem határozza meg egyértelműen a gúla térfogatát, illetve felszínét. Ezek kiszámításához egy további adatra (pl. a testmagasság hosszára) van szükség.

Gyakran előfordul, hogy a tanulók anélkül, hogy meggyőződnének a feladatban szereplő alakzat, idom létezéséről, nekilátnak a feladat „megoldásának”. Lehet, hogy ebben az (igencsak átlátszó) esetben is lesz tanuló, aki kiszámolja az *ABCD* csúcsú gúla „felszínét”. Hagyjuk, töprengjen el a kapott eredményen!
A feladat megoldásának megbeszélése után lehetne folytatni a feladatot. Minden tanuló adjon meg egy további adatot, és annak ismeretében számítsa ki a gúla térfogatát, illetve felszínét.

4. Egy háromoldalú egyenes hasáb alaplapja olyan *ABC* derékszögű háromszög, amelyben a derékszög a *C* csúcsnál van, és $AC = 20\text{ cm}$, $BC = 21\text{ cm}$ hosszú. A hasábból egy síkkal lemetszünk egy *ABC* alaplapú testet. Ez a sík az *A*, *B* és *C* csúcsokból induló oldaléleket az alaptól rendre 10 cm, 16 cm és 16 cm távolságra metszi. Mekkora térfogatú testet vágtunk le a hasábból?

Megoldás:



A hasábból lemetszett *ABCDEF* testet ismét messük el a *D* csúcson átmenő, *ABC* háromszöggel párhuzamos síkkal! A háromszög alapú, 10 cm magasságú hasáb térfogata: $V_1 = 2100\ (\text{cm}^3)$. Az ábra szerinti téglalap alapú *HGEFD* gúla alaplapjának oldalhosszai 6 cm és 21 cm, testmagassága pedig 20 cm, így a térfogata

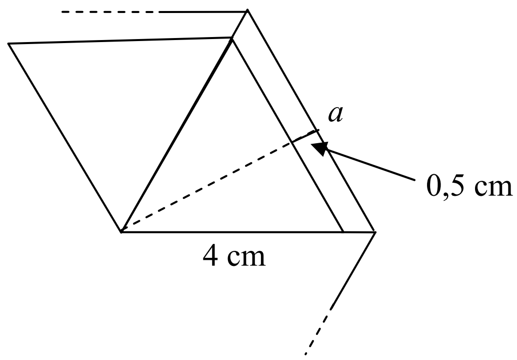
$$V_2 = \frac{21 \cdot 6 \cdot 20}{3} = 840\ (\text{cm}^3).$$

A hasábból levágott test térfogata

$$V_1 + V_2 = 2940\ (\text{cm}^3).$$

5. Egy desszertes doboz szabályos hatszögalapú egyenes hasáb. A dobozba elhelyezett desszertek szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alakúak. Méreteik: az alapélük 4 cm, a magasságuk 2 cm hosszú. A desszerteket a dobozban szorosan egymás mellé helyezik el, és a desszertek és a doboz oldallapja közötti 0,5 cm-es hézagot papírral töltik ki. A desszertek alá és fölé is papírt tesznek, amelyek magassága összesen szintén 0,5 cm. Mekkora térfogatú részt töltenek ki a desszertek, és mekkora a doboz térfogata, ha a doboz falvastagsága elhanyagolható?

Megoldás:



Az ábrán a doboz, benne a desszertek egy részlete látható felülnézetben. A 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög magassága $2\sqrt{3}$ cm hosszú. A két szabályos háromszög hasonlóságából következik, hogy $\frac{2\sqrt{3}+0{,}5}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{4}$. Ebből

$$a = 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 4{,}6\ (\text{cm}).$$

A desszertes doboz magassága 2,5 cm, a térfogata:

$$\frac{\left(4+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot(2\sqrt{3}+0{,}5)}{2}\cdot 6\cdot 2{,}5 \approx 136{,}1\ (\text{cm}^3).$$

6. Egy csonkagúla oldalélei egyenlő hosszúak, az alaplapjai 6 cm és 4 cm oldalhosszúságú négyzetek. A csonkagúla oldallapjainak területösszege megegyezik az alaplapok területének összegével. Számítsd ki a csonkagúla felszínét és térfogatát!

Megoldás: Mivel a csonkagúla oldallapjainak területösszege megegyezik az alaplapok területének összegével, azaz 52 cm^2-tel, a csonkagúla felszíne 104 cm^2.

A csonkagúla oldallapjának magasságát m-mel jelölve, $\frac{6+4}{2}\cdot m\cdot 4 = 6^2+4^2$, azaz $m = 2{,}6\ (\text{cm})$. A gúla M testmagasságának hossza meghatározható a csonkagúla 6 cm és 4 cm alapú, m szárú szimmetrikus trapéz metszetéből: $M^2 = 2{,}6^2 - 1^2$, ahonnan $M = 2{,}4\ (\text{cm})$. A csonkagúla térfogata: 60,8 cm^3.

III. GÖMBÖLYŰ TESTEK

A feladatokban a henger, a kúp, a csonkakúp, a gömb és részei térfogatának kiszámításának ismeretére van szükség. E testek egymáshoz való viszonya ezen a foglalkozáson nem kerül elő. Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy e térfogatok kiszámításra vonatkozó ismeretek gyakran alkalmazhatók a fizika területén is!

1. Egy 2 m hosszú vascső falvastagsága 12 mm, belső átmérője 40 mm. Mit gondolsz, egy 5 éves kisgyerek meg tudja-e emelni a csövet a közepénél fogva?

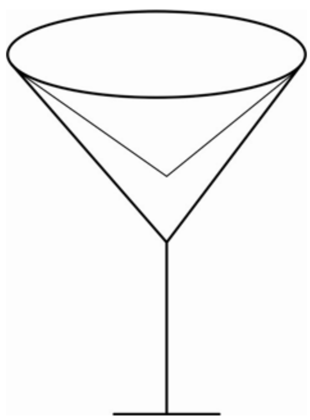
(A vas sűrűsége $7{,}86\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.)

Megoldás: A két henger alapkörének sugara 3,2 cm és a 2 cm, magassága 200 cm. A tömör vasból készült test térfogata: $(3{,}2^2 - 2^2)\pi \cdot 200 \approx 3920{,}7\ (\text{cm}^3)$; a tömege pedig kb. 30816,7 g, azaz kb. 30,8 kg. A kisgyerek nem tudja megemelni.

2. A forgáshenger alakú 3 dl-es vizespoharamat 10 cm magasságig töltöttem meg vízzel. Vajon kifolyik-e belőle a víz, ha beledobok egy 3 cm-es átmérőjű golyót, ami lemerül a pohár aljára? (A vizespohár alaplapjának átmérője 6 cm.)

Megoldás: A gömb által „kiszorított” víz térfogata megegyezik a gömb térfogatával, így, ha x cm-t emelkedett a víz szintje, akkor $\frac{4 \cdot 1{,}5^3 \cdot \pi}{3} = 3^2 \cdot \pi \cdot x$, és ebből $x = 0{,}5$. A víz szintje 0,5 cm-t fog emelkedni.

A pohár térfogata 300 cm^3, így a pohár m magasságára: $9\pi \cdot m = 300$, azaz $m \approx 10{,}6$. A pohár kb. 10,6 cm magas. A víz tehát nem fog kifolyni a pohárból.



3. Az ábrán látható pohár két, közös alapú körkúpból készült. A kúpok csúcsának távolsága 3,2 cm. Az egyik kúp nyílásszöge 90°, a másiké 60°. A két kúp palástja közötti rész tömör üveg. Mekkora ennek a résznek a térfogata?

Megoldás: A pohár tengelymetszete két, közös alapú egyenlőszárú háromszög, melyek szárszöge 90°-os illetve 60°-os. Ha a pohár határoló körének sugara r, akkor a két háromszög közös alapja $2r$, a hozzá tartozó magasság r, illetve $r + 3{,}2$. A közös magasságvonal által létrehozott, $r+3{,}2$ befogójú derékszögű háromszögben a sugárral szemközti szög 30°-os, így $\mathrm{tg}30^\circ = \dfrac{r}{r+3{,}2}$, azaz $r = \dfrac{3{,}2}{\sqrt{3}-1} \approx 4{,}4\ (\mathrm{cm})$.

A kérdezett térfogat a két kúp térfogatának különbsége: $\dfrac{4{,}4^2\pi \cdot 3{,}2}{3}$, és ez kb. 64,9 cm^3.

4. Mekkora tömegű terhet tud felemelni egy héliummal töltött, 12 m sugarú, gömb alakú léghajó, ha az elhanyagolható vastagságú burkolat négyzetmétere 0,2 kg tömegű? (1 m^3 levegő tömege kb. 1,29 kg, a léggömböt megtöltő héliumé köbméterenként 0,268 kg.)

Megoldás: A héliummal töltött léggömbnek és a tehernek a súlya tart egyensúlyt a gömbtérfogatnyi levegő súlyával.

A léggömb felszíne $4 \cdot 12^2 \cdot \pi \approx 1809{,}6\ (\mathrm{m}^2)$, ennek tömege kb. 362 kg.

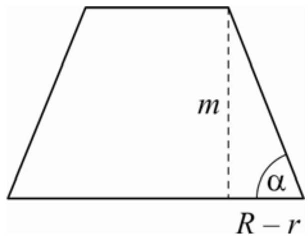
A héliummal töltött gömb tömege: $\dfrac{4 \cdot 12^3 \cdot \pi}{3} \cdot 0{,}268$, és ez kb. 1940 kg.

A léggömb tömege $1940 + 362 = 2302\ (\mathrm{kg})$.

A léggömb által kiszorított levegő tömege: $\dfrac{4 \cdot 12^3 \cdot \pi}{3} \cdot 1{,}29 \approx 9337\ (\mathrm{kg})$.

A léggömb kb. 7035 kg tömegű terhet tud felemelni.

5. Egy egyenes csonkakúp alap- és fedőkörének sugara R és r ($r < R$), magassága 10 cm. A csonkakúp alkotójának és alaplapjának α hajlásszögére $\mathrm{tg}\alpha = 2$ teljesül. Az alapkörre emelt, ugyanakkora magasságú henger térfogata 1,5-szerese a csonkakúp térfogatának. Hány cm hosszú R és r?



Megoldás: Az ábrán a csonkakúp tengelymetszete látható.

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{m}{R-r}$, azaz $2 = \dfrac{10}{R-r} \Leftrightarrow R - r = 5$.

A henger térfogata 1,5-szerese a kúp térfogatának, így

$R^2\pi\, m = 1{,}5 \cdot \dfrac{m\pi}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr)$, és ebből $R^2 = r^2 + Rr$.

A $\left.\begin{matrix} R^2 = r^2 + Rr \\ R - r = 5 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszerből pl. behelyettesítő módszerrel az $r^2 - 5r - 25 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek egyetlen pozitív megoldása: $r = \dfrac{5+\sqrt{125}}{2} \approx 8{,}1$.

A csonkakúp alap- és fedőkörének sugara kb. 13,1 cm és 8,1 cm hosszú.

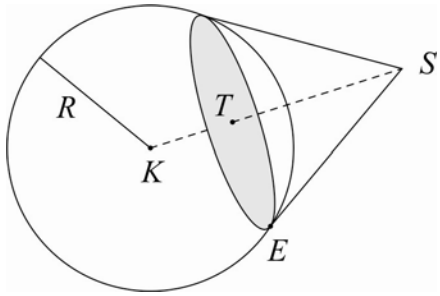
6. Charles Simonyi magyar származású fejlesztőmérnök volt az ötödik űrturista. 2007. április 7-én indult a Szojuz-TMA-10 űrhajóval 11 napos űrutazására, a Nemzetközi Űrállomásra.

a) Vajon a Föld felszínének hány százalékát láthatta Charles Simonyi egy olyan pillanatban, amikor az űrhajó a Földtől 200 km távolságban volt? (A Föld sugarát vegyük 6370 km-nek.)

b) Mekkora látószögben láthatta Charles Simonyi az a) kérdésben látott Földrészlet két legtávolabbi pontját összekötő szakaszt?

Megoldás:

a) A gömb és kúp tengelymetszetén jelölje E az egyik érintési pontot, T pedig e pontnak a KS szakaszra eső merőleges vetületét.



A KSE derékszögű háromszögben alkalmazzuk a befogótételt: $KE^2 = KT \cdot KS$, azaz $6370^2 = KT \cdot 6570$. Ebből $KT \approx 6176$ (km).

Az R sugarú gömbből levágott m magasságú gömbszelet felszíne, azaz a gömbbel közös részének területe: $T = 2\pi \cdot R \cdot m$. Jelen esetben $m = R - KT \approx 194$ (km), így $T \approx 7\,764\,635$ (km^2).

A Föld felszíne: $A_F \approx 5{,}09904 \cdot 10^8$ (km^2).

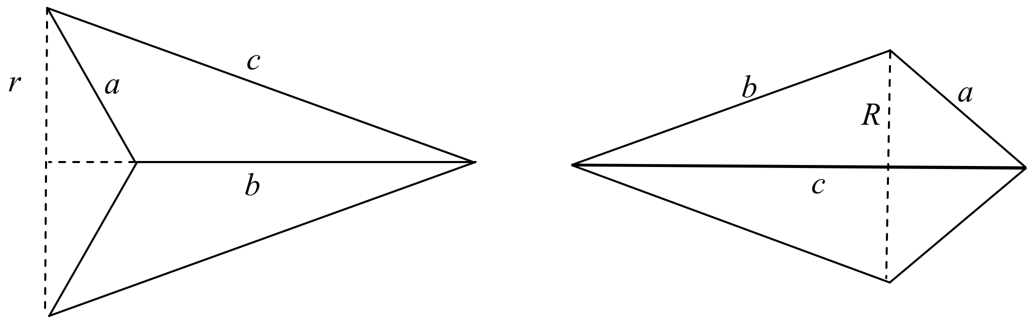
$\frac{T}{A_F} \approx 0{,}015$, tehát Charles Simonyi a Föld teljes felszínének kb. az 1,5%-át látta a Földtől 200 km-re lévő pontból.

b) A keresett szög a KSE szög kétszerese. Mivel $\sin KSE_\angle = \frac{KE}{KS} = \frac{6370}{6570} \approx 0{,}9696$, és ebből $KSE_\angle \approx 75{,}8^\circ$, így a látószög kb. $151{,}6^\circ$.

7. Az ABC háromszög két oldalának hossza $a = 3$ dm és $b = 4$ dm, továbbá e két oldal által közbezárt szög 120°. Megforgatjuk a háromszöget először a b, majd a c oldalának egyenese körül. Az egyik, illetve másik 360°-os forgatás során mekkora térrészt határol a háromszög?

Megoldás:

Az egyik, illetve másik forgatással kapott kettőskúp síkmetszete:



a) Az első esetben: $\sin 60^\circ = \frac{r}{3}$, ebből $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

A keresett térrész térfogata két kúp térfogatának különbsége:

$\frac{r^2\pi}{3} \cdot b = 27\pi \approx 84{,}8\ (\mathrm{cm}^3)$.

b) A második esetben R hosszát kiszámíthatjuk a háromszög területéből:

$\frac{ab\sin 120^\circ}{2} = \frac{cR}{2}$. A c oldal hossza koszinusztétel felhasználásával:

$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$. Innen $c = \sqrt{37}$.

Így $3 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{37} \cdot R$, és ebből $R = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{37}} \approx 1{,}71\ (\mathrm{cm})$.

Ebben az esetben a kettőskúp térfogata: $\frac{R^2\pi}{3} \cdot c = \frac{36}{37} \cdot \pi \cdot \sqrt{37} \approx 18{,}6\ (\mathrm{cm}^3)$.

IV. SÍKBAN, TÉRBEN

Az első feladat síkbeli alakzatok térbeli megfelelőjének a keresésére szólít fel. Nyitva hagytuk a kérdést, hogy mi legyen az analógia alapja, azaz milyen tulajdonságban egyezzen meg a síkbeli és a térbeli alakzat. Így az esetek zömében több lehetőség is fennáll. Elképzelhető, hogy a tanulók között vita alakul ki egyik-másik esetben. Feltétlen várjuk el, hogy a tanulók állításaikat érvekkel támasszák alá! A tanár lehetőleg moderátora legyen a vitának!

1. Az alábbiakban megfogalmaztunk néhány síkbeli problémát. Ezeknek az alakzatoknak mi lehetne a térbeli megfelelője? Fogalmazd meg a síkgeometriai feladattal analóg térgeometriai feladatot! Oldd meg az eredeti, és az így kapott térgeometriai feladatot is!

a) Adott egy α konvex szög. Keresd meg azon körök középpontjainak halmazát az α szög szögtartományában, amelyek érintik a szög mindkét szárát!

Megoldás:

A kör térbeli megfelelője lehet a gömb, hiszen mindkettő azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egy adott ponttól adott, pozitív távolságra vannak, de a kör esetében az adott pontot tartalmazó síkon, a gömb esetében pedig a térben.

A feladatban a keresett ponthalmaz a konvex szög szögfelezője, a szög csúcsának kivételével. Ha a szögszár térbeli megfelelőjének a félsíkot tekintjük, akkor a szögfelezőnek az analóg párja a szögfelezősík (hasonló tulajdonság alapján). Két félsík hajlásszögét konvex szögként definiáljuk.

A feladat térbeli megfelelője:

Adott két, közös határvonalú félsík, amelyek hajlásszöge α. Keresd meg a két félsík által határolt térrészben azon gömbök középpontjainak halmazát, amelyek érintik mind a két félsíkot!

b) Milyen hosszú a b oldalhosszúságú négyzet beírt körének sugara?

Megoldás:

A kör analóg párja a gömb, a négyzeté lehet a kocka. (A négyzet oldalai egyenlő hosszú, egybevágó szakaszok, és bármely két szomszédos oldala derékszöget zár be egymással.

A kocka oldallapjai egybevágó négyzetek, és bármely két szomszédos oldallapja derékszöget zár be egymással.

A négyzet beírt körének analóg párja már nem olyan egyértelmű. Lehet, hogy a kockába írt gömb, de lehet, hogy a kocka éleit érintő gömb, attól függően, hogy a négyzet oldalainak mit feleltetünk meg: a kocka lapjait vagy éleit.

A feladat térbeli megfelelője:

b_1) Milyen hosszú a *b* élű kocka beírt gömbjének sugara?

b_2) Milyen hosszú a *b* élű kocka éleit érintő gömb sugara?

c) Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza *a* és *b*. Mekkora sugarú kör írható a téglalap köré?

Megoldás: A gömb bármilyen síkmetszete kör. Minden téglalap köré írható kör. Minden téglatest köré írható gömb. Ezek alapján a téglalap térbeli megfelelője lehet a téglatest.

A feladat térbeli megfelelője:

Egy téglatest egy csúcsából induló éleinek hossza *a*, *b* és *c*. Mekkora sugarú gömb írható a téglatest köré?

d) Egy háromszög területe *t*, kerülete *k*. Mekkora a háromszög beírt körének *r* sugara?

Megoldás: Ismert összefüggés: $r = \frac{2t}{k}$. Annak alapján, hogy a háromszög a legkevesebb oldalszámú sokszög, a tetraéder pedig a legkevesebb lapszámú poliéder, továbbá minden háromszögnek van beírt köre, és minden tetraéderbe írható gömb, a háromszög térbeli megfelelője lehet a tetraéder. Ekkor a háromszög területének a tetraéder térfogata, a kerületének pedig a tetraéder felszíne felelhet meg.

A feladat térbeli megfelelője:

Egy *V* térfogatú, *A* felszínű tetraéderbe mekkora sugarú gömb írható?

Megoldás:

Jelölje a tetraéder lapjainak területét t_1, t_2, t_3, t_4. Kössük össze a tetraéder csúcsait a tetraéder beírt gömbjének *K* középpontjával. Így négy olyan gúlát kapunk, amelyeknek a tetraéder oldallapjához, mint alaplaphoz tartozó magassága megegyezik beírt gömb r sugarával, és a térfogatuk összege a tetraéder térfogatával megegyező.

$\frac{t_1 \cdot r}{3} + \frac{t_2 \cdot r}{3} + \frac{t_3 \cdot r}{3} + \frac{t_4 \cdot r}{3} = V$, azaz $\frac{r}{3} \cdot (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = V$.

Mivel $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = A$, így $r = \frac{3V}{A}$.

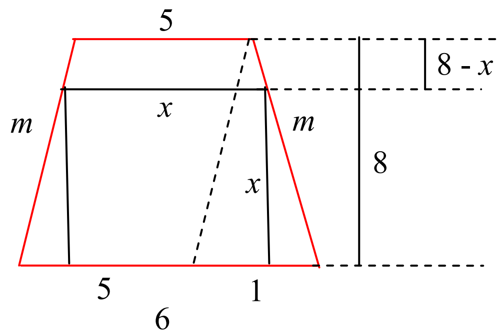
2. Egy egyenes henger alapkörének sugara 3 dm hosszú. A hengerbe beírt lehető legnagyobb térfogatú egyenes körkúp palástjának területe megegyezik a henger palástjának területével. Mekkora a henger magassága?

Megoldás: A hengerbe beírt egyenes körkúp térfogata akkor a lehető legnagyobb, ha alapköre és magassága megegyezik a hengerével. Jelöljük a henger magasságát m-mel. Ekkor a kúp alkotójának hossza $\sqrt{m^2+9}$, és palástjának területe: $\frac{2\cdot 3\cdot \pi \cdot \sqrt{m^2+9}}{2}$, azaz $3\cdot \pi \cdot \sqrt{m^2+9}$. Mivel a két test palástjának területe megegyezik, ezért $2\cdot 3\cdot \pi \cdot m = 3\cdot \pi \cdot \sqrt{m^2+9}$. Ebből $m=\sqrt{3}$ (dm).

3. Egy egyenlő oldalélű, négyzet alapú csonkagúla magassága 8 cm, alap- és fedőlapjának területe rendre 36 cm^2, illetve 25 cm^2. A csonkagúlába egy kockát helyeztünk el úgy, hogy annak egyik oldallapja a csonkagúla alaplapjára illeszkedik, a többi csúcsa pedig a csonkagúla alkotóinak egy-egy pontja. Mekkora a kocka éle?

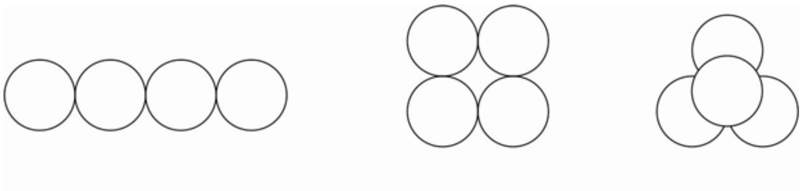
Megoldás: Kétféle síkmetszet látszik célszerűnek: az átlósík, vagy az alaplapok párhuzamos középvonalait tartalmazó sík. Mi az utóbbit választjuk.

Messük el a csonkagúlát (és a beírt kockát) az alap- és fedőlapjára merőleges, azok két-két párhuzamos oldalát felező síkkal! A csonkagúla síkmetszete olyan húrtrapéz, amelynek alapjai 6 cm és 5 cm hosszúak, szárai pedig a csonkagúla oldallapjának magasságával megegyező hosszúságúak. Az x élű kocka síkmetszete egy x oldalú négyzet.



Húzzunk párhuzamost a trapéz egyik szárával a rövidebb alapjának egyik végpontján át! Így két egyenlőszárú, hasonló háromszög keletkezett: alapjuk 1 dm és $x-5$ dm, alaphoz tartozó magasságuk rendre 8 dm és $8-x$ dm hosszú. A hasonlóság miatt $\frac{x-5}{1}=\frac{8-x}{8}$. Ebből $x=\frac{48}{9}$ $(\approx 5{,}3)$. A beírt kocka éle $\frac{48}{9}$ dm hosszú.

4. Az egyik üzletben 4 gumilabdát háromféle kiszerelésben árulnak. Az ábrákon a labdák elrendezése látható a különböző alakú dobozokban.



1. ábra 2. ábra 3. ábra

Az 1. ábra szerinti elrendezés esetében henger, a 2. esetben téglatest, a 3.-ban pedig egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alakú dobozba helyezik el a labdákat. A labdák átmérője 3 cm.

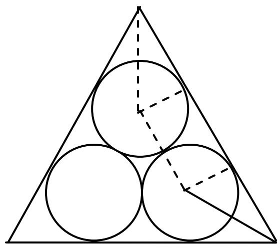
Számítsd ki, hogy az egyes esetekben mennyi papír szükséges az egyes dobozok elkészítéséhez, ha a lehető legkevesebb papírból szeretnénk előállítani az egyes dobozokat! (A veszteségtől és az illesztéshez szükséges ráhagyásoktól eltekintünk.)

Megoldás:

1. ábra: A henger felszíne: $A_h = 2\cdot 1{,}5^2\pi + 2\cdot 1{,}5\cdot\pi\cdot 12 = 40{,}5\pi \approx 127{,}2\,(\text{cm}^2)$.

2. ábra: A téglatest felszíne: $A_t = 2\cdot 36 + 4\cdot 6\cdot 3 = 144\,(\text{cm}^2)$.

3. ábra: A hasáb magassága 3 cm, az alapja pedig olyan szabályos háromszög, amelynek oldalai érintői a három, páronként egymást érintő, 1,5 cm sugarú köröknek.



A kör középpontja, érintési pontja, és a háromszög csúcsa által meghatározott derékszögű háromszögben: $\text{tg}30^\circ = \dfrac{1.5}{x}$, és ebből $x = 1{,}5\cdot\sqrt{3}$. A háromszög hosszabb befogója $1{,}5\cdot\sqrt{3}\ (\text{cm})$ hosszú, így (szimmetria miatt) a háromszög oldalának hossza: $3 + 3\cdot\sqrt{3} = 3\cdot(1+\sqrt{3})\,(\text{cm})$.

A doboz felszíne:

$$A = 2\cdot\frac{9\cdot(1+\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 3(1+\sqrt{3})\cdot 3 = 45 + 45\cdot\sqrt{3} \approx 123\,(\text{cm}^2).$$

5. Egy egyenes fenyőfatörzs magassága 12 m, a vastagabb végénél az átmérő 32 cm, a vékonyabb végénél 20 cm hosszú. Egy faesztergályos a fatörzsből a lehető legnagyobb térfogatú, téglalap alapú egyenes hasáb alakú gerendát szeretne készíteni. Hogyan válassza meg a hasáb méreteit? Mennyi lesz a veszteség?

Megoldás: A csonkakúpba írt hasáb térfogata akkor a legnagyobb, ha az alaplapja a 20 cm átmérőjű körbe írt négyzet, magassága 12 m. A négyzet oldalának hossza $10\sqrt{2}\ (\text{cm})$, így a hasáb térfogata $200 \cdot 1200 = 240\,000\ (\text{cm}^3) = 240\ (\text{dm}^3)$.

A fatörzs térfogata: $\frac{1200\pi}{3} \cdot (16^2 + 10^2 + 16 \cdot 10) = 206\,400\pi \approx 648{,}4\ (\text{dm}^3)$.

A veszteség kb. 408,4 dm^3.

6. Egy sajtdarab alakja szabályos hatszögalapú egyenes gúla. Hányféleképpen és hol vágható el egyetlen, a gúla alapjára merőleges, vagy vele párhuzamos egyenes vágással két egyenlő térfogatú részre?

Megoldás: A szabályos hatszög középpontosan szimmetrikus, így a középpontján áthaladó bármelyik egyenes két egybevágó, tehát azonos területű sokszögre bontja a hatszöget. Mivel a gúla egyenes, így a hatszögön kívüli csúcsán átmenő, az alapra merőleges bármelyik sík két egyenlő térfogatú részre vágja a gúlát.

A gúla alapjával párhuzamosan csak egyféleképpen vágható el a gúla két egyenlő térfogatú részre, mégpedig az alapon kívüli csúcstól mérve, a gúla magasságának $\sqrt[3]{2}$ -ed részével megegyező távolságban. (A levágott, x magasságú gúla hasonló az eredeti, m magasságú gúlához. A hasonlóság $\frac{x}{m}$ arányának a köbe a két gúla térfogatának arányával egyezik meg, ami jelen esetben $\frac{1}{2}$. Így $x = \frac{m}{\sqrt[3]{2}}$.)