MATEMATIKA „C”
12. évfolyam

2. modul
Telek és kerítés

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	Sokszögekről tanultak átismétlése, a sokszögek és a kör részei területének és kerületének kiszámítása.
Időkeret	2 foglalkozás
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika Szűkebb környezetben: Térfogat és felszín kiszámítása. Szögfüggvények alkalmazása derékszögű háromszögben, koszinusztétel Ajánlott megelőző tevékenységek: Sorozatok Ajánlott követő tevékenységek: Testek térfogatának és felszínének kiszámítása.
A képességfejlesztés fókuszai	Mennyiségi következtetés, hosszúság és terület becslése, rendszerezés, metakogníció, kombinatorikai gondolkodásmód, számolási képesség, szövegértés

JAVASLAT

12. osztályban a sík- és térgeometriai feladatok megoldása nagyszerű lehetőséget nyújt a geometriában tanult ismeretek felelevenítésére. Vannak olyan tételek, amelyeket alkalmazhatóságának felismerése általában nem okoz már gondot (Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel), viszont meglepően gyorsan elfelejtik a tanulók pl. a háromszög nevezetes vonalait, köreit, pontjait, és azok tulajdonságait. Ezek az ismeretek csak úgy mélyülnek el, ha a tanuló különböző szövegkörnyezetben kénytelen sokszor alkalmazni azokat. A sokszög és a kör „viszonya” is olyan problémák felvetésére ad lehetőséget, amelyek megoldása során alaposabbá válnak a körrel kapcsolatos tudnivalók.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE

1. foglalkozás: **Így is, úgy is lehet**
2. foglalkozás: **Sokszög, sok szög?**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény**
I. Így is, úgy is lehet			
1.	Háromszöggel kapcsolatos feladatok	Metakogníció, rendszerezés, problémamegoldás, értelmes memória	Feladatlap: 1.a) – e) feladat
2.	Sokszögek területének kiszámítása	Ismeretek elmélyítése, rendszerezése, prezentáció, terület becslése	Feladatlap: 2., 4. feladat
3.	Szerkesztési feladatok	Térlátás, térbeli viszonyok felismerése, mennyiségi következtetés, becslés, rendszerezés, metakogníció	Feladatlap: 3., 5. feladat
4.	A trapéz és a kör	Problémamegoldás, viszonyok felismerése	Feladatlap: 6., 7. feladat
II. Sokszög, sok szög?			
1.	Villámkérdések a szabályos sokszögekről	Értelmes memória, metakogníció	Feladatlap: 1–7. feladat
2.	Kör részei területének kiszámítása		Feladatlap: 9–11. feladat
3.	Sokszögek területének kiszámítása	Ismeretek elmélyítése, rendszerezés	Feladatlap: 8., 12. feladat

I. ÍGY IS, ÚGY IS LEHET

A térgeometriai tanulmányok lehetőséget nyújtanak a síkgeometriai ismeretek felelevenítésére. Erre a foglalkozásra tervezett feladatok elsősorban ezt a célt szolgálják. A feladatokban az ürügy erre a legtöbb esetben egy-egy háromszög, illetve sokszög területének kiszámítása. A tanulók önálló feladatmegoldó munkáját – amikor szükséges - szakítsuk meg a felmerült síkgeometriai problémák alapos megbeszélésével. Érdemes ösztönözni a tanulókat, hogy a füzetük egy külön részébe írják le a már átismételt fogalmakat, és az azokra vonatkozó tételeket.

1. Egy 13 cm sugarú körnek megrajzoltuk az *AB* átmérőjét.

a) Számítsd ki annak az *ABC* háromszögnek az oldalhosszait, amelynek a területe 120 cm^2, és a háromszög körülírt köre az adott kör!

b) Van-e körnek olyan *D* pontja, amelyre az *ABD* háromszög területe 180 cm^2. Ha van, számítsd ki a háromszög oldalainak hosszát!

c) Szerkeszd meg azoknak az *E* pontoknak a halmazát a kör síkjában, amelyekre az *ABE* tompaszögű háromszög területe 195 cm^2!

d) A kör negyed körívén keresd meg az összes olyan *P* pontot, amely esetén az *ABP* háromszög *AB* oldalához tartozó magasságának hossza cm-ben mérve egész szám.
Ha véletlenszerűen választunk ezek közül a *P* pontok közül egyet, mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott *P* ponthoz tartozó *ABP* háromszög területe legalább 39 cm^2 és legfeljebb $91\,\text{cm}^2$?

e) Az a) kérdésben meghatározott *ABC* háromszög beírt körének mekkora a sugara?

Megoldás:

a) Az *ABC* háromszög *AB* oldala 26 cm hosszú, és mivel annak *C* csúcsa a körön van, így Thalész tétele alapján az $ACB\angle$ derékszög. A háromszög befogóit *a*-val és *b*-vel jelölve a feladat szerint:

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2&=26^2\\ \frac{ab}{2}&=120 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a^2+b^2&=676\\ ab&=240 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszert megoldhatjuk behelyettesítő módszerrel is. (Ekkor pl. az a^2-re másodfokú $a^4 - 676a^2 + 57600 = 0$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai a^2-re: 576 és 100. Innen adódik, hogy a háromszög befogói 10 cm és 24 cm hosszúak.

Egy másik lehetséges megoldás: A második egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva, és a kapott egyenlet megfelelő oldalait az első egyenlet megfelelő oldalaihoz hozzáadva, az $a^2 + b^2 + 2ab = 1156$, azaz $(a+b)^2 = 1156$ egyenlethez jutunk. Ha viszont az első egyenlet oldalaiból kivonjuk a kétszerezéssel kapott egyenlet megfelelő oldalait, akkor az $a^2 + b^2 - 2ab = 196$, azaz $(a-b)^2 = 196$ egyenletet kapjuk. Mindkét egyenletnek teljesülnie kell. Így az $\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= 1156\\ (a-b)^2 &= 196\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer pozitív számokból álló megoldását keressük. Ekkor $0 < a+b$, ezért az első egyenletből $a+b=34$ egyenlet adódik csak. Mivel a két egyenlet *a* és *b* értékeire szimmetrikus, ha az a jelöli a háromszög hosszabb befogóját, akkor a második egyenletből az $a-b$-re csak 14 jöhet szóba. Az $\left.\begin{aligned}a+b &= 34\\ a-b &= 14\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása $a = 24$ és $b = 10$.

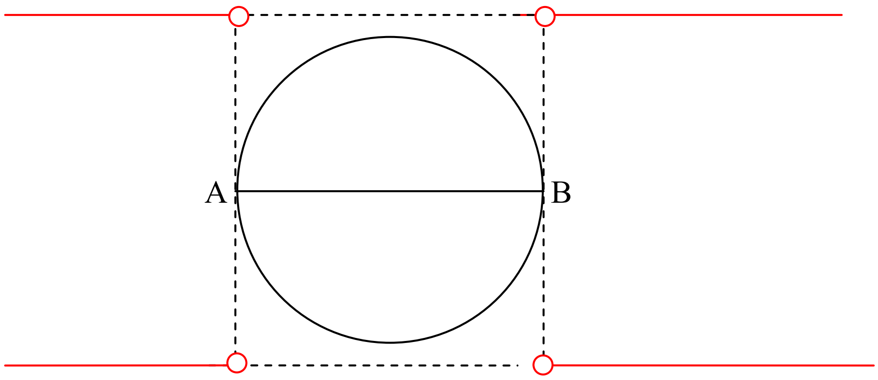
A derékszögű háromszög befogóinak hossza 24 cm és 10 cm.

b) A körbe beírt derékszögű háromszög területe akkor a legnagyobb, ha az *AB* átfogóhoz tartozó magasság a lehető legnagyobb. Ez nyilván akkor teljesül, ha az átfogóhoz tartozó magasság a kör sugarával megegyező hosszú, azaz 13 cm. Ekkor a háromszög területe: $\frac{26 \cdot 13}{2}$, azaz 169 cm^2. Ez kisebb, mint 180 cm^2, így nincs a körnek ilyen *D* pontja.

c) A háromszög *E* csúcsa nem lehet a körön belül, hiszen ekkor a háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kisebb 13 cm-nél, ezért a háromszög területe kisebb 169 cm^2-nél. A háromszög tompaszöge vagy az *A* vagy *B* csúcsnál lehet csak. Az *AB* oldalhoz tartozó magasságot m-mel jelölve: $\frac{26m}{2} = 195$, és ebből $m = 15$ (cm).

Az *AB* egyenestől 15 cm távolságra lévő pontok halmaza a kör síkjában két, *AB* egyenessel párhuzamos egyenes, melyeknek a távolsága az *AB* egyenestől 15 cm.

A keresett ponthalmaz: Az ábra szerinti négy, nyílt kezdőpontú félegyenes.



d) A negyed köríven 13 ilyen pont jelölhető ki. Ha a háromszögek *AB* oldalához tartozó magasságának hosszát *k*-val jelöljük, a háromszögek területe $13k$. A kiválasztott ponthoz tartozó háromszög akkor kedvező, ha $39 \le 13k \le 91$, azaz $3 \le k \le 7$, ahol k pozitív egész számot jelöl, tehát $k \in \{3,4,5,6,7\}$. A kedvező esetek száma 5, az összes lehetséges választások száma 13, így a keresett valószínűség: $\frac{5}{13}$.

e) Ismert, hogy az *a*, *b* és *c* oldalú háromszög *T* területe és a beírt körének *r* sugara között fennálló összefüggés: $T = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$. Így $120 = r \cdot \frac{60}{2}$, azaz $r = 4\ (\text{cm})$.

2. A 2 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög mindhárom oldala fölé olyan négyzetet rajzolunk, amelyik nem tartalmazza a háromszöget. A négyzeteknek a háromszög csúcsától különböző csúcsai egy hatszöget határoznak meg.

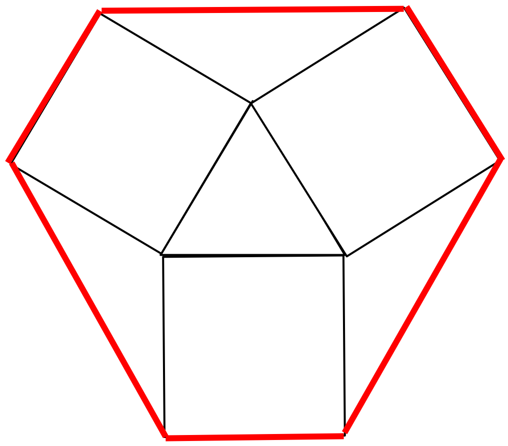
a) Számítsd ki ennek a hatszögnek a területét!

b) A hatszög azon oldalain át, amelyeknek a hossza megegyezik a négyzet oldalának hosszával, egyeneseket rajzolunk. A három egyenes meghatároz egy *DEF* háromszöget. Mekkora ennek a háromszögnek a területe?

c) Ha a *DEF* háromszög minden oldala fölé az előbbihez hasonlóan ismét négyzetet rajzolnánk, akkor a már ismert módon meghatározott hatszögnek mekkora lenne a területe?

Megoldás:

a)

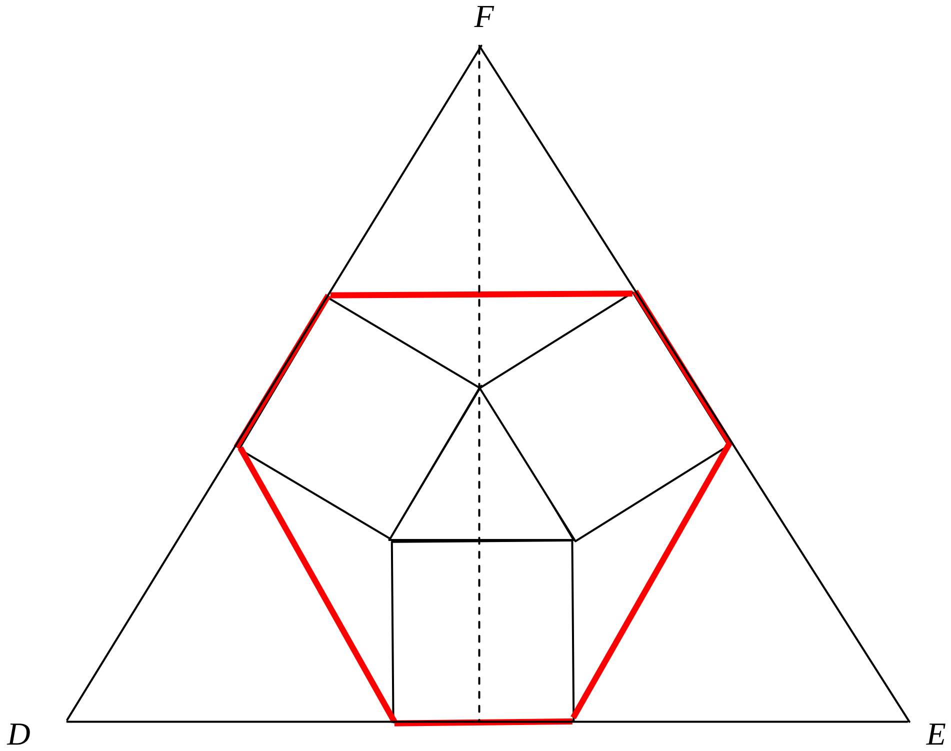


Az *a* oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. A tompaszögű egybevágó háromszögek területe is $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, és ezt bizonyíthatjuk algebrai úton: ($\frac{a^2\sin 60^\circ}{2} = \frac{a^2\sin 120^\circ}{2}$), vagy geometriai bizonyítási móddal: Az egyenlőszárú, 120°-os tompaszögű háromszög a szár hosszával megegyező oldalú szabályos háromszöggel derékszögű háromszöggé egészíthető ki. Ennek a háromszögnek az átfogóhoz tartozó súlyvonala a két háromszög közös oldala, és ismert, hogy a súlyvonal két, egyenlő területű háromszögre bontja a háromszöget.

Az egybevágó négyzetek területe a^2.

Így a hatszög területe: $4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3a^2 = a^2(\sqrt{3}+3)$.

b)



A kapott *DEF* háromszög szabályos (minden szöge 60°-os), így hasonló az eredeti szabályos háromszöghöz. A hasonlóság arányát megállapíthatjuk pl. a két háromszög magasságának arányával. A *DEF* háromszög magasságvonala három szakaszból tevődik össze. Ezek közül kettő hossza $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ és a. A harmadik szakasz egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek a 30°-os szögével szemközti oldalának hossza a, így az átfogója $2a$ hosszú. A *DEF* háromszög magasságának hossza: $3a+\frac{a\sqrt{3}}{2}=a\cdot\frac{6+\sqrt{3}}{2}$.

A hasonlóság aránya: $\dfrac{\frac{a(6+\sqrt{3})}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{6+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+1$, így a *DEF* háromszög

oldalának hossza $a(2\sqrt{3}+1)$, a területe pedig

$$\frac{a^2(2\sqrt{3}+1)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{(13\sqrt{3}+12)\cdot a^2}{4}\ (\approx 8{,}63a^2).$$

c) Az a) feladat eredménye szerint az a oldalú szabályos háromszögesetén kapott hatszög területe a szabályos háromszög oldalhossz négyzetének $(\sqrt{3}+3)$-szerese. Hasonló eljárással azt kapnánk, hogy a *DEF* háromszögből kiindulva (oldalhossza $a(2\sqrt{3}+1)$) létrehozott hatszög területe:

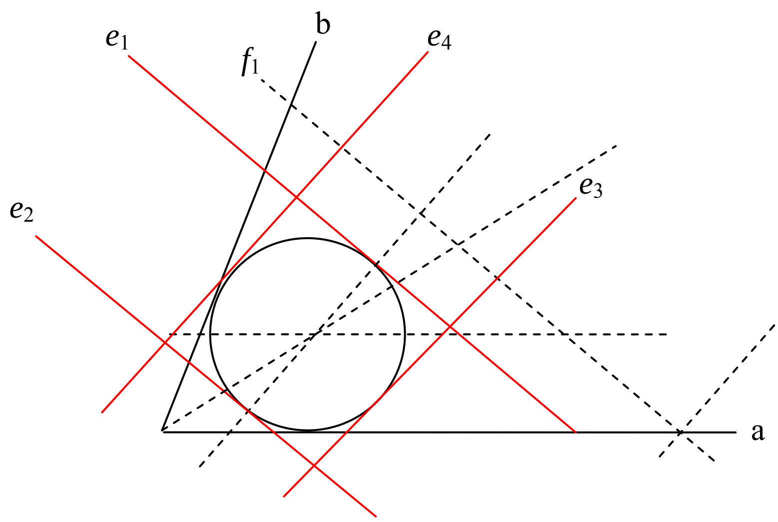
$$\left(a(2\sqrt{3}+1)\right)^2(\sqrt{3}+3)=a^2(25\sqrt{3}+51)\ (\approx 94{,}3a^2).$$

(*Másképpen***:** A b) és c) feladatban alkalmazhattuk volna azt az ismeretet, hogy hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével megegyező.

3. Szerkessz egy 60°-os szöget, és annak szögtartományában egy olyan 2 cm sugarú kört, amely a szög mindkét szárát érinti! Jelöld a szög szárait a-val, illetve b-vel! Szerkessz olyan e egyenest, amely az a szögszárral 45°-os szöget zár be, és az egyenes érinti a 2 cm sugarú kört! Hány ilyen egyenes szerkeszthető?

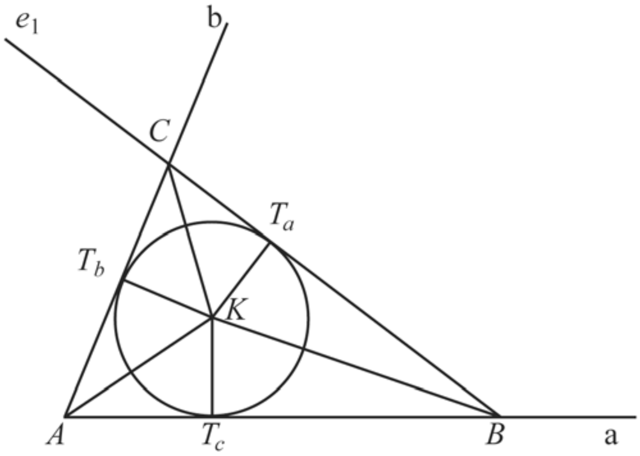
Az a és b szögszárak és az e egyenes által meghatározott lehető legnagyobb háromszögnek hány cm^2 a területe?

Megoldás:



Az ábráról leolvasható a 2 cm-es sugarú kör szerkesztésének menete.

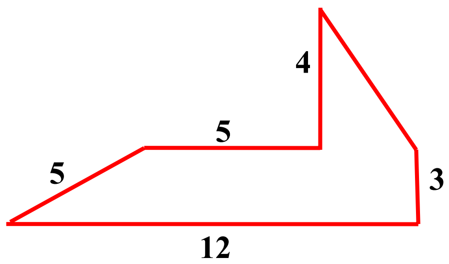
A körnek az a szárral 45°-os szöget bezáró érintője megszerkeszthető pl. úgy, hogy szerkesztünk egy tetszőleges, az a szárral 45°-os szöget bezáró egyenest. Két ilyen egyenes szerkeszthető, az ábrán f_1 és f_2. A kör középpontján átmenő, az f_1 egyenesre merőleges egyenes kimetszi a körön a keresett érintő érintési pontját, és e ponton átmenő, az f_1 egyenessel párhuzamos egyenes lesz a kör érintője. Az f_2 egyenessel megismételhető az eljárás. A szerkesztésből következik, hogy mindkét esetben két ilyen érintő szerkeszthető, tehát összesen négy (e_1, e_2, e_3 és e_4). Az e_3 és az e_4 egyenes nem metszi a b, illetve az a szögszárat, és e_1 és e_2 közül nyilván e_1 hozza létre a legnagyobb területű háromszöget, így ezt a területet számoljuk ki.



Jelöljük a kör középpontját K-val. Ha kiszámítjuk az ABC háromszög két oldalának hosszát, a területe könnyen meghatározható, hiszen a háromszög minden szöge ismert (60°, 45° és 75°). A K pont a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja. A külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így pl. az AT_cK derékszögű háromszögből $AT_c = AT_b = \frac{2}{tg30^\circ} = 2\sqrt{3}$. A KCT_b derékszögű háromszögben $CT_b = \frac{2}{tg37{,}5^\circ} \approx 2{,}61$, a KBT_c derékszögű háromszögben pedig $BT_c = \frac{2}{tg22{,}5^\circ} \approx 4{,}83$, így az ABC háromszög AB illetve AC oldalának hossza cm-ben $AB \approx 8{,}29$ és $AC \approx 6{,}07$. Ezekkel az adatokkal $T = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} \approx 21{,}8$.

Az ABC háromszög területe kb. 21,8 cm^2.

4. Az ábrán háromszög alapú egyenes hasáb alakú építőkockákból felépített vár oldallapja látható. (Az ábrán látható számok az építőkocka egy-egy élének cm-ben mért hosszát jelölik.)

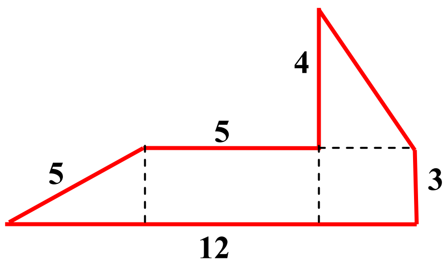


a) Mekkora a vár oldallapjának területe?

b) Rajzold le, milyen építőkockákból épülhetett fel a várnak ez a fala, ha tudjuk, hogy a vár oldallapja 4 építőkockából jött létre?

Megoldás:

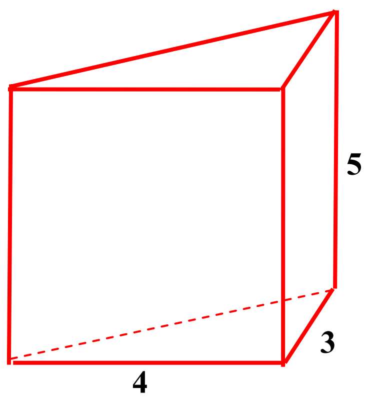
a)

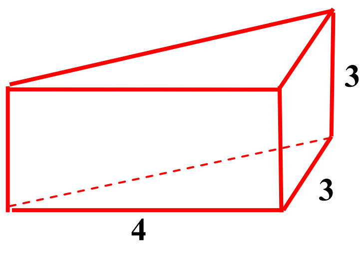


Az ábrán balról jobbra haladva, a derékszögű háromszög rövidebb befogója 3 cm, a hosszabb 4 cm hosszú, így területe 6 cm^2. A téglalap oldalai 5 és 3 cm hosszúak, területe 15cm^2. A 12c m hosszú oldal első két szakaszának hossza 4 és 5 cm, így a harmadik szakasz 3 cm hosszú, tehát a második téglalap négyzet, terülte 9 cm^2. A felette lévő derékszögű háromszög rövidebb befogójának hossza 3cm, így egybevágó a másik háromszöggel, területe 6 cm^2.

A vár oldallapjának területe 36 cm^2.

b) Két fajtából felépíthető az oldallap:





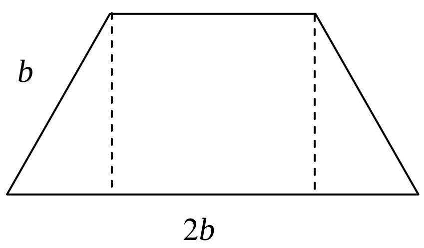
5. Egy mozaikkép háromféle olyan négyszöglapból készült, amelyek mindegyikének a hegyesszöge 61°-os. A háromféle lap a következő: egy *b* oldalhosszúságú rombusz; egy olyan húrtrapéz, amelynek szára *b*, a hosszabbik alapja $2b$ hosszú; és olyan paralelogramma, amelynek az egyik oldala *b*, a másik $3b$ hosszú.

a) Mekkora a három elem területének aránya?

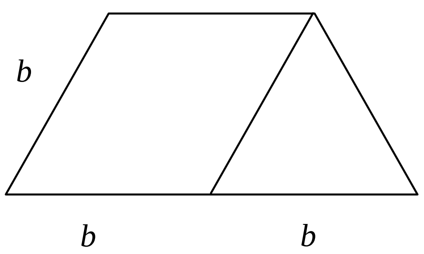
b) Mindhárom elem, és egyetlen b oldalhosszú egyenlő oldalú háromszöglap felhasználásával rakj ki hézagmentesen egy $6b$ oldalhosszúságú, szabályos háromszög alakú „képet”! (Mindhárom négyszöglapból tetszőleges mennyiség áll rendelkezésedre.) Készíts vázlatos rajzot az elkészült képről!

Megoldás:

a)



A húrtrapéz hegyesszöge 60°, így a szárak alapra eső merőleges vetülete $\frac{b}{2}$ hosszú, tehát a rövidebb alap is *b* hosszú.



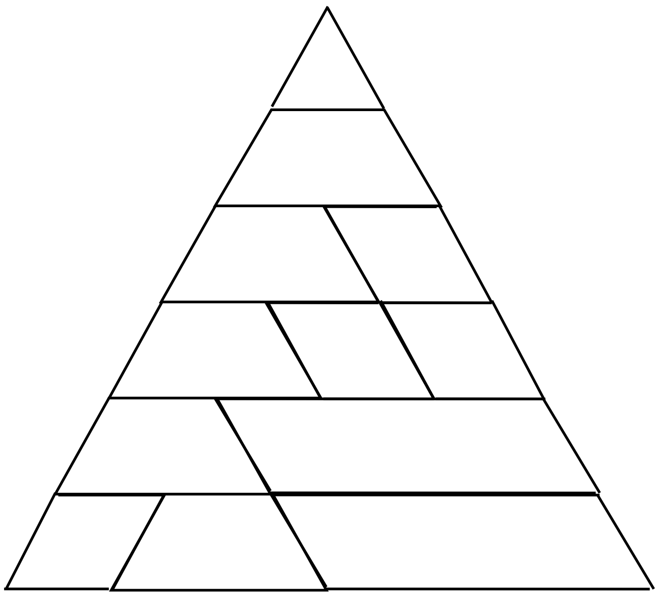
A trapéz szárával párhuzamos egyenes egy *b* oldalhosszúságú rombuszra és egy *b* oldalú szabályos háromszögre bontja a trapézt. A rombusz rövidebb átlója két, *b* oldalú szabályos háromszögre bontja a rombuszt, így a trapéz területe a rombusz területének 1,5-szerese.

A paralelogramma három egybevágó, *b* oldalú rombuszra vágható, így a területe 3-szorosa a rombuszénak.

A rombusz, a húrtrapéz és a paralelogramma területének aránya rendre 2:3:6.

b)

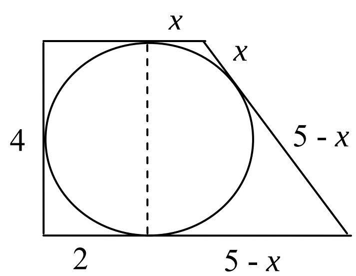
A „kép” többféle módon is kirakható az adott elemekkel. Íme egy lehetőség:



6. Egy derékszögű trapéz minden oldala érint egy olyan kört, amelynek a sugara 2 cm hosszú. A trapéz alapjához nem derékszögben hajló szárának hossza 5 cm.

Mekkora a trapéz kerülete?

Megoldás:



A kör külső pontjából húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak, így az érintési pontig terjedő szakaszokat jelölhetjük az ábra szerint. A trapéz tompaszögének csúcsából meghúzott magassága 4 cm hosszú, és az így létrejött derékszögű háromszög átfogója 5 cm, tehát a rövidebb befogója 3cm hosszú. Az ábra szerint ennek a befogónak a hossza $5-2x$ -szel jelölhető. Így $5-2x=3$, és ebből $x=1$.

A trapéz kerülete 18 cm.

A 6. és 7. a) feladat megoldható az érintőnégyszögek tételének alkalmazásával is, de mivel ennek a tételnek az ismerete nem része a középszintű érettségi vizsgakövetelményének, ezért nem ezt a megoldási módot alkalmaztuk.

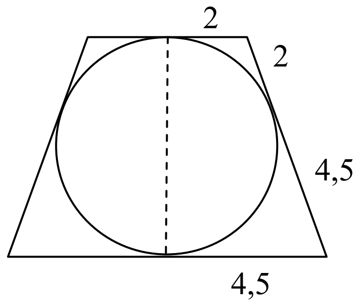
7. Egy húrtrapézba kör írható. A trapéz alapjainak hossza 54 cm és 6 cm.

a) Hány cm hosszú a trapéz szára?

b) Mekkora a beleírható kör sugara?

Megoldás:

a) A trapéz szimmetriatengelye felezi az alapokat, és mivel a kör külső pontjából húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak, a kör érintési pontja a trapéz szárát 2 cm és 4,5 cm hosszú szakaszokra bontja. A trapéz szárai 6,5 cm hosszúak.



b) A trapéz magassága $2r$, ahol r a trapézba írható kör sugara. A tompaszög csúcsából meghúzott magasság által létrehozott derékszögű háromszög átfogója 6,5 cm hosszú, a befogói pedig $2r$ és 2,5 cm. Így $4r^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2$, és ebből $r = 3$.

A trapéz beírt körének sugara 3 cm hosszú.

II. SOKSZÖG, SOK SZÖG?

Az ismétlő kérdések megoldása során feleleveníthetik a tanulók a szabályos sokszögekkel kapcsolatos ismereteiket. Hagyjuk, hogy a tanulók önállóan próbálkozzanak a feladatok megoldásával, és csak miután minden tanuló kialakított valamilyen választ az összes kérdésre, akkor foglaljuk össze együtt a szükséges ismereteket, és beszéljük meg a feladatok megoldását.

Ismétlő kérdések sokszögekről:

1. Hány oldala van a sokszögnek, ha átlóinak a száma a) 65; b) 29?

Megoldás:

a) 13, hiszen az n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$, most $\frac{n(n-3)}{2}=65$, azaz $n(n-3)=130=13\cdot 5\cdot 2$, és a 130 csak egyféleképpen bontható fel két olyan pozitív egész szám szorzatára, amelyek különbsége 3. (Vagy: az $n(n-3)=130$ másodfokú egyenlet egyetlen pozitív egész megoldása a 13.)

b) Nincs ilyen sokszög, mert $n(n-3)=58$, és az 58 nem bontható két olyan pozitív egész szám szorzatára, amelyek különbsége 3.

2. Hány csúcsa van a szabályos sokszögnek, ha a szomszédos szimmetriatengelyeinek hajlásszöge $60°$?

Megoldás: Szabályos sokszög szomszédos szimmetriatengelye közül az egyik a sokszög csúcsán átmenő egyenes, a másik a csúcsból induló oldal felezőmerőlegese. Ha e két egyenes hajlásszöge 60°, akkor a sokszög belső szögének fele 30°-os, így a belső szöge 60°. Tehát a sokszög szabályos háromszög, annak 3 csúcsa van.

3. Hány csúcsa van a szabályos sokszögnek, ha a szomszédos szimmetriatengelyeinek a hajlásszöge $7°$?

Megoldás: Az előző feladat gondolatmenetét alkalmazva, a szabályos sokszög belső szöge $2\cdot 83^{\circ}=166^{\circ}$-os.

A n oldalú szabályos sokszög szimmetria-középpontját a csúcsokkal összekötve n db egyenlőszárú háromszöghöz jutunk, amelyeknek az alapon fekvő szögeit $\frac{\alpha}{2}$ - lel jelölve, a sokszög α belső szögére $\frac{n\cdot 180^\circ-360^\circ}{n}$, azaz $180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$ adódik. A jelen esetben $180^\circ-\frac{360^\circ}{n}=166^\circ$. Ennek az egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.

Nincs ilyen szabályos sokszög.

4. Hány oldala van annak a szabályos sokszögnek, amelyiknek egyik belső szöge 165°?

Megoldás: Megoldhatjuk úgy is, hogy a szimmetria-középpontot a sokszög két szomszédos csúcsával összekötő szakaszok hajlásszöge 15°-os, és mivel $24\cdot 15^\circ=360^\circ$, a sokszögnek 24 csúcsa van.

5. Hány oldalú az a szabályos sokszög, amelyiknek egyik belső szöge 17-szerese egyik külső szögének?

Megoldás: A szabályos sokszög külső szögei is egyenlők egymással, és bármelyik belső és külső szög összege az egyenesszög. Ha a külső szög mértéke α, akkor a belső szögé 17α, és $\alpha+17\alpha=180^\circ$, azaz $\alpha=10^\circ$. A szabályos sokszög külső szögének mértéke meggyezik azoknak a szakaszoknak a hajlásszögével, amelyek összekötik a szimmetria-középpontot a sokszög két szomszédos csúcsával. Mivel $36\cdot 10^\circ=360^\circ$, a sokszög 36 oldalú.

6. Egy szabályos sokszög egyik oldalának hossza π egység, és egyik belső szöge kisebb, mint a külső szöge. Mekkora a sokszög kerülete és területe?

Megoldás: Ha a szabályos sokszög belső szöge α, akkor a külső szöge $180^\circ-\alpha$. Tudjuk, hogy $\alpha<180^\circ-\alpha$, így $\alpha<90^\circ$. Mivel a szabályos sokszögek közül csak a szabályos háromszög belső szöge kisebb a derékszögnél, így a sokszög kerülete 3π egység, a területe pedig $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{4}$ területegység.

7. Egy szabályos sokszög egyik oldala: $2\sqrt{3}$, és egyik belső szöge egyenlő egyik külső szögével. Hány területegység a sokszög területe?

Megoldás: Az α mértékű belső szög megegyezik a $180^\circ - \alpha$ mértékű külső szöggel, így $\alpha = 90^\circ$. A sokszög négyzet, területe 12 területegység.

8. Egy konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Melyik állítás igaz?

A: Oldalai egyenlők. **B:** Húrsokszög **C:** Szögei páronként egyenlők.

D: Van olyan kör, amelyet a hatszög minden oldala érint.

Megoldás: A *C* állítás igaz. Ha a konvex sokszög *P* és *Q* csúcsából induló oldalak páronként párhuzamosak, akkor a *P* és *Q* csúcsnál lévő szögek tükrösek a *PQ* szakasz felezőpontjára, tehát a két szög egyenlő.

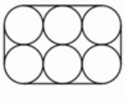
További feladatok

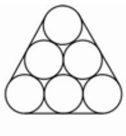
9. Egy 4 cm sugarú kör *K* középpontjától 6,1 cm távolságra lévő *P* pontból meghúztuk a kör érintőit. Mekkora annak a körcikknek a területe, amelyet a két érintési pontot összekötő rövidebb körív határol?

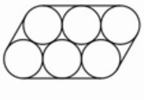
Megoldás: A *KPE* derékszögű háromszögben , ahol E az egyik érintési pont, $EKP_\angle = \alpha$ jelölés mellett $\cos\alpha = \frac{4}{6{,}1}$, és ebből $\alpha \approx 49^\circ$. A kérdéses körcikk középponti szöge 98°. $\frac{t}{4^2\pi} = \frac{98^\circ}{360^\circ}$, ahol *t* a körcikk területe. Ebből $t \approx 13{,}7\ (\mathrm{cm}^2)$.

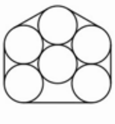
10. Hat darab henger alakú konzervdobozt (alapkörük átmérője 10 cm) hatféle módon kötöztünk össze nyújthatatlan madzaggal (az ábrák felülnézeti képeket mutatnak). Melyik esetben volt szükség a lehető legrövidebb madzagra, ha veszteséggel egyik esetben sem számolunk?

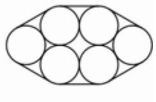

1. ábra


2. ábra


3. ábra


4. ábra


5. ábra


6. ábra

Megoldás:

1. ábra: Az érintőszakaszok hossza: $2\cdot 50$; a körívek hossza: $2\cdot 5\pi$. A szükséges madzag hossza: $100+10\pi$.

2. ábra: Az érintőszakaszok hossza: $2\cdot 20+2\cdot 10$; a körívek összhossza: $4\cdot\frac{2\cdot 5\cdot\pi}{4}$.

A szükséges madzag hossza: $60+10\pi$.

3. ábra: Az érintőszakaszok hossza: $3\cdot 20$; a körívek összhossza: $3\cdot\frac{2\cdot 5\cdot\pi}{3}$. A szükséges madzag hossza: $60+10\pi$.

4. ábra: 2 db 120°-os és 2 db 60°-os középponti szögű ív és 4 érintőszakasz határolja.

Az érintőszakaszok hossza: $2\cdot 20+2\cdot 10$; a körívek összhossza: $2\cdot\frac{2\cdot 5\cdot\pi}{3}+2\cdot\frac{2\cdot 5\cdot\pi}{6}=2\cdot 5\cdot\pi$. A szükséges madzag hossza: $60+10\pi$.

5. ábra: 3 db 60°-os és 2 db 90°-os középponti szögű ív és 4 db 10 cm-es és egy olyan érintőszakasz határolja, amely annak az egyenlőszárú háromszögnek az alapja, amelynek szára 10 cm hosszú, szárszöge 120°-os. Ennek hosszát kiszámíthatjuk pl. a koszinusztétel alkalmazásával:

$x^2=10^2+10^2-200\cos 120^\circ$.

Az érintőszakaszok hossza: $4\cdot 10+10\sqrt{3}$; a körívek összhossza: $2\cdot 5\cdot\pi$. A szükséges madzag hossza: $40+10\sqrt{3}+10\pi$.

6. ábra: 6 db 10 cm hosszú érintőszakasz, és 2 db 120°-os továbbá 4 db 30°-os középponti szögű ív határolja.

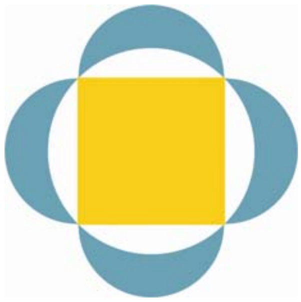
Az érintőszakaszok hossza: $6\cdot 10$; a körívek összhossza: $2\cdot 5\cdot\pi$. A szükséges madzag hossza: $60+10\pi$.

Mivel $40+10\sqrt{3}<60<100$, így az 5. ábra szerinti elrendezés esetében szükséges a legrövidebb madzag.

Megjegyzés: Mindegyik esetben a körívek hosszának összege egy teljes kör kerülete. Ezt megmutathatjuk úgy is, hogy miközben a síkidomot körbejárjuk az érintők ill. az ívek mentén, eközben összesen 360°-os elfordulás történt.

11. Mark Twain híres könyvének, a Tom Sawyer kalandjainak ismert jelenete a kerítésfestés. Tomot megbízza Polly néni, hogy fesse le a kerítésüket. (Ez természetesen Tom egy csínytevésének volt a büntetése.) Tom ügyesen kedvet csinál barátainak a festéshez, s azok boldogan nekilátnak helyette elvégezni a munkát.

Ehhez hasonló eset ma is megtörténhet: Anna, szabadidejében, a zsebpénze kiegészítése miatt munkát vállalt. Előre gyártott emblémákat kellett befestenie kék, illetve mustársárga színűre, az ábrának megfelelően.



Anna barátja, Jóska kíváncsian nézte az emblémákat. „Te, ezek a hosszabb ívek, a négyzet oldalai fölé rajzolt félkörök, a kisebbek pedig a négyzet középpontjából félátlónyi sugárral rajzolt negyed körívek! Gyorsabban végeznél, ha én is festenék! Az íveket hadd fessem én, így én mindig kisebb felületet festek be, mint te!" Anna megengedte.

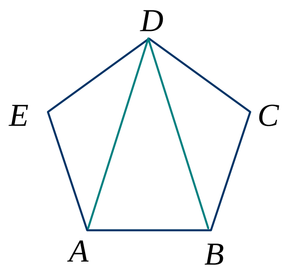
Igaza volt Jóskának? Az emblémákon valóban a kisebb területű rész festését vállalta el?

Megoldás: A négyzet oldalát *a*-val jelölve egy „holdacska" területe:

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi-\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\pi-\frac{a^2}{4}\right]=\frac{a^2}{4}$. A négy „holdacska" területének összege a^2.

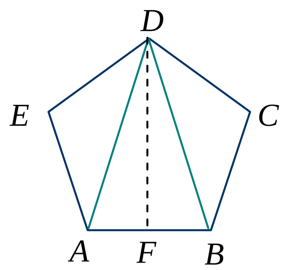
Jóskának nem volt igaza, a két terület egyenlő.

12. Egy 6 cm oldalhosszú *ABCDE* szabályos ötszögnek a *D* csúcsából meghúztuk két átlóját. Mekkora a területe az *ABD*, illetve a *BCD* háromszögnek?



Megoldás: Az AED szög 108°-os, $EDA_\angle = CDB_\angle = 36^\circ$,

$ADB_\angle = 36^\circ$.



A *DFB* derékszögű háromszögben $DF=\frac{3}{tg18^\circ}\approx 9{,}233$ (cm). Az *ABD* háromszög területe kb. 27,7 cm^2.

A *BCD* háromszög területe: $\frac{6^2\sin 108^\circ}{2}\approx 17{,}1$ (cm^2).