MATEMATIKA „C”
12. évfolyam

1. modul
Sorban, egymás után

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	Sorozat fogalma, ábrázolása, nevezetes sorozatokkal való megismerkedés. A mindennapi életben előforduló gazdasági matematika kérdések megválaszolása. A bankok reklámszövegeinek értelmezése.
Időkeret	5 foglalkozás (5×45 perc)
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Szűkebb környezetben: Függvények ábrázolása, százalékszámítás, Ajánlott megelőző tevékenységek: Területszámítás Ajánlott követő tevékenységek: Tanévvégi ismétlés
A képességfejlesztés fókuszai	Szövegértés, szövegértelmezés, deduktív és induktív következtetés, kombinativitás, probléma-érzékenység, összefüggések felismerése, mennyiségi következtetés

AJÁNLÁS

A középiskolás matematika tananyag témakörei közül talán a sorozatoknak van a legtöbb gyakorlati alkalmazási területe. Elsősorban a pénzbefektetésre, kölcsön felvételre, biztosításra, reklámszövegek értelmezésére gondolunk. A 18 éves korú fiataloknak el kell tudni igazodniuk ezeken a területeken. Természetesen a modul a délelőtti matematika órán tanult ismeretek elmélyítését is szolgálja. A cél az, hogy a tanulókat eljuttassuk a sorozatok tulajdonságainak, a számtani és mértani sorozat definíciójának, és a rájuk vonatkozó összefüggéseknek alapos és alkalmazásra érett ismeretéhez.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE

1. foglalkozás: **Kezdőlépések**
2. foglalkozás: **Számtani?**
3. foglalkozás: **Lépjünk egyet-kettőt!**
4. foglalkozás: **Mértani?**
5. foglalkozás: **Tudáspróba**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Kezdőlépések			
1	Sorozat megadása szöveggel, képlettel.	Szövegértés, szövegértelmezés, ábrázolás, deduktív következtetés	Feladatlap: 1–6. feladat
2	A sorozatok néhány tulajdonsága.	Összefüggések felismerése	Feladatlap: 7–11. feladat
II. Számtani?			
1	A számtani sorozat definíciójának alkalmazása.	Ismeretek elmélyítése, rendszerezés, számolási képesség, szövegértés, szövegértelmezés	Feladatlap: 1–7. feladat
2	A számtani sorozat *n*-edik tagjának, és az első *n* tag összegének kiszámítása.	Szövegértés, szövegértelmezés, számolási képesség	Feladatlap: 8–11. feladat
III. Lépjünk egyet-kettőt!			
1	Szöveges feladatok számtani sorozatra.	Szövegértés, szövegértelmezés, deduktív és induktív következtetés, összefüggések felismerése, mennyiségi következtetés	Feladatlap: 1–6. feladat
2	Az első *n* tag összegének kiszámítására vonatkozó szöveges feladatok.	Ismeretek elmélyítése, szövegértés, szövegértelmezés, összefüggések felismerése, mennyiségi következtetés	Feladatlap: 7–12. feladat

IV. Mértani?			
1	Villámkérdések a mértani sorozat definíciójának alkalmazására, különböző adatok alapján a sorozat rekonstruálása.	Szövegértés, szövegértelmezés, deduktív és induktív következtetés, összefüggések felismerése, mennyiségi következtetés, értelmes memória	Feladatlap: 1–10. feladat
2	Kamatos kamatszámítási feladatok.	Szövegértés, szövegértelmezés, probléma-érzékenység, számolási képesség, összefüggések felismerése, mennyiségi következtetés	Feladatlap: 11–18. feladat

V. Tudáspróba			
1	1893-ban megjelent érettségi feladatokból néhány.	Szövegértés, szövegértelmezés	Feladatlap: 1–3. feladat
2	Teszt. A témakörben szerzett ismeretek felmérése.	Rendszerezés, szövegértés, szövegértelmezés, probléma-érzékenység, számolási képesség, összefüggések felismerése, mennyiségi következtetés, metakogníció	Tesztlap: 1–10. feladat

I. KEZDŐLÉPÉSEK

Módszertani megjegyzés: A foglalkozás feladatanyaga a matematika tanórán tanultak elmélyítését szolgálja, ezért célszerű akkorra időzíteni ennek a modulnak a felhasználását, amikor a tanulók már megismerkedtek a sorozat fogalmával, és annak néhány tulajdonságával. A feladatok tetszőleges sorrendben tűzhetők ki. Az első foglalkozáson érdemes párban foglalkoztatni a tanulókat, hogy a „frissen tanult” ismeretanyag alkalmazása során felmerült kérdéseiket először egymással tudják megvitatni.
A feladatok megoldásának szerves része a kapott eredmények ellenőrzése. A feladatok megoldásának leírásában nem szerepel az ellenőrzés, de a foglalkozáson mindenképpen várjuk el a tanulóktól, hogy eredményeiket valamilyen formában ellenőrizzék!

1. Döntsd el, hogy az alábbi függvények közül melyek számsorozatok! A számsorozatoknak számítsd ki a 11-edik és a 100-adik tagját!

f függvény: Ez a függvény minden pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám 6-tal való osztásakor fellépő maradékát.

g függvény: Ez a függvény minden Budapesten élő emberhez hozzárendeli annak életkorát. (Az életkort években mérve, egész számra kerekítve adjuk meg.

h függvény: Minden sokszöghöz hozzárendeli az átlóinak számát.

k függvény: Minden sokszög oldalszámához hozzárendeli a sokszög átlóinak számát.

m függvény: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ ha } x \text{ páros szám} \\ x, \text{ ha } x \text{ páratlan szám} \end{cases}$

Megoldás:

Az *f* függvény számsorozat, mert minden pozitív egész számhoz számot rendel. A 11-hez 5-öt rendel, mert a 11-et 6-tal osztva 5 maradékot kapunk. A sorozat 100-adik tagja 4, mert a 100 hatos maradéka 4.

A *g* függvény nem számsorozat, mert a függvény értelmezési tartománya a Budapesten élő emberek halmaza, és nem a pozitív egész számok halmaza.

A *h* függvény nem számsorozat, mert a függvény értelmezési tartománya a sokszögek halmaza.

A *k* függvény számsorozat, mert az értelmezési tartománya a 3, és az annál nagyobb egész számok halmaza, tagjai egész számok. Mivel $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$, ahol $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{Z}$, így $a_{11} = 44$ és $a_{100} = 4850$.

Az m függvény számsorozat, mert minden pozitív egész számhoz valós számot rendel. A 11-edik tagja 11, a 100-adik tagja pedig 1.

2. Legyen egy sorozat első 5 tagja a 19 932 ötjegyű számnak az öt számjegye, a sorozat további tagjainak mindegyike pedig legyen 1. Hány ilyen sorozat képezhető?

Megoldás: Annyi sorozat képezhető, ahány permutációja van ennek az öt számjegynek. A permutációk száma: $\frac{5!}{2!}=60$, tehát 60 ilyen sorozat képezhető.

3. Legyen $a_n = 60 \cdot \sin n^\circ$, ahol n° az n fokos szöget jelöli, $b_n = 2 \cdot 3^{n-25}$, $c_n = 100 - 2(n-3)$ és $d_n = (-1)^{n-1} \cdot \sqrt{n+6}$.

a) Döntsd el, hogy a 30 tagja-e az (a_n), (b_n), (c_n) és (d_n) sorozatok valamelyikének! Ha igen, hányadik tagja?

b) Számítsd ki a sorozatok 30-adik tagját!

c) Van-e a (b_n) sorozatnak 54-gyel osztható tagja?

Megoldás:

a) $30 = 60 \cdot \sin n^\circ \iff \sin n^\circ = \frac{1}{2}$, ahol $n \in Z^+ \iff n^\circ = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ vagy $n^\circ = 150^\circ + r \cdot 360^\circ$, ahol k és r tetszőleges természetes számot jelöl.

Az (a_n) sorozatnak tehát tagja a 30, mégpedig a $30^\circ + k \cdot 360^\circ$, ha $k = 0$.

A (b_n) sorozatnak nem tagja a 30, mert a 3-nak nincs olyan egész kitevőjű hatványa, amely 15-tel egyenlő.

A (c_n) sorozatnak tagja a 30, mert $30 = 100 - 2(n-3) \iff n = 38$.

A (d_n) sorozatnak nem tagja a 30, mert pozitív n esetén $\sqrt{n+6} > 0$, és $(-1)^{n-1}$ páros n esetén -1, páratlan n-re 1, és $\sqrt{n+6} = 30 \iff n = 894$, ezért $d_{894} = -30$.

b) $a_{30} = 60 \cdot \sin 30^\circ = 30$,

$b_{30} = 2 \cdot 3^{30-25} = 2 \cdot 3^5 = 486$,

$c_{30} = 100 - 2(30-3) = 46$,

$d_{30} = (-1)^{30-1} \cdot \sqrt{30+6} = -6$.

c) $54 = 2 \cdot 3^3$, így a (b_n) sorozat 28-adik tagja, és az összes ennél nagyobb sorszámú tagja osztható 54-gyel.

4. Egy 2 dm oldalélű tömör kockát három vágással 8 egybevágó kockára vágunk szét. A kapott kockák mindegyikén megismételjük az eljárást. Majd újból és újból a kapott kis kockák mindegyikéből 3 vágással 8 egybevágó kockát hozunk létre.

a) Az ötödik elvágások után összesen hány kis kockánk lesz?

b) Mekkora a térfogata az ötödik elvágáskor kapott kis kockáknak?

Megoldás:

A kocka úgy vágható 3 vágással 8 egybevágó kockára, hogy először a kocka egyik lapjára merőlegesen, a lap középvonala mentén vágjuk el, majd másodszorra ugyanennek a lapnak a másik középvonala mentén ismét a lapra merőlegesen vágjuk el, és végül e lappal párhuzamosan, e lapra merőleges lap középvonala mentén vágjuk el.

a) Minden alkalommal a már meglévő kockáink száma 8-szorosára változik, tehát az ötödik alkalommal $8^5 = 32\,768$ kis kockánk lenne.

b) Az eredeti kocka térfogata 8 dm^3. Az ötödik alkalommal kapott kis kockák térfogata $\frac{8}{8^5} = \frac{1}{8^4} = \frac{1}{4096} \approx 0{,}000244\,(\text{dm}^3)$ lenne.

5. Egy irodában az év végi prémiumokra fordítható teljes összeg 1 millió forint. Az iroda vezetője rangsort készített azokról a munkatársairól, akiknek prémiumot szeretne adni. Úgy gondolta, hogy a rangsorban elsőként állónak $100\,000$ Ft-ot adna, a második helytől kezdve pedig minden, a rangsorban szereplő dolgozó ugyanakkora összeggel, $10\,000$ Ft-tal kapna kevesebbet, mint a rangsorban előtte álló dolgozó.

a) Legfeljebb hány dolgozó neve szerepelhetett a rangsorban?

b) Ilyen módon legfeljebb mekkora összeget tudott szétosztani?

c) Mekkora összeget adjon az első dolgozónak, hogy a teljes összeg kiosztható legyen?

Megoldás:

a) Mivel az első $100\,000$ Ft-ot, és minden további $10\,000$ Ft-tal kevesebbet kapna, továbbá a rangsorban szereplő minden dolgozó kap prémiumot, ezért az utolsó is kapna legalább $10\,000$ Ft-ot, tehát legfeljebb 10 dolgozó neve szerepelhetett a listán.

b) Mivel $100\,000+90\,000+...+20\,000+10\,000=550\,000$, így összesen 550 000 Ft-ot tudott szétosztani.

Megjegyzés: Mivel most még nem akarjuk használni a számtani sorozat összegképletét, ezért más módot alkalmazunk a következő kérdés megválaszolására.

c) Az elsőnek x Ft-ot, a másodiknak $x-10\,000$, a harmadiknak $x-2\cdot 10\,000$, és így tovább, a tizediknek $x-9\cdot 10\,000$ Ft-ot adva, ezek összege 1 millió forint.

$10x-10\,000\cdot(1+2+...+9)=10^6$. Ebből $x=145\,000$. Tehát a rangsor elsőjének 145 000 Ft-ot kellene adnia.

6. Egy kis bábut mozogatunk a koordinátasíkon. A bábu kezdő helyzetét megadó pont koordinátái $(1;0)$. Innen, az első lépésben felfele (az *y* tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban) mozgatjuk 1 egységgel, azután jobbra (az *x* tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban) mozdítjuk el 2 egységgel. A harmadik lépésben felfele 3 egységgel, ezután ismét jobbra 4 egységgel,és így tovább, mindig váltakozva fel és jobbra, és minden lépésben az elmozdulás nagysága 1 egységgel hosszabb a megelőző lépéséhez képest.

a) Határozd meg, hogy a tizedik lépésben hová kerül a bábu!

b) Az első 10 elmozdulás hosszának mekkora az összege?

c)* Add meg képlettel, hogy az *n*-edik lépés után (*n* pozitív egész számot jelöl) hogyan számítható ki a bábu helyzetét megadó pont első koordinátája!

d)* Add meg képlettel, hogy az *n*-edik lépés után (*n* pozitív egész számot jelöl) hogyan számítható ki a bábu helyzetét megadó pont második koordinátája!

Megoldás:

a) Az *x* tengellyel párhuzamos elmozdulások hossza rendre 2, 4, 6, 8 és 10. Az y tengellyel párhuzamos elmozdulások hossza rendre 1, 3, 5, 7 és 9. Mivel a bábu kezdetben az $(1;0)$ koordinátájú pontban volt, a tizedik lépésben az $(1+2+4+6+8+10\,;1+3+5+7+9)$, azaz a $(31;25)$ koordinátájú pontba kerül a bábu.

b) Az első tíz elmozdulás hosszának összege: $1+2+3+...+9+10=55$, tehát 55 egység hosszú utat tett meg.

A feladat c) kérdésének megválaszolásához gyűjtsenek tapasztalatot a tanulók! Vizsgálják meg, hogy hogyan számítható ki a pont első koordinátája 1, 2, 3, 4, 5, 6, stb. lépés megtételekor! Ha már ismerik a tanulók a számtani sorozat összegképletét, akkor biztassuk őket, hogy zárt alakban is adják meg a kért koordinátákat.

c)*

A lépések száma:	A pont első koordinátája:
1	1
2	1+2
3	1+2
4	1+2+4
5	1+2+4
6	1+2+4+6
7	1+2+4+6
8	1+2+4+6+8

Azt tapasztaljuk, hogy ha n páros szám (azaz $n = 2k$, ahol k pozitív egész számot jelöl), akkor a pont első koordinátája: $1 + 2 + 4 + 6 + ... + n$, azaz $1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2k$.

Zárt alakban $1 + 2 \cdot \frac{1+k}{2} \cdot k = 1 + k(k+1) = 1 + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + 1$.

Ha n páratlan szám (azaz $n = 2k + 1$, ahol k természetes számot jelöl), akkor a pont első koordinátája: $1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2k$.

Zárt alakban $1 + k(k+1) = 1 + \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{n-1}{2} + 1$.

d)*Ha n páros (azaz $n = 2k$, ahol k pozitív egész számot jelöl), akkor a pont második koordinátája: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (n-1)$, azaz $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k-1)$.

Zárt alakban $\frac{1 + (2k-1)}{2} \cdot k = k^2 = \frac{n^2}{4}$.

Ha n páratlan szám (azaz $n = 2k + 1$, ahol k természetes számot jelöl), akkor a pont második koordinátája: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k+1)$.

Zárt alakban $\frac{1 + (2k+1)}{2} \cdot (k+1) = (k+1)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}$.

7. Egy családban hét gyermek van. A testvérek életkorának összege 63. A családban a gyerekek 2 évente születtek. Hány évesek a gyerekek?

Megoldás: Ha a gyerekek életkorát növekvő sorrendbe rendezzük, a középsőtől való eltérés mindkét irányban ugyanannyi, kettő többszöröse. Mivel a hét gyerek életkorának összege 63, a középső 9. A gyerekek tehát 3, 5, 7, 9, 11, 13 és 15 évesek.

8. Egy sorozat első öt tagja ebben a sorrendben: 1, 2, 3, 4, 5. A sorozat periodikus, a periódus hossza 5. Mennyi az első 203 tag összege?

Megoldás: Az első 203 tagban a periódus 40-szer fordul elő, ezek összege $40\cdot(1+2+3+4+5)=600$. A 200-adik tagot követő három tag összege 6. Így az első 203 tag összege 606.

Módszertani megjegyzés: Már itt érdemes lenne megemlíteni az általánosan is alkalmazható „technikát": ha a középső gyerek (tag) életkora *x*, akkor a hét életkor felírható $(x-6)$, $(x-4),(x-2),x,(x+2),(x+4),(x+6)$ alakban. Ezek összege $7x=63 \quad\Rightarrow\quad x=9$.

9. Egy város egyik lakójával közöltünk egy hírt reggel 8 órakor, aki azonnal elmondta 3 embernek. Ezt követően félóránként az újonnan megtudók mindegyike 3, a hírt még nem ismerővel közli azt. Hány, a hírt még nem ismerő ember tudja meg a hírt 10-kor? Rajtunk kívül hányan tudják összesen a hírt 10 órakor?

Megoldás:

Az időpont:	A hírt újonnan megtudók száma:	A hírt összesen megismerők száma:
8 óra	3	1+3 = 4
½ 9-kor	3^2	1+3+9 = 13
9 órakor	3^3	1+3+9+27 = 40
½ 10-kor	3^4	1+3+9+27+81 = 121
10 órakor	3^5	1+3+9+27+81+243 = 364

10. Az alábbi sorozatok közül melyek monoton sorozatok? A monoton sorozatoknak milyen a monotonitása?

$(a_n)=\left(\dfrac{3}{n+1}\right)$; $\quad (b_n)=\left(2^n\cdot 3^{n-2}\right)$; $\quad (c_n)=\left(100-2(n-3)\right)$; $\quad (d_n)=\left((-1)^n\cdot\sqrt{n+1}\right)$.

Megoldás:

$a_n = \dfrac{3}{n+1}$ és $a_{n+1} = \dfrac{3}{n+2}$, és mivel mindkét tört számlálója és nevezője is pozitív, ekkor az azonos számlálójú törtek közül az a nagyobb, amelynek a nevezője kisebb, így $a_{n+1} < a_n$ minden pozitív egész n esetén, tehát a sorozat szigorúan csökkenő.

$b_n = 2^n \cdot 3^{n-2} = \dfrac{6^n}{9} < \dfrac{6^{n+1}}{9} = b_{n+1}$ minden pozitív egész n esetén, tehát a sorozat szigorúan növő.

$c_n = 100 - 2(n-3) = -2n + 106 > -2(n+1) + 106 = -2n + 104 = c_{n+1}$ minden pozitív egész n esetén, tehát a sorozat szigorúan csökkenő.

$d_n = (-1)^n \cdot \sqrt{n+1} = \begin{cases} -\sqrt{n+1}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \\ \sqrt{n+1}, \text{ ha } n \text{ páros} \end{cases}$, a sorozat nem monoton.

11. Az alábbi sorozatok mindegyike periodikus. Határozd meg a sorozatok periódushosszát!

$(a_n) = \left(\cos n \cdot \dfrac{\pi}{3}\right)$; $(b_n) = (k-3)$, ahol k az n szám 4-es maradéka;

$(c_n) = \left(\dfrac{1}{\sin 2n^\circ + 2}\right)$, ahol n° az n fokos szöget jelöli.

*Megoldás***:** Jelöljük a periódus hosszát p-vel.

$a_n = \cos n \cdot \dfrac{\pi}{3} = \cos(n+p) \cdot \dfrac{\pi}{3} = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{3} + p \cdot \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{3} + 2\pi\right)$, így $p \cdot \dfrac{\pi}{3} = 2\pi$, azaz $p = 6$. A sorozat periódushossza 6.

(Másként: Ha az **i** bázisvektort elforgatjuk a $\dfrac{\pi}{3}$ pozitív egész többszöröseivel, akkor pontosan a hatodik elforgatást követő minden hatodik forgatásnál kapjuk vissza rendre ugyanazokat az egységvektorokat.

A $b_n = k - 3$ sorozat esetében, mivel minden negyedik pozitív egész szám 4-es maradéka ugyanaz a szám, ezért a sorozat periódushossza 4.

A $c_n = \dfrac{1}{\sin 2n^\circ + 2}$ sorozatban $\sin 2n^\circ = \sin 2(n^\circ + p) = \sin(2n^\circ + 2p) =$

$= \sin(2n^\circ + 360^\circ)$, tehát $p = 180^\circ$. A sorozat periódushossza 180°.

II. SZÁMTANI?

Ezen a foglalkozáson a feladatok a sorozatok ábrázolására, és a számtani sorozat definíciójának alkalmazására irányulnak. Legfontosabb célunk a fogalom elmélyítése, a szöveg alapján a modell megalkotása. A tanulók még ezen a foglalkozáson is dolgozhatnak párban, de bíztassuk őket az egyéni munkára! A feladatokat a megadott sorrendben célszerű kitűzni.

1. Egy bevásárlóközpontban a kristálycukor ára 200 Ft/kg. Ha viszont az ugyanolyan minőségű cukrot 10 kg-os csomagolásban vesszük meg, akkor azért 1900 Ft-ot kell fizetnünk. A 10 kg-os csomagolásban árult cukor nem bontható meg. Tételezzük fel, hogy amikor csak lehet, mindig élünk az olcsóbb vásárlás lehetőségével.

a) Mennyibe kerül 13 kg cukor?

b) Hány kg cukrot tudunk vásárolni 9900 Ft-ért?

c) Mennyibe kerül *n* kg cukor, ha *n* 10-zel osztva 6 maradékot adó pozitív egész szám?

d) Hány kg cukrot kapunk *k* Ft-ért, ha *k* 1900-zal osztva 1000 maradékot ad?

Megoldás:

a) $1900 + 3 \cdot 200 = 2500\,(\text{Ft})$.

b) $9900 = 5 \cdot 1900 + 2 \cdot 200$, ezért 52 kg-ot tudunk vásárolni.

c) Ha n 10-zel osztva 6 maradékot ad, akkor $\frac{n-6}{10}$ darabot tudunk venni a 10 kg-os csomagból. Ennek az ára $\frac{n-6}{10} \cdot 1900\,\text{Ft}$. Ki kell még fizetnünk a 6 kg cukrot, amelyért $6 \cdot 200\,\text{Ft}$-ot fizetünk.

Tehát az n kg cukor ára összesen $\frac{n-6}{10} \cdot 1900 + 6 \cdot 200$, azaz $190n + 60\,\text{Ft}$.

d) Mivel a k 1900-zal osztva 1000 maradékot ad, a $\frac{k-1000}{1900}$ egész szám adja meg, hogy hány 10 kg-os csomagot tudunk venni. A fennmaradó 1000 Ft-ért 5 kg cukor vásárolható, így összesen $\frac{k-1000}{1900} \cdot 10 + 5$, azaz $\frac{k-50}{190}$ kg cukrot kapunk k Ft-ért.

2. Számítsd ki a következő sorozatok első öt elemét!

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right); \qquad (b_n) = (\log_2 n); \qquad (c_n) = \left((-1)^n \cdot 2^n\right); \quad (d_n) = \left(\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Melyik sorozat monoton?

Megoldás:

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{25}$.

Szigorúan csökkenő sorozat, hiszen $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ minden pozitív egész *n*-re.

$b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}585$, $b_4 = 2$ és $b_5 = \log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2{,}322$.

Szigorúan növő sorozat, mert $\log_2(n+1) > \log_2 n$ minden pozitív egész *n*-re.

$c_1 = -2$, $c_2 = 4$, $c_3 = -8$, $c_4 = 16$ és $c_5 = -32$. Nem monoton sorozat.

$d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 0$, $d_4 = -1$ és $d_5 = 0$. Nem monoton sorozat.

3. Az alábbi sorozatok közül válaszd ki azokat, amelyek grafikonjának minden pontja egyetlen egyenesre illeszkedik! Add meg az egyenest egyenletével!

$(a_n) = (2-3n)$; $(b_n) = \left(\frac{2n^2 - n - 10}{n+2}\right)$; $(c_n) = (2)$;

$(d_n) = \left((-1)^n(-2)^{-n}\right)$; $(e_n) = (tgn\pi)$; $(f_n) = \left(5 \cdot \frac{0{,}5^{n-1}}{0{,}5^{n+1}}\right)$;

$(g_n) = \left(-1 + (n-2)\cdot 3\right)$.

Megoldás:

Az (a_n) sorozat grafikonjának minden pontja az $y = 2 - 3x$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

Alakítsuk szorzattá a (b_n) sorozat képletében lévő tört számlálóját!

$2n^2 - n - 10 = 0$ egyenlet gyökei: $\frac{5}{2}$ és -2. A másodfokú kifejezés gyöktényezős alakja: $2 \cdot \left(n - \frac{5}{2}\right)(n+2)$, azaz $(2n-5)(n+2)$.

Így $b_n = \frac{2n^2 - n - 10}{n+2} = \frac{(2n-5)(n+2)}{n+2}$. Mivel az utóbbi kifejezés minden pozitív egész *n*-re $2n-5$-tel egyenlő, ezért $b_n = 2n-5$.

A (b_n) sorozat grafikonjának minden pontja az $y = 2x - 5$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

A (c_n) sorozat grafikonjának minden pontja rajta van az $y=2$ egyenletű egyenesen.

A hatvány azonosságainak alkalmazásával $d_n = (-1)^n(-2)^{-n} = (-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

A (d_n) sorozat grafikonjának pontjai nem illeszkednek egy egyenesre.

(Másként: $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{1}{4}$, $d_3 = \frac{1}{8}$. Ha ábrázoljuk a sorozat első három tagját, akkor a három pont nem illeszkedik egy egyenesre, tehát nincs olyan egyenes, amelyen a sorozat grafikonjának minden pontja rajta van.

Mivel $e_n = \operatorname{tg} n\pi = 0$, a sorozat grafikonjának minden pontja az $y=0$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

Mivel minden pozitív egész n esetén $f_n = 5\cdot\frac{0{,}5^{n-1}}{0{,}5^{n+1}} = 5\cdot\frac{0{,}5^n\cdot 2}{0{,}5^n\cdot 0{,}5} = 20$, a (f_n) sorozat grafikonjának minden pontja rajta van az $y=20$ egyenletű egyenesen.

A $g_n = -1+(n-2)\cdot 3 = 3n-7$ sorozat grafikonjának minden pontja illeszkedik az $y=3x-7$ egyenletű egyenesre.

4. Adj meg képletével olyan sorozatot, amelynek grafikonpontjai váltakozva az $y=3x$ és $y=-3x$ egyenletű egyenesre illeszkednek!

Megoldás: Pl. $a_n = (-1)^{n-1}\cdot 3n$.

5. Döntsd el, hogy az alábbi sorozatok közül melyek számtani sorozatok! Állításodat indokold!

$(a_n) = ((8-3n)\cdot\sin n\pi)$; $(b_n) = (6-2|n-3|)$; $(c_n) = (3n^2-(n-2)(3n+1))$;

$(d_n) = \left(\frac{n^2}{2n^3+4n^2}\right)$; $(e_n) = \left(\frac{4n^3-2n^2}{n^2}\right)$; $(f_n) = \left(\frac{6^{n+1}}{2^{n-1}\cdot 3^{n-1}}\right)$.

Megoldás:

Az (a_n) sorozat minden tagja 0, mert $\sin n\pi = 0$ minden pozitív n egész szám esetén. Mivel minden konstans sorozat számtani sorozat, így (a_n) is az.

A (b_n) sorozat első három tagja rendre 2, 4, 6. A negyedik tagja 4. Annak, hogy egy sorozat számtani sorozat legyen, szükséges feltétele, hogy a sorozat monoton legyen. A sorozat nem monoton, így nem számtani sorozat.

$c_n = 3n^2 - (n-2)(3n+1) = 5n+2$, és $c_{n+1} = 5(n+1)+2 = 5n+7$. Mivel minden pozitív n egész szám esetén $c_{n+1} - c_n = 5$, így (c_n) számtani sorozat.

A $d_n = \dfrac{n^2}{2n^3+4n^2} = \dfrac{1}{2n+4}$ képlettel megadható sorozat első három tagja rendre: $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{10}$. Mivel $\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{6} \neq \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{8}$, így a sorozat nem számtani sorozat.

Az $e_n = \dfrac{4n^3 - 2n^2}{n^2} = 4n-2$ képletű sorozat számtani sorozat, mivel bármelyik két szomszédos tagjának különbsége állandó, 4.

Az $(f_n) = \left(\dfrac{6^{n+1}}{2^{n-1} \cdot 3^{n-1}}\right)$ sorozat konstans sorozat, mert minden pozitív egész n-re

$$\frac{6^{n+1}}{2^{n-1} \cdot 3^{n-1}} = \frac{6^n \cdot 6}{2^n \cdot 3^n \cdot \frac{1}{6}} = 36,$$ így számtani sorozat.

6. Képezzünk az $(a_n) = \left(n^2\right)$ sorozat tagjaiból a következőképpen egy újabb (b_n) sorozatot: Legyen $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, és így tovább, tehát $b_n = a_{n+1} - a_n$ minden n pozitív egész szám esetén. Igazold, hogy (b_n) számtani sorozat!

Megoldás:

Mivel $a_{n+1} = (n+1)^2$ és $a_n = n^2$, így $b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Ez a sorozat pedig számtani sorozat, hiszen tagjai 3-tól kezdve rendre az egymást követő páratlan számok.

7. Képezzünk az $(a_n) = \left(3 \cdot 2^n\right)$ sorozat tagjaiból egy újabb (c_n) sorozatot úgy, hogy $(c_n) = (\log_2 a_n)$ legyen. Igazold, hogy (c_n) számtani sorozat!

Megoldás:

Az (a_n) sorozat minden tagja pozitív, tehát képezhetjük minden tagjának a 2-es alapú logaritmusát. A logaritmus azonosságainak felhasználásával adódik, hogy

$c_n = \log_2 3 \cdot 2^n = \log_2 3 + n$. Mivel $c_{n+1} = \log_2 3 + n + 1$, így $c_{n+1} - c_n = 1$ minden pozitív egész *n* esetén, tehát (c_n) számtani sorozat.

A következő feladatok annak felismerését segítik elő, hogy amennyiben ismerjük egy számtani sorozat páratlan számú egymást követő tagjának összegét, akkor célszerű ezeket a tagokat a középső tag és a differencia függvényében felírni.

8. Egy számtani sorozat első hét tagjának összege 84. Mekkora a sorozat negyedik tagja?

Megoldás: Ha a sorozat negyedik tagját *a*-val, a differenciáját *d*-vel jelöljük, akkor a számtani sorozat definíciója szerint a sorozat első hét tagja: $a-3d; a-2d; a-d;$ $a-3d; a-2d; a-d; a; a+d; a+2d; a+3d$. E hét tag összege $7a$, és a feltétel szerint $7a = 84$, így $a = 12$. A sorozat negyedik tagja 12.

9. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egy számtani sorozat három szomszédos tagja. A háromszög kerülete 21 egység. Mekkora a háromszög területe és a körülírt körének sugara?

Megoldás: Ha a háromszög hosszabb befogójának hosszát a-val jelöljük, az átfogóét pedig $a+d$ -vel, akkor a rövidebb befogó hossza $a-d$ és $0 < d < a$.

A háromszög kerülete 21 egység, így $3a = 21$, azaz $a = 7$. A másik két oldala tehát $7-d$ és $7+d$ hosszú.

Pitagorasz tételét alkalmazva a derékszögű háromszögre: $(7+d)^2 = 7^2 + (7-d)^2$.

Ebből $d = \frac{7}{4}$. A háromszög befogóinak hossza $\frac{21}{4}$ és 7 egység, az átfogóé pedig $\frac{35}{4}$ egység.

A háromszög területe: $\frac{147}{8} = 18{,}375$ (területegység). Körülírt körének sugara az átfogó hosszának felével egyenlő, így $\frac{35}{8} = 4{,}375$ (egység).

10. Egy háromszög oldalainak hossza egy számtani sorozat három szomszédos tagja. A háromszög egyik szöge 120° -os. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

Megoldás:

Jelöljük a háromszög 120°-os szöggel szemközti oldalának hosszát $a+d$-vel, a másik két oldal hosszát pedig a-val és $a-d$-vel, ahol $0<d<a$. Alkalmazzuk a háromszög leghosszabb oldalára a koszinusztételt:

$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 - 2a(a-d)\cos 120^\circ$.

Ebből $5ad = 2a^2$ adódik, és mivel $0<a$, így $a=\frac{5}{2}d$.

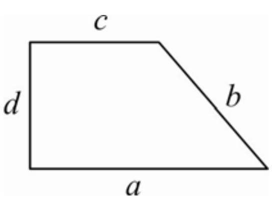
A háromszög oldalainak hossza növekvő sorrendben: $\frac{3}{2}d$, $\frac{5}{2}d$, $\frac{7}{2}d$. A feltételnek eleget tevő háromszögek hasonlóak, oldalaik hossza nem határozható meg egyértelműen, de hegyesszögei igen. A háromszög legkisebb szögét α-val jelölve, a szinusztétel szerint $\frac{1{,}5d}{3{,}5d}=\frac{\sin\alpha}{\sin 120^\circ}$, azaz $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{14}\approx 0{,}3712$, és mivel α hegyesszög, így $\alpha\approx 21{,}8^\circ$. A háromszög másik hegyesszöge $\beta\approx 38{,}2^\circ$.

11.* Igazold, hogy a négyzeten kívül nincs olyan derékszögű trapéz, amelyben az egymáshoz csatlakozó oldalak hossza egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

Megoldás:

A különböző oldalú téglalap egymáshoz csatlakozó oldalainak hossza nem lehet egy számtani sorozat négy egymást követő tagja.

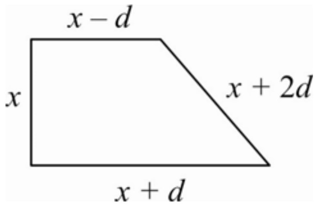
Vizsgáljuk azokat a derékszögű trapézokat, amelyek nem téglalapok. Az ilyen trapézok oldalhosszai különbözőek.



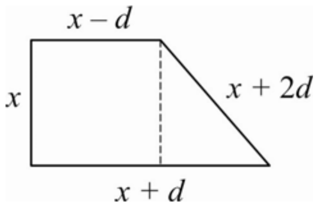
Legyen a hosszabbik párhuzamos oldal *a*. Az ábra jelöléseit alkalmazva $c<a$ és $d<b$. Ezeknek a feltételeknek eleget téve, a trapéz egymáshoz csatlakozó oldalainak hossza pl. szigorúan növekvő sorrendben kétféle lehet:

I. $c<d<a<b$

II. $d<c<b<a$

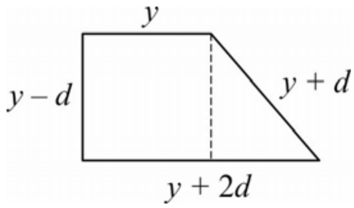


I. Feltételezve, hogy van ilyen derékszögű trapéz, ennek oldalait a következőképpen jelölhetjük ($0<d$):



Az ábrán a trapéz magasságának megrajzolásával kapott derékszögű háromszög befogóinak hossza x és $2d$.
Az x, $2d$, $x+2d$ hosszú szakaszokra nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, így ezek nem lehetnek egy háromszög oldalhosszai. Ez pedig azt jelenti, hogy nincs ilyen derékszögű trapéz.

II. $d < c < b < a$



Ekkor bevezethetjük az ábra szerinti jelölést.
Ismét húzzuk meg a trapéz magasságát, az így létrejött derékszögű háromszög befogóinak hossza $y-d$ és $2d$.
Mivel a háromszög átfogója a feltételezés szerint $y+d$, most is azt kaptuk, hogy a háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül, így ilyen derékszögű háromszög, és ebből adódóan ilyen oldalhosszúságú trapéz sincs.

Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

III. LÉPJÜNK EGYET-KETTŐT!

A számtani sorozat definíciójának, tagjai képzési szabályának és az első valahány tag összegképletének ismeretében már „csak” annak elérése a feladatunk, hogy a tanulók felismerjék, az egyes esetekben melyik ismeretet célszerű alkalmazni. A tanári tapasztalat szerint a tanulók egy része nehezen ismeri fel a szöveges feladatokban, hogy a kérdés a sorozat *n*-edik tagjának, vagy az első *n* tag összegének meghatározására irányul-e. Érdemes szöveggel megadott sorozat esetében minél többször rákérdezni mindkét adatra. Ezen a foglalkozáson már célszerű a tanulókat önállóan dolgoztatni.

1. Egy mozi húsz sora közül a legelsőn 15 férőhely van, és minden következő sorban eggyel több, mint az előtte lévőben.

a) Hány férőhely van az utolsó sorban?

b) Hányan lehetnek a moziban szombat este a teltházas előadás alatt?

Az egyik délutáni előadásra 400 néző ült be a moziba. Az első sor közepén 1 ember ült, a második sorban valamennyivel több, és ez így ment tovább, minden sorban ugyanannyival több ember foglalt helyet, mint az azt megelőző sorban.

c) Hány ember ült a második sorban?

Az esti előadás teltházas volt. Az első 5 sorban lévő helyek jegyára egységesen 600 Ft volt, a 6. sortól a 15. sorig bezárólag minden jegy ára 800 Ft, míg az utolsó 5 sor bármelyik helyére szóló jegy 1000 Ft-ba került.

d) Ezen az előadáson mennyi volt a mozi fenntartójának a bevétele a jegyek árából?

Megoldás: A nézőtér soraiban lévő férőhelyek száma rendre egy számtani sorozat egymást követő húsz tagja.

a) $a_{20} = 15 + 19 \cdot 1 = 34$, tehát 34 hely van az utolsó sorban.

b) $S_{20} = \dfrac{15+34}{2} \cdot 20 = 490$, így 490 férőhely van a moziban.

c) Egy számtani sorozat első tagja és az első húsz tag összege ismert: $a_1 = 1$, $S_{20} = 400$. A sorozat differenciájának a meghatározása a feladat.

Mivel $a_{20} = 1 + 19d$, így $400 = \dfrac{2+19d}{2} \cdot 20$. Ebből $d = 2$.

A második sorban 3 ember ült.

d) A számtani sorozat első tagja 15, differenciája 1. A 600 Ft-os jegyből annyit adtak el, amennyi a sorozat első 5 tagjának összege: $S_5 = \frac{15+(15+4)}{2} \cdot 5 = 85$.

A 800 Ft-osból pedig annyit, amennyi az $S_{15} - S_5$. Mivel $a_{15} = 15+14 = 29$, így $S_{15} = \frac{15+29}{2} \cdot 15 = 330$. Ebből a jegyből $330 - 85 = 245$ darabot adtak el.

Az 1000 Ft-os jegyből $490 - 245 - 85 = 160$ darab kelt el.

Mivel $600 \cdot 85 + 800 \cdot 245 + 1000 \cdot 160 = 407\ 000$, így a bevétel a jegyek árából 407 000 Ft volt.

2. Egy étteremben az egyik polcon díszítő elemként poharakat raktak ki a következőképpen: A legalsó sorban szorosan egymás mellé helyeztek valamennyi poharat. A második sorban úgy rakták el a poharakat szorosan egymás mellé egy sorban, hogy az alsó sor bármelyik két szomszédos pohara tartott egy második sorban lévő poharat. Így folytatták tovább a poharak elrendezését, míg végül a legfelső sorba 1 pohár került.

a) Hány poharat raktak a legalsó sorba, ha összesen 18 sort alakítottak ki?

b) Mennyibe került ez a díszítő elem, ha egy pohár nagykereskedelmi ára 50 Ft volt?

Megoldás:

A díszítő elem egyes soraiban lévő poharak száma rendre egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjainak tekinthetők, amelynek az első tagja és a differenciája is 1.

a) A sorozat 18-adik tagja 18, így az alsó sorba 18 poharat raktak.

b) A kérdés megválaszolásához meg kell határoznunk a számtani sorozat első 18 tagjának összegét. Mivel $S_{18} = \frac{1+18}{2} \cdot 18 = 171$, így összesen 171 poharat használtak fel, amelyek ára összesen $171 \cdot 50 = 8550$ (Ft) volt.

3. István elhatározta, hogy minden reggel tornázik, mert szeretné a karizmait erősíteni. Az első napot 10 fekvőtámasszal kezdte. Könnyen ment, így elhatározta, hogy a következő napon többet fog, sőt minden nap ugyanannyival többet, mint a megelőző napon. Rögtön el is mesélte a húgának a tervét, aki kinevette: „Ide figyelj! Ha tényleg minden nap ennyivel több fekvőtámaszt akarsz csinálni, akkor tudod, hogy a 30-adik napon már 155 fekvőtámasszal kezdheted a napot? Nem lesz ez sok egy kicsit?"

Mennyivel szerette volna növelni István naponta a fekvőtámaszai számát?

Megoldás: A naponta végrehajtott fekvőtámaszok száma rendre egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A sorozat első tagja 10, a 30-adik tagja 155. A sorozat differenciáját kell meghatároznunk.

A $155 = 10 + 29d$ egyenlet megoldása $d = 5$. István 5-tel szerette volna megnövelni a fekvőtámaszai számát.

4. Hány pozitív tagja van az $(a_n) = (-n^2 + 20n - 84)$ sorozatnak?

Megoldás: A $-n^2 + 20n - 84 > 0$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásait keressük. A másodfokú kifejezés értéke pontosan akkor 0, ha $n = 6$ vagy $n = 14$. A sorozat grafikonjának minden pontja illeszkedik a valós számok halmazán értelmezett

$f(x) = -x^2 + 20x - 84$ függvény grafikonjára. Ez a másodfokú függvény szigorúan nő a $]-\infty;10]$ intervallumon, és szigorúan csökken a $[10;+\infty[$ intervallumon, továbbá a két zérushelye közötti számokra pozitív az értéke. Ebből adódik, hogy sorozatnak hét tagja pozitív, mégpedig a 7-edik tagtól kezdve a 13-adik taggal bezárólag.

5. Egy szigorúan csökkenő számtani sorozat első 15 tagjának az összege megegyezik az első 16 tagjának összegével. Hány pozitív tagja van a sorozatnak?

Megoldás: A feladat feltételéből következik, hogy a számtani sorozat 16-odik tagja nulla. Mivel a sorozat szigorúan csökkenő, így az első 15 tagja pozitív.

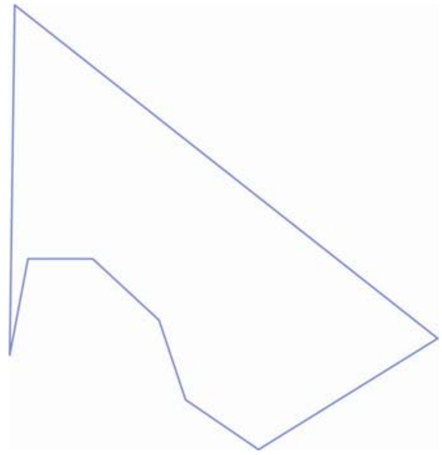
6. Egy nyolcszög legkisebb szöge $5{,}5^\circ$-os. Ebből a szögből kiindulva a nyolcszög egymást követő belső szögeinek fokban mért értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkorák a nyolcszög szögei? Rajzolj le egy ilyen nyolcszöget!

Megoldás: A nyolcszög belső szögeinek összege 1080°. A számtani sorozat első tagja 5,5. A sorozat differenciáját d-vel jelölve, a sorozat nyolcadik tagja $5{,}5 + 7d$, és a nyolc egymást követő tagjának összege 1080.

Az $1080 = \dfrac{2 \cdot 5{,}5 + 7d}{2} \cdot 8$ egyenlet megoldása: $d = 37$.

A nyolcszög belső szögei rendre: $5{,}5^\circ$, $42{,}5^\circ$, $79{,}5^\circ$, $116{,}5^\circ$, $153{,}5^\circ$, $190{,}5^\circ$, $227{,}5^\circ$ és $264{,}5^\circ$.

A nyolcszög vázlatos képe:



7. Ha egy számtani sorozat első öt tagját összeadjuk, akkor 25-öt kapunk. Ha viszont a sorozat öt egymást követő tagját a második tagjától kezdve adjuk össze, akkor 35-öt kapunk. Számítsd ki a számtani sorozat első hat tagját!

Megoldás: Az első öt tag összege 25, így a harmadik tag 5. Mivel a második tagtól kezdve ismét öt tag összege 35, és ennek az öt tagnak a középső tagja a sorozat negyedik tagja, tehát a negyedik tag 7. A sorozat differenciája tehát 2.

A sorozat első hat tagja: 1, 3, 5, 7, 9, 11.

8. 2000 cédulára egyenként felírtuk az első 2000 pozitív egész számot. A cédulákat két dobozba szétraktuk. Összeadtuk az egyik, illetve a másik dobozba került számokat. Melyik állítás igaz?

A: Lehet, hogy az egyik összeg huszonötszöröse a másiknak.

B: Lehet, hogy az egyik összeg nyolcszorosa a másiknak.

C: Lehet, hogy az egyik összeg tízszerese a másiknak.

D: Lehet, hogy a két összeg azonos.

Megoldás: A D állítás igaz.

A cédulákra felírt számok összege $\frac{1+2000}{2}\cdot 2000 = 2\,001\,000$. Az A, a B és C állítások egyike sem igaz, mert a teljesülésüknek szükséges feltétele, hogy a teljes összeg 26-tal, vagy 9-cel, vagy 11-gyel osztható legyen. Az összeg ezek közül egyik számmal sem osztható. Viszont mivel az összeg páros, így lehet, hogy a két összeg azonos. Meg is valósítható pl. úgy, hogy az 1-től az 1415-ig számokkal ellátott cédulákat tesszük az egyik dobozba – kivéve az 1320-at –, mert $S_{1415} - 1320 = 1\,001\,820 - 1320 = 1\,000\,500$; a többit a másikba.

9. Egy társaság egy új kártyajátékot játszik. A játékhoz 3 csomag magyar kártyára van szükség. (Egy csomag magyar kártyában 32 lap van.) A lapok kiosztása a következőképpen történik: Az osztó az első játékosnak annyi kártyalapot oszt, ahány játékos részt vesz a játékban. A következőnek 4-gyel többet, és sorban minden játékosnak 4-gyel többet oszt ki, mint az őt megelőzőnek. Így, mikor az utolsó játékos, az osztó is megkapja a lapjait, minden lap kiosztásra kerül.

Hány játékos vesz részt a játékban?

Megoldás: Jelöljük a játékosok számát *n*-nel. A játékosoknak kiosztott lapok száma rendre olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek a differenciája 4, az első tagja pedig *n*. A sorozat *n* tagjának összege 96. Tehát $96 = \frac{2n + 4(n-1)}{2} \cdot n$, azaz

$3n^2 - 2n - 96 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek egyetlen pozitív megoldása a 6.

A játékban 6 játékos vesz részt.

10. Az $(a_n) = \big((n-2)(n+3) - (n-4)(n+2)\big)$ sorozatnak az első tagtól kezdve legfeljebb hány tagját adhatjuk össze, hogy az összeg 1 milliónál kisebb legyen?

Megoldás: $a_n = (n-2)(n+3) - (n-4)(n+2) = 3n + 2$.

A sorozat első tagja 5, differenciája 3, az első *n* tag összege $S_n = \frac{2 \cdot 5 + 3(n-1)}{2} \cdot n$.

Jelölje *n* azoknak a tagoknak a számát, amelyek összege még kisebb 1 milliónál. Ekkor

$\frac{2 \cdot 5 + 3(n-1)}{2} \cdot n < 10^6$, azaz $3n^2 + 7n - 2 \cdot 10^6 < 0$. A másodfokú egyenlőtlenség pozitív egész megoldásait keressük. A valós számok halmazán értelmezett

$f(x) = 3x^2 + 7x - 2 \cdot 10^6$ függvény zérushelyei közül az egyik negatív szám, a másik pedig kb. 2445,99. A két zérushely között a függvény minden értéke negatív, a pozitív zérushely utáni számok halmazán pedig a függvény szigorúan növő, így az

$3n^2 + 7n - 2 \cdot 10^6 < 0$ egyenlőtlenség megoldásai 1-től 2445-ig a pozitív egész számok.

Tehát legfeljebb az első 2445 tag összege lesz 1 milliónál kisebb.

11. Egy számtani sorozat első tagja 3, differenciája 4. A sorozat első *k* tagjának összege háromjegyű, az első $k+1$ tagjának összege pedig már négyjegyű szám. Mekkora pozitív egész számot jelöl a *k*?

Megoldás: A feladat szerint $100 \le S_k < 1000$ és $1000 \le S_{k+1} < 10000$. Megkeressük, hogy S_k értéke milyen *k* esetén közelíti meg alulról legjobban az ezret.

$S_k = \dfrac{6+4(k-1)}{2} \cdot k = (1+2k)k < 1000$. Mivel $S_k = (1+2k)k$ sorozat szigorúan növő, keressük meg módszeres próbálgatással a kérdéses számot. A $\sqrt{1000} \approx 32$, a *k* szám ennél kisebb, hiszen $1+2k > k$. Próbáljuk ki $k = 30$-at: $S_{30} = 61 \cdot 30 = 1830$, ez sok. Viszont $S_{20} = 41 \cdot 20 = 820$ már kisebb 1000-nél. Mivel a számtani sorozat 21-edik tagja $a_{21} = 3 + 4 \cdot 21 = 87$, a 22-edik $a_{22} = 91$ és $820 + 87 + 91 = 998$, a keresett *k* szám a 22. Valóban, hiszen $S_{22} = 998$ és $S_{23} = \dfrac{6+4\cdot 22}{2} \cdot 23 = 1081$.

(Megoldva az $(1+2k)k - 1000 < 0$ egyenlőtlenséget, természetesen szintén a $k = 22$ számot kapjuk.)

12. Döntsd el, hogy számtani sorozat-e az a sorozat, amelyben az első *n* tag összege az $S_n = 4n^2 - 6n$ képlettel számítható ki!

Megoldás: Ha $S_n = 4n^2 - 6n$, akkor $S_{n+1} = 4(n+1)^2 - 6(n+1)$, és $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, ahol a_{n+1} a sorozat $(n+1)$-edik tagja.

Mivel $S_{n+1} - S_n = 4(n+1)^2 - 6(n+1) - 4n^2 + 6n = 8n - 2$, így $a_{n+1} = 8n - 2 = 8(n+1) - 10$. Mivel a sorozat *n*-edik tagja lineárisan függ a sorszámától, ezért a sorozat számtani.

(A befejező gondolatmenet másként: $S_{n-1} = 4(n-1)^2 - 6(n-1)$, ahol $2 \le n$, és

$S_n - S_{n-1} = 4n^2 - 6n - 4(n-1)^2 + 6(n-1) - = 8n - 10 = a_n$. Mivel

$a_{n+1} - a_n = 8n - 2 - 8n + 10 = 8$ állandó, ha $2 \le n$, de $S_1 = a_1 = -2$ és $a_2 = 6$, és a e két tag különbsége is 8, így a sorozat számtani.

IV. MÉRTANI?

Az 1.– 9. feladatok a mértani sorozattal kapcsolatos ismeretek közül csak egynek-egynek az alkalmazását várják el. Fontos annak a tudatosítása, hogy mértani sorozat esetében két tag ismerete nem feltétlenül határozza meg egyértelműen a sorozatot.
A mértani sorozatot definiálhatjuk úgy is, hogy a hányados értékei közül kizárjuk a nullát, de úgy is, hogy megengedjük azt. A feladatokat megfogalmazásából egyértelműen kiderül, hogy a nulla tagja-e a sorozatnak.
A tanulókat ajánlatos önállóan foglalkoztatni. A feladatok megoldását csak akkor beszéljük meg a csoporttal, ha már minden tanuló minden kérdéssel foglalkozott.

1. Egy mértani sorozat két egymást követő tagja a felsorolás sorrendjében 8 és 12. Mekkora a sorozat következő tagja?

Megoldás: A mértani sorozat definíciója szerint $12 \cdot \frac{12}{8}$, azaz 18.

2. Egy mértani sorozat első tagja 5, a negyedik és hatodik tagja egymással egyenlő. A nulla nem tagja a sorozatnak. Hány ilyen sorozat van?

Megoldás: A mértani sorozat hányadosát q-val jelölve, $q \neq 0$ és $5 \cdot q^3 = 5 \cdot q^5$, azaz

$0 = 5q^3(q^2 - 1)$. Mivel $q \neq 0$, így $q = 1$ vagy $q = -1$.

Tehát két ilyen sorozat képezhető.

3. Egy mértani sorozat első tagja negatív, a kilencedik tagja pedig pozitív. Hány ilyen sorozat van?

Megoldás: Nincs ilyen sorozat, ugyanis a mértani sorozat első tagját a-val, hányadosát q-val jelölve az $a < 0$ és $aq^8 > 0$ egyenlőtlenségrendszernek a valós számok körében nincs megoldása.

4. Egy mértani sorozat harmadik tagja (-4), az ötödik pedig (-1). Mi lehet a sorozat negyedik tagja?

Megoldás: A sorozat első tagját a-val, hányadosát q-val jelölve $aq^2 = -4$ és $aq^4 = -1$. A két egyenlet megfelelő oldalainak szorzata is egyenlő, így $a^2q^6 = 4$, azaz $\left(aq^3\right)^2 = 4$.

Így $aq^3 = 2$ vagy $aq^3 = -2$. A sorozat negyedik tagja 2 vagy -2.

5. Egy mértani sorozat hetedik tagja nullától különböző, és 9-szerese a harmadik tagjának. A sorozat harmadik tagja hányszorosa az első tagjának?

Megoldás: A sorozat harmadik tagját a_3-mal, hányadosát q-val jelölve: $a_7 = a_3 q^4$. Mivel $a_7 = 9a_3$ és $a_7 \neq 0$, így $q^4 = 9$. A sorozat harmadik tagja q^2-szerese az első tagnak, jelen esetben a 3-szorosa.

6. Egy mértani sorozat öt egymást követő tagjának szorzata 3^{10}. Mekkora közülük a középső tag?

Megoldás: Ha az öt szomszédos tagot a középső tag (a) és a hányados függvényében adjuk meg, akkor a szorzatuk $a^5 = 3^{10} = 9^5$, tehát a középső tag 9.

7. Az $1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000}$ összeg és $\frac{4}{3}$ közül melyik a nagyobb?

Megoldás: $\frac{4}{3} = 1{,}\dot{3} = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots > 1{,}3333$

8. Rajzoltam egy négyzetet, majd az oldalait kétszeresére nagyítottam. Ezután újból és újból a kapott négyzet oldalait kétszeresére változtattam. Az ötödik nagyítással kapott négyzet területe hányszorosa a kezdetben megrajzolt négyzet területének?

Megoldás: Hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, így a négyzet oldalainak kétszeresre változtatásával a területe 4-szeres lesz. Az ötödik nagyítás után a kapott négyzet területe az eredetiének $4^5 = 1024$-szerese lesz.

9. Egy bolha a megfigyelés kezdetekor 50 cm távolságra ugrott el. A következő ugrása már csak fele akkorára sikerült, és minden további ugrása éppen fele olyan hosszú, mint az azt megelőző ugrásáé. Körülbelül hány mm hosszúra sikerült a nyolcadik ugrása?

Megoldás: Mivel $50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 0{,}39$, így a nyolcadik ugrása kb. 4 mm hosszúra sikerült.

10. Az előző feladatban szereplő bolha az első nyolc ugrását egy egyenes mentén hajtotta végre, de minden ugrása után irányt változtatott. Milyen távolságra került a megfigyelés kezdeti helyétől a nyolcadik ugrás után?

Megoldás: Minden ugrás után irányt változtatott, így az

$50-50\cdot\frac{1}{2}+50\cdot\frac{1}{2^2}-50\cdot\frac{1}{2^3}+...-50\cdot\frac{1}{2^7}$ összeggel meghatározhatjuk a bolha

helyzetét, illetve a kezdeti helyzettől való távolságát.

$$50\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}\right)-50\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}\right)=50\cdot\left(\frac{1-0{,}25^4}{0{,}75}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-0{,}25^4}{0{,}75}\right)=$$

$$=50\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-0{,}25^4}{0{,}75}\approx 33{,}20$$

A bolha a kezdeti helyétől, az első ugrásának irányában kb. 33,2 cm távolságra lesz.

11. Három szám egy számtani sorozatnak, négyzeteik – ugyanebben a sorrendben – egy mértani sorozatnak egymást követő tagjai. A három szám összege 9. Melyek ezek a számok?

Megoldás: A három számot jelölje: $a-d, a, a+d$. A három szám összege 9, így a középső 3. A három szám tehát jelölhető a következőképpen: $3-d$, 3 és $3+d$.

Ezek négyzetei, $(3-d)^2$, 9 és $(3+d)^2$ egy mértani sorozat egymást követő tagjai, így $9^2=(3-d)^2(3+d)^2$. Ebből $\left|9-d^2\right|=9$, azaz $d=0$ vagy $d=3\sqrt{2}$ vagy $d=-3\sqrt{2}$.

A feladatnak három megoldása van (egy konstans, egy növő és egy csökkenő számtani sorozat három szomszédos tagja): 3, 3, 3, vagy $3-3\sqrt{2}$, 3, $3+3\sqrt{2}$, vagy $3+3\sqrt{2}$, 3, $3-3\sqrt{2}$. ($(3-3\sqrt{2})^2=9(3-2\sqrt{2})$ és $(3+3\sqrt{2})^2=9(3+2\sqrt{2})$).

12.* Egy egyenlőszárú háromszög szárának, alapjának, az alaphoz tartozó magasságának és a háromszög területének számértéke a megadott sorrendben egy mértani sorozat első négy tagja. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás: Jelöljük a háromszög alapjának hosszát *a*-val, száráét *b*-vel, az alaphoz tartozó magasság hosszát m_a-val, és így a háromszög területe $\frac{am_a}{2}$.

Mivel b, a, m_a, $\frac{am_a}{2}$ ebben a sorrendben egy mértani sorozat első négy tagja, a sorozat hányadosa $\frac{\frac{am_a}{2}}{m_a}=\frac{a}{2}$. Innen $\frac{m_a}{a}=\frac{a}{2}$, azaz $m_a=\frac{a^2}{2}$, és $\frac{a}{b}=\frac{a}{2}$, és ebből $b=2$.

A mértani sorozat első négy tagja: 2, a, $\frac{a^2}{2}$ és $\frac{a^3}{4}$.

Az egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye által létrehozott derékszögű háromszögben: $b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2$, azaz $4 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4}$. Az a^2-re másodfokú $a^4 + a^2 - 16 = 0$ egyenlet egyetlen pozitív gyöke $a^2 = \frac{\sqrt{65}-1}{2}$, és így $a = \sqrt{\frac{\sqrt{65}-1}{2}} \approx 1{,}88$.

A háromszög alapja kb. 1,88 cm, a szárai 2 cm hosszúak.

13. Legalább hány tagot kell összeadni az első tagtól kezdve az $(a_n) = (3 \cdot 2^n)$ sorozatból, hogy az összeg 1 milliónál nagyobb legyen?

Megoldás: Az (a_n) olyan mértani sorozat, amelynek az első tagja 6, hányadosa 2. Az első k tag összege: $6 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + ... + 6 \cdot 2^{k-1} = 6 \cdot (2^k - 1)$.

A feladat tehát a $6 \cdot (2^k - 1) > 10^6$ egyenlőtlenség megoldása.

Ebből $2^k > \frac{10^6}{6} + 1 \approx 166667{,}67$. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, így $k \lg 2 > \lg 166667{,}67$, és mivel $\lg 2 > 0$, így $k > \frac{\lg 166667{,}67}{\lg 2} \approx 17{,}35$, ahol k pozitív egész számot jelöl.

Legalább 18 tagot kell összeadni.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokhoz hasonlóakkal a „Gazdasági matematika” c. modulban találkozhatunk.

14.* 1 millió forintot lekötöttem 5 évre, évi 8%-os kamatra. 5 év leteltével kivettem 500 ezer forintot, s a maradék pénzt lekötöttem egy évre, de ekkor a kamatláb már évi 10% volt. Az 1 év leteltével ismét kivettem 500 ezer forintot, s ismét lekötöttem 1 évre a megmaradt pénzt. Az éves kamatláb ekkor is 10% volt. 1 év múlva, a kamat jóváírása után mennyi pénzt vehettem volna ki?

Megoldás: Öt év múlva a számlámon $10^6 \cdot 1{,}08^5$ $(\approx 1\,469\,328)$ forint volt. A következő év végén $\left(10^6 \cdot 1{,}08^5 - 5 \cdot 10^5\right) \cdot 1{,}1$ $(\approx 1\,066\,261)$, és a rákövetkező év végén:

$$\left(\left(10^6\cdot 1{,}08^5-5\cdot 10^5\right)\cdot 1{,}1-5\cdot 10^5\right)\cdot 1{,}1\ (\approx 622\,887).$$

Az utolsó év végén kb. 622 887Ft-ot vehettem volna ki.

15. Egy bankban 3 évre lekötöttünk 200 000 Ft-ot. Az első évben a bank évi 8,5%-os kamatot számolt el, a második évben a kamatlábat *p* %-kal, a harmadik évben újabb *p* %-kal csökkentette. Ily módon a harmadik év végén 10 498 Ft-tal kevesebb pénzt vehettünk fel, mint amennyit a 8,5%-os kamatláb mellett reméltünk.

Számítsd ki *p* értékét!

Megoldás: A feladat szerint a remélt összeg 3 év múlva: $200\,000\cdot 1{,}085^3$ $(\approx 244\,960\text{ Ft})$ lett volna. A tényleges összeg 3 év múlva: $200\,000\cdot 1{,}085\cdot\left(1+\frac{8{,}5-p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{8{,}5-2p}{100}\right)$ Ft lett. A kettő különbsége 10 498 Ft, tehát

$200\,000\cdot 1{,}085^3-200\,000\cdot 1{,}085\cdot\left(1+\frac{8{,}5-p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{8{,}5-2p}{100}\right)=10\,498$, ahol $0<p<4$.

$(108{,}5-p)(108{,}5-2p)=11\,288{,}5$, azaz $2p^2-325{,}5p+483{,}75=0$.

A másodfokú egyenlet 4-nél kisebb pozitív gyöke: $p=1{,}5$.

A bank 1,5%-kal, majd újból 1,5%-kal csökkentette a kamatlábat.

16. Ha tíz éven át minden év elején 100 000 Ft-ot tennénk a bankba évi 6,5%-os kamatra, majd tíz éven keresztül minden év elején ugyanakkora összeget vennénk le számlánkról, és így a 20. év elején elfogyna a pénzünk, akkor mekkora összeget vegyünk fel egy-egy évben? (Tételezzük fel, hogy a kamatláb a 20 év során nem változik.)

1. megoldás

Az első év elején betett összeg 10 éven át, a második évben betett összeg 9 éven át, és így tovább a 10-edik év elején betett összeg 1 éven át kamatozna, tehát a 10-edik év végén $10^5\cdot(1{,}065^{10}+1{,}065^9+\ldots+1{,}065^2+1{,}065)$, azaz $10^5\cdot 1{,}065\cdot(1{,}065^9+1{,}065^8+\ldots+1{,}065+1)$ Ft lenne a számlánkon. A zárójelben egy olyan mértani sorozat első 10 tagjának összege áll, amelynek az első tagja 1, hányadosa

1,065. Ez az összeg: $\frac{1{,}065^{10}-1}{0{,}065}$ $(\approx 11{,}144687)$. A tizedik év végén

$10^5 \cdot 1{,}065 \cdot \frac{1{,}065^{10}-1}{0{,}065}$ $(\approx 1\,186\,909)$ kb. 1 186 909 Ft lenne a számlánkon.

Jelöljük ezt az összeget B-vel. Ebből az összegből 10 éven át minden év elején x Ft-ot kiveszünk. Az első kivételtől számítva egy év múlva, az év elején $(B-x)\cdot 1{,}065-x$, azaz $1{,}065B-1{,}065x-x$ Ft lenne a számlánkon. Két év múlva

$(1{,}065B-1{,}065x-x)\cdot 1{,}065-x$, azaz $1{,}065^2 B-1{,}065^2 x-1{,}065x-x$ Ft lenne év elején a számlánkon. Amikor tizedik alkalommal veszünk ki x forintot, akkor

$1{,}065^9 B-1{,}065^9 x-1{,}065^8 x-\ldots-1{,}065x-x$ Ft lenne a számlánkon.

$$1{,}065^9 \cdot 10^5 \cdot 1{,}065 \cdot \frac{1{,}065^{10}-1}{0{,}065}-1{,}065^9 x-1{,}065^8 x-\ldots-1{,}065x-x=0$$

$$1{,}065^9 \cdot 10^5 \cdot 1{,}065 \cdot \frac{1{,}065^{10}-1}{0{,}065}=\left(1{,}065^9+1{,}065^8+\ldots+1{,}065+1\right)\cdot x$$

$$1{,}065^9 \cdot 10^5 \cdot 1{,}065 \cdot \frac{1{,}065^{10}-1}{0{,}065}=\frac{1{,}065^{10}-1}{0{,}065}\cdot x$$

$$1{,}065^{10}\cdot 10^5=x$$

Évente kb. 187 714 Ft-ot vehetünk fel.

2. megoldás

Az eredmény egy másik megoldásra is inspirálhat bennünket. Képzeljük el, hogy az első 10 évben, minden év elején egy-egy új számlát nyitnánk, és mindegyik számlára betett 100 ezer Ft-ot a számlanyitástól számítva pontosan 10 év múlva vennénk ki. Ekkor minden számlán a betett 100 ezer Ft 10 éven át kamatozik, így minden számláról $1{,}065^{10}\cdot 10^5$ Ft-ot vehetünk fel.

17. Az A üzem termelése egy adott évben kétszerese a B üzem termelésének. B termelése évente 18%-kal nő, amíg A termelésének növekedése mindössze évi 6%. Hány év múlva lesz B termelése kétszerese A évi termelésének?

Megoldás: Ha az adott évben a B üzem termelése x, akkor az A üzemé $2x$. Jelölje k azoknak az éveknek a számát, ahány év múlva a B üzem termelése kétszerese lesz az A üzemének. A k-adik évben az A üzem termelése $2x\cdot 1{,}06^k$, a B üzemé pedig $x\cdot 1{,}18^k$, és

$x \cdot 1{,}18^k = 2 \cdot 2x \cdot 1{,}06^k$, ahol k pozitív egész számot , x pozitív számot jelöl. Így $\frac{1{,}18^k}{1{,}06^k} = 4$, azaz $\left(\frac{1{,}18}{1{,}06}\right)^k = 4$. Két, egymással egyenlő pozitív szám 10-es alapú logaritmusa is egyenlő egymással, tehát $k(\lg 1{,}18 - \lg 1{,}06) = \lg 4$. Ebből $k = \frac{\lg 4}{\lg 1{,}18 - \lg 1{,}06} \approx 12{,}93$.

13 év múlva lesz a *B* üzem termelése kétszerese az *A* üzemének.

18. Naponta nagyon sokféle hirdetést olvashatunk. Az egyik bank hirdetése így szól:

„Szüksége van azonnal pénzre? Forduljon hozzánk! Ha 500 000 Ft személyi kölcsönt vesz fel, csak 10 360 Ft-ot kell havonta visszafizetnie. Ragadja meg az alkalmat!”

Rövid tájékozódás után kiderült, hogy a futamidő 72 hónap.

a) Vajon mennyi pénzt vehetnénk fel 72 hónap elteltével, ha minden hónap elején a havi törlesztő részletet, a 10 360 Ft betennénk egy olyan bankba, amelyik havi 0,4%-os kamatot ígér?

b) Ha az a) kérdésben megfogalmazottak szerint járnánk el, hány hónap alatt gyűlne össze a szükséges 500 ezer Ft?

Megoldás:

a) Az első hónap elején betett 10 360 Ft 72 hónapon át, a másodikban betett összeg 71 hónapon át kamatozna, és így tovább, a 72-edik hónap elején betett összeg 1 hónapon át kamatozna, így a 72 hónap elteltével a befizetett összeg:

$$10\,360 \cdot (1{,}004^{72} + 1{,}004^{71} + \ldots + 1{,}004^2 + 1{,}004) = 10\,360 \cdot 1{,}004 \cdot \frac{1{,}004^{72} - 1}{0{,}004}.$$

72 hónap elteltével kb. 865 897 Ft-ot kellene befizetnünk.

b) Ha k hónap elteltével gyűlne össze a számlánkon az 500 ezer Ft, akkor

$10\,360 \cdot (1{,}004^k + 1{,}004^{k-1} + \ldots + 1{,}004^2 + 1{,}004) = 500\,000$, azaz

$10\,360 \cdot 1{,}004 \cdot \frac{1{,}004^k - 1}{0{,}004} = 500\,000$. Ebből $1{,}004^k \approx 1{,}1923$, és így $k \approx \frac{\lg 1{,}1923}{\lg 1{,}004}$.

Mivel a hányados kb. 44,06, így a 45-ödik hónapban már felvehető a számláról 500 000 Ft.

V. TUDÁSPRÓBA

1893-ban jelent meg dr. Beke Manó és Reif Jakab középiskolai tanárok szerkesztésében egy olyan feladatgyűjtemény, amelyben a szerzők a „hazai érettségi vizsgálati feladványokat” gyűjtötték össze. Az előszóban a szerzők az írásbeli érettségi vizsga szerepéről a következőket fogalmazták meg[1]:

> „A középiskolai tanuló mathematikai ismereteinek megítélésében az irásbeli vizsgálatnak van a legfontosabb szerepe: mert ebben tűnik ki leginkább, hogy minő módon tudja mathemathikai schémába önteni a materiális problémát, melylyel dolga van és minő módon tudja erre a schemára alkalmazni mathematikai ismereteit és számítási ügyességét.”
> A későbbiekben arról is írnak, hogy véleményük szerint milyennek kellene lenni az írásbeli érettségi vizsga feladatainak:
> „A feladott problémáknak olyanoknak kell lenniök, hogy alkalma legyen a tanulóknak benne a mathematikai gondolkozás főbb elemeinek a bemutatására. A mathematikai gondolkozás főbb elemei alatt értjük, hogy 1) a feladott problémát pontosan értse; 2) azt a szükséges részekre bontsa, vagyis analizálja; 3) a mellékkérdéseket sorozza a szerint, a mint a főkérdés megoldására vezetnek; 4) a szükséges problémákat megoldja, megjelölve azon általános problemákat vagy tételeket, melyek alá az illető feladat sorozható és 5) a nyert eredményekből a főeredményt kellő módon összeállítsa.” (© Dr. Beke Manó és Reif Jakab jogutódai)

Úgy hisszük, hogy a szerzők gondolatai a XXI. században sem veszítettek érvényességükből. Az alábbiakban ebből a feladatgyűjteményből választottunk három, a témakörünkbe tartozó feladatot. A feladatok szövegét némileg „modernizáltuk”.

1. Egy fiatalember 17-edik éve beteltével szivarozni kezd. Az év végével összeszámítván kiadásait, úgy találta, hogy hetenként 1 forintot költött szenvedélyére. Ekkor így okoskodott: ha én ez évi költségemet most és ezentúl minden év végével takarékpénztárba tenném, 60 éves koromig évi 5%-ával tetemes összegre szaporodnék. Kérdés, mennyire? (1 évben 52 héttel számoljunk.)

Megoldás: A fogadalmat követő év végén (amikor a fiatalember 18 éves lesz) a számláján $52\cdot 1{,}05+52$ forint lenne. A következő év végén $52\cdot 1{,}05^2+52\cdot 1{,}05+52$ forint, és így tovább. Annak az évnek a végén, amikor a 60 évet betöltené, már nem tesz be 52 forintot, így ekkor a számláján $52\cdot 1{,}05^{43}+52\cdot 1{,}05^{42}+\ldots+52\cdot 1{,}05^2+52\cdot 1{,}05$ forint

[1] Érettségi vizsgálati mathematikai feladatok gyüjteménye címmel reprint kiadásban megjelentette az INTEGRA-PROJEKT Kft. 1993-ban.

lenne. Ez az összeg kiszámítható $52 \cdot 1{,}05 \cdot \dfrac{1{,}05^{43} - 1}{0{,}05}$ módon is. És mivel

$52 \cdot 1{,}05 \cdot \dfrac{1{,}05^{43} - 1}{0{,}05} \approx 7807$, a fiatalember számláján kb. 7807 Ft lenne annak az évnek a végén, amikor betöltené a 60 évet.

2. Két tőke, egyik 8000 Ft 5%-ra, a másik 12 000 forint 3%-ra kiadva, hány év múlva növekszik kamatos kamatjával ugyanazon összegre?

Megoldás: Ha n év múlva lesz a két tőke kamataikkal együtt ugyanakkora, akkor

$8000 \cdot 1{,}05^n = 12\,000 \cdot 1{,}03^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{1{,}05}{1{,}03}\right)^n = \dfrac{3}{2}$. Ebből $n(\lg 1{,}05 - \lg 1{,}03) = \lg 3 - \lg 2$, és

mivel az n együtthatója nullától különbözik, így $n = \dfrac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 1{,}05 - \lg 1{,}03} \approx 21{,}1$.

Amennyiben nem változnak a kamatlábak, akkor a 22. évben lesz a két összeg azonos.

3.* Három mértani sorozatban az első tagok egy olyan mértani sorozat szomszédos tagjai, amelynek a hányadosa 2. A három mértani sorozat hányadosai (ugyanabban a sorrendben) egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek a differenciája 1. A három mértani sorozat második tagjainak összege 24. A harmadik mértani sorozat első három tagjának összege 84. Melyek ezek a mértani sorozatok?

Megoldás: A három mértani sorozat első tagjait jelölhetjük a következőképpen: a, $2a$ és $4a$, a hányadosaik pedig rendre $q-1$, q és $q+1$. Ekkor

$$\left.\begin{aligned} a(q-1) + 2aq + 4a(q+1) &= 24 \\ 4a + 4a(q+1) + 4a(q+1)^2 &= 84 \end{aligned}\right\}, \text{ azaz } \left.\begin{aligned} a(7q+3) &= 24 \\ 4a(q^2+3q+3) &= 84 \end{aligned}\right\}.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak hányadosa egyenlő, így $\dfrac{q^2+3q+3}{7q+3} = \dfrac{7}{8}$, azaz

$8q^2 - 25q + 3 = 0$. A másodfokú egyenlet két megoldása: 3 és $\dfrac{1}{8}$.

Ha $q = 3$, akkor a három mértani sorozat első három tagja: 1, 2, 4, vagy 2, 6, 12, vagy 4, 16, 64. Ha $q = \dfrac{1}{8}$, akkor $\dfrac{192}{31}, -\dfrac{168}{31}, \dfrac{147}{31}$, vagy $\dfrac{384}{31}, \dfrac{48}{31}, \dfrac{6}{31}$, vagy $\dfrac{768}{31}, \dfrac{864}{31}, \dfrac{972}{31}$.

Mindkét sorozat eleget tesz a feladat feltételeinek.

A tanulók a modul utolsó foglalkozásán a tudáspróba feladatainak megoldásán keresztül még egyszer végiggondolhatják a témakör legalapvetőbb ismereteit. A 10 feladat megoldására fordítható munkaidő hosszát a szaktanár döntse el. Javaslatunk 30 perc. A teszt kitöltése után a feladatok megoldását csoportfoglalkozás keretében beszéljék meg, és csak akkor térjenek át a frontális megbeszélésre, ha valamelyik feladat megoldása vitát vált ki a csoporton belül.
A tanári mellékletben megtalálható a feladatsor és annak megoldása is.

Tudáspróba

Minden feladatra adott négy válasz közül pontosan egy helyes. Karikázd be az általad helyesnek vélt válasz betűjelét! Minden helyesen bejelölt válaszért 6 pont kapható. Rossz válasz esetén 1 pont levonás jár, és ha egyik választ sem jelölöd be, akkor arra a feladatra 0 pontot kapsz.

1. Egy számtani sorozat első tagja 4, differenciája 3. Mennyi a sorozat 7-edik és 17-edik tagjának számtani közepe?

A: 34; **B:** 37; **C:** 40; **D:** 43.

2. Az *ABCD* paralelogramma *A*, *B*, *C* és *D* csúcsánál lévő belső szögeinek mértéke rendre egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Mekkora a sorozat differenciája?

A: 90°; **B:** 10°; **C:** 45°; **D:** 0°.

3. Egy számtani sorozat első tagja 10, a sorozat differenciája (-2). Mennyi a sorozat 10-edik és 15-ödik tagjának számtani közepe?

A: -12; **B:** $-12{,}5$; **C:** -13; **D:** -14.

4. Egy számtani sorozat hetedik tagja 4, 10-edik tagja pedig 16. A sorozat hányadik tagja (-24)?

A: 1; **B:** 2; **C:** 3; **D:** Nem tagja a sorozatnak.

5. Egy mértani sorozat második tagja 9-szerese a sorozat 4. tagjának. A sorozatnak nem tagja a nulla. Mennyi a sorozat hányadosa?

A: $\frac{1}{3}$; **B:** 3 vagy -3; **C:** $\frac{1}{9}$ vagy $-\frac{1}{9}$; **D:** $\frac{1}{3}$ vagy $-\frac{1}{3}$.

6. Az x és y olyan valós számokat jelölnek, amelyekre az x^2-16; y; $\frac{81}{(x-4)(x+4)}$ kifejezések értékei ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Milyen számot jelöl az y?

A: 81; **B:** 9 vagy (-9); **C:** 16 vagy -16; **D:** 9.

7. Az x és y olyan valós számokat jelölnek, amelyekre az $\log_{x+1} y$, $\log_{x+1} x^4$, $\log_{x+1} y^3$ kifejezések értékei rendre egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Milyen kapcsolat áll fenn x és y között?

A: $y = x^2$; **B:** $y = \sqrt{x^2}$; **C:** $y = x^2$ vagy $y = -x^2$; **D:** $y = x$.

8. Egy háromszög oldalainak hossza egész szám, kerülete 12 egység. A háromszög oldalhosszai rendre egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Hány ilyen háromszög van? (Az egybevágó háromszögeket nem különböztetjük meg.

A: 5; **B:** 4; **C:** 3; **D:** 2.

9. A q hányadosú (a_n) mértani sorozatnak nem tagja a nulla, és $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ .Ekkor **nem igaz**, hogy:

A: van ilyen sorozat; **B:** $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 n$;

C: $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k = a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot ... \cdot a_{2k}$; **D:** $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

10. Jancsi január elsején született. Szülei ekkor, és ettől kezdve minden év január elsején 100 000 Ft-ot utalnak Jancsi bankszámlájára. Mennyi pénzt vehetne fel Jancsi annak az évnek a legvégén, amelyikben betölti a 18. életévét, ha az éves kamatláb 6 %-os?

A: $100\,000 \cdot (1{,}06^{18} + 1{,}06^{17} + ... + 1{,}06)$; **B:** $100\,000 \cdot (1{,}06^{18} + 1{,}06^{17} + ... + 1{,}06 + 1)$

C: $100\,000 \cdot (1{,}06^{19} + 1{,}06^{18} + 1{,}06^{17} + ... + 1{,}06)$; **D:** $100\,000 \cdot 1{,}06^{18}$.

A tudáspróba feladatainak megoldása és értékelése

Minden feladatra adott négy válasz közül pontosan egy helyes. Karikázd be az általad helyesnek vélt válasz betűjelét! Minden helyesen bejelölt válaszért 6 pont kapható. Rossz válasz esetén 1 pont levonás jár, és ha egyik választ sem jelölöd be, akkor arra a feladatra 0 pontot kapsz.

1. Egy számtani sorozat első tagja 4, differenciája 3. Mennyi a sorozat 7-edik és 17-edik tagjának számtani közepe?

A: 34; **B:** 37; **C:** 40; **D:** 43.

Megoldás: A 7. és a 17. tagjának számtani közepe a sorozat 12. tagjával egyenlő, azaz 37-tel.

2. Az *ABCD* paralelogramma *A*, *B*, *C* és *D* csúcsánál lévő belső szögeinek mértéke rendre egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Mekkora a sorozat differenciája?

A: 90°; **B:** 10°; **C:** 45°; **D:** 0°.

Megoldás: A paralelogramma csak olyan lehet, amelyben az egymást követő szögei mértéke monoton sorozatnak szomszédos tagjai. Ez pedig azt jelenti, hogy a paralelogramma minden szöge derékszög, tehát a sorozat differenciája 0°.

3. Egy számtani sorozat első tagja 10, a sorozat differenciája (-2). Mennyi a sorozat 10. és 15. tagjának számtani közepe?

A: -12; **B:** $-12{,}5$; **C:** -13; **D:** -14.

Megoldás: A sorozat 10. tagja -8, a 15. tagja -18. Ennek a két tagnak a számtani közepe -13.

4. Egy számtani sorozat hetedik tagja 4,tizedik tagja pedig 16. A sorozat hányadik tagja (-24)?

A: 1; **B:** 2; **C:** 3; **D:** Nem tagja a sorozatnak.

Megoldás: $4+3d=16$, így $d=4$. Mivel $a_1+6\cdot 4=4$, a sorozat első tagja (-20), és a sorozat növő, így a (-24) nem tagja a sorozatnak.

5. Egy mértani sorozat második tagja 9-szerese a sorozat 4-edik tagjának. A sorozatnak nem tagja a nulla. Mennyi a sorozat hányadosa?

A: $\frac{1}{3}$; **B:** 3 vagy -3; **C:** $\frac{1}{9}$ vagy $-\frac{1}{9}$; **D:** $\frac{1}{3}$ vagy $-\frac{1}{3}$.

Megoldás: $a_2 = 9a_4$ és $a_4 = a_2q^2$, így $a_2 = 9a_2q^2$. Mivel $a_2 \neq 0$, ezért $q^2 = \frac{1}{9}$, és ebből adódik, hogy a sorozat hányadosa $\frac{1}{3}$ vagy $-\frac{1}{3}$.

6. Az x és y olyan valós számokat jelölnek, amelyekre az $x^2 - 16$; y; $\frac{81}{(x-4)(x+4)}$ kifejezések értékei ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Milyen számot jelöl az y?

A: 81; **B:** 9 vagy (-9); **C:** 16 vagy -16; **D:** 9.

Megoldás: $y^2 = (x^2 - 16)\cdot\frac{81}{(x-4)(x+4)}$, és így $y^2 = 81$, azaz $y = 9$ vagy $y = -9$.

7. Az x és y olyan valós számokat jelölnek, amelyekre az $\log_{x+1} y$, $\log_{x+1} x^4$, $\log_{x+1} y^3$ kifejezések értékei rendre egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Milyen kapcsolat áll fenn x és y között?

A: $y = x^2$; **B:** $y = \sqrt{x^2}$; **C:** $y = x^2$ vagy $y = -x^2$; **D:** $y = x$.

Megoldás: $y > 0$ és $x > -1$, továbbá $x \neq 0$ lehet csak.

$\log_{x+1} x^4 - \log_{x+1} y = \log_{x+1} y^3 - \log_{x+1} x^4$, azaz $2\log_{x+1} x^4 = \log_{x+1} y + \log_{x+1} y^3$.

Ebből $\log_{x+1} x^8 = \log_{x+1} y^4$, és mivel ugyanolyan alapú logaritmusa csak ugyanakkora pozitív számoknak lehet egymással egyenlő, így $x^8 = y^4$, tehát $|y| = x^2$. Az y csak pozitív lehet, így $y = x^2$, ahol $x > -1$ és $x \neq 0$.

8. Egy háromszög oldalainak hossza egész szám, kerülete 12 egység. A háromszög oldalhosszai rendre egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Hány ilyen háromszög van? (Az egybevágó háromszögeket nem különböztetjük meg.

A: 5; **B:** 4; **C:** 3; **D:** 2.

Megoldás: Ha a háromszög oldalainak hosszát rendre $b-d$, b és $b+d$ jelöli, akkor mivel az összegük 12, $b = 4$. A háromszög oldalainak hossza $4-d$, 4 és $4+d$. A három szakasz csak akkor lehet egy háromszög három oldala, ha $(4-d)+4 > 4+d$, így $2 > d$.

A háromszög oldalainak hossza egész szám, és az egybevágó háromszögeket nem különböztetjük meg, tehát $d=0$ vagy $d=1$. Két ilyen háromszög van, oldalhosszuk 4, 4, 4 vagy 3, 4 és 5 .

9. A q hányadosú (a_n) mértani sorozatnak nem tagja a nulla, és $a_2-a_1=a_3-a_2$. Ekkor **nem igaz**, hogy:

A: van ilyen sorozat;

B: $a_1+a_2+...+a_n=a_1 n$;

C: $a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_k=a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot...\cdot a_{2k}$;

D: $a_1+a_2+...+a_n=a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

Megoldás: $a_2-a_1=a_3-a_2 \Leftrightarrow 2a_2=a_1+a_3$. Mivel $a_2=a_1q$ és $a_3=a_1q^2$, így $2a_1q=a_1+a_1q^2$. $a_1\neq 0$, ezért $2q=1+q^2 \Leftrightarrow 0=(q-1)^2 \Leftrightarrow q=1$. A sorozat konstans sorozat. Ekkor $a_1+a_2+...+a_n\neq a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

(**Másként:** A mértani sorozat első három tagja egy számtani sorozat egymást követő tagjai, így $a_2^2=(a_2-d)(a_2+d)$, és ebből $d=0$ adódik.

10. Jancsi január elsején született. Szülei ekkor, és ettől kezdve minden év január elsején 100 000 Ft-ot utalnak Jancsi bankszámlájára. Mennyi pénzt vehetne fel Jancsi annak az évnek a legvégén, amelyikben betölti a 18-adik életévét, ha az éves kamatláb 6 %-os?

A: $100\,000\cdot(1{,}06^{18}+1{,}06^{17}+...+1{,}06)$;

B: $100\,000\cdot(1{,}06^{18}+1{,}06^{17}+...+1{,}06+1)$

C: $100\,000\cdot(1{,}06^{19}+1{,}06^{18}+1{,}06^{17}+...+1{,}06)$;

D: $100\,000\cdot 1{,}06^{18}$.

Megoldás: Jancsi születésekor betett összeg 19 éven át kamatozik, 1 éves korában átutalt pénz 18 évig, és így tovább, a 18-adik születésnapján átutalt összeg 1 éven át kamatozik, így ennek az évnek a végén Jancsi $100\,000\cdot(1{,}06^{19}+1{,}06^{18}+1{,}06^{17}+...+1{,}06)$ Ft-ot vehetne fel.