MATEMATIKAI KOMPETENCIATERÜLET „C”

Matematika
12. évfolyam

TANULÓK KÖNYVE

Készítette: Kovács Károlyné

A kiadvány KHF/456-7/2009. engedélyszámon 2009.05.21. időponttól
tankönyvi engedélyt kapott
Educatio Kht. Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterv

A kiadvány a Nemzeti Fejlesztési terv Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program 3.1.1. központi program (Pedagógusok és oktatási szakértők felkészítése a kompetencia alapú képzés és oktatás feladataira) keretében készült, a suliNova oktatási programcsomag részeként létrejött tanulói információhordozó. A kiadvány sikeres használatához szükséges a teljes oktatási programcsomag ismerete és használata. A teljes programcsomag elérhető: www.educatio.hu címen.

Szakmai vezető: Oláh Vera

Alkotószerkesztő: Oláh Judit

Lektor: Urbán János

Felelős szerkesztő: Teszár Edit

H-CMAT1201

Educatio Kht. 2008.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Tantárgypedagógiai szakértő: Kónya István
Tudományos-szakmai szakértő: dr.Marosváry Erika
Technológiai szakértő: Csonka Vilmosné

TARTALOM

A matematikai kompetenciaterület 12. évfolyamos „C" moduljai feladatmegoldásokon keresztül fejlesztik a tanulók képességeit. A „Tanulók könyve" tanórán kívüli foglalkozásaihoz a tanár a „Tanári útmutatót" használja. Ezek a foglalkozások szorosan kapcsolódnak a tanórák tananyagához, kifejezetten a tanult tananyag elmélyítését, a középszintű érettségire való felkészülést szolgálják.

A nehezebb feladatokat *-gal jelöltük.

1. MODUL
SORBAN EGYMÁS UTÁN

Készítette: Kovács Károlyné

I. KEZDŐLÉPÉSEK

1. Döntsd el, hogy az alábbi függvények közül melyek számsorozatok! A számsorozatoknak számítsd ki a 11-edik és a 100-adik tagját!

f függvény: Ez a függvény minden pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám 6-tal való osztásakor fellépő maradékát.

g függvény: Ez a függvény minden Budapesten élő emberhez hozzárendeli annak életkorát. (Az életkort években mérve, egész számra kerekítve adjuk meg.)

h függvény: Minden sokszöghöz hozzárendeli az átlóinak számát.

k függvény: Minden sokszög oldalszámához hozzárendeli a sokszög átlóinak számát.

m függvény: $\mathbf{Z}^{+} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ ha } x \text{ páros szám} \\ x, \text{ ha } x \text{ páratlan szám} \end{cases}$

2. Legyen egy sorozat első 5 tagja a 19 932 ötjegyű számnak az öt számjegye, a sorozat további tagjainak mindegyike pedig legyen 1. Hány ilyen sorozat képezhető?

3. Legyen $a_n = 60 \cdot \sin n^\circ$, ahol n° az n fokos szöget jelöli, $b_n = 2 \cdot 3^{n-25}$,

$c_n = 100 - 2(n-3)$ és $d_n = (-1)^{n-1} \cdot \sqrt{n+6}$.

a) Döntsd el, hogy a 30 tagja-e az (a_n), (b_n), (c_n) és (d_n) sorozatok valamelyikének!

Ha igen, hányadik tagja?

b) Számítsd ki a sorozatok 30-adik tagját!

c) Van-e a (b_n) sorozatnak 54-gyel osztható tagja?

4. Egy 2 dm oldalélű tömör kockát három vágással 8 egybevágó kockára vágunk szét. A kapott kockák mindegyikén megismételjük az eljárást. Majd újból és újból a kapott kis kockák mindegyikéből 3 vágással 8 egybevágó kockát hozunk létre.

a) Az ötödik elvágások után összesen hány kis kockánk lesz?

b) Mekkora a térfogata az ötödik elvágáskor kapott kis kockáknak?

5. Egy irodában az év végi prémiumokra fordítható teljes összeg 1 millió forint. Az iroda vezetője rangsort készített azokról a munkatársairól, akiknek prémiumot szeretne adni. Úgy gondolta, hogy a rangsorban elsőként állónak 100 000 Ft -ot adna, a második helytől kezdve pedig minden, a rangsorban szereplő dolgozó ugyanakkora összeggel, 10 000 Ft -tal kapna kevesebbet, mint a rangsorban előtte álló dolgozó.

a) Legfeljebb hány dolgozó neve szerepelhetett a rangsorban?

b) Ilyen módon legfeljebb mekkora összeget tudott szétosztani?

c) Mekkora összeget adjon az első dolgozónak, hogy a teljes összeg kiosztható legyen?

6. Egy kis bábut mozgatunk a koordinátasíkon. A bábu kezdő helyzetét megadó pont koordinátái $(1;0)$. Innen, az első lépésben felfele (az y tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban) mozgatjuk 1 egységgel, azután jobbra (az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban) mozdítjuk el 2 egységgel. A harmadik lépésben felfele 3 egységgel, ezután ismét jobbra 4 egységgel, és így tovább, mindig váltakozva fel és jobbra, és minden lépésben az elmozdulás nagysága 1 egységgel hosszabb a megelőző lépéséhez képest.

a) Határozd meg, hogy a tizedik lépésben hová kerül a bábu!

b) Az első 10 elmozdulás hosszának mekkora az összege?

c)* Add meg képlettel, hogy az n-edik lépés után (n pozitív egész számot jelöl) hogyan számítható ki a bábu helyzetét megadó pont első koordinátája!

d)* Add meg képlettel, hogy az n-edik lépés után (n pozitív egész számot jelöl) hogyan számítható ki a bábu helyzetét megadó pont második koordinátája!

7. Egy családban hét gyermek van. A testvérek életkorának összege 63. A családban a gyerekek 2 évente születtek. Hány évesek a gyerekek?

8. Egy sorozat első öt tagja ebben a sorrendben: 1, 2, 3, 4, 5. A sorozat periodikus, a periódus hossza 5. Mennyi az első 203 tag összege?

9. Egy város egyik lakójával közöltünk egy hírt reggel 8 órakor, aki azonnal elmondta 3 embernek. Ezt követően félóránként az újonnan megtudók mindegyike 3, a hírt még nem ismerővel közli azt. Hány, a hírt még nem ismerő ember tudja meg a hírt 10-kor? Rajtunk kívül hányan tudják összesen a hírt 10 órakor?

10. Az alábbi sorozatok közül melyek monoton sorozatok? A monoton sorozatoknak milyen a monotonitása?

$(a_n) = \left(\frac{3}{n+1}\right)$; $(b_n) = \left(2^n \cdot 3^{n-2}\right)$; $(c_n) = \left(100 - 2(n-3)\right)$; $(d_n) = \left((-1)^n \cdot \sqrt{n+1}\right)$.

11. Az alábbi sorozatok mindegyike periodikus. Határozd meg a sorozatok periódushosszát!

$(a_n) = \left(\cos n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$; $(b_n) = (k-3)$, ahol k az n szám 4-es maradéka;

$(c_n) = \left(\frac{1}{\sin 2n^\circ + 2}\right)$, ahol n° az n fokos szöget jelöli.

II. SZÁMTANI?

1. Egy bevásárlóközpontban a kristálycukor ára 200 Ft/kg. Ha viszont az ugyanolyan minőségű cukrot 10 kg-os csomagolásban vesszük meg, akkor azért 1900 Ft-ot kell fizetnünk. A 10 kg-os csomagolásban árult cukor nem bontható meg. Tételezzük fel, hogy amikor csak lehet, mindig élünk az olcsóbb vásárlás lehetőségével.

a) Mennyibe kerül 13 kg cukor?

b) Hány kg cukrot tudunk vásárolni 9900 Ft-ért?

c) Mennyibe kerül *n* kg cukor, ha *n* 10-zel osztva 6 maradékot adó pozitív egész szám?

d) Hány kg cukrot kapunk *k* Ft-ért, ha *k* 1900-zal osztva 1000 maradékot ad?

2. Számítsd ki a következő sorozatok első öt elemét!

$(a_n)=\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $(b_n)=(\log_2 n)$; $(c_n)=\left((-1)^n\cdot 2^n\right)$; $(d_n)=\left(\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$.

Melyik sorozat monoton?

3. Az alábbi sorozatok közül válaszd ki azokat, amelyek grafikonjának minden pontja egyetlen egyenesre illeszkedik! Add meg az egyenest egyenletével!

$(a_n)=(2-3n)$; $(b_n)=\left(\frac{2n^2-n-10}{n+2}\right)$; $(c_n)=(2)$;

$(d_n)=\left((-1)^n(-2)^{-n}\right)$; $(e_n)=(tgn\pi)$; $(f_n)=\left(5\cdot\frac{0{,}5^{n-1}}{0{,}5^{n+1}}\right)$;

$(g_n)=(-1+(n-2)\cdot 3)$.

4. Adj meg képletével olyan sorozatot, amelynek grafikonpontjai váltakozva az $y=3x$ és $y=-3x$ egyenletű egyenesre illeszkednek!

5. Döntsd el, hogy az alábbi sorozatok közül melyek számtani sorozatok! Állításodat indokold!

$(a_n)=((8-3n)\cdot\sin n\pi)$; $(b_n)=(6-2|n-3|)$; $(c_n)=\left(3n^2-(n-2)(3n+1)\right)$;

$(d_n)=\left(\frac{n^2}{2n^3+4n^2}\right)$; $(e_n)=\left(\frac{4n^3-2n^2}{n^2}\right)$; $(f_n)=\left(\frac{6^{n+1}}{2^{n-1}\cdot 3^{n-1}}\right)$.

6. Képezzünk az $(a_n) = \left(n^2\right)$ sorozat tagjaiból a következőképpen egy újabb (b_n) sorozatot: Legyen $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, és így tovább, tehát $b_n = a_{n+1} - a_n$ minden n pozitív egész szám esetén. Igazold, hogy (b_n) számtani sorozat!

7. Képezzünk az $(a_n) = \left(3 \cdot 2^n\right)$ sorozat tagjaiból egy újabb (c_n) sorozatot úgy, hogy $(c_n) = (\log_2 a_n)$ legyen. Igazold, hogy (c_n) számtani sorozat!

8. Egy számtani sorozat első hét tagjának összege 84. Mekkora a sorozat negyedik tagja?

9. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egy számtani sorozat három szomszédos tagja. A háromszög kerülete 21 egység. Mekkora a háromszög területe és a körülírt körének sugara?

10. Egy háromszög oldalainak hossza egy számtani sorozat három szomszédos tagja. A háromszög egyik szöge 120°-os. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

11.* Igazold, hogy a négyzeten kívül nincs olyan derékszögű trapéz, amelyben az egymáshoz csatlakozó oldalak hossza egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

III. LÉPJÜNK EGYET-KETTŐT!

1. Egy mozi húsz sora közül a legelsőn 15 férőhely van, és minden következő sorban eggyel több, mint az előtte lévőben.

a) Hány férőhely van az utolsó sorban?

b) Hányan lehetnek a moziban szombat este a teltházas előadás alatt?

Az egyik délutáni előadásra 400 néző ült be a moziba. Az első sor közepén 1 ember ült, a második sorban valamennyivel több, és ez így ment tovább, minden sorban ugyanannyival több ember foglalt helyet, mint az azt megelőző sorban.

c) Hány ember ült a második sorban?

Az esti előadás teltházas volt. Az első 5 sorban lévő helyek jegyára egységesen 600 Ft volt, a 6. sortól a 15. sorig bezárólag minden jegy ára 800 Ft, míg az utolsó 5 sor bármelyik helyére szóló jegy 1000 Ft-ba került.

d) Ezen az előadáson mennyi volt a mozi fenntartójának a bevétele a jegyek árából?

2. Egy étteremben az egyik polcon díszítő elemként poharakat raktak ki a következőképpen: A legalsó sorban szorosan egymás mellé helyezték valamennyi poharat. A második sorban úgy rakták le a poharakat szorosan egymás mellé egy sorban, hogy az alsó sor bármelyik két szomszédos pohara tartott egy második sorban lévő poharat. Így folytatták tovább a poharak elrendezését, míg végül a legfelső sorba 1 pohár került.

a) Hány poharat raktak a legalsó sorba, ha összesen 18 sort alakítottak ki?

b) Mennyibe került ez a díszítő elem, ha egy pohár nagykereskedelmi ára 50 Ft volt?

3. István elhatározta, hogy minden reggel tornázik, mert szeretné a karizmait erősíteni. Az első napot 10 fekvőtámasszal kezdte. Könnyen ment, így elhatározta, hogy a következő napon többet fog, sőt minden nap ugyanannyival többet, mint a megelőző napon. Rögtön el is mesélte a húgának a tervét, aki kinevette: „Ide figyelj! Ha tényleg minden nap ennyivel több fekvőtámaszt akarsz csinálni, akkor tudod, hogy a 30-adik napon már 155 fekvőtámasszal kezdheted a napot? Nem lesz ez sok egy kicsit?”

Mennyivel szerette volna növelni István naponta a fekvőtámaszai számát?

4. Hány pozitív tagja van az $(a_n) = (-n^2 + 20n - 84)$ sorozatnak?

5. Egy szigorúan csökkenő számtani sorozat első 15 tagjának az összege megegyezik az első 16 tagjának összegével. Hány pozitív tagja van a sorozatnak?

6. Egy nyolcszög legkisebb szöge $5{,}5^\circ$-os. Ebből a szögből kiindulva a nyolcszög egymást követő belső szögeinek fokban mért értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkorák a nyolcszög szögei? Rajzolj le egy ilyen nyolcszöget!

7. Ha egy számtani sorozat első öt tagját összeadjuk, akkor 25-öt kapunk. Ha viszont a sorozat öt egymást követő tagját a második tagjától kezdve adjuk össze, akkor 35-öt kapunk. Számítsd ki a számtani sorozat első hat tagját!

8. 2000 cédulára egyenként felírtuk az első 2000 pozitív egész számot. A cédulákat két dobozba szétraktuk. Összeadtuk az egyik, illetve a másik dobozba került számokat. Melyik állítás igaz?

A: Lehet, hogy az egyik összeg huszonötszöröse a másiknak.

B: Lehet, hogy az egyik összeg nyolcszorosa a másiknak.

C: Lehet, hogy az egyik összeg tízszerese a másiknak.

D: Lehet, hogy a két összeg azonos.

9. Egy társaság egy új kártyajátékot játszik. A játékhoz 3 csomag magyar kártyára van szükség. (Egy csomag magyar kártyában 32 lap van.) A lapok kiosztása a következőképpen történik: Az osztó az első játékosnak annyi kártyalapot oszt, ahány játékos részt vesz a játékban. A következőnek 4-gyel többet, és sorban minden játékosnak 4-gyel többet oszt ki, mint az őt megelőzőnek. Így, amikor az utolsó játékos, az osztó is megkapja a lapjait, minden lap kiosztásra kerül.

Hány játékos vesz részt a játékban?

10. Az $(a_n) = \left((n-2)(n+3)-(n-4)(n+2)\right)$ sorozatnak az első tagtól kezdve legfeljebb hány tagját adhatjuk össze, hogy az összeg 1 milliónál kisebb legyen?

11. Egy számtani sorozat első tagja 3, differenciája 4. A sorozat első k tagjának összege háromjegyű, az első $k+1$ tagjának összege pedig már négyjegyű szám. Mekkora pozitív egész számot jelöl a k?

12. Döntsd el, hogy számtani sorozat-e az a sorozat, amelyben az első n tag összege az $S_n = 4n^2 - 6n$ képlettel számítható ki!

IV. MÉRTANI?

1. Egy mértani sorozat két egymást követő tagja a felsorolás sorrendjében 8 és 12. Mekkora a sorozat következő tagja?

2. Egy mértani sorozat első tagja 5, a negyedik és hatodik tagja egymással egyenlő. A nulla nem tagja a sorozatnak. Hány ilyen sorozat van?

3. Egy mértani sorozat első tagja negatív, a kilencedik tagja pedig pozitív. Hány ilyen sorozat van?

4. Egy mértani sorozat harmadik tagja (-4), az ötödik pedig (-1). Mi lehet a sorozat negyedik tagja?

5. Egy mértani sorozat hetedik tagja nullától különböző, és 9-szerese a harmadik tagjának. A sorozat harmadik tagja hányszorosa az első tagjának?

6. Egy mértani sorozat öt egymást követő tagjának szorzata 3^{10}. Mekkora közülük a középső tag?

7. Az $1+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10\,000}$ összeg és $\frac{4}{3}$ közül melyik a nagyobb?

8. Rajzoltam egy négyzetet, majd az oldalait kétszeresére nagyítottam. Ezután újból és újból a kapott négyzet oldalait kétszeresére változtattam. Az ötödik nagyítással kapott négyzet területe hányszorosa a kezdetben megrajzolt négyzet területének?

9. Egy bolha a megfigyelés kezdetekor 50 cm távolságra ugrott el. A következő ugrása már csak fele akkorára sikerült, és minden további ugrása éppen fele olyan hosszú, mint az azt megelőző ugrásáé. Körülbelül hány mm hosszúra sikerült a nyolcadik ugrása?

10. Az előző feladatban szereplő bolha az első nyolc ugrását egy egyenes mentén hajtotta végre, de minden ugrása után irányt változtatott. Milyen távolságra került a megfigyelés kezdeti helyétől a nyolcadik ugrás után?

11. Három szám egy számtani sorozatnak, négyzeteik – ugyanebben a sorrendben – egy mértani sorozatnak egymást követő tagjai. A három szám összege 9. Melyek ezek a számok?

12.* Egy egyenlőszárú háromszög szárának, alapjának, az alaphoz tartozó magasságának és a háromszög területének számértéke a megadott sorrendben egy mértani sorozat első négy tagja. Mekkorák a háromszög oldalai?

13. Legalább hány tagot kell összeadni az első tagtól kezdve az $(a_n)=(3\cdot 2^n)$ sorozatból, hogy az összeg 1 milliónál nagyobb legyen?

14.* 1 millió forintot lekötöttem 5 évre, évi 8%-os kamatra. 5 év leteltével kivettem 500 ezer forintot, s a maradék pénzt lekötöttem egy évre, de ekkor a kamatláb már évi 10% volt. Az 1 év leteltével ismét kivettem 500 ezer forintot, s ismét lekötöttem 1 évre a megmaradt pénzt. Az éves kamatláb ekkor is 10% volt. 1 év múlva, a kamat jóváírása után mennyi pénzt vehettem volna ki?

15. Egy bankban 3 évre lekötöttünk 200 000 Ft-ot. Az első évben a bank évi 8,5%-os kamatot számolt el, a második évben a kamatlábat *p* %-kal, a harmadik évben újabb *p* %-kal csökkentette. Ily módon a harmadik év végén 10 498 Ft-tal kevesebb pénzt vehettünk fel, mint amennyit a 8,5%-os kamatláb mellett reméltünk.
Számítsd ki *p* értékét!

16. Ha tíz éven át minden év elején 100 000 Ft-ot tennénk a bankba évi 6,5%-os kamatra, majd tíz éven keresztül minden év elején ugyanakkora összeget vennénk le számlánkról, és így a 20. év elején elfogyna a pénzünk, akkor mekkora összeget vegyünk fel egy-egy évben? (Tételezzük fel, hogy a kamatláb a 20 év során nem változik.)

17. Az *A* üzem termelése egy adott évben kétszerese a *B* üzem termelésének. *B* termelése évente 18%-kal nő, amíg *A* termelésének növekedése mindössze évi 6%. Hány év múlva lesz *B* termelése kétszerese *A* évi termelésének?

18. Naponta nagyon sokféle hirdetést olvashatunk. Az egyik bank hirdetése így szól:

„Szüksége van azonnal pénzre? Forduljon hozzánk! Ha 500 000 Ft személyi kölcsönt vesz fel, csak 10 360 Ft-ot kell havonta visszafizetnie. Ragadja meg az alkalmat!”

Rövid tájékozódás után kiderült, hogy a futamidő 72 hónap.

a) Vajon mennyi pénzt vehetnénk fel 72 hónap elteltével, ha minden hónap elején a havi törlesztő részletet, a 10 360 Ft betennénk egy olyan bankba, amelyik havi 0,4%-os kamatot ígér?

b) Ha az a) kérdésben megfogalmazottak szerint járnánk el, hány hónap alatt gyűlne össze a szükséges 500 ezer Ft?

V. TUDÁSPRÓBA

1893-ban jelent meg dr. Beke Manó és Reif Jakab középiskolai tanárok szerkesztésében egy olyan feladatgyűjtemény, amelyben a szerzők a „hazai érettségi vizsgálati feladványokat" gyűjtötték össze. Az előszóban a szerzők az írásbeli érettségi vizsga szerepéről a következőket fogalmazták meg[1]:

> „A középiskolai tanuló mathematikai ismereteinek megítélésében az irásbeli vizsgálatnak van a legfontosabb szerepe: mert ebben tűnik ki leginkább, hogy minő módon tudja mathemathikai schémába önteni a materiális problémát, melylyel dolga van és minő módon tudja erre a schemára alkalmazni mathematikai ismereteit és számítási ügyességét."
> A későbbiekben arról is írnak, hogy véleményük szerint milyennek kellene lenni az írásbeli érettségi vizsga feladatainak:
> „A feladott problémáknak olyanoknak kell lenniök, hogy alkalma legyen a tanulóknak benne a mathematikai gondolkozás főbb elemeinek a bemutatására. A mathematikai gondolkozás főbb elemei alatt értjük, hogy 1) a feladott problémát pontosan értse; 2) azt a szükséges részekre bontsa, vagyis analizálja; 3) a mellékkérdéseket sorozza a szerint, a mint a főkérdés megoldására vezetnek; 4) a szükséges problémákat megoldja, megjelölve azon általános problemákat vagy tételeket, melyek alá az illető feladat sorozható és 5) a nyert eredményekből a főeredményt kellő módon összeállítsa." (© Dr. Beke Manó és Reif Jakab jogutódai)

Úgy hisszük, hogy a szerzők gondolatai a XXI. században sem veszítettek érvényességükből. Az alábbiakban ebből a feladatgyűjteményből választottunk három, a témakörünkbe tartozó feladatot. A feladatok szövegét némileg „modernizáltuk".

1. Egy fiatalember 17-edik éve beteltével szivarozni kezd. Az év végével összeszámítván kiadásait, úgy találta, hogy hetenként 1 forintot költött szenvedélyére. Ekkor így okoskodott: ha én ez évi költségemet most és ezentúl minden év végével takarékpénztárba tenném, 60 éves koromig évi 5%-ával tetemes összegre szaporodnék. Kérdés, mennyire?
(1 évben 52 héttel számoljunk.)

2. Két tőke, egyik 8000 Ft 5%-ra, a másik 12 000 forint 3%-ra kiadva, hány év múlva növekszik kamatos kamatjával ugyanazon összegre?

[1] Érettségi vizsgálati mathematikai feladatok gyüjteménye címmel reprint kiadásban megjelentette az INTEGRA-PROJEKT Kft. 1993-ban.

3.* Három mértani sorozatban az első tagok egy olyan mértani sorozat szomszédos tagjai, amelynek a hányadosa 2. A három mértani sorozat hányadosai (ugyanabban a sorrendben) egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek a differenciája 1. A három mértani sorozat második tagjainak összege 24. A harmadik mértani sorozat első három tagjának összege 84. Melyek ezek a mértani sorozatok?

2. MODUL

TELEK ÉS KERÍTÉS

Készítette: Kovács Károlyné

I. ÍGY IS, ÚGY IS LEHET

1. Egy 13 cm sugarú körnek megrajzoltuk az *AB* átmérőjét.

a) Számítsd ki annak az *ABC* háromszögnek az oldalhosszait, amelynek a területe 120 cm^2, és a háromszög körülírt köre az adott kör!

b) Van-e körnek olyan *D* pontja, amelyre az *ABD* háromszög területe 180 cm^2. Ha van, számítsd ki a háromszög oldalainak hosszát!

c) Szerkeszd meg azoknak az *E* pontoknak a halmazát a kör síkjában, amelyekre az *ABE* tompaszögű háromszög területe 195 cm^2!

d) A kör negyed körívén keresd meg az összes olyan *P* pontot, amely esetén az *ABP* háromszög *AB* oldalához tartozó magasságának hossza cm-ben mérve egész szám.
Ha véletlenszerűen választunk ezek közül a *P* pontok közül egyet, mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott *P* ponthoz tartozó *ABP* háromszög területe legalább 39 cm^2 és legfeljebb $91\,cm^2$?

e) Az a) kérdésben meghatározott *ABC* háromszög beírt körének mekkora a sugara?

2. A 2 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög mindhárom oldala fölé olyan négyzetet rajzolunk, amelyik nem tartalmazza a háromszöget. A négyzeteknek a háromszög csúcsától különböző csúcsai egy hatszöget határoznak meg.

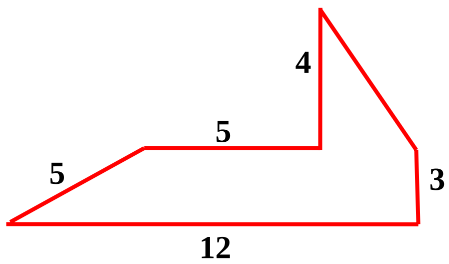
a) Számítsd ki ennek a hatszögnek a területét!

b) A hatszög azon oldalain át, amelyeknek a hossza megegyezik a négyzet oldalának hosszával, egyeneseket rajzolunk. A három egyenes meghatároz egy *DEF* háromszöget. Mekkora ennek a háromszögnek a területe?

c) Ha a *DEF* háromszög minden oldala fölé az előbbihez hasonlóan ismét négyzetet rajzolnánk, akkor a már ismert módon meghatározott hatszögnek mekkora lenne a területe?

3. Szerkessz egy 60°-os szöget, és annak szögtartományában egy olyan 2 cm sugarú kört, amely a szög mindkét szárát érinti! Jelöld a szög szárait *a*-val, illetve *b*-vel! Szerkessz olyan *e* egyenest, amely az *a* szögszárral 45°-os szöget zár be, és az egyenes érinti a 2 cm sugarú kört! Hány ilyen egyenes szerkeszthető?
Az *a* és *b* szögszárak és az *e* egyenes által meghatározott lehető legnagyobb háromszögnek hány cm^2 a területe?

4. Az ábrán háromszög alapú egyenes hasáb alakú építőkockákból felépített vár oldallapja látható. (Az ábrán látható számok az építőkocka egy-egy élének cm-ben mért hosszát jelölik.)



a) Mekkora a vár oldallapjának területe?

b) Rajzold le, milyen építőkockákból épülhetett fel a várnak ez a fala, ha tudjuk, hogy a vár oldallapja 4 építőkockából jött létre?

5. Egy mozaikkép háromféle olyan négyszöglapból készült, amelyek mindegyikének a hegyesszöge 61°-os. A háromféle lap a következő: egy b oldalhosszúságú rombusz; egy olyan húrtrapéz, amelynek szára b, a hosszabbik alapja $2b$ hosszú; és olyan paralelogramma, amelynek az egyik oldala b, a másik $3b$ hosszú.

a) Mekkora a három elem területének aránya?

b) Mindhárom elem, és egyetlen b oldalhosszú egyenlő oldalú háromszöglap felhasználásával rakj ki hézagmentesen egy $6b$ oldalhosszúságú, szabályos háromszög alakú „képet”! (Mindhárom négyszöglapból tetszőleges mennyiség áll rendelkezésedre.) Készíts vázlatos rajzot az elkészült képről!

6. Egy derékszögű trapéz minden oldala érint egy olyan kört, amelynek a sugara 2 cm hosszú. A trapéz alapjához nem derékszögben hajló szárának hossza 5 cm.
Mekkora a trapéz kerülete?

7. Egy húrtrapézba kör írható. A trapéz alapjainak hossza 54 cm és 6 cm.

a) Hány cm hosszú a trapéz szára?

b) Mekkora a beleírható kör sugara?

II. SOKSZÖG, SOK SZÖG?

Ismétlő kérdések sokszögekről

1. Hány oldala van a sokszögnek, ha átlóinak a száma a) 65; b) 29?

2. Hány csúcsa van a szabályos sokszögnek, ha a szomszédos szimmetriatengelyeinek hajlásszöge 60°?

3. Hány csúcsa van a szabályos sokszögnek, ha a szomszédos szimmetriatengelyeinek a hajlásszöge 7°?

4. Hány oldala van annak a szabályos sokszögnek, amelyiknek egyik belső szöge 165°?

5. Hány oldalú az a szabályos sokszög, amelyiknek egyik belső szöge 17-szerese egyik külső szögének?

6. Egy szabályos sokszög egyik oldalának hossza π egység, és egyik belső szöge kisebb, mint a külső szöge. Mekkora a sokszög kerülete és területe?

7. Egy szabályos sokszög egyik oldala: $2\sqrt{3}$, és egyik belső szöge egyenlő egyik külső szögével. Hány területegység a sokszög területe?

8. Egy konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Melyik állítás igaz?

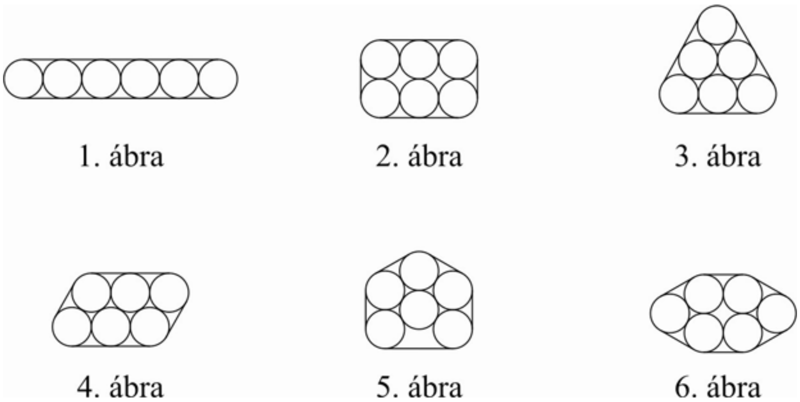
A: Oldalai egyenlők. **B:** Húrsokszög **C:** Szögei páronként egyenlők.

D: Van olyan kör, amelyet a hatszög minden oldala érint.

További feladatok

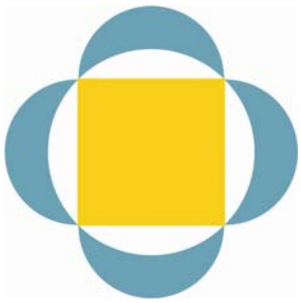
9. Egy 4 cm sugarú kör K középpontjától 6,1 cm távolságra lévő P pontból meghúztuk a kör érintőit. Mekkora annak a körcikknek a területe, amelyet a két érintési pontot összekötő rövidebb körív határol?

10. Hat darab henger alakú konzervdobozt (alapkörük átmérője 10 cm) hatféle módon kötöztünk össze nyújthatatlan madzaggal (az ábrák felülnézeti képeket mutatnak). Melyik esetben volt szükség a lehető legrövidebb madzagra, ha veszteséggel egyik esetben sem számolunk?



11. Mark Twain híres könyvének, a Tom Sawyer kalandjainak ismert jelenete a kerítésfestés. Tomot megbízza Polly néni, hogy fesse le a kerítésüket. (Ez természetesen Tom egy csínytevésének volt a büntetése.) Tom ügyesen kedvet csinál barátainak a festéshez, s azok boldogan nekilátnak helyette elvégezni a munkát.

Ehhez hasonló eset ma is megtörténhet: Anna, szabadidejében, a zsebpénze kiegészítése miatt munkát vállalt. Előre gyártott emblémákat kellett befestenie kék, illetve mustársárga színűre, az ábrának megfelelően.



Anna barátja, Jóska kíváncsian nézte az emblémákat. „Te, ezek a hosszabb ívek, a négyzet oldalai fölé rajzolt félkörök, a kisebbek pedig a négyzet középpontjából félátlónyi sugárral rajzolt negyed körívek! Gyorsabban végeznél, ha én is festenék! Az íveket hadd fessem én, így én mindig kisebb felületet festek be, mint te!” Anna megengedte.

Igaza volt Jóskának? Az emblémákon valóban a kisebb területű rész festését vállalta el?

12. Egy 6 cm oldalhosszú *ABCDE* szabályos ötszögnek a *D* csúcsából meghúztuk két átlóját. Mekkora a területe az *ABD*, illetve a *BCD* háromszögnek?

3. MODUL
A MI TERÜNK

Készítette: Kovács Károlyné

I. KOCKÁZÁS

Az alábbi feladatok megoldása közben hasznos, ha van előtted két kocka. Az egyik legyen lapok által határolt, a másik „átlátszó", csak az élei jelenítsék meg a kockát.

1. Állíts össze egy kockát a Polydron-készlet elemeiből! Mérd le a kocka élének hosszát mm pontossággal, és számítsd ki a kocka lapátlójának, testátlójának a hosszát, a kocka felszínét és térfogatát!

2. Hány átlósíkja van egy kockának? (Átlósíknak nevezünk minden olyan síkot, amely tartalmazza a kocka négy csúcsát, de a lapját nem.) Az átlósíkokból a kocka egy-egy síkidomot vág ki. Számítsd ki ezeknek a síkidomoknak a területét!

3. Mekkora szöget zár be egymással a kocka egy csúcsából kiinduló

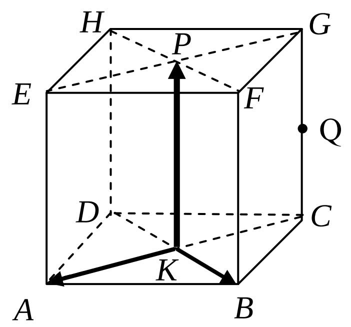
a) két lapátlója; b) lapátlója és testátlója; c) éle és testátlója?

4. Válassz ki a kocka csúcsai közül négyet úgy, hogy azok egy szabályos tetraéder csúcsai legyenek! (Szabályos tetraéder olyan gúla, amelynek minden lapja egyenlő oldalú háromszöglap.) Számítsd ki ennek a szabályos tetraédernek a térfogatát, ha a kocka élének hossza 6 cm!

5. Tegyél egy tömör kockát az asztallapra úgy, hogy a kocka egyik lapja párhuzamos legyen az asztallapra merőleges fallal! Ebből a helyzetből kiindulva, forgasd a kockát a fallal párhuzamos forgástengelye körül! A forgatás során a kocka oldallapja maradjon végig az asztalon!

a) Ha a forgatás közben a falra merőlegesen megvilágítanánk a kockát egy párhuzamos fénynyalábbal, milyen lenne a kocka árnyéka a falon? Rajzold le az árnyékot 45°-os, 60°-os és 90°-os szögelforgatásnál! Mérd meg a kockád élének hosszát, és ennek alapján számítsd ki az árnyék által meghatározott síkidom területét mind a három szögelforgatás esetében!

b)* Az ilyen módon forgatott és megvilágított kocka árnyékának területe – adott élű kocka esetében – csak az elforgatás szögétől függ. Legyen az elforgatás szöge a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ intervallum eleme! Add meg képlettel, és ábrázold is ezt a függvényt! A kocka élének hosszát válasszuk 1 egységnek!

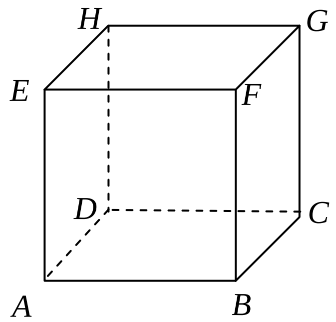


6. Adott az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka három vektora: $\overrightarrow{KA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{KB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{KP} = \mathbf{p}$.

E három vektor és a vektorműveletek felhasználásával írd fel a következő vektorokat!

a) $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{DE}$; c) $\overrightarrow{BH}$;

d) $\overrightarrow{HC}$; e) $\overrightarrow{DQ}$, ahol *Q* a *CG* él felezőpontja.



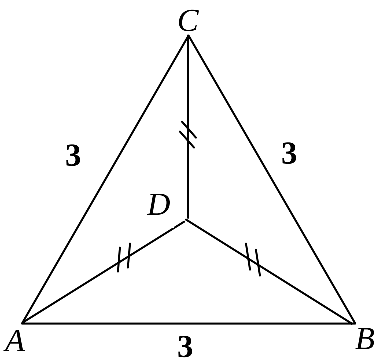
7. Keress a kocka lapjain olyan pontokat, amelyek egyenlő távolságra vannak a kocka *DF* testátlójának két végpontjától!

II. SZÖGLETES TESTEK

1. A 4 cm oldalélű kocka minden lapjára kifelé olyan gúlát építünk, amelynek az oldalélei szintén 4 cm hosszúak. Mekkora az így keletkező csillagalakzat térfogata?

2. Egy téglatest térfogata 225 cm^3, továbbá három, közös csúcsú oldallapjának területaránya 1:3:5. Határozd meg a téglatest éleinek hosszát!

3. Panni 12. osztályos tanuló, és ő is most különböző testek térfogatának és felszínének a kiszámítási módját tanulja matematika órán. Kezébe került egy japán nyelven írt matematika tankönyv. Az egyik feladathoz az alábbi ábra tartozott:



$ADB = BDC = CDA = 120^{\circ}$

„Ez biztos egy *ABC* háromszög alapú, egyenlő oldalélű gúla. Gondolom, hogy a felszínét vagy a térfogát kell kiszámítani." – gondolta Panni. Te hogyan értelmeznéd a látottakat?

4. Egy háromoldalú egyenes hasáb alaplapja olyan *ABC* derékszögű háromszög, amelyben a derékszög a *C* csúcsnál van, és $AC = 20\text{ cm}$, $BC = 21\text{ cm}$ hosszú. A hasábból egy síkkal lemetszünk egy *ABC* alaplapú testet. Ez a sík az *A*, *B* és *C* csúcsokból induló oldaléleket az alaptól rendre 10 cm, 16 cm és 16 cm távolságra metszi. Mekkora térfogatú testet vágtunk le a hasábból?

5. Egy desszertes doboz szabályos hatszögalapú egyenes hasáb. A dobozba elhelyezett desszertek szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alakúak. Méreteik: az alapélük 4 cm, a magasságuk 2 cm hosszú. A desszerteket a dobozban szorosan egymás mellé helyezik el, és a desszertek és a doboz oldallapja közötti 0,5 cm-es hézagot papírral töltik ki. A desszertek alá és fölé is papírt tesznek, amelyek magassága összesen szintén 0,5 cm. Mekkora térfogatú részt töltenek ki a desszertek, és mekkora a doboz térfogata, ha a doboz falvastagsága elhanyagolható?

6. Egy csonkagúla oldalélei egyenlő hosszúak, az alaplapjai 6 cm és 4 cm oldalhosszúságú négyzetek. A csonkagúla oldallapjainak területösszege megegyezik az alaplapok területének összegével. Számítsd ki a csonkagúla felszínét és térfogatát!

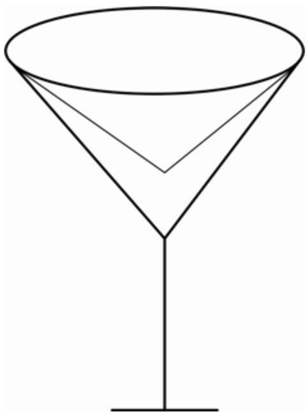
III. GÖMBÖLYŰ TESTEK

1. Egy 2 m hosszú vascső falvastagsága 12 mm, belső átmérője 40 mm. Mit gondolsz, egy 5 éves kisgyerek meg tudja-e emelni a csövet a közepénél fogva?

(A vas sűrűsége $7{,}86\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.)

2. A forgáshenger alakú 3 dl-es vizespoharamat 10 cm magasságig töltöttem meg vízzel. Vajon kifolyik-e belőle a víz, ha beledobok egy 3 cm-es átmérőjű golyót, ami lemerül a pohár aljára? (A vizespohár alaplapjának átmérője 6 cm.)

3. Az ábrán látható pohár két, közös alapú körkúpból készült. A kúpok csúcsának távolsága 3,2 cm. Az egyik kúp nyílásszöge 90°, a másiké 60°. A két kúp palástja közötti rész tömör üveg. Mekkora ennek a résznek a térfogata?



4. Mekkora tömegű terhet tud felemelni egy héliummal töltött, 12 m sugarú, gömb alakú léghajó, ha az elhanyagolható vastagságú burkolat négyzetmétere 0,2 kg tömegű? (1 m^3 levegő tömege kb. 1,29 kg, a léggömböt megtöltő héliumé köbméterenként 0,268 kg.)

5. Egy egyenes csonkakúp alap- és fedőkörének sugara R és r ($r < R$), magassága 10 cm. A csonkakúp alkotójának és alaplapjának α hajlásszögére $\text{tg}\alpha = 2$ teljesül. Az alapkörre emelt, ugyanakkora magasságú henger térfogata 1,5-szerese a csonkakúp térfogatának. Hány cm hosszú R és r?

6. Charles Simonyi magyar származású fejlesztőmérnök volt az ötödik űrturista. 2007. április 7-én indult a Szojuz-TMA-10 űrhajóval 11 napos űrutazására, a Nemzetközi Űrállomásra.

a**)** Vajon a Föld felszínének hány százalékát láthatta Charles Simonyi egy olyan pillanatban, amikor az űrhajó a Földtől 200 km távolságban volt? (A Föld sugarát vegyük 6370 km-nek.)

b) Mekkora látószögben láthatta Charles Simonyi az a) kérdésben látott Földrészlet két legtávolabbi pontját összekötő szakaszt?

7. Az *ABC* háromszög két oldalának hossza $a = 3\,\mathrm{dm}$ és $b = 4\,\mathrm{dm}$, továbbá e két oldal által közbezárt szög 120°. Megforgatjuk a háromszöget először a *b*, majd a *c* oldalának egyenese körül. Az egyik, illetve másik 360°-os forgatás során mekkora térrészt határol a háromszög?

IV. SÍKBAN, TÉRBEN

1. Az alábbiakban megfogalmaztunk néhány síkbeli problémát. Ezeknek az alakzatoknak mi lehetne a térbeli megfelelője? Fogalmazd meg a síkgeometriai feladattal analóg térgeometriai feladatot! Oldd meg az eredeti, és az így kapott térgeometriai feladatot is!

a) Adott egy α konvex szög. Keresd meg azon körök középpontjainak halmazát az α szög szögtartományában, amelyek érintik a szög mindkét szárát!

b) Milyen hosszú a b oldalhosszúságú négyzet beírt körének sugara?

c) Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza a és b. Mekkora sugarú kör írható a téglalap köré?

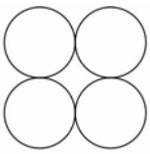
d) Egy háromszög területe t, kerülete k. Mekkora a háromszög beírt körének r sugara?

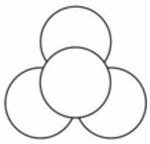
2. Egy egyenes henger alapkörének sugara 3 dm hosszú. A hengerbe beírt lehető legnagyobb térfogatú egyenes körkúp palástjának területe megegyezik a henger palástjának területével. Mekkora a henger magassága?

3. Egy egyenlő oldalélű, négyzet alapú csonkagúla magassága 8 cm, alap- és fedőlapjának területe rendre 36 cm^2, illetve 25 cm^2. A csonkagúlába egy kockát helyeztünk el úgy, hogy annak egyik oldallapja a csonkagúla alaplapjára illeszkedik, a többi csúcsa pedig a csonkagúla alkotóinak egy-egy pontja. Mekkora a kocka éle?

4. Az egyik üzletben 4 gumilabdát háromféle kiszerelésben árulnak. Az ábrákon a labdák elrendezése látható a különböző alakú dobozokban.


1. ábra


2. ábra


3. ábra

Az 1. ábra szerinti elrendezés esetében henger, a 2. esetben téglatest, a 3.-ban pedig egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alakú dobozba helyezik el a labdákat. A labdák átmérője 3 cm.

Számítsd ki, hogy az egyes esetekben mennyi papír szükséges az egyes dobozok elkészítéséhez, ha a lehető legkevesebb papírból szeretnénk előállítani az egyes dobozokat! (A veszteségtől és az illesztéshez szükséges ráhagyásoktól eltekintünk.)

5. Egy egyenes fenyőfatörzs magassága 12 m, a vastagabb végénél az átmérő 32 cm, a vékonyabb végénél 20 cm hosszú. Egy faesztergályos a fatörzsből a lehető legnagyobb térfogatú, téglalap alapú egyenes hasáb alakú gerendát szeretne készíteni. Hogyan válassza meg a hasáb méreteit? Mennyi lesz a veszteség?

6. Egy sajtdarab alakja szabályos hatszögalapú egyenes gúla. Hányféleképpen és hol vágható el egyetlen, a gúla alapjára merőleges, vagy vele párhuzamos egyenes vágással két egyenlő térfogatú részre?

4. MODUL

MÉG EGYSZER

Készítette: Kovács Károlyné

Feladatok

1. Egy szigorúan növő számtani sorozat öt egymást követő tagjának összege 100. Lehet-e tagja a (-2)? Indokold a döntésedet!

2. Egy számtani sorozat első hat és első hét tagjának összege egyaránt 63. Mennyi a sorozat negyedik és harmadik tagja?

3. Egy háromszög oldalhosszai rendre egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Az oldalhosszak mértékszáma egész szám, szorzatuk 27. A háromszög. Mekkora a háromszög kerülete?

4. Egy mértani sorozat első négy tagjának összege tízszerese az első két tag összegének. A nulla nem tagja a sorozatnak. Mekkora lehet a sorozat hányadosa?

5. Egy háromszög oldalainak harmadoló pontjai hatszöget határoznak meg. A háromszög területének hányadrésze e hatszög területe?

6. A (szabályos) hatszögletű „Kerek Erdő" közepén áll Mikkamakka, s tőle az erdő legtávolabbi pontja 10 méterre van. Mekkora a Kerek Erdő kerülete?

7. Egy r sugarú félgömb határkörére mint alapkörre $2r$ magasságú egyenes forgáskúpot illesztünk. Mekkora az így nyert „Keljfeljancsi" térfogata?

8. Egy sokszög bizonyos csúcsait összekötő szakaszok hosszát a, b, c és d, az általuk bezárt szögeket pedig α, β jelöli. A sokszög területét melyik kifejezés adhatja meg?

A: $\dfrac{a+b}{2ab} \cdot c \cdot d \cdot \sin\alpha$;

B: $\dfrac{1}{2}(ab+bc+ac) \cdot d \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

C: $\sqrt{a^2+b^2} \cdot (bc+ad)$;

D: $\dfrac{a^2+b^2}{c^2} \cdot d^2 \cdot \pi \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

9. Egy poliéder bizonyos csúcsai közötti szakaszok hosszát a, b, c, d, és e, az általuk bezárt szögeket pedig α *és* γ jelöli. A poliéder térfogatát melyik kifejezés adhatja meg?

A: $\frac{(a+b)(a+d)(b+c)(c+d)}{(a+c)(b+d)} \cdot \sin\gamma$;

B: $ab\left(d-\sqrt{c^2+d^2}\right)$;

C: $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)(a+b+c+d)\cos\alpha\sin\gamma$;

D: $\frac{abcd}{ab+cd} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma$.

10. Egy szigorúan csökkenő számtani sorozat első három tagjának összege 24. A sorozat második tagja olyan mértani sorozat első tagja, amelynek a hányadosa megegyezik a számtani sorozat differenciájával. A mértani sorozat első három tagjának összege 104.

Számítsd ki a sorozatok első tagját és differenciáját, illetve a hányadosát!

11. Évi 8%-os kamatlábbal, negyedévente tőkésítve 1,5 év múlva 112 616 Ft lett a számlánkon. Ekkor kivettünk 50 000 Ft -ot, és a maradék pénzt – kéthavonta tőkésítve – három éven át kamatoztattuk, változatlan éves kamatláb mellett. Mennyi pénzünk volt a számlán eredetileg?

12. Egy derékszögű háromszög átfogója 35 cm hosszú. Az átfogót 3:4 arányban osztó pont egy olyan kör középpontja, amely érinti a háromszög mindkét befogóját.

a) Mekkora ennek a körnek a sugara?

b) Mekkora a háromszög területe?

13. Egy kocka éleinek hossza $b = 10$ dm. A kockába egy lehető legnagyobb térfogatú, kör alapú egyenes hengert helyezünk el, majd abba belerakunk egy lehető legnagyobb térfogatú téglalap alapú, egyenlő oldalélű gúlát, és végül ebbe belehelyezünk egy olyan egyenes csonkakúpot, amelynek az alapköre a gúla alaplapjába beírt kör, magassága $\frac{b}{2}$.

Számítsd ki az egymásba „skatulyázott” testek térfogatát!

5. MODUL
ISMÉTLÉS
A TUDÁS ANYJA

Készítette: Kovács Károlyné

I. HALMAZOK

1. Határozd meg

a) az 1 224 555 hétjegyű szám számjegyeinek halmazát!

b) a pozitív páros prímszámok halmazát!

c) az egyjegyű négyzetszámok halmazát!

d) a 15-tel osztható kétjegyű számok halmazát!

e) a π szám egy tizedes jegyre, 2 tizedes jegyre, 3, 4, illetve 5 tizedes jegyre kerekített értékeinek halmazát!

f) a $\{-3;-2;-1;-0;1;2;3\} \to \mathbf{Z}; x \mapsto 2-|x-1|$ függvény értékkészletét!

g) a valós számok lehető legbővebb részhalmazát, amely megoldáshalmaza a $(x-2)(4-x)>0$ egyenlőtlenségnek!

2. Az A és B halmazról a következőket tudjuk:

- $A \setminus B = \{0;1;3;4\}$
- $B \setminus A = \{6;7;8\}$
- $A \cup B$ az egyjegyű természetes számok halmaza.

Add meg az A, a B, és az $A \cap B$ halmazokat elemeik felsorolásával!

3. Az A és a B halmaz is 4 elemű, és minden elemük pozitív egész szám. Az $A \cap B$ halmaznak 3 eleme van, és elemeinek szorzata 12. Az A halmaz elemeinek szorzata 60, a B halmaz elemeinek összege 12. Határozd meg az A és a B halmazt!

4. Jelöljük A-val a 630 prímosztóinak halmazát, B-vel a 300 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát, és legyen $C = \{y \in \mathbf{Z} \mid y = 2x+1, x \in \mathbf{N} \text{ és } x \le 4\}$.

a) Add meg mind a három halmazt elemeik felsorolásával is!

b) Szemléltesd a három halmazt Venn-diagrammal! Mindhárom halmaz elemeit írd be a halmazábrába!

c) Add meg elemeik felsorolásával az $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$ és $A \setminus (B \cup C)$ halmazokat!

5. Egy középiskola tanulóközösségének néhány – nem üres – részhalmaza a következő:

A: a kitűnő tanulók halmaza;

B: kollégiumban lakó tanulók halmaza;

C: a középiskola leánytanulóinak halmaza.

Add meg az A, B, C halmazok és a halmazműveletek segítségével két különböző módon is a „*nem kitűnő, nem kollégista fiútanulók*” halmazát!

6. Jelölje D az $x^2 - x - 6 < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát, és legyen $E = \{x \in \mathrm{R} \mid (x+3)(1-x) \geq 0\}$.

a) Add meg intervallummal a D és E halmazokat, továbbá a $D \setminus E$ halmazt!

b) Oldd meg a valós számok halmazán az $\left.\begin{array}{r} x^2 - x - 6 < 0 \\ (x+3)(1-x) \geq 0 \end{array}\right\}$ egyenlőtlenségrendszert!

7. Jelölje A a trapézok, T a téglalapok, R a rombuszok és P a paralelogrammák halmazát.

a) Szemléltesd a négy halmazt Venn-diagrammal!

b) Milyen négyszögek halmaza a $T \cap R$ halmaz?

c) Add meg halmazműveletek alkalmazásával a nem derékszögű paralelogrammák halmazát!

d) A derékszögű trapézok D halmazát is vegyük hozzá a négy halmazhoz, és szemléltesd az öt halmazt Venn-diagrammal!

8. Egy munkahelyen 52 nő dolgozik. A táblázat a nődolgozók hajának színéről és családi állapotáról készült felmérés adatait tartalmazza.

	Házas	Hajadon	Elvált
Barna	**8**	**6**	**6**
Vörös	**4**	**2**	**0**
Szőke	**6**	**4**	**3**
Fekete	**8**	**2**	**3**

Jelölje B a barnák, V a vörösek, S a szőkék, F a feketék, Z a házasok, H a hajadonok és E az elváltak halmazát.

a) $|H| = ?$ b) $|(H \cup E) \cap S| = ?$

c) $|(B \cup V) \setminus H| = ?$

d) Hány olyan nő dolgozik a munkahelyen, aki szőke vagy fekete, és házas vagy elvált? Add meg ezt a halmazt az S, F, H, E halmazok és halmazműveletek felhasználásával is!

9. Legyen $A=\{a;b;c\}$ és $C=\{a;b;d;e\}$. Hány olyan B halmaz állítható elő, amelynek az elemei szintén az ábécé betűi, és $B \subseteq C$, továbbá az $A \cap B$ halmaz kételemű?

10. Tegyük fel, hogy van olyan tévé tulajdonos, akinek nincs rádiója. Továbbá tételezzük fel azt is, hogy akinek van autója, de nincs rádiója, annak nincs tévéje sem.
Következik-e ebből, hogy van olyan tévé tulajdonos, akinek nincs autója?

11. Egy 35 fős osztály minden tanulójának – egy vízitúra előtt – három kérdésre kellett válaszolnia. A kérdések a következők voltak:

1) Szereted-e a szilvásgombócot?

2) Este 11 órakor legyen-e a takarodó?

3) Végig tudsz-e úszni egy 200 m-es távot pihenés nélkül?

A kérdésekre az osztály minden tagja válaszolt, igennel vagy nemmel.
A válaszadás után kiderült, hogy az 1. és 3. kérdésre egyaránt 18-18 igen válasz érkezett, míg a 2. kérdésre 12. Az 1. kérdésre igennel válaszolók közül 12-en a 2., 8-an pedig a 3. kérdésre feleltek nemmel. Igent mondott a 2. és 3. kérdésre 6 tanuló, de közülük 2-en az első kérdésre nemmel válaszoltak.
Legyen I = {az osztály tanulói}, I_1 = {az 1. kérdésre *igen*-nel válaszolók}, I_2 = {a 2. kérdésre *igen*-nel válaszolók}, I_3 = {a 3. kérdésre *igen*-nel válaszolók} halmaza.

a) Milyen választ adtak az 1. kérdésre az $I \setminus I_1$ halmazba tartozók?

b) Hány eleme van az $I_1 \setminus I_2$ halmaznak?

c) Hány eleme van az $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ halmaznak?

d) Szemléltesd a négy halmazt Venn-diagrammal, és írd be mindegyik részhalmazba annak elemszámát!

e) Hányan válaszoltak mind a három kérdésre nemmel?

II. SZÁMOK KÜLÖNBÖZŐ ALAKBAN

1. Írd fel a $\frac{1}{2}$ számot

a) egy szám négyzetgyökeként!

b) egy szám ellentettjeként!

c) egy szám négyzeteként!

d) egy szám 20%-aként!

e) egy szám abszolútértékeként!

f) egy szám 5-ödik hatványaként!

g) a 4 hatványaként!

h) a 10 hatványaként!

i) egy szám 8-as alapú logaritmusaként!

j) egy valós szám szinuszaként!

2. Állítsd elő a 12-t és a 37-et a 2 különböző egész kitevőjű hatványainak összegeként! Írd fel e két számot a 3 különböző egész kitevőjű hatványainak összegeként is!

3. Állítsd elő a 10-et

a) két négyzetszám összegeként!

b) két szám négyzetének összegeként!

4. Az alábbi számokat add meg egy-egy prímszám hatványaként!

a) $\sqrt{625}$; b) $\sqrt[5]{81}$; c) $\sqrt[10]{(-16)^4}$; d) $7^{\log_7 125}$; e) $\log_4 2^{32}$.

5. Döntsd el, hogy az alábbi alakban megadott számok közül melyek racionális számok! Döntésedet indokold!

a) $4\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}$; b) $2\cdot\sqrt{80}-\sqrt{45}-\sqrt{125}+1$; c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{15}}{2}$;

d) $\left(\sqrt{21}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{84}-3\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}+2\cdot\sqrt{2}\right)$; e) $\frac{\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{\frac{81}{16}}}{\sqrt{\frac{1}{16}}}$; f) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2+6\sqrt{24}$.

6. Melyik szám a $\sqrt{2}$ reciproka?

A: 2; **B:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **C:** $-\sqrt{2}$; **D:** Egyik eddigi válasz sem helyes.

7. Melyik szám a $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ reciproka?

A: $-\sqrt{2}-3$; **B:** $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$; **C:** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **D:** Egyik válasz sem helyes.

8. Az alábbi hatványok között vannak olyanok, amelyeket nem értelmezünk. Válaszd ki közülük azokat, amelyek értelmezve vannak! Döntésedet indokold!

$\dfrac{(-1)^{-3}}{2}$; $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{-3}$; $(\sqrt{2})^{-3}$; $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $(-2)^{-3}$; $(-3)^{\sin\frac{7\pi}{3}}$; $(\sin 3)^{0,3}$; $(-3)^{\sin(-3)}$

9. Igazold, hogy az alábbi alakban megadott számok mindegyike racionális szám!

$3^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$; $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$; $0{,}25^{\log_2 3}$; $(\sqrt{2})^{4-\log_2 9}$.

10. Vezessük be a következő jelölést: $\log_2 3 = k$. Fejezd ki k-val az alábbi kifejezéseket!

a) $\log_4 144$; b) $\log_2^2 6 - \log_2^2 3$?

11. Közelítő értékek használata nélkül rendezd növekvő sorrendbe az alábbi számokat! Állításodat indokold!

$\sin 4$; $\sin 4°$; $\operatorname{tg}(-495°)$; $\cos 28{,}5\pi$; $\cos 6{,}3$; $\sin^2 2 + \cos^2 2$.

III. FÜGGVÉNYEK

Függvények megadása képlettel

1. Az alábbi feladatokban szöveggel megadott függvények szerepelnek. Add meg képletével a kérdezett függvényt! (Az értelmezési tartomány megadásáról se feledkezz meg!)

a) Tekintsük azokat a téglatesteket, amelyeknek egy csúcsból kiinduló élei egy $d=2$ differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. Jelöljük x-szel a téglatest leghosszabb élének hosszát. Add meg e téglatestek térfogatát x függvényében! Hogyan függ x-től e téglatestek felszíne?

b) Hogyan függ a sokszögek átlóinak száma a sokszög oldalszámától?

c) Hogyan függ a kör t területe a k kerületétől?

d)* Az üres 50 literes kád lefolyónyílását lezárjuk, és kinyitjuk a csapot, amelyből egyenletesen, percenként 4 liter víz folyik a kádba. 2 perc után kihúzzuk a lefolyó nyílásából a dugót, de nem zárjuk el a csapot. A lefolyón át percenként 1 liter víz folyik ki. Hogyan függ a kádban lévő víz mennyisége a csap kinyitásától eltelt időtől?

Alapfüggvények

2. Add meg a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezésekkel függvény adható meg!

$f(x)=x$; $g(x)=x^2$; $h(x)=\sqrt{x}$; $k(x)=\dfrac{1}{x}$; $m(x)=|x|$;

$n(x)=3^x$; $p(x)=\log_2 x$; $r(x)=\sin x$; $r(x)=\cos x$; $t(x)=\operatorname{tg} x$.

a) Vázold az így értelmezett függvények grafikonját egy-egy koordináta-rendszerben!

b) Ha $-2<x\le 3$, akkor milyen értékeket vehetnek fel a következő függvények:

x^2; $|x|$; 3^x; $\sin x$?

c) Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket, egyenletet!

$\log_2 x \le 3$; $\dfrac{1}{x}<1$; $x^2 \ge 4$;

$\sqrt{x}+4=0$; $\sin x=-0{,}5$; $\dfrac{\sin x}{\cos x}=1$.

d) Az $f:\left[\dfrac{2}{13};4\right]\to \mathbf{R}, x\mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény függvényértékei között hány egész szám van?

Függvények ábrázolása transzformációval

3. a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^2$ függvény grafikonjából kiindulva ábrázold függvénytranszformációval a $g(x)=(x+2)^2-3$ függvényt, ahol $x\in\mathbf{R}$!

b) Ábrázold függvénytranszformációval a $h(x)=x^2+4x+1$ függvényt, ahol $x\in\mathbf{R}$!

c) Ábrázold függvénytranszformációval a $k(x)=\dfrac{1}{x+2}-3$ függvényt, ahol $x\in \mathrm{R}\setminus\{-2\}$!

d) Ábrázold függvénytranszformációval az $m(x)=\left|\log_2(x+2)\right|$ függvényt, ahol $x\in\mathbf{R}$ és $-2<x$!

e) Told el a valós számok halmazán értelmezett $r(x)=\sin x$ függvény grafikonját a $\mathbf{k}\left(-\dfrac{\pi}{2};1\right)$ vektorral! Add meg képlettel is a kapott függvényt!

f)* Forgasd el a valós számok halmazán értelmezett $n(x)=3^x$ függvény grafikonját a koordináta-rendszer origója körül negatív irányba 90°-kal! A kapott függvényt add meg képlettel is!

Néhány függvénytulajdonság

4. a) A valós számok halmazán értelmezett $d(x)=2^{\sin x-\cos x}$ függvény melyik számot rendeli a nullához?

b) Az f függvény minden kétjegyű, tízzel osztható pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám különböző prímosztóinak számát. Pl. a 10-hez 2-t rendel, mert a 10-nek két különböző prímosztója van (2 és 5). Melyik számot rendeli a függvény a 60-hoz? Hányszor veszi fel a függvény a 3 értéket? Add meg a függvény értékkészletét!

c) Határozd meg a $g:\ ]2;+\infty[\ \to \mathrm{R},\ g(x)=\log_{0,4}(x-2)$ függvény zérushelyeit!

d) Állapítsd meg a valós számok halmazán értelmezett $h(x)=3-2\cdot|x-4|$ függvény szélsőértékét, és annak helyét!

e) Állapítsd meg $k:\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ k(x)=x^2+3x-2$ függvény minimumát, és annak helyét!

f) Számítsd ki az $n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}; x\mapsto(2-x)(x+6)$ függvény zérushelyeit, szélsőértékét, és annak helyét!

g) Határozd meg a $p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}; x\mapsto(x-3)(x-5)+3$ függvény minimumát!

IV. SZÖVEGES EGYENLETEK

Szöveg lefordítása az algebra nyelvére

A következő feladatok szövegében rejlő feltételek alapján négyféle egyenletet írtunk fel. Közülük pontosan egy felel meg a feltételeknek. Döntsd el, hogy melyik!

A helytelenül megadott egyenletek közül válassz egyet, és változtasd meg a szöveget úgy, hogy a kiválasztott egyenlet jól írja le az új szövegben rejlő összefüggéseket!

1. (Ez a feladat már Eukleidész könyvében is megtalálható, persze nem pontosan ebben a megfogalmazásban.)

Egy öszvér és egy szamár terhet cipelve beszélgetett. A szamár így szólt: „Ha átvenném a terhedből 100 kg-ot, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd.” Az öszvér így felelt: „Az ám, de ha te adnál át nekem 100 kg-ot, akkor én háromszor annyi tömeget cipelnék, mint te.”

Jelölje x a szamár és y az öszvér terhének tömegét kilogrammban. Melyik egyenlet írja le helyesen a feladatot?

A: $\left.\begin{array}{l} x+100=2y \\ y+100=3x \end{array}\right\}$;

B: $\dfrac{x+100}{2}+100=3(x-100)-100$;

C: $\left.\begin{array}{l} 2(x+100)=y-100 \\ y+100=3(x-100) \end{array}\right\}$;

D: $\dfrac{x+100}{2}-100=3(x-100)+100$.

2. Az osztálykirándulás egyik napjára egy 24 km-es túrát tett meg az osztály. A lányok és a fiúk egyszerre indultak, és ugyanazon az útvonalon haladtak, de a fiúk óránként 2 km-rel többet tettek meg, mint a lányok, és így éppen egy órával hamarabb célba értek.

Jelölje v a lányok sebességét km/h-ban (illetve t azt az időt órában, amennyi idő alatt a lányok megtették a 24 km-es utat). Melyik egyenlet írja le pontosan az elmondottakat?

A: $\dfrac{24}{v+2}-1=\dfrac{24}{v}$;

B: $\left.\begin{array}{l} vt=24 \\ (v-2)(t-1)=24 \end{array}\right\}$;

C: $\dfrac{24}{t}=\dfrac{24}{t-1}+2$;

D: $\dfrac{24}{v+2}+1=\dfrac{24}{v}$.

3. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 5. Ha a két számjegy közé beírunk egy 1-est, és a kapott háromjegyű számot elosztjuk 8-cal, a hányados az eredeti kétjegyű szám lesz, a maradék pedig 2. Jelöljük *x*-szel a kétjegyű szám utolsó számjegyét. Melyik egyenlet írja le helyesen a számok közötti kapcsolatot?

A: $100(5-x)+10x+1=8\cdot[10(5-x)+x]+2$; **B:** $10(5-x)+10+x=80(5-x)+x+2$;

C: $100(5-x)+10+x=8\cdot[10(5-x)+x]+2$; **D:** $\frac{100(5-x)+10+x}{8}=10(5-x)+x+2$.

Egyenletek felírása kis segítséggel

4. Balázs mesélte, hogy 4 év múlva félannyi idős lesz, mint amennyi az apja 6 évvel ezelőtt volt, amikor ő harmadannyi éves volt, mint amennyi az apja most. Hány éves most az apa és a fia?

Segítség:

	Balázs	Apja
6 éve		
Most		
4 év múlva	$\frac{x}{2}$	

5. Egy 12-edikes osztályba járó baráti társaság minden tagja másolatokat készített a tablóképéről, és a fényképeiket kölcsönösen kicserélték egymással. Erre a célra összesen 480 kép készült, de a cserék után kiderült, hogy 100 kép felesleges maradt. Hány tagja volt a baráti társaságnak?

(*Segítség:* Ha a baráti társaságnak *x* tagja volt, akkor egy tanuló hány képet osztott szét?)

6. Egy cink-réz ötvözetben 82% réz van. Ha az ötvözetbe még újabb 1,8 kg cinket teszünk, akkor az ötvözet réztartalma 70%-ossá válik. Hány kilogramm cinket és rezet tartalmazott eredetileg az ötvözet?

(*Segítség:* Ha az ötvözet tömege kezdetben *x* kg volt, akkor az új ötvözetben hány kilogramm réz lesz?)

Egyenletek felírása segítség nélkül

7. Egy osztály tanulóinak $\frac{1}{3}$-a gyalog, 25%- kerékpárral, a többi 10 diák pedig busszal jár iskolába. Hány tanulója van az osztálynak?

8. Egy benzinkút 1800 literes tankját egyszerre töltik fel két tartálykocsiból. Az egyik tartálykocsiból percenként 20 literrel kevesebb benzint lehet áttölteni, mint a másikból. Egyszerre kezdik el az üres tank töltését, és 15 perc alatt a benzinkút tankja 75%-ig telik meg. Hány liter benzin folyik át a benzinkútba az egyik, illetve másik tartálykocsiból percenként?

9. Egy áruház raktárában piros és kék kelme van összesen 160 000 Ft értékben. A piros kelme ára méterenként 600 Ft, a kék kelméé 500 Ft. Egyik nap eladták a piros kelme 25%-át és a kék kelme 20%-át összesen 35 000 Ft értékben. Mennyi piros és mennyi kék kelme maradt a raktárban?

10. Egy háromtagú család (apa, anya és a lányuk) tagjainak az életkora most összesen 80 év. Az apa háromszor annyi idős, mint a lánya. Két éve az anya életkora volt háromszorosa a leány akkori életkorának. Hány évesek most?

11. Egy kereskedő 50 kg szőlőt vett 8000 forintért. A szőlőt szétválogatta, és egyik részét 15%-os haszonnal, másik részét 5%-os veszteséggel adta el, így 1008 Ft haszonra tett szert. Hány kilogramm szőlőt adott el nyereséggel és hány kg-ot veszteséggel?

12. Egy kereskedő nagyobb tételben cukrot akart vásárolni. Halogatta a vásárlást, és mire észbekapott, a cukor mázsájának ára 2000 Ft-tal emelkedett. Szüksége volt rá, így megvette a szükséges mennyiséget, de ekkor ugyanannyi cukorért 120 000 Ft-ot kellett fizetnie, míg korábban ugyanennyi pénzért 2 mázsával többet kaphatott volna. Hány mázsa cukrot vásárolt?

13. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 13. Ha a számot 12-vel osztjuk, akkor a hányados megegyezik a szám utolsó számjegyével, a maradék pedig ennél 2-vel kisebb. Melyik ez a szám?

14.* Az apa életkora most 5 évvel több, mint a három fia életkorának az összege. 10 év múlva az apa kétszer olyan idős lesz, mint a legidősebb fia, 20 év múlva kétszer olyan idős lesz, mint a középső fia, 30 év múlva pedig kétszer olyan idős lesz, mint a legkisebb fia. Hány éves most az apa? És a fiúk?

V. EGYENLETEK

Két legyet ütünk egy csapásra

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $4x-3=10x$; b) $2^{x+2}=10\cdot 2^x+3$; c) $4\sqrt{x-1}-3=10\sqrt{x-1}$;

d) $4\sin x-3=10\sin x$; e) $\lg x^4-3=10\lg x$; f) $\frac{4}{x}-3=\frac{10}{x}$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(x-1)(x+2)=0$; b) $3^{2x}+3^x-2=0$; c) $x+\sqrt{x}-2=0$;

d) $(\log_2 x-1)(\log_2 x+2)=0$; e) $\cos^2 x-\sin x+1=0$.

3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{3}{2}$; b) $\frac{|x-1|}{x+2}=3$; c) $\left|\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}\right|=2$.

Ha ez ennyi, akkor az mennyi?

4. Ha $(x-3)(x+5)=0$, akkor mivel egyenlő x^2+2x?

5. Ha $\sqrt{x+3}=2$, akkor mivel egyenlő $(x+3)^4$?

6. Ha $\sin^2 x=0{,}3$, akkor mivel egyenlő $\cos^2 x$?

7. Ha $\cos x=-0{,}6$, akkor mivel egyenlő $\sin x$?

8. Ha $\lg(x+36)=2$, akkor mivel egyenlő $\log_2 x$?

9. Ha $2^{x+2}=\frac{1}{2}$, akkor mivel egyenlő $\log_2 x$?

10. Ha $x^2+4y^2=9+4xy$, akkor mivel egyenlő $x-2y$?

Az egyenletnek nincs megoldása?

11. Igazold, hogy az alábbi egyenleteknek, illetve egyenletrendszernek nincs valós gyöke!

a) $\lg x - \lg(x+2) = 0{,}5$;

b) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 5$;

c) $\left(2^x + 4\right)\left(0{,}5^{x-1} + 1\right) = 0$;

d) $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x} = 0$;

e) $\left.\begin{array}{l} |x-y| = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}$;

f)* $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x-16} = 8$.

VI. EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $(4x-1)^2-6x<(3-4x)^2$; b) $\frac{3x+1}{2x-5}>2$; c) $2|x-1|\geq 4-x$;

d) $2x^2-7x+5\geq 0$; e) $-x^2+4x-5>0$; f) $3-\sqrt{2x-1}>0$ *;

g) $\log_{\frac{1}{4}} x-\log_{\frac{1}{4}} x^2<2$; h) $\sin^2 x-0{,}25\leq 0$; i) $1\leq 0{,}5^{x+2}\leq 4$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $3\sin^2 x+2\cos x<2-3\cos^2 x$; b) $(2^x-8)(\log_{0,5}x+1)<0$.

3. Határozd meg a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezéssel megadott függvény értelmezhető!

a) $p(x)=\frac{1}{x^2-x}$; b) $k(x)=\sqrt{x^2-x}$; c) $l(x)=\log_{\sqrt{2}}(x-x^2)$.

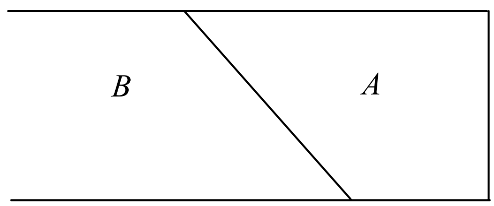
4. Írj a következő egyenletekben p helyére olyan valós számot, hogy a kapott másodfokú egyenletnek pontosan két megoldása legyen!

a) $x^2-px+4=0$; b) $x^2+(p+1)x+p=0$.

5. Hány olyan háromszög van, amelyben az oldal mérőszáma három egymást követő páratlan egész szám, és a kerülete kisebb 1000-nél? (Az egybevágó háromszögeket nem különböztetjük meg.)

6. Egy állólámpához téglatest alakú lámpaburát szeretnénk készíteni. Először egy 400 cm hosszú drótból elkészítjük a téglatest vázát. Az egyik élét 30 cm hosszúnak választjuk. Hogyan válasszuk meg a többi él hosszát, hogy a lámpabura térfogata a lehető legnagyobb legyen?

7. Egy telek – nevezzük *A*-nak – derékszögű trapéz alakú. Méretei: az alapok 12 m és 27 m hosszúak, a nem derékszögű szár hossza 30 m. Ezen az utóbbi oldalon csatlakozik a telekhez egy másik telek (*B*). A két telek közös határán még nem építették meg a kerítést. A *B* telek tulajdonosa tesz egy ajánlatot a szomszéd telek tulajdonosának: Megépítteti a kerítést a közös oldalon, ha átenged neki egy kis darabot a telkéből. Úgy gondolta a javaslatot tevő, hogy a kerítésnek azt a végét, amely a szomszéd telek 27 m-es oldalán lenne, néhány méterrel beljebb helyeznék el, így egy háromszög alakú telekrész az övé lenne. Mindkét gazda tudja, hogy a kerítés folyóméterének megépíttetése 3000 Ft-ba kerül, továbbá azt is, hogy ezen a vidéken a telek m^2-nek ára 20 000 Ft. Legfeljebb hány méterrel tegyék beljebb a kerítés végét, hogy az *A* telek tulajdonosa járjon jobban?



8. Adott a koordinátasík két pontja: $A(1;2)$ és $B(3;0)$. Határozd meg az $x+2y=9$ egyenesnek azt a *P* pontját, amelyre a PA^2+PB^2 minimális!

VII. SOROZATOK

1. A következő sorozatok közül válaszd ki azokat, amelyek grafikonjának minden pontja egyetlen egyenesre illeszkedik!

$(a_n) =$ (Az n szám legkisebb pozitív osztója) ;

$(b_n) =$ (Az $n+2$ oldalú konvex sokszög átlóinak száma) ;

$(c_n) =$ (Az n egység oldalhosszú szabályos háromszög három magasságához összege);

$(d_n) =$ (Az $n+2$ oldalú szabályos sokszög szimmetriatengelyeinek száma);

$(e_n) =$ (A $k(n) = 2n$ sorozat első n tagjának összege).

2. A következő sorozatok közül válaszd ki azokat, amelyek

a) szigorúan növekvők vagy szigorúan csökkenők; b) korlátosak;

c) periodikusak; d) számtani sorozatok!

$a_n = -1 + (n-2)\cdot 3$; $b_n = \dfrac{(2n-5)\cdot \lg(n+1)^2}{\lg(n+1)}$; $c_n = \sin n\pi$;

$d_n = (-1)^n 2^{-n}$; $e_n = \dfrac{1}{n^2}$; $f_n = 5\cdot\dfrac{0{,}5^{n-1}}{0{,}5^{n+1}}$*;

$g_n = \cos\dfrac{\pi}{3}n$; $h_n = (n-2)^2 - n^2 + 7n$.

3. Adj meg képlettel egy olyan sorozatot, amelyik

a) felülről korlátos, de alulról nem korlátos;

b) nem korlátos;

c)* felülről korlátos, a legkisebb felső korlátja 1, és szigorúan növekvő!

4. a) Egy számtani sorozat öt egymást követő tagjának összege 60. Tagja-e ennek a sorozatnak a 12?

b) Egy mértani sorozat öt egymást követő tagjának szorzata 1024. Tagja-e ennek a sorozatnak a 4?

5. Panni sálat köt. Az első napon 4 cm hosszú darabot kötött meg. Minden további napon 2 cm-rel többet, mint az azt megelőző napon.
Milyen hosszú lenne a sál 2 hét alatt?

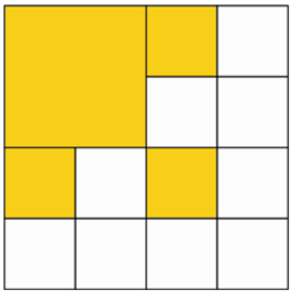
6. Ági is sálat köt, de ő a második naptól kezdve minden nap kétszer akkora darabot köt, mint az azt megelőző napon. Az első három nap alatt a sál már 21 cm hosszú lett.
a) Mennyit kötött az első napon? b) Hányadik napon lenne a sál 240 cm hosszú?

7. Egy csökkenő számtani sorozat első 15 tagjának az összege 0.
a) Hány pozitív tagja van a sorozatnak? Mely tagok ezek?
b) Ha még azt is tudjuk, hogy az első tíz tag összege 50, mekkora az első húsz tag összege?

8. Egy téglatest egy csúcsban összefutó éleinek hossza egy számtani sorozat egymást követő tagjai, és e három él hosszának összege 30 cm. Módosítsuk a téglatest éleit: a legrövidebbet nem változtatjuk, a leghosszabb élek mindegyikét 10 cm-rel, míg a középsők mindegyikét 2 cm-rel megnöveljük. Az így létrejött téglatest egy csúcsban összefutó éleinek hossza egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Hány cm^3 az új téglatest térfogata?

9. Egy erdő faállománya 3500 m^3. A mindenkori állomány évenként 3%-kal gyarapodik.
a) Feltételezve, hogy 10 év alatt egyetlen fa sem pusztul el, és nem vágnak ki egyet sem, hány m^3 lesz a faállomány 10 év elteltével?
b) Ha viszont minden év végére az előző évi faállomány 1%-át kivágják (a gyarapodás most is minden évben az előző évi faállomány 3%), akkor mekkora lenne a faállomány 10 év elteltével?
c) A b) kérdésben megfogalmazott feltételek esetén hány m^3 fát vágtak volna ki összesen az első három évben?

10. Egy 8 egység oldalhosszú négyzetet két, egymásra merőleges egyenessel 4 egybevágó négyzetre bontunk. A kapott négyzetek közül a bal felsőt kifestjük. A többi három négyzet mindegyikét ismét felosztjuk 4-4 egybevágó négyzetre, és ismét mindegyikben a bal felső négyzetet kifestjük. Az eljárást hasonló módon folytatjuk tovább.



Jelölje t_n az n-edik (n tetszőleges pozitív egész számot jelöl) alkalommal befestett négyzetek területének összegét.

a) Írd fel a (t_n) sorozat első öt tagját!

b) A tizedik alkalomkor hány területegység lenne befestve összesen?

11. Az utóbbi pár év mindegyikében 500 ezer Ft prémiumot kaptam, de sajnos rövid idő alatt el is költöttem. „Takarékoskodjunk!" – gondoltam, és nyitottam egy számlát, és lekötöttem 500 ezer Ft-ot évi 10%-os kamatra. Éppen egy év múlva újból kaptam 500 ezer Ft prémiumot, azt is rögtön beraktam a számlámra. Takarékoskodásom kezdete óta összesen egymás után 4 évben kaptam ugyanilyen összegű prémiumot, melyet rögtön el is helyeztem a számlámra. Az ötödik évben egy fillért sem kaptam, mérgemben azonnal felvettem a számlámról 500 ezer Ft-ot. A következő évben sem kaptam prémiumot, ekkor újból kivettem a „szokásos" 500 ezer Ft-ot. Ezt követő két évben ugyanígy jártam. Amikor a 4-edik alkalommal vettem fel 500 ezer Ft-ot, örömmel láttam, hogy még maradt pénz a számlámon. Mennyi maradt?

VIII. HÁROMSZÖG NEVEZETES VONALAI, PONTJAI ÉS KÖREI

1. Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis. Döntésedet indokold!

a) A háromszög bármelyik magasságvonala két derékszögű háromszögre bontja a háromszöget.

b) Minden háromszögnek van olyan magasságvonala, amely két derékszögű háromszögre bontja a háromszöget.

c) Van olyan háromszög, amelynek magassága egybeesik a háromszög egyik oldalával.

d) A háromszög belső szögének szögfelezője két, egyenlő területű részre bontja a háromszöget.

e) A háromszögnek, ha van szimmetriatengelye, az csak a háromszög egyik magasságvonala lehet.

f) Van olyan háromszög, amelyiknek pontosan 2 szimmetriatengelye van.

g) A háromszög középvonala két, egyenlő területű részre vágja a háromszöget.

h) A háromszög síkjában pontosan három olyan pont van, amelyik a háromszög mindhárom csúcsától ugyanakkora távolságra van.

i) Van olyan háromszög, amelynél a körülírt körének középpontja a háromszög egyik magasságvonalán van.

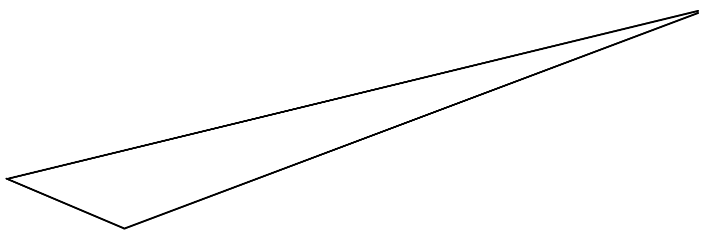
j) A háromszög beírt körének középpontja rajta van a háromszög egyik belső szögének szögfelezőjén.

k) A háromszög súlyvonala harmadolja a háromszög egyik oldalát.

l) A háromszög súlypontján átmenő egyenes két egyenlő területű részre vágja a háromszöget.

m)* A háromszög egyik csúcsából induló belső szögfelezőnek van olyan pontja, amelyik egyenlő távolságra van a háromszög másik két csúcsától.

2. Szerkeszd meg az ábrán látható háromszög két magasságvonalát!

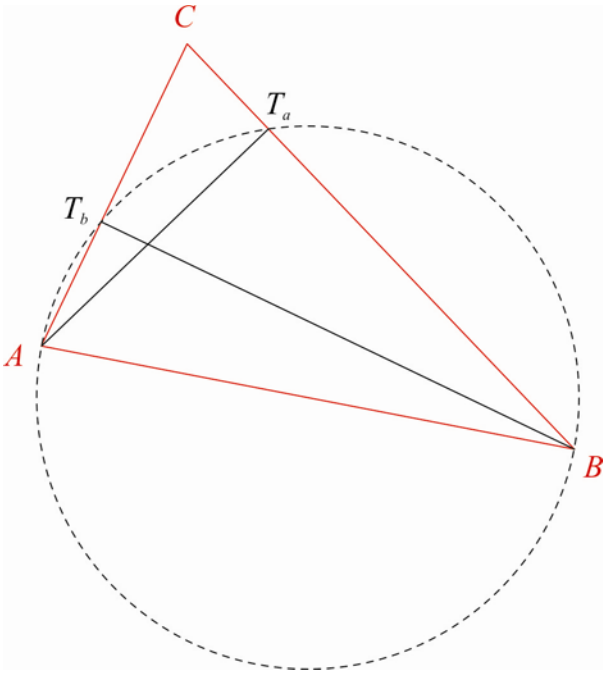


3. Szerkessz tompaszögű egyenlőszárú ABC háromszöget, amelynek az alapja AB, majd szerkeszd meg az AC szár Thalész-körét! A kör az AB alapot a T pontban, a BC oldal egyenesét a Q pontban metszi.

a) Milyen arányban osztja a T pont az AB alapot?

b) Az AQ és CT egyenesek metszéspontját jelöljük P-vel. Milyen nevezetes pontja az ABC háromszögnek ez a P pont?

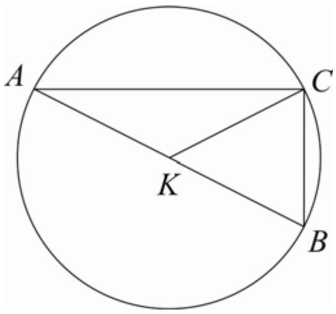
4. Az ábrán látható ABC háromszög A és B csúcsából induló magasságok talppontját jelölje rendre T_a és T_b. Bizonyítsd be, hogy az ABT_aT_b négyszög köré kör írható!



5. Vizsgáld meg, hogy a 4. feladatban megfogalmazott állítás igaz-e tompaszögű háromszög esetében is! Sejtésedet indokold!

6. Szerkessz egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget, majd szerkeszd meg mindhárom háromszög körülírt körét!

7. Az ábrán a K pont az ABC háromszög körülírt körének középpontja. Az AKC háromszög területe 3 területegység. Hány területegység az ABC háromszög területe?

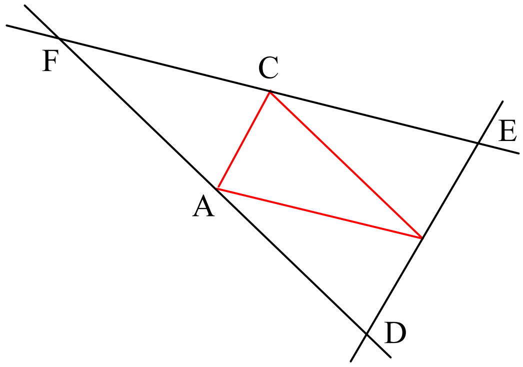


8. Jelöld meg egy *ABC* háromszög beírt körének érintési pontjait! Ez a három pont meghatároz egy *PQT* háromszöget. Az *ABC* háromszög belső szögeinek szögfelezői milyen nevezetes vonalai a *PQT* háromszögnek? Sejtésedet indokold!

9. Az ábrán látható *ABC* háromszög középháromszöge egy *DEF* háromszögnek (azaz, *AB*, *BC* és *AC* egy-egy középvonala a *DEF* háromszögnek).

a) Szerkeszd meg a *DEF* háromszöget!

b) Az *ABC* háromszög magasságvonalai milyen nevezetes vonalai a *DEF* háromszögnek? Sejtésedet indokold!



10. Az *ABC* háromszög beírt köre az *AC* oldalt a *Q* pontban, a *BC* oldalt pedig a *T* pontban érinti. Igazold, hogy az *ABTQ* négyszögnek van olyan oldala, amelynek hossza két másik oldal hosszának összegével egyenlő!

11. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza: 5 cm és 12 cm. Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

12. Egy derékszögű háromszög átfogója 5, kerülete 12 egység. Hány egység a háromszög beírt körének sugara?

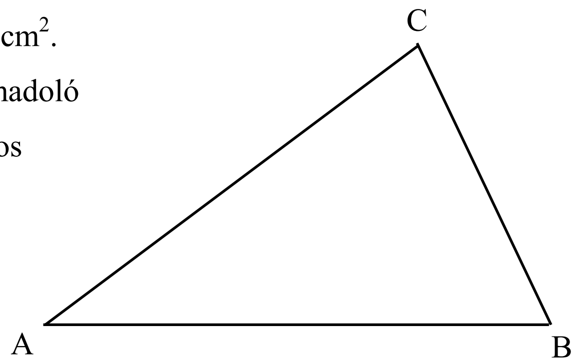
IX. HASONLÓSÁG

1. Egy 10° -os szöget 3-szoros nagyítású nagyítón át nézünk. Hány fokos a szög a nagyítón át nézve?

2. Az ábrán látható ABC háromszög területe 18 cm^2.

a) Szerkessz a háromszög AC oldalának harmadoló pontjain átmenő, az AB oldallal párhuzamos egyeneseket!

b) A megszerkesztett egyenesek mekkora területű részekre vágják az ABC háromszöget?



3. Egy 8 cm^2-es diaképet a falon 0,32 m^2-es képnek látjuk. Milyen magasnak látszik az a betű, amelyik a dián 3 mm magas?

4. Egy parkban egy kör alakú virágágyat fehér árvácskákkal ültettek tele. A virágágyat körbeültették lila árvácskákkal. A lila árvácskák virágágya körgyűrű alakú volt, amelynek területe 8-szorosa volt a kör alakú virágágynak. Hányszorosa a lila virágokkal beültetett körgyűrűt határoló külső kör kerülete a belsőének?

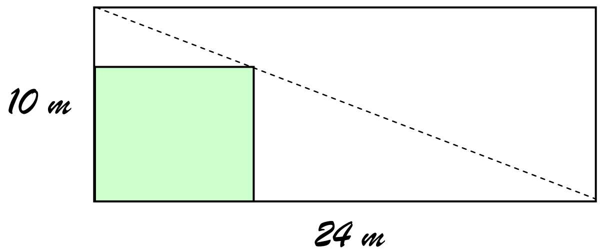
5. Egy építkezésre az egyik nap 2 tonna homokot hoztak. Leszórták úgy, hogy a homokdomb kúp alakú lett. Másnap még hoztak valamennyi homokot, és ugyanoda leöntötték. Azt vettem észre, hogy az így kialakult kúp hasonló a tegnap látott kúphoz, de a magassága kétszer akkora. Hány tonna homokot szállítottak második alkalommal?

6. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza: 3 cm és 9 cm. Mekkora a trapéz átlói által létrehozott két hasonló háromszög területének aránya?

7.* Tükrözd az ábrán látható ABC háromszöget a súlypontjára! Az eredeti és a tükörkép háromszög oldalai páronként metszik egymást. E hat metszéspont, az eredeti háromszög és a tükörképháromszög csúcsai egy csillagalakzatot (12 oldalú sokszöget) határoznak meg. Mekkora a csillagalakzat területe, ha az eredeti háromszög területe 12 cm^2?

8. Az AB szakasz belső C pontjáról tudjuk, hogy $AC:CB = 1:4$. Az AC, CB és AB szakaszok mint oldalak fölé szabályos háromszögeket rajzolunk. Mi lesz a három háromszög területének $T_{AC} : T_{BC} : T_{AB}$ aránya?

9. Egy téglalap alakú telek oldalainak hossza 10 m és 24 m. A tulajdonos a telek egyik sarkában el szeretne keríteni egy négyzet alakú részt konyhakertnek. Az ábrán a tulajdonos vázlatrajza látható. Mekkorák a tervezett négyzet oldalai?



10. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót 7 cm és 9 cm hosszú szakaszokra bontja. Mekkora a háromszög hosszabbik befogója?

11. Egy derékszögű háromszög befogói 8 cm és 15 cm hosszúak.

a) Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

b) Mekkora a háromszög átfogóhoz tartozó magassága?

c) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

d) Milyen távolságra van a háromszög súlypontja a háromszög körülírt körének középpontjától?

12. Egy derékszögű háromszög átfogóját a magasság két olyan szakaszra bontja, amelyek különbsége 1 cm. A háromszög kisebbik befogója 1 cm-rel rövidebb az átfogónál. Mekkora az átfogó?

13. Az ABC háromszög BC oldalának C-n túli meghosszabbításán lévő D pontra az $ABC_\angle = CAD_\angle$ teljesül. Milyen kapcsolat van az AD, CD és BD oldalak közül? Döntésedet indokold!

A: CD mértani közepe a másik kettőnek;

B: BD mértani közepe a másik kettőnek;

C: AD számtani közepe a másik kettőnek;

D: AD mértani közepe a másik kettőnek;

E: Az oldalak közötti kapcsolat nem felel meg sem az **A,** sem a **B,** sem a **C,** sem a **D** válaszoknak.

14. Az $R = 10\ \text{cm}$ sugarú kört kívülről érinti a 10 cm-nél kisebb r sugarú kör. A két kör közös külső érintőinek hajlásszöge 60°-os. Hány cm hosszú az r sugár?

X. TRIGONOMETRIA

1. Az $\mathbf{i}$ bázisvektor (-200°)-os forgatásával előállított vektor koordinátáit jelölje $(e_1;e_2)$.

A következő szögek közül melyikre igaz, hogy

a) koszinusza egyenlő e_1-gyel?

b) szinusza e_2-vel egyenlő?

c) koszinusza egyenlő e_1-gyel, a szinusza pedig e_2-vel?

740°; -20°; 1280°; -880°; 160°.

2. Szerkeszd meg az alábbi egységvektorokat!

$\mathbf{e} = (\cos 2730^\circ)\mathbf{i} + (\sin 2730^\circ)\mathbf{j}$

$\mathbf{k} = (\cos(-450^\circ); \sin(-450^\circ))$

$\mathbf{n} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\sin\alpha)\mathbf{j}$, ahol $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$

3. Számítsd ki az $\mathbf{e}\,(-0{,}5\,;e_2)$ és $\mathbf{g}\,(g_1\,;-1)$ egységvektorok hiányzó koordinátáját!

4. Döntsd el az x értékének kiszámítása nélkül, hogy a következő négy állítás közül melyik igaz! Döntésedet indokold! Ha $\cos x = \cos 170^\circ$, akkor

A) $\cos x = \cos 10^\circ$; B) $\cos x = \cos 190^\circ$;

C) $\sin x = \sin(-10^\circ)$; D) $\cos x = \cos 370^\circ$.

5. Oldd meg az egyenleteket a megadott alaphalmazon!

a) $2\cos x - 1 = 0$, ahol $x \in [600^\circ, 1000^\circ]$

b) $2\sin x + 1 = 0$, ahol $x \in [600^\circ, 1000^\circ]$

c) $(2\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$, ahol $x \in [-4\pi, 4\pi]$

d) $(2\cos x - 1) + (2\sin x + 1) = 0$, ahol $x \in [-4\pi, 4\pi]$

e) $\dfrac{2\cos x - 1}{2\sin x + 1} = 0$, ahol $x \in [-4\pi, 4\pi]$

6. Egy zsebszámológéppel csak a szögek szinuszát lehet kiszámítani, a többi szögfüggvényt nem. A gép még további négy műveletet képes végrehajtani. Az alábbiakban megadtunk néhány lehetőséget a négy műveletre.

Válaszd ki a megadott lehetőségek közül azt, amelyik esetben a négy megadott művelettel biztosan ki tudjuk számítani a géppel olyan tetszőleges szám koszinuszát, tangensét és kotangensét, amelyiknek mind a négy szögfüggvénye értelmezve van!

A: összeadás, szorzás, kivonás, reciprokképzés

B: négyzetgyökvonás, összeadás, kivonás, reciprokképzés

C: négyzetgyökvonás, szorzás, kivonás, reciprokképzés

D: négyzetgyökvonás, összeadás, szorzás, reciprokképzés

E: Az eddig megadott négy művelettel nem lehet kiszámítani.

7. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin x = \cos 0^\circ$; b) $\operatorname{tg} x \cdot (\cos x + 0{,}5) = 0$; c) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$.

8. Egy 80 m hosszú lejtős út felső végén lévő templomot $3{,}7^\circ$-os szög alatt látjuk az út elejéről. A lejtő hajlásszöge $21{,}3^\circ$. Milyen magas a templom?

9. Egy ház ablakából, a talajtól 2 m magasságból egy, a háztól 25 m távolságra lévő fa csúcsa $44{,}3^\circ$-os emelkedési szög alatt látszik. A ház alapját a fával összekötő egyenesen, a fa túloldalán egy kisfiú játszik a homokban, ahonnan a fa $29{,}8^\circ$ szög alatt látszik. Milyen távol van a kisfiú a háztól?

10. Egy 40 m sugarú, kör alakú park egy kerek órát jelenít meg. A 2 órát, az 5 órát és a 9 órát jelölő (A, B és C) körpontokból egy-egy egyenes út vezet a kör K középpontjába, továbbá e három pont közül bármelyik kettőt egyenes út köt össze.

a) Milyen messze van az AC út a kör középpontjától?

b) Számítsd ki méter pontossággal az $AB + BC + CA$ útvonal hosszát!

11. Egy derékszögű háromszög területe 27 cm^2, továbbá ismerjük az α hegyesszög kotangensét: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$. Mekkorák a háromszög befogói?

12. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{\left(2\cos^2 x-1\right)\left[\sin(2x-\pi)-1\right]}{\mathrm{tg}x-1}=0$$

13. Egy háromszög oldalai 2 cm, 3 cm és 4 cm hosszúak. Mekkora a legnagyobb szögének koszinusza?

14. Egy háromszög egyik oldala 3-szorosa egy másik oldalnak, s e két oldal által közrefogott szög 120°-os. A háromszög leghosszabb oldala hányszorosa a legrövidebbnek?

15. Az ABC háromszög oldalai $a=5\,\mathrm{cm}$, $b=13\,\mathrm{cm}$ és $c=15\,\mathrm{cm}$ hosszúak. Határozd meg a háromszög területét, belső szögeit, és a legrövidebb oldalához tartozó súlyvonalának hosszát!

XI. GEOMETRIAI SZÁMOLÁSI FELADATOK

1. Az A4-es papír méretei egészre kerekítve: 30 cm×21 cm. A lapot, az átlója mentén elvágjuk, így két egybevágó háromszöglapot kapunk. Az alábbi kérdések az egyik derékszögű háromszöglapra vonatkoznak.

a) Hogyan vágjuk el ezt a háromszöget, hogy két egyenlő területű háromszöglaphoz jussunk?

b) Hogyan és hol vágjuk el a háromszöget, hogy két hasonló háromszöglapot kapjunk? Mekkora a két keletkező háromszög hasonlóságának aránya?

c) A rövidebb oldalával párhuzamosan úgy szeretnénk elvágni a háromszöglapot, hogy két egyenlő területű laphoz jussunk. Hol vágjuk el? Milyen hosszú a metszésvonal?

d) A háromszöglapból levágunk egy hozzá hasonló, 35 cm^2 területű háromszöglapot. Hogyan és hol vágjuk el az eredeti háromszöglapot? Milyen hosszú a metszésvonal?

e) A háromszöglapból két vágással vágjuk ki a lehető legnagyobb területű négyzetet. Mekkora ennek a négyzetnek a területe?

f) A háromszöglapból kivágjuk a lehető legnagyobb területű kört. Mekkora ennek a körnek a sugara?

g) A háromszöglapból kivágunk egy olyan, lehető legnagyobb sugarú negyed körlapot, amelynek a középpontja a derékszög csúcsa. A kivágott lapot tekintsük egy kúp palástjának. Mekkora ennek a kúpnak a térfogata?

2. Az *ABC* háromszög területe 36 cm^2, *AB* oldalának hossza 6 cm. A háromszög az *AB* oldal felezőmerőlegeséből 4 cm hosszú szakaszt vág ki.

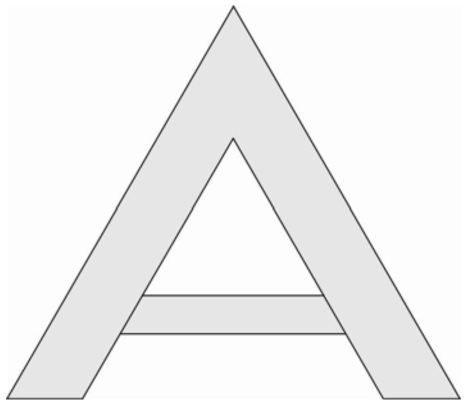
a) A *C* csúcsból húzott magasság talppontja hány cm-re van *AB* felezőpontjától?

b) Hány cm hosszú a háromszög *AB* oldalához tartozó súlyvonala?

c)* Milyen hosszú az *A* csúcsból induló súlyvonal?

d)* Mekkora a háromszög másik két oldalának hossza?

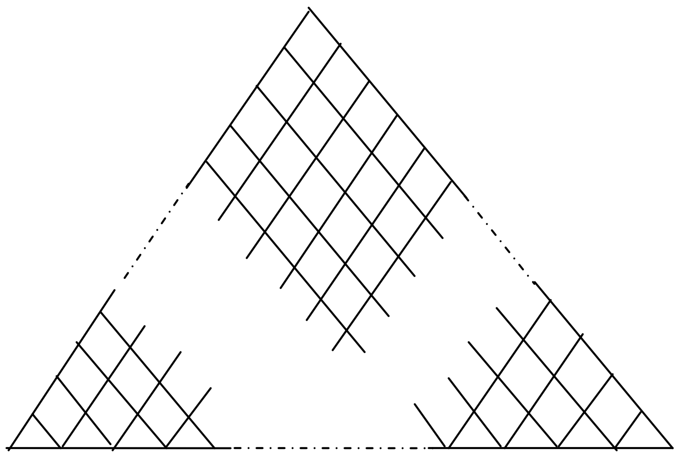
3. Lacika, első osztályos kisiskolás rajzolt egy szép nagy A betűt. A betű szárai 60°-os szöget zárnak be egymással, és a külső szárak hossza 6 cm, a betű „talpai" 1 cm hosszúak. A szárakat összekötő vonalak közül az alsót a rövidebb szár talphoz közelebbi negyedelő pontjából kiindulva húzta meg, és a két összekötő szakasz távolsága 0,5 cm lett.
Lacika szeretné kifesteni az A betűjét. Hány cm^2 területet kell ehhez lefestenie?



4. Egy szabályos nyolcszög oldala 8 cm hosszú. Hány cm hosszúak a sokszög átlói? (Az eredményeket tizedre kerekítve add meg!)

5. Párizsban a Louvre udvarán látható üvegpiramis külső méretei: magassága 21,67 m, az alaplapját alkotó négyzet oldala 35,40 m hosszú. Hány m^2 területű a piramis felülete, ha eltekintünk a bejárat „beszögellésétől"?

6. Dan Brown: A Da Vinci-kód című könyve részint a Louvre-ban játszódik. A könyvben szerepel egy mondat, amely a piramis üvegtábláira vonatkozik. „…a piramist, Mitterrand elnök kifejezett kívánságára, pontosan 666 üvegtáblából építették – különös kívánság, amelyet széltében-hosszában tárgyaltak az összeesküvés-elméletek kedvelői, arra hivatkozva, hogy a 666 a Sátán száma." *(GABO Kiadó, 2004, ford. Bori Erzsébet)*.
A Louvre-múzeum tájékoztatása szerint a piramis összesen 673 üvegtáblából áll, 603 rombusz és 70 háromszög alakú, amelyek 2,1 cm vastagok. I.M. Pei tervezőirodája úgy nyilatkozott, hogy a piramisban lévő üveglapok száma 698.



Az ábra az üvegpiramis egyik oldallapjának lefedését mutatja be.

Az 5. feladat adatainak felhasználásával válaszold meg az alábbi kérdéseket!

a) Mekkora a rombusz alakú üvegtábla hegyesszöge?

b) Ha elfogadjuk a Louvre adatait, akkor az 5. feladat számolási eredményét felhasználva kb. hány m^2-nek adódik egy rombusz alakú üvegtábla területe?

7. Egy 4 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget elforgatunk a szimmetriaközéppontja körül 30°-kal. Mekkora az oldalhossza és területe az eredeti és az elforgatott hatszög egyesítésével kapott csillagalakzatnak (huszonnégy oldalú konkáv sokszögnek)?

XII. KOORDINÁTAGEOMETRIA

1. Add meg az $e: 3x - 2y + 5 = 0$ egyenletű egyenes három pontját és három normálvektorát!

2. Add meg az $\frac{x-2y}{3} = \frac{x+3}{4}$ egyenletű egyenes két pontját, egy vektort, amely merőleges az egyenesre, és egy vele párhuzamos vektort! Határozd meg az egyenes iránytangensét! Számítsd ki a kiválasztott két pont távolságát!

3. Írd fel a $P(-2;-5)$ ponton átmenő, és az $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ vektorra merőleges egyenes egyenletét!

4. Írd fel az $e: x - 3y = 4$ egyenletű egyenessel párhuzamos, és az $F(4;0)$ ponton áthaladó f egyenes egyenletét!

5. Írd fel az $A(-1;2)$ és $B(3;4)$ pontokon átmenő g egyenes egyenletét, továbbá a $C(-3;11)$ ponton átmenő, a g egyenesre merőleges f egyenes egyenletét!.

a) Számítsd ki a két egyenes F metszéspontjának koordinátáit!

b) Milyen arányban osztja az F pont az AB szakaszt?

c) Határozd meg annak a ponthalmaznak az egyenletét, amelynek bármelyik pontjából az AB szakasz derékszögben látszik!

d) Mekkora területű háromszöget határoz meg az x tengely, a g egyenes és az f egyenes?

6. Igazold, hogy a $P(-8;3)$, $Q(692;503)$, $R(192;303)$ és $S(492;203)$ pontok egy paralelogramma csúcspontjai!

7. Számítsd ki az $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 16 = 0$ egyenletű kör x tengelyen lévő A és B pontjának koordinátáit!

a) Határozd meg az ABC háromszög M magasságpontjának koordinátáit, ahol $C(1;7)$!

b) Hol metszi az AB szakasz Thalész-köre az ABC háromszög BC oldalegyenesét?

c) Az ABC háromszög körülírt köre a háromszög A csúcsán átmenő m_a magasságvonalát a D pontban, a C csúcsán átmenő m_c magasságvonalát pedig az E pontban metszi. Igazold koordinátageometriai eszközökkel, hogy a D és E pontok egyenlő távolságra vannak a háromszög B csúcsától!

d)* Számítsd ki az ABC háromszög A csúcsából induló magasság T_a talppontjának, és a B csúcsából induló magasság T_b talppontjának koordinátáit! Igazold, hogy a T_aT_b szakasz merőleges a háromszög körülírt körének középpontját a háromszög C csúcsával összekötő sugárra!

8. Az ABC háromszög C csúcsa az y tengelynek pontja, és $A(-2;3)$ továbbá $B(0;-3)$. A háromszög körülírt körének egyenlete $x^2+y^2+8x+2y-3=0$.

a) Határozd meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit!

b) Add meg a C csúcs koordinátáit!

c) Számítsd ki a háromszög súlypontjának koordinátáit!

d) Hány területegység a háromszög területe?

e) Számítsd ki a körülírt kör A és B pontjában megrajzolt érintők E metszéspontjának koordinátáit!

9. A $P(-1,\ 0)$ pontból az $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ egyenletű körhöz milyen hosszú érintőszakasz húzható?

10. Egy háromszög egyik csúcsa $A(-3;-1)$. A C csúcsból induló m_c magasságvonal egyenlete $2x+y=3$, és az ugyanonnan induló s_c súlyvonal egyenlete $x-y=1$. Számítsd ki a hiányzó két csúcspont koordinátáit!

11. Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: $A(-2;2)$ és $B(6;4)$. Az egyik befogót tartalmazó egyenes egyenlete $x+y=10$. Számítsd ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!

XIII. STATISZTIKA

(Az 1., 3., 4. és 6. feladatban a Központi Statisztikai Hivatal (www.ksh.hu) adatait tüntettük fel.)

1. Az alábbi táblázatban Magyarország népességére vonatkozó adatok olvashatók.

Év	A népesség száma	Ebből férfi	Ebből nő	A házasságkötések száma	Az élveszületések száma
1949	9 204 799	4 423 420	4 781 379	107 820	190 398
1960	9 961 044	4 804 043	5 157 001	88 566	146 461
1970	10 322 099	5 003 651	5 318 448	96 612	151 819
1980	10 709 463	5 188 709	5 520 754	80 331	148 673
1990	10 374 823	4 984 904	5 389 919	66 405	125 679
2001	10 200 298	4 851 012	5 349 286	43 583	97 047
2002	10 174 853	4 836 980	5 337 873	46 008	96 804
2003	10 142 362	4 818 456	5 323 906	45 398	94 647
2004	10 116 742	4 804 113	5 312 629	43 791	95 137
2005	10 097 549	4 793 115	5 304 434	44 234	97 496
2006	10 076 581	4 784 579	5 292 002	44 500	99 850

a) A táblázatban feltüntetett évek közül melyikben volt a legnagyobb, illetve legkisebb a népesség száma?

b) A XXI. század első hat évében évente átlag hány házasságot kötöttek, és átlag hány gyerek született élve?

c) A táblázatban feltüntetett évek mindegyikében számítsd ki, hogy a férfiak hány százaléka kötött házasságot! Melyik évben volt ez az arány a lehető legnagyobb?

d) Számítsd ki a nők és férfiak számarányának átlagát!

e) Add meg ezresekre kerekítve az élveszületések számát, és az így kapott adatokat ábrázold oszlopdiagramon!

2. A táblázatban egy 12-edikes csoport matematika dolgozatának eredményei láthatók.

A. Anna	4	H. Ildikó	5	M. Vera	5	P. Katinka	2
A. Kristóf	4	H. József	4	M. Andrea	2	P. Nóra	5
B. Kata	5	K. Attila	2	N. Péter	3	S. Zsanett	2
D. Ferenc	1	K. Csilla	5	N. László	1	S. Balázs	5
D. András	5	K. Samu	2	N. Krisztina	1	T. Gergely	2
G. Csilla	2	K. Balázs	5	N. Vera	2	V. Dóra	1

a) Számítsd ki a kapott jegyek átlagát, móduszát, mediánját, szórását!

b) A lányok vagy a fiúk voltak eredményesebbek?

c) A szaktanár az a) feladatban kért adatok közül melyiket emelje ki, ha

– az iskola igazgatójának akar beszámolni a dolgozat eredményéről, és a csoport eredményes munkáját szeretné hangsúlyozni?

– az osztályfőnöknek számol be az eredményekről, és azt szeretné jelezni, hogy a csoportba tartozó gyerekek zöme lusta, nem dolgozik eleget a matematika órán?

– a szülői értekezleten a szülőket szeretné meggyőzni arról, hogy milyen nehéz a csoportot matematikára tanítani, mert annyira eltérő a tanulók motiváltsága, szorgalma, felkészültsége?

3. Az alábbi táblázatban a feltüntetett hét évben az egy főre jutó élelmiszerfogyasztás adatai olvashatók.

Termék, tápanyag	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Húsfélék összesen, kg	73,1	71,5	73,0	67,5	65,9	62,5	59,4
Hal, kg	2,7	2,6	2,9	3,0	3,1	2,7	2,5
Tej és tejtermékek, vaj nélkül, kg	169,7	167,4	159,1	144,2	140,0	132,1	136,4
Tojás, db	389	357	338	365	337	297	267
Zsíradékok összesen, kg	38,6	37,0	37,5	36,8	38,1	36,7	35,7
Ebből:							
vaj, vajkrém, kg	1,7	1,8	1,7	1,5	1,4	1,5	1,6
étolaj, margarin, kg	11,8	11,7	12,6	13,7	14,6	15,0	14,7
Liszt, kg	106,1	97,4	100,0	91,8	86,5	83,3	79,8
Rizs, kg	4,2	5,2	5,6	5,6	4,8	5,0	4,8
Burgonya, kg	61,0	55,3	56,0	59,3	58,2	60,3	66,2
Cukor, kg	38,2	35,0	39,5	35,8	34,2	37,3	39,8

a) Számítsd ki az előző feladat adatának felhasználásával, hogy 1990-ben összesen hány tonna halat fogyasztott el a lakosság!

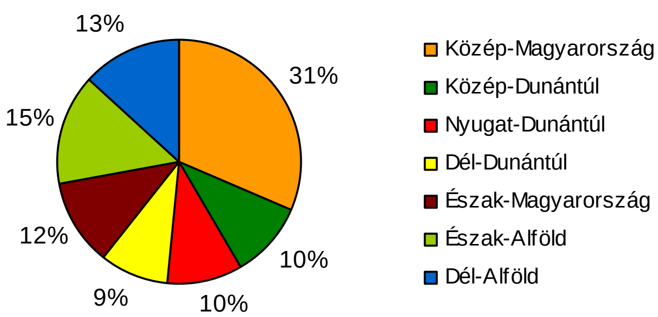
b) Számítsd ki, hogy egyik évről a rákövetkező évre hány százalékkal változott a tejtermékek (vaj nélkül) egy főre jutó fogyasztása!

c) Hasonlítsd össze évenként az egy főre jutó összes zsírfogyasztást az étolaj- és margarinfogyasztással, és jellemezd az összehasonlítást évenként egy-egy számadattal! A két adatsort (zsír-, illetve étolaj- és margarinfogyasztást) ábrázold oszlopdiagram segítségével!

d) Állapítsd meg az egy főre jutó rizsfogyasztás adatainak móduszát, mediánját és átlagát!

e) Számítsd ki, hogy 1990-hez képest hány százalékkal változott az egyes élelmiszerfajták egy főre jutó fogyasztása 1996-ra!

4. Magyarországon a 2003/2004. tanévben a középiskolai osztályok száma összesen 15 910 volt. Számítsd ki az alábbi kördiagram alapján, hogy ebben a tanévben, az egyes régiókban hány középiskolai osztály volt!



5. A Matematika Határok Nélkül versenyre középiskolák kilencedik osztályai jelentkezhetnek. A verseny időtartama másfél óra, és ezalatt az idő alatt minden részt vevő osztály ugyanazt a 13 feladatot oldja meg. Az alábbi gyakorisági táblázat a 2007. évi verseny legeredményesebb 28 osztályának eredményét tartalmazza:

Elért pontszám:	83	80	75	73	71	69	67	66	65	64	61	60	59	58	57	56	55
Gyakoriság:	1	1	2	1	1	2	2	3	1	2	1	2	1	3	2	2	1

a) Eltér-e egymástól legalább 1 ponttal a pontszámok átlaga a mediántól?

b)* A verseny előtt a szervezők az induló osztályokat két kategóriába sorolták attól függően, hogy mennyi az osztály heti matematika óráinak a száma. A táblázatban szereplő 28 osztály között 6 osztály II. kategóriába tartozó. Közülük a legeredményesebb 66 pontot ért el, a leggyengébb teljesítményt nyújtó osztály pedig 55 pontot. Hány pontot ért el a II. kategóriába tartozó többi négy osztály, ha tudjuk, hogy e 6 osztály átlagpontszáma pontosan 61 pont, pontszámaik módusza 66, és mediánja 61 pont?

6. a) A táblázat adatainak felhasználásával döntsd el, hogy a megadott években bemutatott új filmek hány százaléka nem szerepel a felsoroltak között! (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve add meg!)

b) Az összes új bemutatott filmekhez képest melyik évben volt a legrosszabb, illetve a legjobb a magyar filmek aránya? A kapott két évben bemutatott összes film eloszlásáról készíts egy-egy kördiagramot! Mindegyik esetben számítsd ki, hogy az adatokhoz mekkora középponti szög tartozik! Az eredményt fokokban, egész számra kerekítve add meg!

Bemutatott új filmek száma

Év	2001	2002	2003	2004	2005
Összesen	**164**	**182**	**212**	**226**	**220**
Ebből					
magyar	23	19	21	28	17
amerikai	93	108	109	112	103
angol	5	2	18	8	14
francia	21	20	30	23	22
német	5	5	5	6	6
olasz	1	-	4	5	4

XIV. KOMBINATORIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

1. A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány olyan nyolcjegyű szám állítható elő, amelyik osztható

a) 9-cel; b) 5-tel; c) 6-tal; d) 25-tel; e) 125-tel?

2. Hat fiúból és négy lányból álló társaság egy betelefonálós játékban 5 db, állóhelyre szóló koncertjegyet nyert. Úgy határoztak, hogy sorsolással döntik el, ki legyen közülük az 5 szerencsés jegytulajdonos. Mindannyian felírták a nevüket egy-egy cédulára, és a tíz cédulából kihúztak ötöt. Hányféleképpen alakulhat úgy a sorsolás eredménye, hogy a kisorsoltak között

a) pontosan egy lány van; b) legalább egy lány van; c) több lány van, mint fiú?

3. Kati éjszaka azt álmodta, hogy a héten az ötös lottó sorsolásán a kihúzott számok növekvő sorrendjében az első, a harmadik és az ötödik szám a 8, a 17 és a 75 lesz. Hány szelvényt vegyen másnap Kati, hogy biztosan telitalálata legyen, feltéve, hogy az álma beteljesül? (Az ötös lottó játékban az 1, 2,…, 89, 90 számok közül húznak ki ötöt.)

4. Egy 32 fős osztályban 15 fiú van, és 7 szemüveges tanuló. A fiúk 80%-a nem szemüveges. Az osztály tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk két tanulót. Mekkora a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott tanuló

a) szemüveges, és az egyik fiú, a másik pedig lány; b) nem szemüveges lány?

5. Az ötös lottó sorsolásakor jelölje A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van az 5, 12 és 27, a B esemény pedig azt, hogy a kihúzott számok között van a 12, 36 és 50. Mekkora a valószínűsége az

a) AB esemény bekövetkezésének; b) $A+B$ esemény bekövetkezésének?

6. Janika általános iskolába jár, első osztályos tanuló. A 24 lapos írásfüzete betelt. A tanító néni minden oldalra egy-egy jelet rajzolt.

♥ Azt jelentette, hogy nagyon elégedett a munkájával.

☺ Ez a jel pedig azt mutatta, hogy elégedett, de igyekezzen még szebben írni.

Édesanyja átnézte a füzetet, és 30 oldalon talált ♥ jelet. Az első 10 oldalon összesen 6-szor fordult elő, a második 10 oldalon már 8-szor, a harmadik 10 oldalon 5-ször, a többi a hátralévő oldalakon volt. Hányféle módon lehetne kitölteni a két jellel egy ilyen 24 lapos füzetet a megadott feltételek teljesülése esetén?

7. A kedvenc CD lemezemen 12 szám van, közülük is van kettő, amit nagyon szeretek. Véletlen sorrendben lejátszatva a számokat, mekkora a valószínűsége, hogy ha minden számra pontosan egyszer kerül sor, akkor a két legkedvesebb számom közül az egyiket elsőre, a másikat utolsóként hallgathatom meg?

8. Egy dobozban 10 darab azonos méretű golyó van, mégpedig 6 piros és 4 fekete.

a) Ha bármelyik golyó kihúzásának valószínűsége ugyanakkora, mekkora a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, a kihúzott golyó fekete lesz?

b) Hány zöld színű golyót tegyünk még a dobozba, hogy egy golyót kihúzva éppen 0,25 legyen annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó színe zöld?

9. A 15 és 74 év közötti lakosság körében 2007 első negyedévében Közép-Magyarországon a munkanélküliségi ráta (azaz a régió megadott korú lakosságán belül a munkanélküliek aránya) 4,9%, Észak-Alföldön pedig 11,3% volt. Ha ebben az időszakban véletlenszerűen kiválasztottunk volna 10, a megadott korosztályba tartozó, Közép-Magyarországon lakó és 20, Észak-Alföldön lakó embert, akkor melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy a 10 kiválasztott közül pontosan 1 munkanélküli, vagy annak, hogy a 20 kiválasztott közül pontosan 3 munkanélküli?