MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

9. modul
Háromszögek, sokszögek

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	Szögfüggvények alkalmazása derékszögű háromszögben. Szinusz- és koszinusztétel alkalmazása háromszögben, sokszögekben, gyakorlati feladatokban.
Időkeret	4 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, földrajz Szűkebb környezetben: Sík- és térgeometriai számítások. Ajánlott megelőző tevékenységek: Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése derékszögű háromszögben. Szinusz- és koszinusztétel ismerete. Ajánlott követő tevékenységek: A tanév anyagának ismétlése feladatokon keresztül
A képességfejlesztés fókuszai	Szövegértés, szövegértelmezés, dedukív következtetés, érvelés, bizonyítás, gondolkodási sebesség, metakogníció, ismeretek rendszerezése, elmélyítése, értelmes memória, ábrázolás, reprezentáció, térlátás, térbeli viszonyok, terület becslése.

JAVASLAT

Külön modulban foglalkozunk a hegyesszögek szögfüggvényeinek alkalmazására derékszögű háromszögben, illetve a koszinusztétel és a szinusztétel ismeretében a konvex szögek szögfüggvényeinek sokszögekben való használatával. Ez a témakör lehetőséget kínál gyakorlati problémák megoldására is (pl. kiránduláskor). A „villámkérdések” – tapasztalatunk szerint – elősegítik a két tétel, de különösen a koszinusztétel alkalmazhatósági körének megismerését. Bár a poliéderek alaposabb ismeretére 12-edik osztályban kerül sor, de már most néhány ismert test esetében sor kerül az adott ismeretanyag alkalmazására.

Az utolsó foglalkozás itt is önálló munkára, a trigonometriai ismeretek felmérésére fordítódik.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Hegyesszögekről**
2. foglalkozás: **Ismeri ön a koszinusztételt?**
3. foglalkozás: **Kirándulunk**
4. foglalkozás: **Tudáspróba**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Hegyesszögekről			
1	A hegyesszög szögfüggvényeinek alkalmazása derékszögű háromszögben.	Ismeretek rendszerezése, elmélyítése, értelmes memória, metakogníció	Feladatlap: 1–7. feladat
2	Hegyesszögek szögfüggvényeinek alkalmazása háromszögekben, négyszögekben, poliéderben.	Deduktív következtetés, gondolkodási sebesség, metakogníció, ismeretek rendszerezése, elmélyítése, térlátás, térbeli viszonyok felismerése	Feladatlap: 8–14. feladat
II. Ismeri ön a koszinusztételt?			
1	„Villámkérdések” a koszinusztételről.	Metakogníció, rendszerezés, tanulási sebesség	Feladatlap: 1–5. feladat
2	Koszinusztétel alkalmazása összetettebb feladatokban.	Metakogníció, értelmes memória, rész-egész észlelése	Feladatlap: 6–13. feladat
III. Kirándulunk			
1	Szinusz- és koszinusztétel alkalmazása gyakorlati feladatokban.	Szövegértés, szövegértelmezés, térbeli viszonyok felismerése, ismeretek rendszerezése, elmélyítése	Feladatlap: 1–7. feladat
IV. Tudáspróba			
1	A modul témakörében szerzett ismeretek mélységének felmérése.	Szövegértés, szövegértelmezés, térbeli viszonyok felismerése, értelmes memória	Feladatlap: 1–6. feladat

I. HEGYESSZÖGEKRŐL

Tizedik osztályban ismerkednek meg a tanulók a hegyesszögek szögfüggvényeivel mint a hasonló derékszögű háromszögek megfelelő oldalainak arányával. Akkor néha előfordul, hogy a tanulók helytelenül, nemcsak derékszögű háromszögre alkalmazzák a hegyesszögek szögfüggvényeit. Tizenegyedik osztályban, miután megismerkednek a szinusz- és koszinusztétellel, már szinte minden számításba jövő esetben ezeket alkalmazzák, így derékszögű háromszögre is. Mindkettő arra utal, hogy a fogalom (a hegyesszögek szögfüggvényei derékszögű háromszögben), és annak alkalmazhatósági köre nem kellően mélyült el a tanulókban.
Erre a foglalkozásra tervezett feladatok a hegyesszögek szögfüggvényeinek alkalmazását teszik lehetővé. Természetesen a nem derékszögű háromszögre vonatkozó feladatok megoldhatók pl. koszinusztétel alkalmazásával is, erre utalunk a megoldásban.

1. Egy derékszögű háromszög befogói *a* és *b*, az ezekkel szemközti szögei rendre α és β, átfogója *c*. Hány igaz állítás van az alábbiak között?

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

b) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$

c) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \dfrac{c^2}{ab}$

d) $b\sin\alpha = a\sin\beta$

Megoldás:

a) <u>Hamis</u>, mert $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{c^2} \neq 1$ tetszőleges *a* és *c* esetén.

b) <u>Igaz</u>, a tangens szögfüggvény definíciója szerint.

c) <u>Igaz</u>, mert $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2+b^2}{ab} = \dfrac{c^2}{ab}$.

d) <u>Igaz</u>, mert $b\sin\alpha = b\cdot\dfrac{a}{c} = \dfrac{ab}{c}$ és $a\sin\beta = a\cdot\dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c}$.

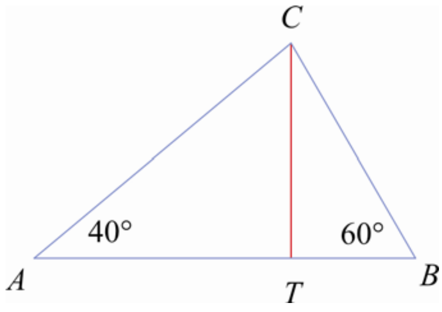
2. Egy derékszögű háromszög átfogója 8 cm, egyik befogója 6 cm hosszú. Mekkora a háromszög kisebbik hegyesszöge?

Megoldás:

A háromszög másik befogója $\sqrt{28}$ (cm) hosszú. Mivel $\sqrt{28} < 6$, a háromszög kisebbik hegyesszöge a $\sqrt{28}$ hosszú befogóval szemközti α szög. A derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{28}}{8} \approx 0{,}6614$, és mivel α hegyesszög, ennek egyetlen megoldása: $\alpha \approx 41{,}4°$.

3. Egy háromszög belső szögei:40°, 60° és 80°-osak. A leghosszabb oldalhoz tartozó magasság 4 cm hosszú. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:



Az *ABC* háromszög leghosszabb $AB = c$ oldalához tartozó magasság T talppontja a *c* oldal belső pontja, így ez a magasság a háromszöget két derékszögű háromszögre bontja.

Jelöljük az *ABC* háromszög másik két oldalát a következőképpen: $BC = a$ és $AC = b$. Ekkor a *BTC* derékszögű háromszögben:

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{a}$, ebből $a = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}6$ (cm).

Ugyanebben a derékszögű háromszögben $\mathrm{tg}60^\circ = \sqrt{3} = \frac{4}{TB}$, és ebből

$TB = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}3$ (cm).

Az *ATC* derékszögű háromszögben: $\sin 40^\circ = \frac{4}{b}$, ebből $b = \frac{4}{\sin 40^\circ} \approx 6{,}2$ (cm), és

$\cos 40^\circ = \frac{AT}{b}$, $AT = b\cos 40^\circ \approx 4{,}8$ (cm). $AT + TB = c \approx 7{,}1$ (cm).

A háromszög oldalainak hossza kb. 4,6 cm, 6,2 cm és 7,1 cm.

4. Egy téglalap átlói 42°-os szöget zárnak be egymással, és a rövidebb oldala 6 cm hosszú. Milyen hosszúak az átlói?

Megoldás:

Legyen az *ABCD* téglalap rövidebb oldala BC, átlóinak metszéspontja *E*. Ekkor $BC = 6$ és $BEC_\angle = 42^\circ$. A *BEC* egyenlőszárú háromszög *E* csúcsából a *BC* alapra húzott merőleges felezi az alapot a *T* pontban és a °42°-os szárszöget is. A *TBE* derékszögű háromszögben: $\sin 21^\circ = \frac{3}{EB}$, ahol *EB* a téglalapátló hosszának fele.

$$EB = \frac{3}{\sin 21^\circ} \approx 8{,}37 \text{ (cm)}.$$

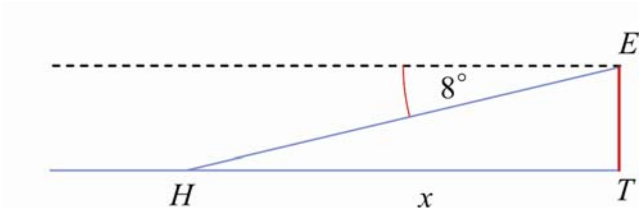
A téglalap átlóinak hossza $2EB \approx 16{,}7$ (cm).

Megjegyzés: A téglalap átlójának hossza koszinusztétel alkalmazásával is kiszámítható: Az EBC egyenlőszárú háromszög BC oldalára alkalmazva: $6^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos 42°$, ahol x a téglalapátló hosszának felét jelöli. Ebből $x^2 = \frac{18}{1-\cos 42°}$, azaz $0 < x \approx 8{,}37$.

5. Egy kikötő világítótornyából - tenger szintje fölött 40 m magasságból - egy hajó 8°-os depressziószög alatt látszik. Milyen távol van a hajó a toronytól?

Megoldás:

Jelöljük a hajó helyzetét megadó pontot H-val, a tornyot az ET szakasszal.



Az $EHT_\angle$ szög váltószögpárja az adott depressziószögnek, így $EHT_\angle = 8°$. Az EHT derékszögű háromszögben $\text{tg}8° = \frac{40}{x}$, ebből $x = \frac{40}{\text{tg}8°} \approx 284{,}6$.

A hajó a toronytól kb. 285 m távolságra van.

6. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza sin75° egységgel egyenlő. Mekkora a háromszög egyik hegyesszöge? Döntsd el, melyik válasz a helyes! Döntésedet indokold!

A: 75° **B:** Tetszőleges lehet. **C:** 15° **D:** A többi válasz nem helyes.

Megjegyzés: Itt és a többi „választásos" megoldások közül csak egy válasz megfelelő.

Megoldás: A helyes válasz **B**, mivel a derékszögű háromszöget egy oldalhosszának ismerete nem határozza meg egyértelműen.

7. Ha egy derékszögű háromszög egyik befogója $\sin 75°$ egység, a másik $\sin 15°$ egység hosszú, akkor az átfogó hossza hány egység?

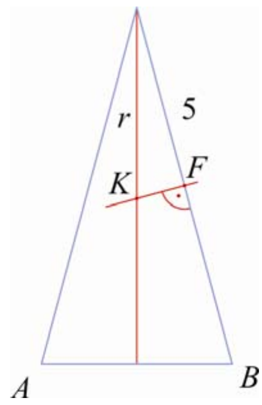
A: 0,98 **B:** $\text{tg}75°$ **C:** $\text{tg}15°$ **D:** 1

Megoldás: A helyes válasz **D.** A derékszögű háromszöget a két befogójának hossza egyértelműen meghatározza.

Pitagorasz tétele szerint $\sin^2 75° + \sin^2 15° = c^2$, és mivel $\sin 15° = \cos 75°$, így $\sin^2 75° + \cos^2 75° = c^2$. Tudjuk, hogy $\sin^2 75° + \cos^2 75° = 1$, tehát a derékszögű háromszög átfogója 1 egység hosszú.

8. Egy egyenlőszárú háromszög szárainak hossza 10 cm, a szárak által bezárt szög 30°-os. Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

Megoldás: Jelöljük az *ABC* háromszög alapját *AB*-vel. A körülírt kör *K* középpontja a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja. A *CK* egyenes a háromszög szimmetriatengelye. A *CKF* derékszögű háromszögben (*F* a *BC* oldal felezőpontja) a *CK* szakasz hossza a körülírt kör *r* sugarával egyenlő, és $KCF_\angle = 15°$, továbbá $FC = 5$. A *CKF* derékszögű háromszögben: $\cos 15° = \frac{CF}{CK}$, azaz $\cos 15° = \frac{5}{r}$. Innen $r = \frac{5}{\cos 15°} \approx 5{,}2$



A háromszög körülírt körének sugara kb. 5,2 cm hosszú.

9. Egy egyenlőszárú háromszög szárainak hossza 8 cm, egyik belső szöge120°. Mekkora a háromszög harmadik oldalának hossza?

Megoldás: A háromszög szárszöge 120°-os. A háromszög szimmetriatengelye két egybevágó derékszögű háromszögre bontja a háromszöget. Ha az alap hosszát *x*-szel jelöljük: $\sin 60° = \frac{\frac{x}{2}}{8}$, ebből $x = 16\sin 60° \approx 13{,}9$.

A háromszög harmadik oldalának hossza kb. 13,9 cm.

Megjegyzés: Az egyenlőszárú háromszög harmadik (*x*) oldalának hossza koszinusztétel alkalmazásával is kiszámítható: $x^2 = 2\cdot 8^2 - 2\cdot 8^2\cos 120°$, azaz $x^2 = 192$, és ebből $0 < x = \sqrt{192} \approx 13{,}9$.

10. Egy turista β emelkedési szögű, *b* km hosszú egyenes úton jutott fel a *B* csúcsra, onnan γ emelkedési szögű ($\gamma > \beta$), *c* km hosszú egyenes úton feljutott a *C* csúcsra. Mennyi a szintkülönbség a kiindulási pont és a C csúcs között?

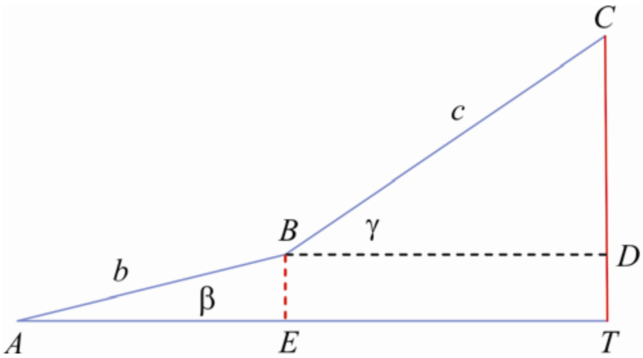
A: $b\cos\beta + c\cos\gamma$ **B:** $\frac{b}{\sin\beta} + \frac{c}{\sin\gamma}$ **C:** $b\sin\beta + c\sin\gamma$

D: $(b+c)\sin(\beta+\gamma)$

Megoldás: A helyes válasz **C**.

Az ábra szerinti jelölést alkalmazva: A szintkülönbség: $CT = EB + DC$. Az ABE derékszögű háromszögben $BE = b\sin\beta$, a CBD derékszögű háromszögben $DC = c\sin\gamma$.

Így $CT = EB + DC = b\sin\beta + c\sin\gamma$.



11. Egy szimmetrikus trapéz szára kétszerese a trapéz magasságának. Mekkorák a trapéz szögei?

Megoldás: A hosszabb alapon nyugvó szögek 30°-osak, a rövidebb alapon fekvők pedig 150°-osak, hiszen a trapéz hegyesszöge, a hosszabb oldalhoz tartozó magassága és a trapéz szára által létrehozott derékszögű háromszögben a trapéz hegyesszögével szemközti befogó fele az átfogónak.

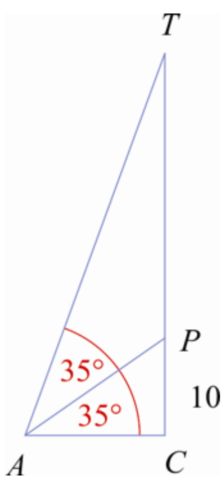
12. Mekkora a hegyesszöge annak a paralelogrammának, amelynek oldalai 5 cm és 8 cm hosszúak, területe pedig $20\,\text{cm}^2$?

Megoldás: A paralelogramma hosszabb oldalához tartozó m magassága a $T = 20 = 8\cdot m$ összefüggésből $m = 2{,}5\,\text{cm}$. A paralelogramma hosszabb oldalán nyugvó hegyesszöget α-val jelölve, az α szög, az m magasság és a paralelogramma rövidebb oldala által meghatározott derékszögű háromszögben $2{,}5 = 5\sin\alpha$, azaz $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Mivel α-val hegyesszöget jelöltünk, $\alpha = 30°$. A paralelogramma hegyesszöge tehát 30°-os.

13. Egy ház első emeleti ablakának felső párkánya 10 m-re van az utcaszinttől. Az utca egy pontjából ez a felső párkány 35°- os emelkedési szög alatt, a ház teteje 70°-os emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a ház?

Megoldás:

Az ábra jelöléseit alkalmazva: Az utca A pontjából a PC szakasz 35°-os szögben látszik, a kérdés a tető és az utcaszint CT távolságának meghatározása.



Az *APC* derékszögű háromszögben $\mathrm{tg}35° = \frac{10}{AC}$, azaz $AC = \frac{10}{\mathrm{tg}35°} \approx 14{,}3\ (\mathrm{m})$. Az *ATC* derékszögű háromszögben $\mathrm{tg}70° = \frac{TC}{AC}$, és így $TC = \frac{10}{\mathrm{tg}35°} \cdot \mathrm{tg}70° \approx 39{,}2$.

A ház kb. 39 m magas.

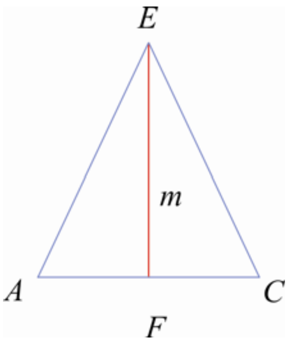
14. Egy cég emblémája tömör fából készült négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla. A gúla alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm hosszú.

a) Milyen magas a gúla?

b) Mekkora szöget zár be a gúla két szemközti oldaléle?

Megoldás:

a) Ha elvágjuk az *ABCDE* gúlát a két szemközti éle mentén, a gúla síkmetszete egy olyan egyenlőszárú háromszög (*ACE*), amelynek szárai $AE = CE = 8\ (\mathrm{cm})$ hosszúak, az *AC* alapja pedig a gúla alaplapjának átlója. A gúla *m* magassága e háromszög alaphoz tartozó magasságával megegyező.



Az alaplap *AC* átlójának hossza $5\sqrt{2}$. Pitagorasz tételét alkalmazva az *AFE* derékszögű háromszögre:

$$m^2 = 8^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2,\ \text{azaz}\ m^2 = \frac{103}{2},\ \text{ebből}$$

$0 < m = \sqrt{51{,}5} \approx 7{,}2$ (cm). A gúla kb. 7,2 cm magas.

b) A keresett szög az $AEC_\angle$. Az *AFE* derékszögű háromszögben:

$$\sin\frac{AEC_\angle}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{8},\ \text{azaz}\ \sin\frac{AEC_\angle}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{16} \approx 0{,}4419.\ \text{Mivel}\ \frac{AEC_\angle}{2}\ \text{hegyesszög,}$$

$$\frac{AEC_\angle}{2} \approx 26{,}23°,\ \text{így}\ AEC_\angle \approx 52{,}5°.$$

A gúla két szemközti oldalélének hajlásszöge kb. 52,5°-os.

II. ISMERI ÖN A KOSZINUSZTÉTELT?

A háromszöget két oldala és az általuk közbezárt szöge egyértelműen meghatározza, tehát ezeknek az adatoknak az ismeretében kiszámítható a háromszög többi adata, pl. a háromszög harmadik oldalának hossza, a többi szöge. A háromszög három oldala és egy szöge közötti kapcsolatot a koszinusztétel írja le az algebra nyelvén. Segítségével a három oldal ismeretében könnyen megtudhatjuk, hogy szögei szerint milyen a háromszög, mekkora a legnagyobb szöge stb. Ezt a tételt sokszor alkalmazzuk geometriai számítások során, ezért célszerű több időt szánni a tétel mélyebb megismerésére.

1. Egy háromszög egyik szögének koszinusza negatív szám. Szögei szerint milyen a háromszög?

Megoldás: Mivel a háromszög mindhárom szöge nagyobb, mint 0° és kisebb, mint 180°, ezért egyik szögének koszinusza csak úgy lehet negatív szám, ha a szög tompaszög.
A háromszög tompaszögű.

2. Egy háromszög *a*, *b* és *c* oldalairól tudjuk, hogy $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$. Szögei szerint milyen a háromszög?

Megoldás: A háromszög tompaszögű. Mivel a koszinusztétel szerint

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, azaz $c^2+2ab\cos\gamma=a^2+b^2$, így $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, és mivel tudjuk, hogy a vizsgált háromszögben ez a kifejezés negatív értékű, így a háromszög γ szöge tompaszög.

3. Egy háromszög mindhárom szögének szinusza pozitív szám. Szögei szerint milyen a háromszög?

Megoldás: Ha a háromszög bármelyik α szögéről tudjuk, hogy $\sin\alpha>0$, akkor

$0^\circ<\alpha<180^\circ$ bármelyik szög lehet. Ebből a feltételből tehát nem lehet megállapítani, hogy a háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű.

4. Létezhet-e olyan háromszög, és ha igen, szögei szerint milyen, ha α, β és γ szögeire:

a) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le-0{,}25$ **b)** $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=0$

Megoldás:

a) Lehet ilyen háromszög, mégpedig tompaszögű háromszög, mert szükséges, hogy egyik szögének koszinusza negatív legyen.

(pl. $\cos 112° \cos 26° \cos 42° \approx -0{,}2502 < -0{,}25$)

b) Nincs ilyen háromszög, mert a feltételből az következne, hogy valamelyik szögének szinusza 0-val egyenlő, és mivel a háromszög minden szöge nagyobb 0°-nál és kisebb 180°-nál, ezért egyik szögének szinusza sem lehet nulla.

5. Egy háromszög két szögéről (α és β) tudjuk, hogy $\alpha : \beta = 1:2$. Melyik kifejezés egyezik meg biztosan a szögekkel szemközti oldalak arányával?

A: $1:2$ **B:** $\sin\alpha : \sin\beta$ **C:** $\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D:** $\cos\alpha : \cos 2\alpha$

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)

Megoldás: Helyes válasz a **B**. Minden háromszögre igaz a szinusztétel. Alkalmazzuk a tételt a háromszög *a* és *b* oldalára: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$.

Az addíciós tétel ismeretében meg tudnánk mutatni, hogy az **A** és **D** válasz egyetlen háromszögre sem teljesül. Ennek hiányában igazoljuk példával, hogy **A** és **D** nem teljesül minden háromszögre. A **C** csak arra a derékszögű háromszögre teljesül, amelynek a hegyesszögei 30° és 60°.

6. Egy háromszög oldalai 3 cm, 4 cm és 6 cm hosszúak. Mekkora a legnagyobb szögének koszinusza?

Megoldás: Alkalmazzuk a háromszög leghosszabb (6 cm) oldalára (szemközti szöge α) a koszinusztételt: $6^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos\alpha$. Az egyenletből $\cos\alpha = -\frac{11}{24}$. Mivel $0° < \alpha < 180°$, így $\alpha \approx 117{,}3°$.

A háromszög legnagyobb szöge kb. 117,3°-os.

7. Egy háromszög egyik szöge 120°-os, két oldalának hossza 4 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

Megoldás: A háromszög leghosszabb oldalával szemközti szög lehet csak 120°-os. Így kétféle háromszög tehet eleget a feltételeknek:

a) Ha a háromszög leghosszabb oldala az ismeretlen c oldal, akkor:

$c^2 = 4^2 + 8^2 - 2\cdot 4\cdot 8\cos 120^\circ$, azaz $c^2 = 112$. Ebből $0 < c = \sqrt{112} \approx 10{,}6\ (\text{cm})$.

Ebben az esetben a háromszög harmadik oldala kb 10,6 cm hosszú.

b) Ha a háromszög leghosszabb oldala a 8 cm-es oldal, akkor a 120°-os szöget közrefogó oldalak hossza 4 cm és b cm. Ekkor $8^2 = 4^2 + b^2 - 2\cdot 4\cdot b\cdot\cos 120^\circ$, azaz

$b^2 + 4b - 48 = 0$.

A másodfokú egyenlet egyetlen pozitív gyöke $b = \dfrac{-4+\sqrt{208}}{2} \approx 5{,}2$.

Ebben az esetben a háromszög harmadik oldala kb 5,2 cm hosszú.

8. Egy háromszög egyik szöge 150°-os, két oldalának hossza 6 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög területe?

Megoldás: A háromszög leghosszabb oldalával szemközti szög lehet csak 150°-os. Így kétféle háromszög tehet eleget a feltételeknek:

a) A két adott oldal közbezárt szöge 150°-os (az ismeretlen harmadik a leghosszabb oldal). Ekkor a háromszög területe: $T = \dfrac{6\cdot 8\cdot \sin 150^\circ}{2} = 12\ (\text{cm}^2)$.

b) Ha a háromszög leghosszabb oldala a 8 cm-es oldal, akkor szinusztétel alkalmazásával kiszámíthatjuk a 6 cm-es oldallal szemközti α szöget: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 150^\circ} = \dfrac{6}{8}$.

Ebből $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$. Mivel α csak hegyesszöget (30°-nál kisebbet) jelölhet, így $\alpha \approx 22^\circ$. A 6 és 8 cm hosszú oldalak által határolt β szög kb. 8°-os.

Ekkor a háromszög területe: $T \approx \dfrac{6\cdot 8\cdot \sin 8^\circ}{2} \approx 3{,}3\ (\text{cm}^2)$.

9. Egy háromszög egyik oldala 4-szerese egy másik oldalnak, s e két oldal által közrefogott szög 120°-os. A háromszög leghosszabb oldala hányszorosa a legrövidebbnek?

Megoldás: A háromszög oldalait a-val, $4a$-val, és a leghosszabbat c-vel jelölhetjük. Alkalmazzuk a háromszög c oldalára a koszinusztételt: $c^2 = a^2 + (4a)^2 - 2a\cdot 4a\cos 120^\circ$,

azaz $c^2 = a^2 + 16a^2 + 4a^2$. Tehát $c^2 = 21a^2$, és innen $0 < c = \sqrt{21}\cdot a$.

A háromszög leghosszabb oldala $\sqrt{21}$-szerese a legrövidebb oldalnak.

10. Egy háromszög két oldala *a* és *b*, a velük szemközti szögek rendre α és β, tudjuk továbbá, hogy $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{a}{b}$.

a) Mekkora a $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}$?

b) Oldalai szerint milyen a háromszög?

Megoldás:

a) A szinusztétel tetszőleges háromszögre alkalmazható, így ebben a háromszögben is $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}$. Ekkor $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. A feltétel szerint $\cos\alpha\neq 0$, ezért a kapott trigonometrikus egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $\cos\alpha$-val, és szorozhatjuk $\sin\beta$-val. A kapott egyenlet: $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, azaz $\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha$. Ebből adódik, hogy $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}=1$.

b) Az **a)** feladatra kapott eredményünk szerint $\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha$, ez az egyenlőség háromszög szögeire csak úgy teljesülhet, ha $\alpha=\beta$, tehát a háromszög egyenlőszárú.

11. Milyen határok között lehet a háromszög *b* oldalának hossza, ha az *a, b, c* oldalú háromszög hegyesszögű, $b<a$ és $a=7$, $c=9$?

Megoldás: A feltétel szerint $b<7$. A háromszög hegyesszögű, azaz a legnagyobb szöge (γ) is hegyesszög. Alkalmazzuk a koszinusztételt a háromszög leghosszabb oldalára: $9^2=7^2+b^2-2\cdot 7\cdot b\cdot\cos\gamma$. Mivel γ hegyesszög, a koszinusza pozitív, ezért célszerű kifejezni az egyenletből $\cos\gamma$-t: $\cos\gamma=\frac{b^2-32}{14b}>0$. Mivel *b* csak pozitív lehet, az egyenlőtlenség megoldása: $b>\sqrt{32}$.

A háromszög *b* hosszúságú oldalára tehát $\sqrt{32}<b<7$.

12. Milyen határok között lehet a háromszög *b* oldalának hossza, ha az *a, b, c* oldalú háromszög tompaszögű, $b<a$ és $a=5$, $c=7$?

Megoldás: A háromszög leghosszabb oldala c, így az ezzel szemközti szög a tompaszög. A tompaszög koszinusza negatív. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételben megfogalmazott összefüggést!

$$7^2=5^2+b^2-2\cdot 5\cdot b\cdot\cos\gamma$$

Fejezzük ki az egyenletből $\cos\gamma$ -t! $\cos\gamma = \dfrac{b^2 - 24}{10b} < 0$, és mivel b pozitív számot jelöl, az egyenlőtlenség megoldása: $0 < b < \sqrt{24}$.

Viszont az 5, 7 és b hosszú szakaszok csak akkor alkotnak háromszöget, ha érvényes rájuk a háromszög-egyenlőtlenség, így az $5 + b > 7$ egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell.

A háromszög b oldalának hossza: $2 < b < \sqrt{24}$.

13. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha a, b, c oldalaira: $c^2 - \sqrt{2}ab = a^2 + b^2$?

Megoldás: A koszinusztétel szerint $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, ahol γ a háromszög c oldallal szemközti szöge. A háromszög oldalaira vonatkozó egyenletbe helyettesítsük be c^2 helyére a koszinusztétel összefüggését, így $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma - \sqrt{2}ab = a^2 + b^2$, azaz $-2ab\cos\gamma - \sqrt{2}ab = 0$. Mivel $ab > 0$, így $\cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Mivel $0° < \gamma < 180°$, ezért az egyenletnek egyetlen megoldása van: $\gamma = 135°$.

A háromszög legnagyobb (c oldallal szemközti) szöge 135°-os.

III. KIRÁNDULUNK

Az összetettebb számításokat igénylő feladatokban –mint itt is– a számítások elvégzése előtt célszerű megtervezni a megoldáshoz vezető számítások sorrendjét. Ezt a módszert mutatjuk be a következőkben.

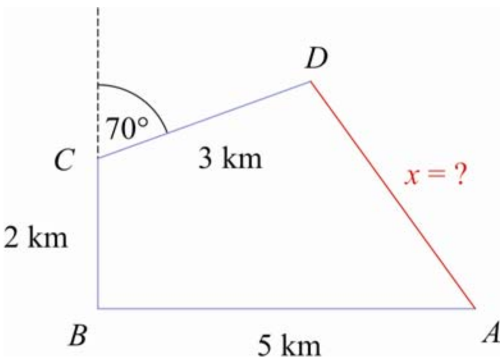
1. Barátainkkal többnapos kirándulásra mentünk. Szállásunk az *A* faluban volt. Első nap felfedeztük a környéket. Szálláshelyünktől nyugatra, onnan 5 km távolságra volt *B* falu. Ha ebből a faluból északi irányban haladtunk 2 km-t, egy várromhoz (*C*) érkeztünk. Innen tovább a menetiránytól jobbra, azzal kb. 70°-os szöget bezáró egyenes úton haladtunk tovább, és *C*-től 3 km-re a *D* vadászházhoz érkeztünk.

a) Rajzold le az első napi túra útvonaltervét!

b) Számítsd ki, hogy milyen távol van légvonalban a szálláshelyünk a vadászháztól?

Megoldás:

a)



b) Terv:

1. Az *ABC* derékszögű háromszögből $BCA_\angle = \gamma$ szög kiszámítása tangens szögfüggvénnyel.
2. Az *AC* átfogó kiszámítása (pl. Pitagorasz tételével).
3. *ACD* szög kiszámítása.
4. Az *ACD* háromszögben a keresett *AD* szakasz hosszának kiszámítása koszinusztétel felhasználásával.

Számítások:

1. $\mathrm{tg}\gamma = \frac{5}{2}$, ebből $\gamma \approx 68{,}2^\circ$.
2. $AC = \sqrt{29} \approx 5{,}4$
3. $ACD_\angle \approx 41{,}8^\circ$

4. $x^2 \approx (\sqrt{29})^2 + 3^2 - 6 \cdot \sqrt{29}\cos 41{,}8°$

$x^2 \approx 13{,}9$, azaz $0 < x \approx 3{,}7$.

A szálláshelytől a vadászház kb. 3,7 km távolságra van.

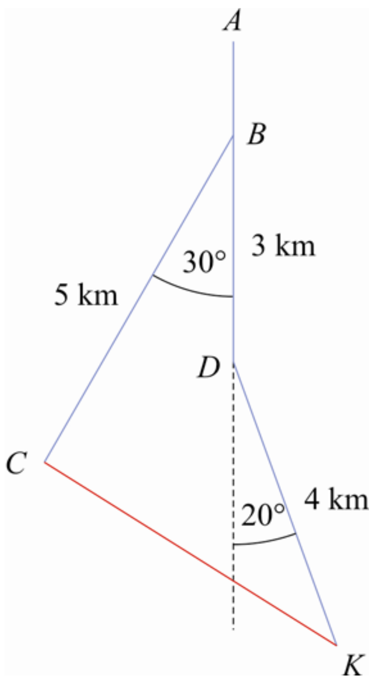
2. Másnap újabb túraútvonalat terveztünk. A térkép szerint ha az *A* szálláshelyünkről dél felé indulunk el egy egyenes műúton, majd nemsokára a műútról jobbra, kb. 30°-os szögben leágazó mellékúton haladunk tovább, úgy 5 km megtétele után a *C* faluba jutunk el. Ha viszont tovább haladunk még a műúton 3 km-t, és itt (*D* pontban) egy, a műútról balra kb. 20°-os szögben leágazó úton haladunk 4 km-t, egy régi kápolnához jutunk. A társaság egyik része a *C* faluba, a másik része a *K* kápolnához ment.

a) Rajzold le a második napi túra útvonaltervét!

b) Milyen távol került egymástól légvonalban a társaság két fele?

Megoldás:

a)



b) Terv:

1. A *CBD* háromszögben ismert két oldal és a közbezárt szög, így *CD* kiszámítható koszinusztétel alkalmazásával.
2. A *CBD* háromszögben $CDB_\angle = \alpha$ szög kiszámítása a szinusztétel felhasználásával.

3. Ekkor a *CDK* háromszögben ismert két oldal és a közbezárt szög, a harmadik oldal (*CK*) kiszámítható a koszinusztétel alkalmazásával.

Számítás:

1. $CD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ \approx 8{,}02$, így $0 < CD \approx 2{,}83$.

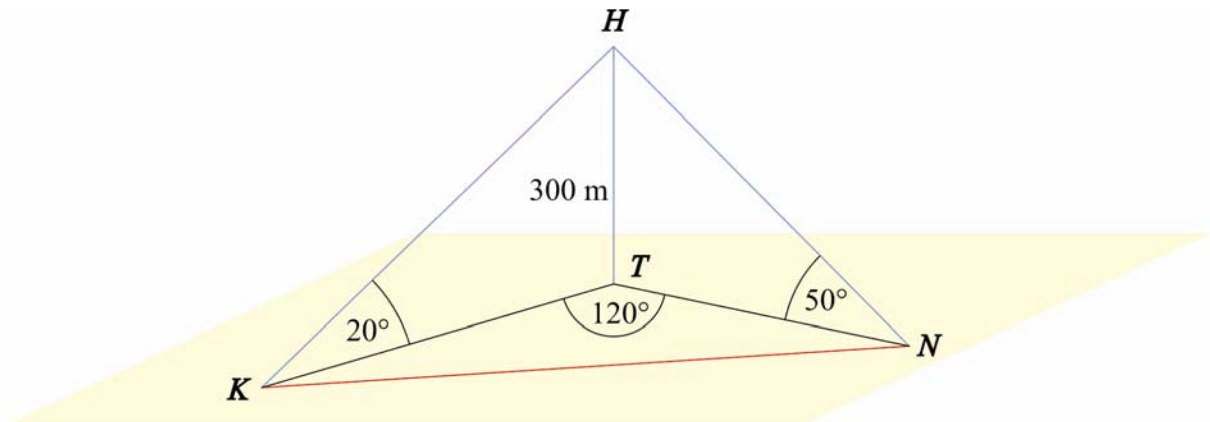
2. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ} \approx \dfrac{5}{2{,}83} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0{,}8834$. *Mivel* $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, ezért $\alpha \approx 62^\circ$ vagy $\alpha \approx 118^\circ$.

A *CDB* háromszög leghosszabb oldala a *CD*, így vele szemben van a háromszög legnagyobb szöge. Ez nem lehet 62°-os, mert ebben az esetben a harmadik szög 88°-os lenne, és akkor ez lenne a legnagyobb szöge a háromszögnek. Tehát $\alpha \approx 118^\circ$.

3. A $CDK_\angle \approx 82^\circ$, így $CK^2 \approx 4^2 + 2{,}83^2 - 8 \cdot 2{,}83 \cdot \cos 82^\circ \approx 20{,}86$. $0 < CK \approx 4{,}6$

A társaság két fele kb. 4,6 km távolságra van egymástól.

3. Harmadik napra hagytuk a legnehezebb túrát. A szálláshelyünktől kelet felé egy kb. 300 m magas hegy látszott, tetején egy kilátóval. Elhatároztuk, hogy a hegyet „toronyiránt” másszuk meg. A társaság ismét két részre szakadt, mert egy *K* helyről lankásabbnak tűnt a hegyoldal, kb. 20°-os emelkedési szögben lehetett haladni, míg a vízszintes talajon ezzel 120°-os szöget bezáró *N* helyről meredekebb volt, kb. 50°-os emelkedési szögű. Számítsd ki a *K* és *N* pontok távolságát!



Megoldás:

Terv:

1. A *HKT* derékszögű háromszögben *KT* kiszámítása tangens szögfüggvénnyel.

2. A *HNT* háromszögben *TN* kiszámítása tangens szögfüggvénnyel.

3. *KNT* háromszögben *KN* kiszámítása koszinusztétel alkalmazásával.

Számítás:

1. $\mathrm{tg}20° = \dfrac{300}{HT}$, ebből $HT = \dfrac{300}{\mathrm{tg}20°} \approx 824\ (\mathrm{m})$

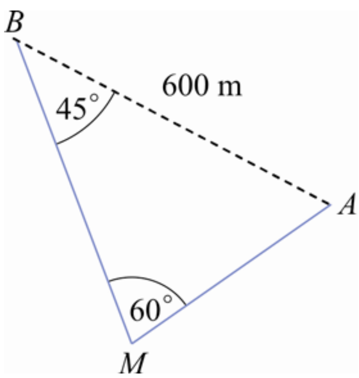
2. $\mathrm{tg}50° = \dfrac{300}{NT}$, ebből $NT = \dfrac{300}{\mathrm{tg}50°} \approx 252\ (\mathrm{m})$

3. $KN^2 \approx 824^2 + 252^2 - 2 \cdot 824 \cdot 252 \cdot \cos 120°$.

Innen $KN \approx 975\ \mathrm{m}$.

4. Egymással 60°-os szöget bezáró két egyenes útszakaszon egy-egy gépkocsi (*A* és *B*) közeledik az *M* útelágazás felé. Jelenleg *A* és *B* távolsága 600 m. *B*-ből nézve az *AM* útszakasz 45°-os szög alatt látszik. A gépkocsik állandó sebességének nagysága: $v(A) = 18\ \mathrm{m/sec}$, $v(B) = 25\ \mathrm{m/sec}$. Melyik gépkocsi, és mennyi idővel érkezik előbb az elágazáshoz?

Megoldás:



Az *ABM* háromszög harmadik szöge (*MAB*) 75°-os.

Terv:

1. Az *ABM* háromszögben szinusztétel alkalmazásával *AM* kiszámítása.

2. Az *ABM* háromszögben koszinusztétel alkalmazásával *BM* kiszámítása.

3. A kocsik egyenletes mozgását feltételezve, a $t = \dfrac{s}{v}$ képlet alapján $t(A)$ és $t(B)$ kiszámítása.

Számítás:

1. $\dfrac{\sin 45°}{\sin 60°} = \dfrac{AM}{600} \Rightarrow AM = 600 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 490\ (\mathrm{m})$.

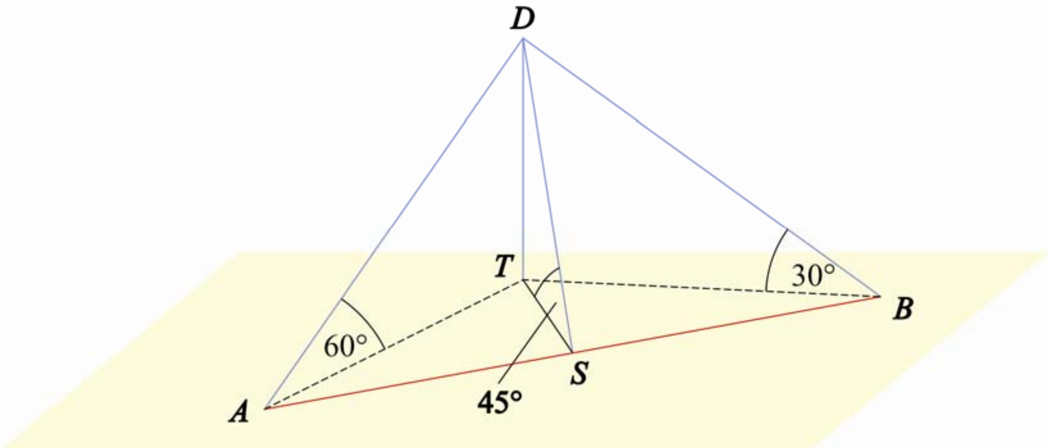
2. $BM^2 \approx 600^2 + 490^2 - 2 \cdot 600 \cdot 490 \cdot \cos 75°$, ebből $BM \approx 669\ (\mathrm{m})$

3. $t(A) \approx \dfrac{490}{18} \approx 27{,}2\ (\mathrm{sec})$ és $t(B) \approx \dfrac{669}{25} \approx 26{,}8\ (\mathrm{sec})$

A B gépkocsi 0,4 sec-mal előbb ér a kereszteződéshez, de ez az eltérés alig mérhető, tehát lényegében egyszerre érnek oda.

5.* Három középiskolás diák egy folyó partján sátorozott. A folyó túlsó partján volt egy domb. Úgy becsülték, hogy a dombtető a sátorhelyükből 45°-os emelkedési szög alatt látszik. Kíváncsiságból, a sátorhelyüktől jobbra és balra is kimértek 100-100 métert, és ezekről a helyekről is megbecsülték a dombtető emelkedési szögét. A becsült szögek: az egyik pontból 60°, a másikból 30°. Becslésed szerint, milyen magas a domb? Számítsd is ki!

Megoldás:



Az ábrán S a sátor helye, A és B a mérési helyek ($SA = SB = 100$ m), TD a domb, melynek magasságát jelöljük h-val.

Terv:

1. DTS egyenlőszárú, derékszögű háromszög, így $TS = h$.

2. Az ATD derékszögű háromszög AT befogója: $AT = h \cdot \mathrm{ctg}60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot h$.

3. A DTB derékszögű háromszög BT befogója: $BT = h \cdot \mathrm{ctg}30^\circ = \sqrt{3} \cdot h$.

4. Alkalmazzuk a koszinusztételt az AST háromszög AT oldalára és az SBT háromszög BT oldalára:

$$\textbf{(1)}\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot h\right)^2 = h^2 + 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot h \cdot \cos AST_\angle \text{ és}$$

$$\textbf{(2)}\quad \left(\sqrt{3} \cdot h\right)^2 = h^2 + 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot h \cdot \cos BST_\angle$$

5. Mivel az $AST_\angle = 180^\circ - BST_\angle$, így $\cos AST_\angle = -\cos BST_\angle$. Használjuk fel ezt az **(1)** egyenletben!

6. $$\textbf{(3)}\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot h\right)^2 = h^2 + 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot h \cdot \cos BST_\angle .$$

Számítás:

Adjuk össze a **(2)**, illetve **(3)** egyenlet megfelelő oldalait!

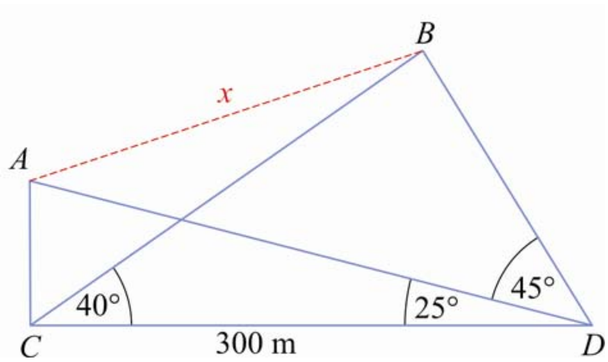
$$\left(\sqrt{3}\cdot h\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot h\right)^2=2h^2+2\cdot 100^2, \text{ azaz } 3h^2+\frac{1}{3}h^2-2h^2=20\,000.$$

Ebből adódik, hogy $h^2=15\,000$, és így $0<h=\sqrt{15\,000}\approx 122$.

A domb kb. 122 m magas.

6. A tó egy szigetén lévő két torony (A és B) távolságát szeretnénk meghatározni. E célból a tó partján kitűzünk két olyan pontot (C és D), amelyek távolsága 300 m, továbbá lemérjük az alábbi szögeket: $DCA_\angle=90°$, $DCB_\angle=40°$, $CDA_\angle=25°$ és $CDB_\angle=70°$. Mekkora a két torony távolsága?

Megoldás:



Terv:

1. Az ACD derékszögű háromszögben AC befogó kiszámítása tangens szögfüggvénnyel.
2. Mivel a DBC szög is 70°-os, ezért $BC=DC=300$. A BCA háromszögben

   $BCA_\angle=50°$.
3. Az ABC háromszögből AB kiszámítása koszinusztétel alkalmazásával.

Számítás:

1. $AC=300\cdot \mathrm{tg}25°\approx 139{,}9$ (m)

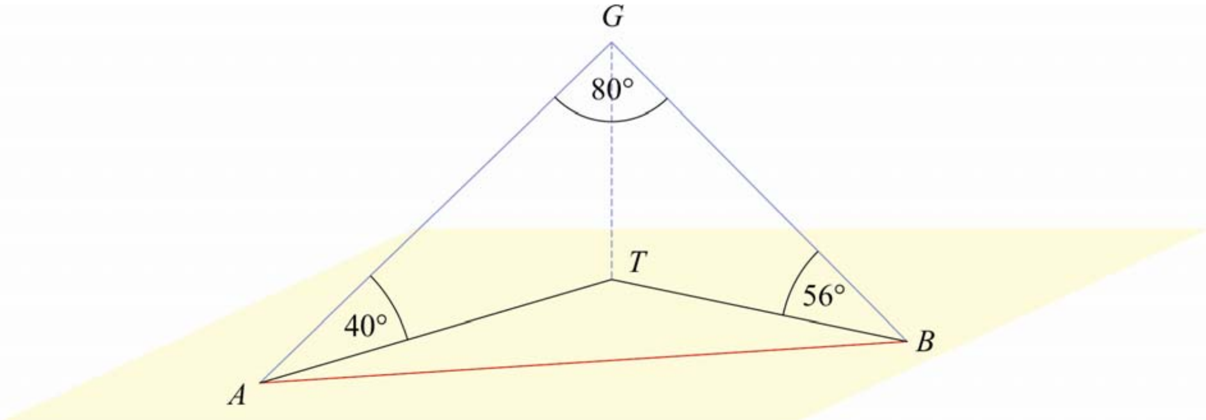
3. $x^2\approx 300^2+139{,}9^2-600\cdot 139{,}9\cdot\cos 50°$

   $0<x\approx 236$ (m)

A két torony távolsága kb. 236 m.

7. A Gellérthegy magassága tengerszínt felett 235 m. A tetejéről a pesti oldal fele nézve két kis park (*A* és *B*) 40°-os és 56°.os depressziószög alatt látszik (A pesti oldal tengerszínt feletti magassága kb. 110 m). A két depressziószög mérése között a mérőeszközt 80°-kal kellett elforgatni. Milyen távol van egymástól légvonalban a két kis park?

Megoldás:



$TG = 236 - 110 = 125$ m

Terv:

1. Az *ATG* derékszögű háromszögben *AG* átfogó kiszámítása q 40° szinusz szögfüggvényével.
2. A *BTG* derékszögű háromszögben *BG* átfogó kiszámítása az 56°-os szög szinuszával.
3. Az *AGB* háromszögben *AB* oldal kiszámítása koszinusztétel alkalmazásával.

Számítás:

1. $AG = \dfrac{125}{\sin 40^\circ} \approx 194{,}5\ (\text{m})$

2. $BG = \dfrac{125}{\sin 56^\circ} \approx 150{,}8\ (\text{m})$

3. $AB^2 \approx 194{,}5^2 + 150{,}8^2 - 2 \cdot 194{,}5 \cdot 150{,}8 \cdot \cos 80^\circ \approx 50\,384{,}5$

   $0 < AB \approx 224{,}5$

A két kis park távolsága kb. 225 m.

IV. TUDÁSPRÓBA

A modul utolsó foglalkozásán lehetőséget adunk a tanulóknak, hogy önállóan lemérjék ebben a témakörben szerzett ismereteik mélységét. A feladatsor a tanári mellékletben található.

A hat feladat megoldására 45 perc fordítható. Ha a tanár úgy látja, hogy a csoport munkatempója lassú, és ennyi idő alatt valószínűleg nem tudnak mindegyik feladat megoldásával foglalkozni, hagyjon el a feladatok közül egyet! Javaslatunk szerint ekkor az 5. feladatot ne tűzzék ki megoldásra. Ebben az esetben nem célszerű az elhagyott feladatot törölni a feladatlapról. Hagyjuk benne, de a feladatlap kiosztásakor mondjuk meg, hogy mely feladatok megoldását kérjük. A meg nem jelölt feladat megoldásához csak akkor kezdjenek hozzá a tanulók, ha a már megoldott feladatok megoldását átnézték, és még maradt idejük!

A tanári mellékletben megadtuk a tudáspróba feladatainak megoldását és értékelését is. Javasoljuk: döntse el a tanár, hogy pontszámok felhasználásával javítja-e ki a dolgozatokat, illetve, hogy az egész dolgozatot érdemjeggyel, vagy százalékos teljesítmény megadásával értékeli.

A következő foglalkozáson mindenképpen érdemes értékelni a csoport munkáját, és ha szükséges, további feladatokat kitűzni, és ezek megoldására buzdítani a tanulókat.

A feladatok megoldásának megbeszélése történhet úgy is, hogy a megoldási útmutatót páronként egy példányban lemásoljuk, és azt a tanulók kezébe adjuk. Nagyon tanulságos (az érettségi javítási útmutatója esetében is), ha a tanulók látják, hogy mi alapján javítottuk a munkájukat.

Hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy a „gyakorlati életből vett” feladatok végeredményét mindig olyan pontossággal adják meg, amennyire az „életszerű”, tehát pl. egy domb magasságát legfeljebb méter, egy utca szélességét legfeljebb deciméter pontossággal. Mivel a közelítő számítás nem tantervi tananyag, így a közelítő értékek pontosságának kérdése eléggé megoldatlan a matematikaoktatás gyakorlatában. A számológép használata különösen kiélezi ezt a problémát, hiszen van tanuló, aki a memóriába teszi a részeredményeket, és azok „pontos” értékével számolnak a továbbiakban, és van aki a részeredmények közelítő értékével. Úgy tűnik, hogy az írásbeli érettségi dolgozatok megoldási útmutatójában egyelőre toleránsan kezelik ezt a problémát.

Tudáspróba

1. Milyen magas az a fa, amelynek árnyéka 815 cm hosszú amikor a Nap sugara 31°-os szöget zár be a vízszintes egyenessel?

2. Nápoly egyik utcájában úgy helyeznek el egy 6 m hosszú létrát, hogy éppen elérjen egy 5 m magasan lévő ablakot. Ha elforgatják a létrát a támaszpontja körül (az úttestre merőleges síkban), akkor éppen eléri a szemben lévő ház 3,2 m magasan lévő ablakát is.

a) Készíts vázlatrajzot!

b) Milyen széles az utca?

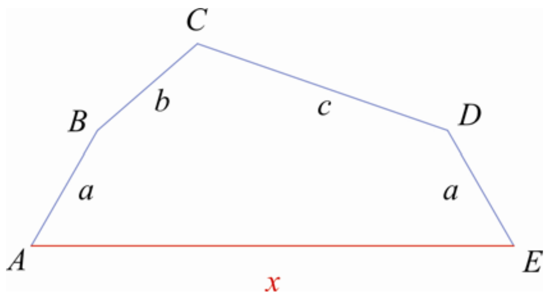
c) Mekkora szöggel kell elforgatni a létrát?

3. Az *ABC* háromszög oldalai: 2, 4 és $2\sqrt{7}$ egység, a *DEF* háromszögé pedig: 2, $\sqrt{12}$ és 4 egység hosszúak. Az *ABC* háromszög legnagyobb szöge hány fokkal nagyobb a *DEF* háromszög legkisebb szögénél?

4. Az ábrán egy *ABCDE* ötszög látható. Az adatok: $a = b = 30\text{ cm}$, $c = 60\text{ cm}$, $BCD_\angle = 120^\circ$ és $EAB_\angle = AED_\angle = 60^\circ$.

a) Hány cm hosszú az ötszög *AE* oldala?

b) Mekkora az ötszög területe?



5. Egy háromszög legrövidebb oldala 1 cm-rel rövidebb, a leghosszabb oldala 1 cm-rel hosszabb a háromszög harmadik oldalának hosszánál. A háromszög legkisebb szögének koszinusza $\frac{3}{5}$.

Mekkorák a háromszög oldalai?

6. Egy hegy csúcsát a hegy lábától a vízszinteshez képest 40°-os szög alatt látjuk. Ha innen egy emelkedő, a vízszintes síkhoz 13° alatt hajló egyenes úton 400 m-t haladunk a csúcs felé, olyan ponthoz jutunk, amelyből a hegy csúcsa 57°-os emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?

A tudáspróba feladatainak megoldása és értékelése

1. Milyen magas az a fa, amelynek árnyéka 815 cm hosszú amikor a Nap sugara 31°-os szöget zár be a vízszintes egyenessel?

Megoldás:

A szöveges feladat megértése (pl. egy helyes vázlat, az adatok feltüntetésével)........... 1 pont

A derékszögű háromszög adott oldala melletti hegyesszög 31°-os. .... 1 pont

$\mathrm{tg}31^\circ = \dfrac{x}{815}$ .... 1 pont

$x = 815 \cdot \mathrm{tg}31^\circ \approx 489{,}7$ .... 1 pont

A fa kb. 490 cm hosszú. .... 1 pont

Összesen: .... 5 pont

2. Nápoly egyik utcájában úgy helyeznek el egy 6 m hosszú létrát, hogy éppen elérjen egy 5 m magasan lévő ablakot. Ha elforgatják a létrát a támaszpontja körül (az úttestre merőleges síkban), akkor éppen eléri a szemben lévő ház 3,2 m magasan lévő ablakát is.

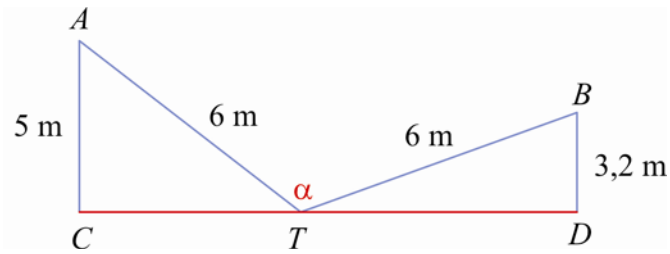
a) Készíts vázlatrajzot!

b) Milyen széles az utca?

c) Mekkora szöggel kell elforgatni a létrát?

Megoldás:

a)



2 pont

b)

Az *ACT* derékszögű háromszögben: $CT^2 = 6^2 - 5^2 = 11$ .... 1 pont

$0 < CT = \sqrt{11} \approx 3{,}32$ m.. 1 pont

A *TDB* derékszögű háromszögben: $TD^2 = 6^2 - 3{,}2^2 = 25{,}76$ .... 1 pont

$0 < TD = \sqrt{25{,}76} \approx 5{,}08$ (m)... 1 pont

Az utca kb. 8,4 m széles. .... 1 pont

c) Az *AB* hossza kiszámítható a Pitagorasz tételének alkalmazásával a *B* ponton át a *CD*-vel párhuzamos egyenes által létrehozott derékszögű háromszögből, amelynek befogói:

1,8 m és 8,4 m. .... 1 pont

$AB^2 = 1{,}8^2 + 8{,}4^2 = 73{,}8$, ebből $AB \approx 8{,}59$. .... 1 pont

Az *ATB* háromszögből pl. koszinusztétellel kiszámítható a keresett szög:

$AB^2 = 6^2 + 6^2 - 2\cdot 6^2 \cos\alpha \approx 73{,}8$ .... 2 pont

$\cos\alpha \approx -0{,}025$, amiből $\alpha \approx 91{,}4°$ .... 1 pont

A keresett szög kb. 91°-os. .... 1 pont

Összesen: .... 13 pont

3. Az *ABC* háromszög oldalai: 2, 4 és $2\sqrt{7}$ egység, a *DEF* háromszögé pedig: 2, $\sqrt{12}$ és 4 egység hosszúak. Az *ABC* háromszög legnagyobb szöge hány fokkal nagyobb a *DEF* háromszög legkisebb szögénél?

Megoldás:

Az *ABC* háromszög legnagyobb szöge a $2\sqrt{7}$ hosszú oldallal szemközti

($4 = \sqrt{16} < \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$).. 1 pont*

Koszinusztételt alkalmazva a háromszög leghosszabb oldalára:

$\left(2\sqrt{7}\right)^2 = 2^2 + 4^2 - 16\cdot\cos\alpha$. .... 1 pont

$\cos\alpha = -0{,}5$ .... 1 pont

Mivel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, így $\alpha = 120^\circ$. .... 1 pont

A *DEF* háromszög legkisebb szöge a 2 egység hosszú oldallal szemközti. .... 1 pont*

Koszinusztételt alkalmazva a *DEF* háromszög legrövidebb oldalára:

$2^2 = (\sqrt{12})^2 + 4^2 - 8\cdot\sqrt{12}\cdot\cos\delta$. .... 1 pont

$\cos\delta = \dfrac{3}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. .... 1 pont

Mivel $0^\circ < \delta < 180^\circ$, így $\delta = 30^\circ$ .... 1 pont

A két szög különbsége pontosan 90°. .... 1 pont**

Összesen: .... 9 pont

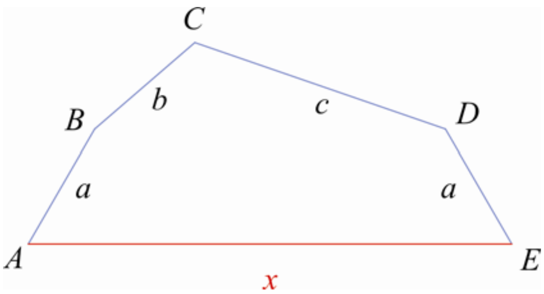
Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a tanuló nem fogalmazza meg ezt a gondolatot szöveggel, de a vázlatrajzáról, vagy gondolatmenetéből kiderül ennek ismerete.
A **-gal jelölt pont csak akkor jár, ha a szögeket pontos értékkel adja meg.

4. Az alábbi ábrán egy *ABCDE* ötszög látható. Az adatok: $a = b = 30$ cm, $c = 60$ cm,

$BCD_\angle = 120^\circ$ és $EAB_\angle = AED_\angle = 60^\circ$.

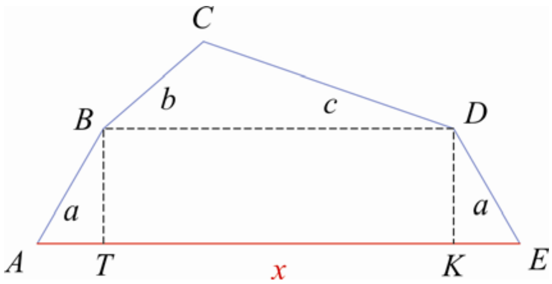
a) Milyen hosszú az ötszög *AE* oldala?

b) Mekkora az ötszög területe?



Megoldás:

a)



A *BDC* háromszögből a *BD* oldal kiszámítható koszinusztétel alkalmazásával:

$BD^2 = 30^2 + 60^2 - 2 \cdot 30 \cdot 60 \cdot \cos 120^\circ$ .... 2 pont

$0 < BD = \sqrt{6300}$ ($\approx 79{,}4$) .... 1 pont

Állítsunk merőlegest az *AE* oldalra a *B* és *D* pontokból. A kapott két derékszögű háromszög (*ATB* és *EKD*) egybevágó
(mert átfogóik hossza és szögeik páronként egyenlők). .... 1 pont

Ezeknek a derékszögű háromszögeknek a 60°-os szögük melletti befogójuk 15 cm hosszú, mert $a \cdot \cos 60^\circ = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$. .... 1 pont

$AE = 2 \cdot 15 + \sqrt{6300} \approx 109{,}4$ (cm) .... 1 pont

b)

Az ötszög területe a *BDC* háromszög és az *AEDB* trapéz területének összegével egyenlő. .... 1 pont

$T_{BDC} = \dfrac{30 \cdot 60 \cdot \sin 120°}{2}$ .... 1 pont

$T_{BDC} \approx 779{,}4\ \text{cm}^2$ .... 1 pont

Az *ATB* háromszög *TB* befogójának hossza: $30 \cdot \sin 60° = 15\sqrt{3}$ $(\approx 25{,}98)$. .... 1 pont

AZ AEDB trapéz területe: $T_{AEDB} = \dfrac{AE + BD}{2} \cdot TB$, így

$T_{AEDB} \approx \dfrac{109{,}4 + 79{,}4}{2} \cdot 25{,}98 \approx 2452{,}5\ (\text{cm}^2)$ .... 1 pont

Az ötszög területe kb. 3232 cm^2. .... 1 pont

Összesen: .... 12 pont

5. Egy háromszög legrövidebb oldala 1 cm-rel rövidebb, a leghosszabb oldala 1 cm-rel hosszabb a háromszög harmadik oldalának hosszánál. A háromszög legkisebb szögének koszinusza $\dfrac{3}{5}$.

Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:

Jelölje a háromszög oldalait $a-1$, a és $a+1$.

A háromszög legkisebb szöge (α) a legrövidebb oldallal szemközti szög. .... 1 pont*

Írjuk fel a koszinusztétel összefüggését a háromszög legrövidebb oldalára: .... 1 pont*

$(a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2 - 2a(a+1)\cos\alpha$ .... 2 pont

$a^2 - 2a + 1 = a^2 + a^2 + 2a + 1 - 2a(a+1) \cdot \dfrac{3}{5}$. .... 1 pont

$0 = a^2 + 4a - \dfrac{6}{5}a^2 - \dfrac{6}{5}a$, azaz $-\dfrac{1}{5}a^2 + \dfrac{14}{5}a = 0$. .... 1 pont

Mivel $a \neq 0$, az egyenlet egyetlen megoldása $a = 14$. .... 1 pont

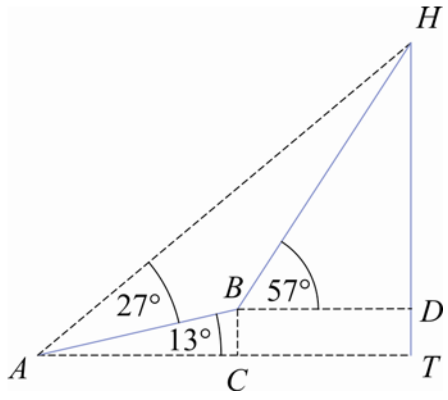
A háromszög oldalai: 13 cm, 14 cm és 15 cm hosszúak. .... 1 pont

Összesen: .... 8 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a tanuló nem fogalmazza meg ezt a gondolatot szöveggel, de a vázlatrajzáról, vagy gondolatmenetéből kiderül ennek ismerete.

6. Egy hegy csúcsát a hegy lábától a vízszinteshez képest 40°-os szög alatt látjuk. Ha innen egy emelkedő, a vízszintes síkhoz 13° alatt hajló egyenes úton 400 m-t haladunk a csúcs felé, olyan ponthoz jutunk, amelyből a hegy csúcsa 57°-os emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?

Megoldás:



$AB = 400$ m

Helyes vázlatrajz, az adatok feltüntetésével. .... 3 pont

Az ABC derékszögű háromszögben $BC = 400\sin 13° \approx 89{,}98$ . ... 1 pont

Az ABH háromszög ABH szöge: $360° - 90° - 57° - 77° = 136°$,

a harmadik szöge: $AHB_\angle = 17°$ . ... 1 pont*

Szinusztétel alkalmazásával kiszámítjuk az ABH háromszög BH oldalának hosszát. .. 2 pont

$\frac{BH}{400} = \frac{\sin 27°}{\sin 17°}$, azaz $BH = 400 \cdot \frac{\sin 27°}{\sin 17°}$ . ... 2 pont

$BH \approx 621{,}1$ . ... 1 pont

A BDH derékszögű háromszögben $HD = BH \cdot \sin 57°$ . ... 1 pont

$HD \approx 520{,}9$ . ... 1 pont

$HT = HD + DT = HD + BC \approx 611\,(\text{m})$.

A hegy magassága kb. 611 m. .... 1 pont

Összesen: . ... 13 pont

Megjegyzés: * Az AHB szög más módon is kiszámítható az AHT illetve BHD háromszögből: $AHB_\angle = AHT_\angle - BHD_\angle = 50° - 33° = 17°$.

Az elérhető maximális pontszám: 60 pont