MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

8. modul
Goniometria

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A szögfüggvények definíciójának elmélyítése, alkalmazása egyszerű egyenletek megoldásában. Trigonometrikus függvények grafikonjának értő vizsgálata.
Időkeret	3 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, földrajz Szűkebb környezetben: Koordinátageometria, analízis, sík- és térgeometriai feladatok megoldása. Ajánlott megelőző tevékenységek: Szögfüggvények definíciójának ismerete. Trigonometrikus alapfüggvények ábrázolása. Függvénytranszformációk alkalmazása trigonometrikus függvényekre. Ajánlott követő tevékenységek: A szinusz- és koszinusztétel alkalmazása háromszögekben és sokszögekben.
A képességfejlesztés fókuszai	Dedukív következtetés, kreativitás, eredetiség, gondolkodási sebesség, metakogníció, ismeretek rendszerezése, elmélyítése, értelmes memória, ábrázolás, reprezentáció.

JAVASLAT

A gyakorló tanár bizonyára tapasztalta már, hogy ha először a hegyesszögek szögfüggvényeit értelmezi derékszögű háromszögben, akkor a szögfüggvények fogalmának kiterjesztése okoz gondot a tanulók jó részének, míg ha fordítva, először a két szögfüggvénnyel úgy ismerkednek meg a tanulók, mint egységvektor koordinátái, akkor a hegyesszögek szögfüggvényeinek alkalmazása derékszögű háromszögben megy nehezebben.

Ez a modul tetszőleges szög szögfüggvényeinek fogalmát mélyíti el. Az ismert probléma (egy egységvektorhoz végtelen sok irányszög tartozik, de egy irányszög egyetlen egységvektort határoz meg) többirányú megközelítése segítheti annak megértését. A trigonometrikus függvények ismerete, az ilyen típusú egyszerű egyenletek megoldása is része a foglalkozások anyagának.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Vektorok és szögfüggvények?**
2. foglalkozás: **Csak szögfüggvények**
3. foglalkozás: **Egy egyenlet, sok gyök**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Vektorok és szögfüggvények?			
1	A szög szinusza és koszinusza mint az egységvektor koordinátái. A fogalom mélyítése.	Ismeretek rendszerezése, elmélyítése, értelmes memória, ábrázolás, reprezentáció, metakogníció	Feladatlap: 1–6. és 8. feladat
2	Egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása.	Deduktív következtetés, gondolkodási sebesség, metakogníció, ismeretek rendszerezése, elmélyítése	Feladatlap: 7., 9., 10. és 11. feladat
II. Csak szögfüggvények			
1	Szöveges problémák trigonometrikus függvények megadására.	Deduktív következtetés	Feladatlap: 1–2. feladat
2	Trigonometrikus függvény grafikonjának értő „olvasása”.	Metakogníció, értelmes memória	Feladatlap: 3. és 4. feladat
3	Adott tulajdonságú trigonometrikus függvény alkotása.	Kreativitás, eredetiség, gondolkodási sebesség, metakogníció	Feladatlap: 5–7. feladat
4	Függvénytranszformációk.	Értelmes memória, ábrázolás	Feladatlap: 8–12. feladat
III. Egy egyenlet, sok gyök			
1	Trigonometrikus egyenletek megoldása.	Ismeretek rendszerezése, elmélyítése	Feladatlap: 1–10. feladat

I. VEKTOROK ÉS SZÖGFÜGGVÉNYEK?

A tanári tapasztalat azt mutatja, hogy az egyik legnehezebb fogalom a középiskolás tananyagban a szögfüggvények fogalma. Ha először derékszögű háromszögben vezetjük be a hegyesszögek szögfüggvényeit, majd általánosítjuk a fogalmakat, egységvektor koordinátáival, illetve ezek hányadosával értelmezzük azokat, akkor a tanulók egy jó része nehezen fogadja el az elsőtől eltérő megközelítést. Ha viszont először egységvektor koordinátáiként ismeri meg a két szögfüggvényt, akkor idegenkedik a hegyesszögek szögfüggvényeinek derékszögű háromszögben való alkalmazásától.

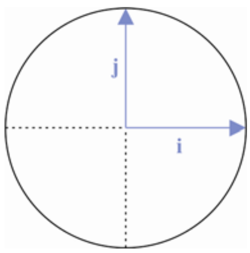
Elsősorban persze a tananyag „súlyosságát” a sok új fogalom (bázisvektorok, irányszög, forgásszög, vektorfelbontás, vektor koordináta, szögmérés ívmértékkel), és ezek összekapcsolódása okozza. Nehéz elfogadniuk, hogy pl. egy egységvektort végtelen sok irányszöggel tudunk megadni, vagy hogy egy szög szinuszának ismerete (az egységvektor második koordinátája) általában nem határozza meg egyértelműen az egységvektort.

Ezen a foglalkozáson kísérletet teszünk a szögfüggvények fogalmának elmélyítésére, természetesen feladatokon keresztül.

A *-gal jelölt feladatokat csak akkor tűzzük ki megoldásra, ha úgy érezzük, hogy a csoport jól „tájékozódik” az egységkörön!

1. Adottak az **i** és **j** bázisvektorok ($|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$). Forgasd el az **i** vektort a megadott szöggel! Az elforgatott vektor melyik síknegyedbe kerül? Milyen előjelű a kapott egységvektor első koordinátája?

a) 1610° b) -400° c) $\frac{4\pi}{3}$ d) -3 e) 13



Megoldás:

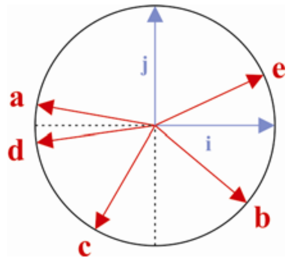
a) $1610^\circ = 170^\circ + 4 \cdot 360^\circ$; II. síknegyed, első koordináta negatív.

b) $-400^\circ = -40^\circ + (-1) \cdot 360^\circ$; IV. síknegyed, első koordináta pozitív.

c) $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$; III. síknegyed, első koordináta negatív.

d) $-\pi < -3 < -\frac{\pi}{2}$ $(-3 \approx -171{,}9^\circ)$; III. síknegyed, első koordináta negatív.

e) $4\pi < 13 < 4{,}5\pi$ $(13 \approx 744{,}8^\circ = 24{,}8^\circ + 2 \cdot 360^\circ)$;I. síknegyed, első koordináta pozitív.



2. Értelmezd a következő kifejezéseket!

$\cos 253^\circ$; $\cos(-93^\circ)$; $\sin 1224^\circ$; $\sin 180^\circ$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; $\mathrm{tg}(135^\circ - 3 \cdot 360^\circ)$; $\cos 1{,}5$.

Célszerű minden esetben az egységkörön megjeleníteni a megfelelő egységvektort, továbbá azt az összetevőjét, amely a megadott szám értelmezéséhez vezet.

Megoldás:

$\cos 253^\circ$: Ha az **i** bázisvektort pozitív irányban elforgatjuk 253°-kal, a kapott egységvektor első koordinátája $\cos 253^\circ$. Mivel az elforgatással kapott vektor a III. síknegyedben lesz, így ez a szám negatív.

$\cos(-93^\circ)$: Ha az **i** bázisvektort negatív irányban elforgatjuk 93°-kal, a kapott egységvektor első koordinátája $\cos(-93^\circ)$. Mivel a forgatással kapott vektor a III. síknegyedben lesz, így ez a szám negatív.

$\sin 1224^\circ$: Ha az **i** bázisvektort pozitív irányban elforgatjuk 1224°-kal, a kapott egységvektor második koordinátája $\sin 1224^\circ$. Mivel $1224^\circ = 144^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, ezért a forgatással kapott vektor a II. síknegyedben lesz, így ez a szám pozitív.

$\sin 180^\circ$: Ha az **i** bázisvektort pozitív irányban elforgatjuk 180°-kal, a kapott egységvektor második koordinátája $\sin 180^\circ$. Így $\sin 180^\circ = 0$.

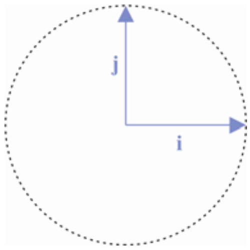
$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$: Ha az **i** bázisvektort negatív irányban elforgatjuk $\frac{3\pi}{4}$ radiánnal, a kapott egységvektor második koordinátája $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. Mivel a forgatással kapott vektor a III. síknegyedben lesz, így ez a szám negatív.

$tg(135^\circ - 3 \cdot 360^\circ)$: Ha az **i** bázisvektort először pozitív irányban elforgatjuk 135°-kal, majd tovább forgatjuk a vektort negatív irányban 3-szor 360°-kal, a kapott vektor második és első koordinátájának hányadosa egyenlő $tg(135^\circ - 3\cdot 360^\circ)$-kal. Mivel a forgatással kapott vektor a II. síknegyedben lesz, így ez a szám negatív.

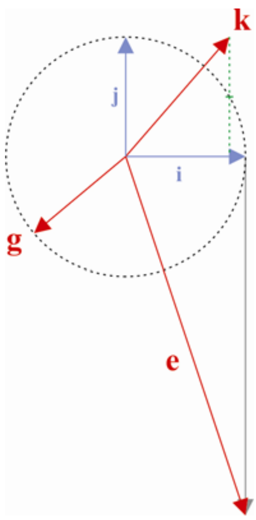
$\cos 1{,}5$: Ha az **i** bázisvektort pozitív irányban elforgatjuk 1,5 radiánnal, a kapott egységvektor első koordinátája $\cos 1{,}5$. Mivel $0 < 1{,}5 < \frac{\pi}{2}$, ezért a forgatással kapott vektor az I. síknegyedben lesz, így ez a szám pozitív.

3. Szerkeszd meg a következő 3 vektort!

$\mathbf{e}(1;-3)$ $\mathbf{g} = (\cos 210^\circ)\mathbf{i} + (\sin 210^\circ)\mathbf{j}$ $\mathbf{k}(\cos(-330^\circ)\,;\,2\cdot\sin(-330^\circ))$



Megoldás:



4. A szögfüggvények definíciójának felhasználásával (zsebszámológép és függvénytáblázat használata nélkül) állapítsd meg a következő számok előjelét!

a) $\sin(-97^\circ)$ c) $tg(-4)$ e) $\sin 3 - \cos 3$

b) $\cos(2 + 3\pi)$ d) $ctg 512^\circ$ f) $\sin^2 3 + \cos^2 3$

Az f) kérdésben a 3 radiánnal elforgatott **i** vektor első koordinátája negatív, de a vektor összetevőinek hosszára, azaz $|\cos 3|$-re és $\sin 3$-ra alkalmazható Pitagorasz tétele.

Megoldás:

A megadott számok előjelét az i vektor (a kifejezésben szereplő) irányszöggel elforgatásával kapott vektor összetevőinek irányából állapíthatjuk meg.

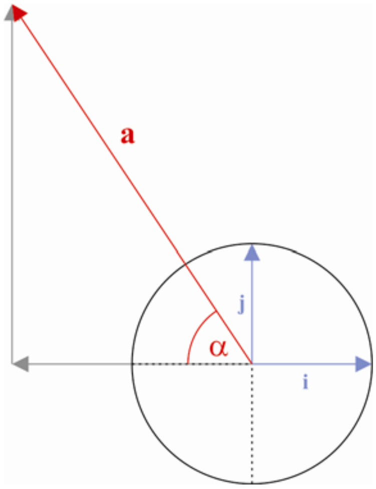
a) $\sin(-97^\circ) < 0$ c) $\mathrm{tg}(-4) < 0$ e) $\sin 3 - \cos 3 > 0$

b) $\cos(2 + 3\pi) > 0$ d) $\mathrm{ctg}512^\circ < 0$ f) $\sin^2 3 + \cos^2 3 = 1 > 0$

5. Mekkora az $\mathbf{a}(-2;3)$ vektor legkisebb pozitív irányszöge?

Megoldás:

Mivel az **a** vektor legkisebb pozitív irányszögének α mellékszöge egy olyan derékszögű háromszög egyik hegyesszöge, amellyel szemközti befogó 3 egység, mellette lévő befogó 2 egység hosszú. Így $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, ebből $\alpha \approx 56{,}3^\circ$.



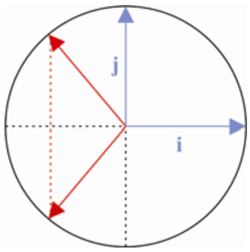
Az **a** vektor legkisebb pozitív irányszöge kb. $123{,}7^\circ$.

6. a) Az **e** egységvektor első koordinátája $\cos 130^\circ$. Add meg az **e** vektor összes irányszögét!

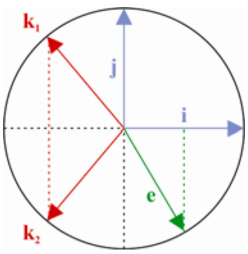
b)* Egy **k** egységvektor első koordinátája $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Mekkora szöggel forgatható el az **i** bázisvektor, hogy az elforgatott vektor a **k** vektor legyen?

Megoldás:

a) Két olyan egységvektor rajzolható az egységkörben, amelyek első koordinátája $\cos 130°$. A II. síknegyedben lévő vektor irányszögei: $130° + n \cdot 360°$, ahol $n \in \mathbf{Z}$; a III. síknegyedben lévő vektor irányszögei: $230° + k \cdot 360°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.



b) Ha elforgatjuk az **i** vektort $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ szöggel, a kapott **e** vektor második összetevője a **j** vektor $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$-szorosa. Mivel a keresett **k** vektor <u>első</u> koordinátája $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, így a **k** vektor **i** vektorral párhuzamos összetevője az **i** vektornak ugyanennyiszerese. Ha tehát az **e** vektor **j** vektorral párhuzamos összetevőjét elforgatjuk negatív irányba 90°-kal, a **k** vektor **i**



vektorral párhuzamos összetevőjét kapjuk. Két olyan **k** vektor rajzolható, amelynek az első koordinátája $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

A II. síknegyedben lévő vektor irányszögei: $\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, ahol $n\in\mathbf{Z}$;

a III. síknegyedben lévő vektor irányszögei: $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$.

7. Döntsd el, hogy az alábbi egyenlőségek közül melyek teljesülnek tetszőleges *k* egész szám esetén!

a) $\sin(-150^\circ+k\cdot 360^\circ)=\frac{1}{2}$

b) $\cos(60^\circ+k\cdot 120^\circ)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ha } k \text{ 3-mal osztható.}\\ -\frac{1}{2}, \text{ha } k \text{ páratlan szám.}\\ -1, \text{ha } k \text{ páros szám.}\end{cases}$

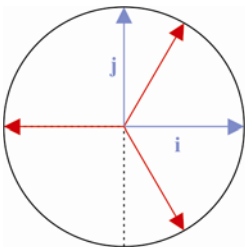
c) $\sin^2(135^\circ+k\cdot 180^\circ)=\frac{1}{2}$

d) $\mathrm{tg}20^\circ=\mathrm{ctg}(-160^\circ+k\cdot 360^\circ)$

Megoldás:

a) $\sin(-150^\circ+k\cdot 360^\circ)=\sin(-150^\circ)=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$, tehát nem teljesül az egyenlőség.

b) A kifejezésben szereplő irányszögek 3 vektort határoznak meg.



Az I. síknegyedben lévő vektor irányszögei:

$60^\circ+n\cdot 360^\circ=60^\circ+3n\cdot 120^\circ$, ahol *n* tetszőleges egész szám, így $k=3n$, azaz *k* 3-mal osztható. Ekkor

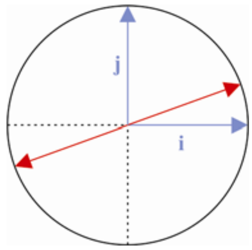
$$\cos(60^\circ+n\cdot 360^\circ)=\frac{1}{2}.$$

Az **i** vektor ellentettjének irányszögei: $180^\circ+n\cdot 360^\circ=60^\circ+(3n+1)\cdot 120^\circ$, ahol *n* tetszőleges egész szám, így $k=3n+1$, és ez a szám lehet páratlan és páros is. Ekkor $\cos(180^\circ+n\cdot 360^\circ)=-1$.

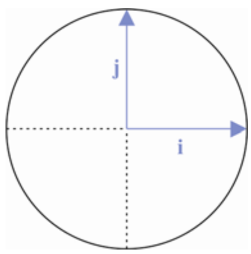
A IV. síknegyedben lévő vektor irányszögei: $300^\circ + n \cdot 360^\circ = 60^\circ + (3n+2) \cdot 120^\circ$, ahol n tetszőleges egész szám, így $k = 3n+2$, és ez a szám lehet páratlan és páros is. Ekkor $\cos(300^\circ + n \cdot 360^\circ) = \frac{1}{2}$, az egyenlőség nem teljesül.

c) Mivel $\sin(135^\circ + k \cdot 180^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ha k páros és $\sin(135^\circ + k \cdot 180^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ha k páratlan, így a négyzete tetszőleges k egész szám esetén $\frac{1}{2}$. Ez az egyenlőség teljesül minden k egészre.

d) Mivel $\operatorname{ctg}(-160^\circ + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{ctg}(-160^\circ) = \frac{\cos(-160^\circ)}{\sin(-160^\circ)} = \frac{-\cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ} = \operatorname{ctg} 20^\circ$, és $\operatorname{ctg} 20^\circ \neq \operatorname{tg} 20^\circ$, ezért az egyenlőség nem teljesül.



8. a) Szerkeszd meg azokat az egységvektorokat, amelyek második koordinátája $\left(-\frac{2}{3}\right)$!



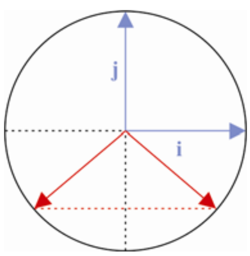
b) Értelmezd a $\sin x = -\frac{2}{3}$ egyenletet, ahol x fokokban mért szöget jelöl!

c) Add meg az egyenlet megoldásait a $[2000°; 2300°]$ intervallumon!

d) Add meg a $[-560°; -200°]$ intervallumon a megoldásokat!

Megoldás:

a)



b) Az **i** vektort x fokos szöggel elforgatva, a kapott vektor második koordinátája $\left(-\frac{2}{3}\right)$.

c) A III. síknegyedben megrajzolt vektor egyik irányszöge: kb. $221{,}81^\circ$. (A többi irányszög, ami benne van az intervallumban, ennél nagyobb.)

$2000^\circ < 221{,}81^\circ + 5\cdot 360^\circ = 2021{,}81^\circ$, de $221{,}81^\circ + 6\cdot 360^\circ = 2381{,}81^\circ > 2300^\circ$,

ebben az esetben egy megoldás adódott: $2021{,}81^\circ$.

A IV. síknegyedben megrajzolt vektor egyik irányszöge kb. $318{,}19^\circ$. (A többi irányszög, ami benne van az intervallumban, ennél nagyobb.)

$$318{,}19^\circ + 5\cdot 360^\circ = 2118{,}19^\circ$$

Az ennél nagyobb irányszögek már nem felelnek meg. Itt is egy megoldás adódott.

A $\sin x = -\frac{2}{3}$ egyenletnek a $[2000°;\ 2300°]$ intervallumon két megoldása van:

$$2021{,}81^\circ \text{ és } 2118{,}19^\circ.$$

d) Hasonlóan adódik, hogy a legnagyobb irányszög, ami a $[-560°;\ -200°]$ intervallumnak eleme: $-360^\circ - 41{,}81^\circ = -401{,}81^\circ$, a következő:

$$-360^\circ - 138{,}19^\circ = -498{,}19^\circ.$$

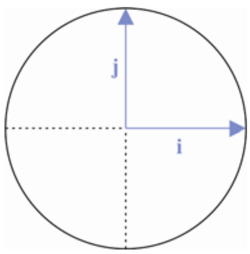
Az intervallumnak ennél kisebb eleme már nem felel meg.

A $\sin x = -\frac{2}{3}$ egyenletnek a $[-560°;\ -200°]$ intervallumon két megoldása van:

$-401{,}81^\circ$ és $-498{,}19^\circ$.

9. a) Értelmezd a $\cos x + 0{,}5 = 0$ egyenletet, ahol x radiánban mért szöget jelöl!

b) Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

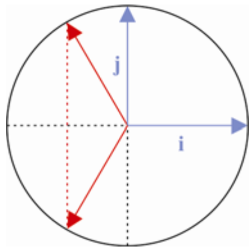


Megoldás:

a) Az **i** vektort x radián szöggel elforgatva, a kapott vektor első koordinátája $(-0{,}5)$.

b) $\cos x + 0{,}5 = 0 \iff \cos x = -0{,}5 \iff x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$,

vagy $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

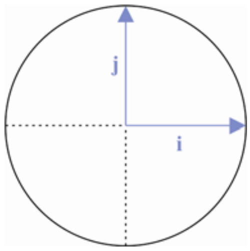


10. Ha $\cos x = \cos 160^\circ$, akkor van-e olyan x szög, amelyre:

A: $\cos x = \cos 20^\circ$ B: $\sin x = \sin(-20^\circ)$ C: $\cos x = \cos(-20^\circ)$

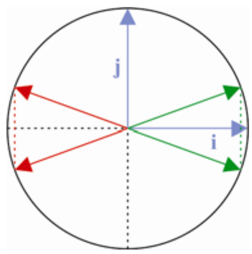
D: $\cos x = \cos 380^\circ$ E: Egyik eddigi válasz sem helyes.

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)



Megoldás:

Ha $\cos x = \cos 160^\circ$, akkor az x forgatással két vektort kaphatunk, a II. és III. síknegyedben.



A: Nincs ilyen x szög, hiszen $\cos 20^\circ > 0$, viszont $\cos 160^\circ < 0$.

B: Van ilyen x szög, mégpedig az $x = 200^\circ + n \cdot 360^\circ$, ahol $n \in \mathbf{Z}$ szögek.

C: Nincs ilyen x szög, hiszen $\cos(-20^\circ) > 0$, de $\cos 160^\circ < 0$.

D: Nincs ilyen szög, mert $\cos 380^\circ = \cos 20^\circ > 0$.

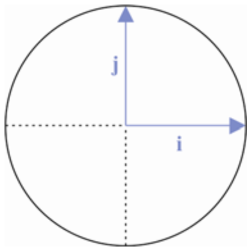
11.* A $\boxed{\qquad\qquad}$ egyenlet megoldáshalmaza ($k, n \in \mathbf{Z}$):

A: $\{70^\circ + k \cdot 360^\circ\}$ **B:** $\{-20^\circ + k \cdot 360^\circ\}$

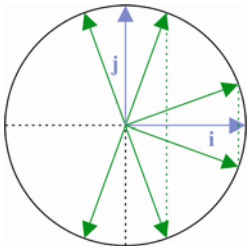
C: $\{70^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ vagy } -70^\circ + n \cdot 360^\circ\}$ **D:** $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

E: $\{20^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ vagy } -20^\circ + n \cdot 360^\circ\}$

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)



Megoldás:



Mivel $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$, a $\boxed{}$ egyenlet ekvivalens a $\sin x = \sin 70^\circ$ egyenlettel. Két egységvektor második koordinátája $\sin 70^\circ$ (lásd az ábrát), az I. és a II. síknegyedben.

Az egyikhez $x = 70^\circ + k \cdot 360^\circ$, a másikhoz $x = 110^\circ + n \cdot 360^\circ$ (ahol $n, k \in \mathbf{Z}$) forgatásokkal juthatunk el. A keresett megoldáshalmaz: $\boxed{}$, tehát a **D** válasz a helyes.

II. CSAK SZÖGFÜGGVÉNYEK

A szögfüggvények ábrázolása, függvénytranszformációk végrehajtása időigényes feladat. A délutáni foglalkozáson is érdemes ezzel a témakörrel foglalkozni. Az itt látható feladatok megoldásával várhatólag mélyül a tanulók szám- és függvényfogalma. A különböző függvénytranszformációk alkalmazására is többféle módon nyílik lehetőség, és ezen keresztül a függvénytulajdonságok közül elsősorban a periodicitás felelevenítésére is mód van.

1. Az *ABCD* téglalap *AB* oldala 4 cm hosszú, az *A* csúcsból induló átló 5° os szöget zár be ezzel az oldallal.

a) Mekkora a téglalap területe?

b) A téglalap *AB*, és a vele párhuzamos oldalának hosszát nem változtatjuk, de az *A* csúcsból húzott átló hajlásszögét folyamatosan növeljük. Jelöljük az *A* csúcsból induló átló, és az *AB* oldal hajlásszögét α -val. Hogyan függ a téglalap területe az α szögtől?

c) Az α mekkora értéke esetén lesz a téglalap területe 32 cm^2?

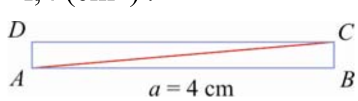
d) Válaszd ki a téglalapok közül azt a téglalapot, amelynek a *BC* oldala 2 cm hosszú (az *AB* oldala 4 cm)! Forgassuk el a *BC*, és a vele párhuzamos *AD* oldalt a *B*, illetve az *A* csúcs körül negatív irányba $\beta = 20^\circ$ szöggel! Mekkora a keletkezett paralelogramma területe?

e) Hozz létre a d) kérdésben megadott módon paralelogrammákat különböző β szögű, negatív irányú forgatással ($0^\circ < \beta < 90^\circ$)! Hogyan függ e paralelogrammák területe a β szög mértékétől? Add meg a függvényt képlettel, és ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben!

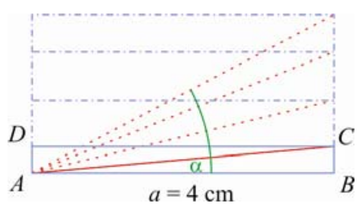
Megoldás:

a) $BC = b = 4 \cdot \mathrm{tg}5^\circ \approx 0{,}35\ (\mathrm{cm})$, így $T = ab = a^2 \cdot \mathrm{tg}5^\circ \approx 1{,}4\ (\mathrm{cm}^2)$.

A téglalap területe kb. 1,4 cm^2.



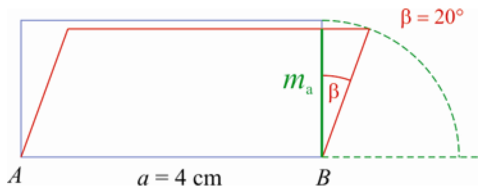
b) $T(\alpha) = 16 \cdot \mathrm{tg}\alpha$, ahol $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.



c) $16 \cdot \mathrm{tg}\alpha = 32 \iff \mathrm{tg}\alpha = 2$, ahol $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Innen $\alpha \approx 63{,}44^\circ$.

d) A 2 cm-es átfogójú derékszögű háromszög m_a befogója melletti hegyesszöge 20°. Így $m_a = 2 \cdot \cos 20^\circ \approx 1{,}88$ (cm). A paralelogramma területe:

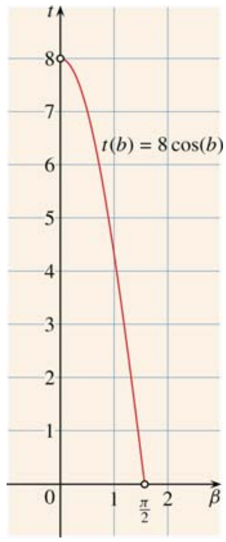
$t = am_a = 8 \cdot \cos 20^\circ \approx 7{,}52$ (cm^2).



e) A paralelogramma területe: $t = am_a = 8 \cdot \cos\beta$.

$t(\beta) = 8 \cdot \cos\beta$, ahol $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

A t függvény grafikonja:

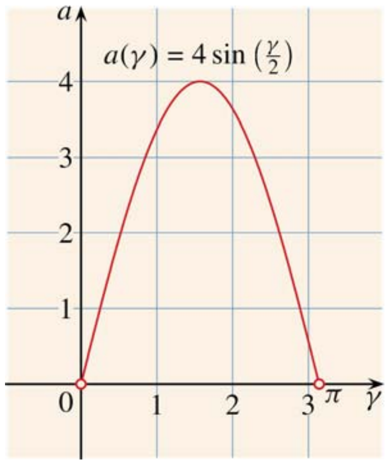


2. Egy egyenlőszárú háromszög szárai 2 cm hosszúak, a szárszöge γ. Hogyan függ a háromszög alapjának hossza a γ szögtől? Add meg a függvényt képlettel! Mi lesz a függvény lehető legbővebb értelmezési tartománya? Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a függvényt!

Megoldás:

Jelöljük az egyenlőszárú háromszög alapjának hosszát a-val. Az alaphoz tartozó magasság által létrehozott derékszögű háromszögben: $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\frac{a}{2}}{2}$, azaz $a = 4 \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Így $a(\gamma) = 4 \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2}$, ahol $0 < \gamma < \pi$. A legbővebb értelmezési tartománya a $]0;\pi[$ intervallum. A függvény grafikonja:



3. Vizsgáljuk a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ függvényt! A függvény milyen egész értékeket vehet föl? Vázold értéktáblázat alapján a függvény grafikonját! Mekkora a függvény periódushossza?

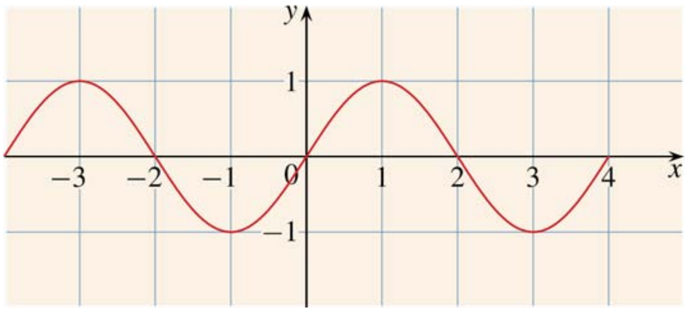
A tanulók az ilyen kifejezésben gyakran rosszul adják meg a műveleti sorrendet: $\sin\frac{\pi}{2}x$ helyett $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot x$ kifejezésre gondolnak.

Megoldás:

Mivel minden szám szinusza legalább -1 és legfeljebb 1, így $-1 \le \sin\frac{\pi}{2}x \le 1$. A függvény 3-féle egész értéket vehet fel: -1, 0 és 1. Ezeket az értékeket fel is veszi, hiszen pl. 3-hoz a függvény -1-et, 0-hoz 0-t, és 1-hez 1-et rendel.

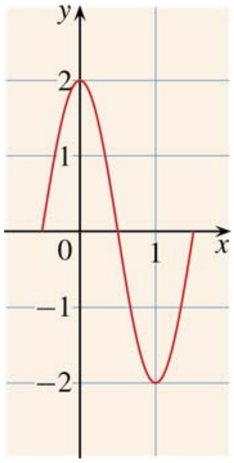
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\frac{1}{2}$	π
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{\pi^2}{2} \approx -0{,}98$

Ha pl. $1 \le x \le 2$, akkor $0 \le \sin\frac{\pi}{2}x \le 1$. Ezen a szakaszon a függvény szigorúan csökkenő. A függvény grafikonja kb. ilyen:



Mivel $f(x+4)=\sin\frac{\pi}{2}(x+4)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+2\pi\right)=f(x)$, és 4-nél kisebb számra nem teljesül minden x valós számra, ezért a függvény periódushossza 4.

4. Az ábrán egy koszinuszfüggvény teljes periódusa látható. Melyik képlettel adható meg a függvény?



A: $f(x)=\cos 2x$ B: $f(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$ C: $f(x)=2\cos\frac{x}{\pi}$

D: $f(x)=\cos\pi\, x$ E: $f(x)=2\cos\pi\, x$

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)

Megoldás:

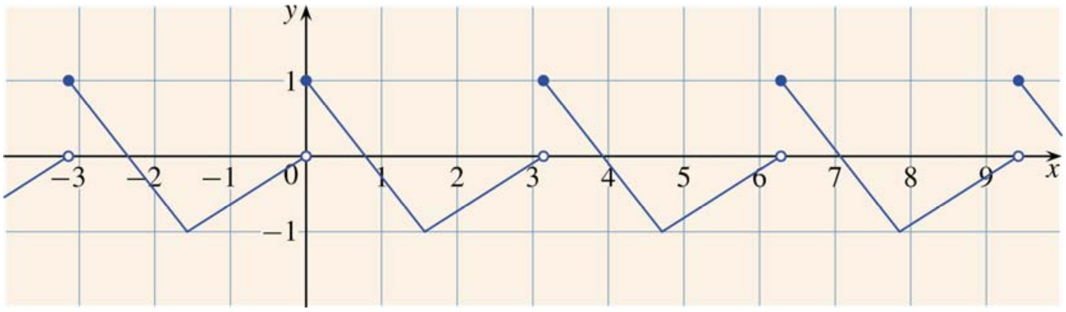
Elfogadható, ha a tanuló a függvény grafikonját a képletével a függvény egész helyeken kiszámolt (leolvasott) értékei alapján azonosítja be.

Az egész helyeken leolvasott, illetve kiszámolt értékek alapján a függvény csak az E-ben megadott képletű lehet.

5. Adj meg grafikonjával a valós számok halmazán értelmezett olyan függvényt, amelynek az értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum, a periódushossza π, a 0 helyen maximuma van, és nullához a függvény 1-et rendel!

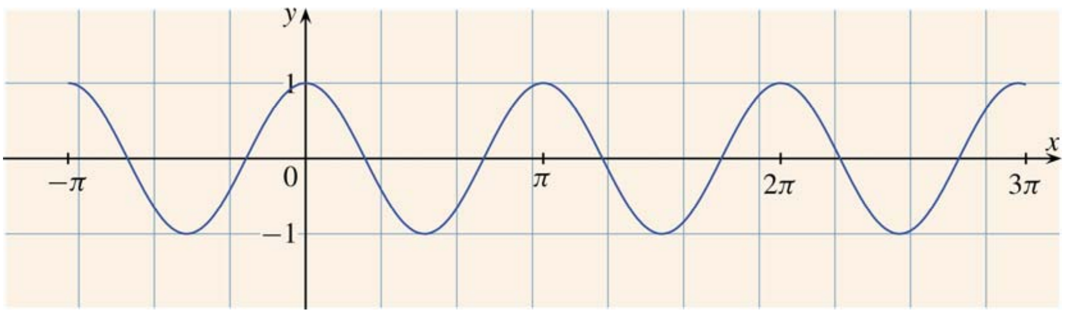
Megoldás:

Többféle függvénygrafikon is rajzolható. Pl.



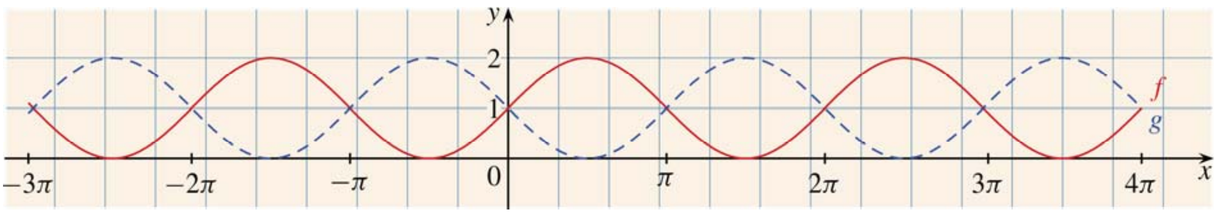
Egy periódusra megfogalmazva: A $(0;1)$ koordinátájú pontot természetesen nemcsak szakasszal köthetjük össze a $\left(\frac{\pi}{2};-1\right)$ koordinátájú ponttal, és ezt a pontot tovább a $(\pi;0)$ ponttal. A feltétel szerint az sem szükséges, hogy a függvény a $\frac{\pi}{2}$ helyen vegye föl a (-1) értéket, de az kell, hogy a $]0;\pi[$ nyílt intervallumon folytonos függvény értéke az intervallum valamely pontján (-1) legyen, és persze a π számhoz a függvény 1-et rendeljen.

Megrajzolható az $f(x)=\cos 2x$ (ahol x tetszőleges valós számot jelöl) függvény grafikonja is.



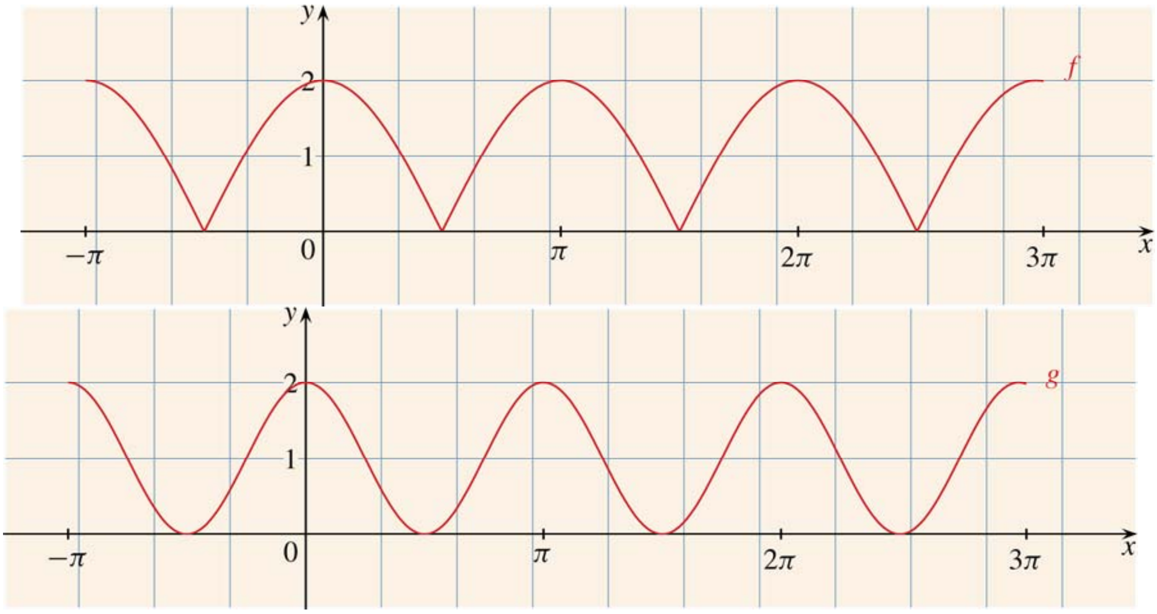
6. Adj meg grafikonjával és képletével is egy olyan trigonometrikus függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $[0;2]$ intervallum, periódushossza 2π, és nullához 1-et rendel!

Megoldás: $f(x)=\sin x+1$ vagy $g(x)=1-\sin x$.



7. Adj meg grafikonjával és képletével is egy olyan trigonometrikus függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $[0;2]$ intervallum, periódushossza π, és nullához 2-t rendel!

Megoldás: Pl. $f(x) = 2 \cdot |\cos x|$ vagy $g(x) = \cos 2x + 1$.



8. Határozd meg a valós számok halmazán értelmezett *f*, *g* és *h* függvények szélsőértékeit, és azok helyét!

a) $f(x) = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $g(x) = \cos(x+2)$ c) $h(x) = \cos x + 2$

Megoldás:

a) Mivel $-1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 1$, így $0 \le 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 2$.

Az $1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, azaz $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$. Innen $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Az $1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$, azaz $x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Innen $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Az *f* függvény minimuma 0, a minimum helyei: $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. A függvény maximuma 2, a maximum helyei: $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) A *g* függvény esetében mivel $-1 \le \cos(x+2) \le 1$, a függvény minimuma (-1), és ezt az értéket azokon a helyeken veszi fel, ahol $x + 2 = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, azaz $x = -2 + \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ $(\approx 2{,}71 + 2n\pi)$, ahol $n \in \mathbf{Z}$. A maximuma 1, és ezt az értéket az $x = -2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \approx -0{,}43 + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

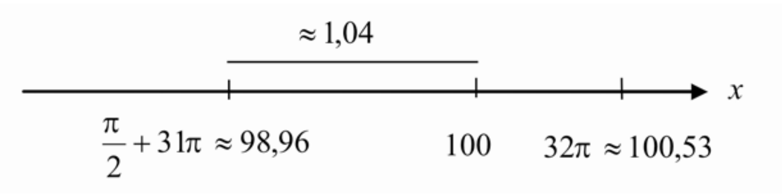
c) A $h(x) = \cos x + 2$ függvény esetében $1 \le \cos x + 2 \le 3$. A függvény értéke pontosan akkor 1, ha $\cos x = -1$, azaz $x = \pi(1 + 2n)$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, és akkor 3, ha $\cos x = 1$, azaz $x = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
A *h* függvény minimuma 1, és ezt az értéket az $x = \pi(1 + 2n)$, ahol $n \in \mathbf{Z}$ helyeken veszi fel. A függvény maximuma 3, és a maximum helyei: $x = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

9. A $[-100;\ 100] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathrm{Z} \right\} \to \mathrm{R}, x \mapsto \mathrm{tg}x$ függvény az adott zárt intervallumon hányszor veszi föl a 8 értéket?

*Megoldás***:**

A tangensfüggvény páratlan és periodikus függvény, a periódushossza π. Először érdemes a $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ intervallumon megvizsgálni a feladat kérdését. Utána elegendő $\frac{\pi}{2}$-től 100-ig megszámolni, hogy hányszor veszi fel a függvény a 8 értéket, hiszen mivel a függvény páratlan, -100-tól $-\frac{\pi}{2}$- ig is pontosan ugyanannyiszor lesz az 8 értéke.

A $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ intervallumon egyszer lesz az értéke 8, és utána is minden periódusban egyszer. Mivel $\left(100 - \frac{\pi}{2} \right) : \pi \approx 31{,}33$, tehát a $\left] \frac{\pi}{2}; 100 \right]$ intervallumban 31 teljes periódusa van a függvénynek. A 31-edik periódus végpontja: $\frac{\pi}{2} + 31\pi \approx 98{,}96$.



Mivel $100-98{,}96=1{,}04<\frac{\pi}{2}$, így a 100-ig maradt „töredék” szakaszon a függvény értéke végig negatív, azaz itt nem lehet már az értéke 8.

Tehát a függvény a $\frac{\pi}{2}$-től 100-ig 31-szer veszi fel a 8 értéket, és így $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$-től (-100)-ig is ugyanennyiszer, a $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon pedig 1-szer, így a teljes kérdezett halmazon 63-szor.

10. Az $y=\frac{1}{100}x$ egyenletű egyenesnek hány közös pontja van a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\sin x$ függvény grafikonjával?

Megoldás:

Az egyenesen lévő pontok második koordinátája pontosan akkor van a $[-1;1]$ zárt intervallumban, ha $-100\le x\le 100$. A szinuszfüggvény páratlan függvény , a $g(x)=\frac{1}{100}x$ is az, így ahány metszéspontja van a két függvény grafikonjának a $]0;100]$ balról nyílt intervallumban, pontosan ugyanannyi van $[-100;0[$ jobbról nyílt intervallumon is. Elég tehát kiszámítanunk, hogy pl. a $]0;100]$ intervallumon hány közös pontja van a két grafikonnak, mert ennek kétszeresét 1-gyel növelve (mivel az origó is közös pont), eljutunk a keresett metszéspontok számához.

A szinuszfüggvény periódushossza 2π. A $]0;100]$ intervallum $]0;2\pi]$ részhalmazán egy közös pont van. Mivel $\frac{100-2\pi}{2\pi}\approx 14{,}92$, így a $]0;2\pi]$ után 100-ig 14 teljes periódusa van a szinuszfüggvénynek. Minden periódusban pontosan 2 metszéspont van. A 14 teljes periódus hossza $14\cdot 2\pi\approx 87{,}96$, így a „töredék” periódus hossza:

$(100-2\pi)-14\cdot 2\pi=100-30\pi\approx 5{,}75$. Mivel $\pi<5{,}75<2\pi$, így ezen a szakaszon is van pontosan 2 metszéspont.

Ezek szerint a $]0;100]$ intervallumon összesen $1+2\cdot 14+2=31$ metszéspontja van a két grafikonnak, ez viszont azt jelenti, hogy a $[-100;100]$ intervallumon összesen $2\cdot 31+1=63$.

Az $y=\frac{1}{100}x$ egyenletű egyenesnek az $f(x)=\sin x$ függvény grafikonjával 63 metszéspontja van.

11. Told el az $f(x)=\cos x$ (ahol $x\in\mathbf{R}$) függvény grafikonját a $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ koordinátájú vektorral! Add meg kétféleképpen is a kapott grafikonú függvény hozzárendelési szabályát!

Megoldás: $g(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$ vagy $g(x)=\sin x+1$.

Célszerű megbeszélni a feladat megoldása után, hogy a feladat milyen azonosság felismeréséhez vezet.

12. Ábrázold függvénytranszformációval a valós számok halmazán értelmezett $g(x)=1-2\cos(x+\pi)$ függvény grafikonját a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon!

a) Add meg a valós számok halmazán értelmezett függvény értékkészletét!

b) Vizsgáld a valós számok halmazán értelmezett g függvény paritását és állapítsd meg a függvény zérushelyeit, szélsőértékeit, és azok helyét!

Megoldás:

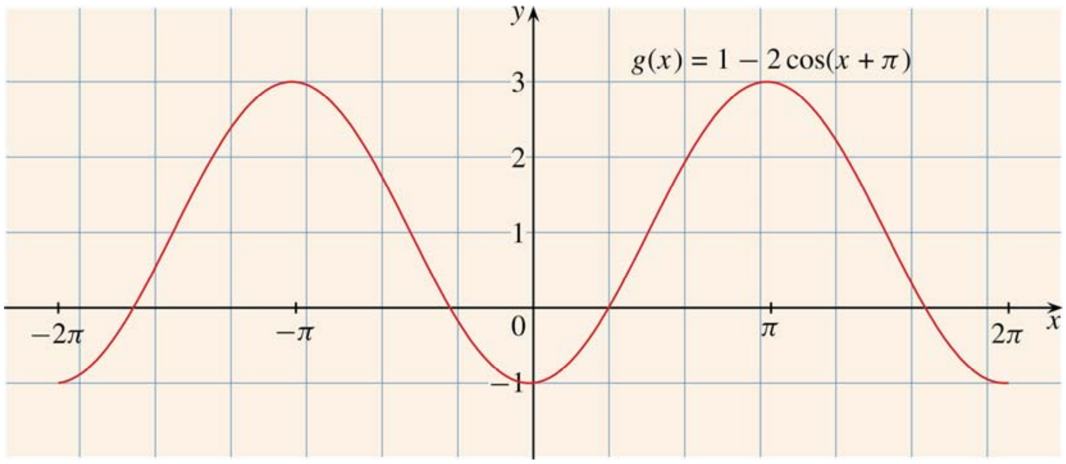
A függvénytranszformáció egyes lépéseiben ábrázolt függvények:

$g_1(x)=\cos x$

$g_2(x)=\cos(x+\pi)$ grafikonját a g_1 függvény grafikonjából, annak $(-\pi;0)$ vektorral való eltolással kapjuk.

$g_3(x)=-2\cos(x+\pi)$ grafikonját a g_2 függvény grafikonjára végrehajtott (x tengelyre) merőleges affinitással kapjuk, az affinitás aránya: -2.

$g(x)=1-2\cos(x+\pi)$ grafikonját a g_3 függvény grafikonjának $(0;1)$ vektorral való eltolásával kapjuk.



a) A g függvény értékkészlete: $[-1;3]$

b) Mivel a g függvény minden $x \in \mathbf{R}$ és $-x \in \mathbf{R}$ helyen értelmezve van, és

$g(x) = 1 - 2\cos(x + \pi) = 1 + 2\cos x$ minden x valós szám esetén, továbbá

$\cos(-x) = \cos x$ minden $x \in \mathbf{R}$, így $g(-x) = g(x)$, azaz a g függvény páros.

Zérushelyek: $g(x) = 1 - 2\cos(x + \pi) = 1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, vagy $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Szélsőértékek, és annak helyei: Mivel $-1 \le \cos(x + \pi) \le 1$, így $-1 \le 1 + 2\cos x \le 3$.

A legkisebb függvényértéket (a -1-et) pontosan akkor veszi fel a függvény, ha $\cos x = -1$, azaz $x = \pi(1 + 2n)$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

A legnagyobb függvényértéket (a 3-at) pontosan akkor veszi fel a függvény, ha $\cos x = 1$, azaz $x = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

III. EGY EGYENLET, SOK GYÖK

Mióta az addíciós tétel és annak alkalmazása nem szerepel az (középszintű) érettségi vizsgakövetelményei között, a trigonometrikus egyenletek megoldása már nem okoz annyi gondot a tanulóknak. Itt a fő cél elsősorban a néhány tanult azonosság alkalmazása, és a szereplő trigonometrikus függvények periodicitásának figyelembevétele. A kapott megoldások ellenőrzése most sem szerepel a feladatok megoldásának leírásában, de folyamatosan várjuk el a tanulóktól, hogy szöveges feladatban, illetve egyenlet esetében figyeljenek a számításba vett értelmezési tartományra, illetve a kapott gyököket ellenőrizzék behelyettesítéssel (természetesen a függvények periódusának megfelelően csak véges sok gyökkel végezzük az ellenőrzést), hogy nem vétettek-e számolási hibát!

1. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2x+1=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $2\sin x+1=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Megoldás:

a) Az egyenlet jobb oldalán álló négytagú kifejezés racionális szám, mégpedig:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot(-1)+\frac{1}{2}-0=2.$$

A megoldandó egyenlet: $2x+1=2$. Ebből $x=\frac{1}{2}$.

b) Az egyenlet ekvivalens a $\sin x=\frac{1}{2}$ egyenlettel. Az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\left\{x\in\mathbf{R}\mid x=\frac{\pi}{6}+2n\pi.\, n\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\in\mathbf{R}\mid x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi.\, k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

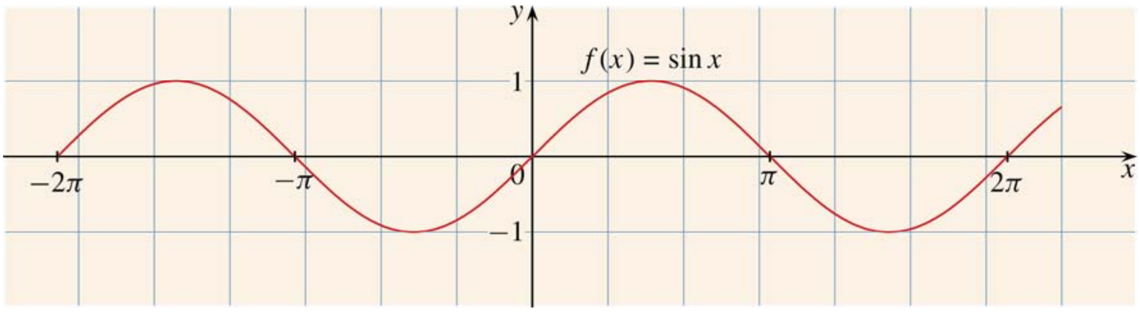
A számológép használatával egyetlen megoldást kap a tanuló, és ez „magában rejti” a gyökvesztés lehetőségét. Ahhoz, hogy a tanuló nagyobb biztonsággal megtalálja az ilyen (egyszerű) egyenlet összes megoldását, érdemes mindig megrajzoltatni az egységkört, vagy vázlatosan a megfelelő trigonometrikus függvény grafikonját.

2. Hány megoldása van a $\sin|x|=0{,}5$ egyenletnek a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon? Sorold fel a megoldásokat!

Megoldás:

Az egyenletek grafikus megoldása nem szerepel az érettségi vizsgakövetelmények között, de a tanítási folyamatban mint az egyenlet egyik megoldási módját, érdemes tanítani. Sokszor egyszerűbb, és szemléletesebb ennek alkalmazása más, egyéb módokhoz képest, és „mellék-termékként" az alapfüggvények grafikonjának többszöri megrajzolása elmélyítheti azok ismeretét.

Grafikus megoldás: A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\sin|x|$ függvény x és $(-x)$ helyen ugyanazt az értéket veszi fel. Ennek ismeretében a függvény grafikonja könnyen megrajzolható:



Az ábráról könnyen leolvasható, hogy az egyenletnek a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon összesen 4 megoldása van, és ezek a következők: $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Algebrai megoldás: Mivel $0\le|x|$ minden valós x számra, a $\sin|x|=\frac{1}{2}$ megoldásai a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon azok az x valós számok, amelyekre: $|x|=\frac{\pi}{6}$ vagy $|x|=\frac{5\pi}{6}$.

Így a keresett megoldások: $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ és $-\frac{5\pi}{6}$. Az egyenletnek tehát a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon összesen 4 megoldása van.

3. Add meg az alábbi egyenleteknek 3-3 megoldását, majd az összes valós megoldásukat is!

$\mathrm{tg}x=-\sqrt{3}$ $\qquad$ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ $\qquad$ $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Megoldás:

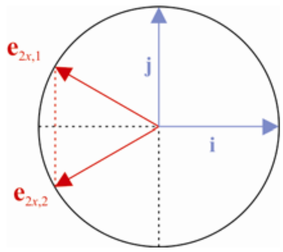
A $\mathrm{tg}x=-\sqrt{3}$ három megoldása: pl. $-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Az összes valós megoldása: $-\frac{\pi}{3}+k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$.

Az egyenletnek véges sok megoldását megkereshetjük úgy is, hogy először minden megoldást megadunk, majd a paraméter helyére behelyettesítünk 3 különböző egész számot.

A $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ egyenlet ekvivalens a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonossággal, amelynek megoldása minden valós szám. Pl. 1,2; $\sqrt{3}$ és -2154.

A $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlet megoldásait most az egységkör segítségével keressük meg. Az **i** vektort $2x$ szöggel elforgatva, ahhoz, hogy a kapott vektor első koordinátája $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ legyen két lehetőségünk van. Az $\mathbf{e}_{2x,1}$ vektor irányszögei: $2x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$; az $\mathbf{e}_{2x,2}$ vektoré pedig: $2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.



A kapott egyenletek megoldása *x*-re: $x = \frac{5\pi}{12} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, illetve $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Az egyenletnek megoldása pl. $\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{5\pi}{12}$ és $\frac{17\pi}{12}$.

4. Keresd meg a $\operatorname{ctg}\frac{\pi \cdot x}{4} = 1$ egyenlet valós megoldásai közül a legnagyobb negatív megoldást!

Megoldás:

$\operatorname{ctg}\frac{\pi \cdot x}{4} = 1 \iff \frac{\pi \cdot x}{4} = \frac{\pi}{4} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$. Így $x = 1 + 4n$, ahol $n \in \mathbf{Z}$. Ezek között a megoldások között a legnagyobb negatív szám: -3.

5. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(\sin x - \cos x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 3\sin x - 1$; b) $2\cos^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \cos x - 1 = 0$;

c) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2 = 0$.

Megoldás:

a) $(\sin x - \cos x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 3\sin x - 1 \iff 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3\sin x - 1 \iff$

$2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3\sin x - 1 \iff \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

b) A $2\cos^2 x - \mathrm{tg}x \cdot \cos x - 1 = 0$ egyenlet megoldása csak olyan *x* valós szám lehet, amelyre $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$. Ekkor $2\cos^2 x - tgx \cdot \cos x - 1 = 0 \iff$ $2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0 \iff 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. A $\sin x$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\sin x = \frac{1}{2}$ és $\sin x = -1$. Az utóbbi egyenletből nem kapunk megoldást, hiszen ezeknek az x számoknak a tangense nincs értelmezve. A $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenlet, és ezzel az eredeti egyenlet megoldásai: $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

c) *I. megoldás:*

A $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2 = 0$ egyenletnek csak olyan valós x szám lehet a megoldása, amelynek sem a szinusza, sem a koszinusza nem 0, tehát $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $\sin x \cdot \cos x$-szel! Az így kapott egyenlet: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0$. A bal oldali kifejezés azonosan egyenlő $(\sin x + \cos x)^2$-nel, így $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0 \iff (\sin x + \cos x)^2 = 0$ $\iff \sin x + \cos x = 0$. Az egységkörön megrajzolható egységvektorok közül pontosan kettőre igaz, hogy a koordinátáinak összege nulla, ezek irányszögei: $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$. Ezek a számok beletartoznak az egyenlet alaphalmazába, és mivel ezen az alaphalmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk az egyenleten, megoldásai az eredeti egyenletnek is.

II. megoldás:

Mivel $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}x$, így az eredeti egyenlet ekvivalens a $\mathrm{tg}x + \frac{1}{\mathrm{tg}x} + 2 = 0$ egyenlettel.

Az egyenlet alaphalmaza azoknak az x számoknak a halmaza, amelyekre $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Az egyenlet mindkét oldalát $\mathrm{tg}x$-szel szorozva, a $\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x + 1 = 0$ egyenlethez jutunk, azaz $(\mathrm{tg}x + 1)^2 = 0$. Ennek $\mathrm{tg}x$-re egyetlen megoldása a -1, és $\mathrm{tg}x = -1$ pontosan akkor teljesül, ha $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

6. Bizonyítsd be, hogy a

$$\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

egyenletnek minden valós szám megoldása!

Megoldás:

$\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow$ $\cos^2 x + \cdot \sin^2 x = 1$. Mivel az eredeti egyenlet megoldása bármilyen valós szám lehet, és az egyenleten azonos átalakításokat végeztünk, továbbá az utolsó egyenletnek minden valós szám megoldása, így az eredeti egyenletet is minden valós szám kielégíti

7. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs valós megoldása!

a) $\mathrm{tg}x \cdot \cos x = 1$ b) $\frac{2\cos x - 1}{4\sin^2 x - 3} = 0$

Megoldás:

a) A $\mathrm{tg}x \cdot \cos x = 1$ egyenlet megoldása csak olyan x valós szám lehet, amelyre $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, így az egyenlet alaphalmaza:

$\left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ahol } n \in \mathbf{Z}\right\}$. Ezen a halmazon $\mathrm{tg}x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1$. Ennek az egyenletnek nincs olyan megoldása, amely eleme az alaphalmaznak, tehát az eredeti egyenletnek nincs valós gyöke.

b) Egy tört pontosan akkor egyenlő nullával, ha a számlálója nulla és a nevezője nem nulla. Így $\frac{2\cos x - 1}{4\sin^2 x - 3} = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$ és $4\sin^2 x - 3 \neq 0$. Ebből adódik, hogy csak olyan x szám lehet a megoldás, amelyre $\cos x = \frac{1}{2}$ és $\sin^2 \neq \frac{3}{4}$. Viszont, ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, és ekkor $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. A $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletből nem kapunk megoldást. Az eredeti egyenletnek tehát nincs valós megoldása.

8. Ha $(\sin x - 2\cos x)^2 + (\cos x - 2\sin x)^2 = 5$, akkor mennyi a $\sin^2 x$?

Megoldás:

$(\sin x - 2\cos x)^2 + (\cos x - 2\sin x)^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5\sin^2 x + 5\cos^2 x - 8\sin x \cdot \cos x = 5 \quad \Leftrightarrow$ $5(\sin^2 x + \cos^2 x) - 8\sin x \cdot \cos x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 8\sin x \cdot \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0$ vagy $\cos x = 0$. Ha $\sin x = 0$, akkor $\sin^2 x = 0$, ha pedig $\cos x = 0$, akkor $\sin^2 x = 1$.

Tehát, ha $(\sin x - 2\cos x)^2 + (\cos x - 2\sin x)^2 = 5$, akkor $\sin^2 x = 0$ vagy $\sin^2 x = 1$.

9. Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$ (ahol $x \in \mathbf{R}$) függvény konstans függvény!

Megoldás:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = \sqrt{\sin^4 x + 4\cdot(1-\sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4\cdot(1-\cos^2 x)}$$

Az azonos átalakítással kapott kifejezésben a zárójelek felbontása után már könnyebben felismerhető, hogy mindkét négyzetgyökjel alatt egy-egy teljes négyzet áll, így az eredeti kifejezés azonosan egyenlő a $\sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2}$ kifejezéssel. Újabb azonos átalakítással adódik, hogy

$$\sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} = \left|\sin^2 x - 2\right| + \left|\cos^2 x - 2\right|.$$

Mivel $0 \le \sin^2 x \le 1$ és $0 \le \cos^2 x \le 1$, ezért mindkét tag egy negatív értékű kifejezés abszolútértékével egyenlő, tehát

$$\left|\sin^2 x - 2\right| + \left|\cos^2 x - 2\right| = (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x).$$

Ebből újabb azonos átalakítással (a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság felhasználásával) azt kapjuk, hogy a *f* függvény értéke minden *x* valós szám esetén 3-mal egyenlő, tehát *f* valóban konstans függvény.

10.* Hány megoldása van a

$$\left.\begin{aligned} \sin x \cdot \cos y &= 0 \\ \left|\cos x\right| + \left|\sin y\right| &= \frac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek, ha mindkét változó értéke a $[-\pi;\pi]$ intervallumnak eleme?

Ezt a feladatot csak jól felkészült csoport számára tűzzük ki!

Megoldás:

Az első egyenlet szerint $\sin x = 0$ és y tetszőleges valós szám, vagy $\cos y = 0$ és ekkor x tetszőleges valós szám.

Ha $\sin x = 0$, akkor ezekre az x számokra $|\cos x| = 1$, tehát ekkor a második egyenlet: $1 + |\sin y| = \frac{3}{2}$, azaz $|\sin y| = \frac{1}{2}$. Így, ha $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin y = \frac{1}{2}$ vagy $\sin y = -\frac{1}{2}$. Az utóbbi két egyenlet valamelyike pontosan akkor teljesül, ha $y = \frac{\pi}{6} + n\pi$ vagy $y = \frac{5\pi}{6} + m\pi$, ahol $n, m \in \mathbf{Z}$.

<u>Ebben az esetben keressük a $[-\pi;\pi]$ intervallumon a megoldások számát:</u> Ekkor $x = k\pi$, ahol $k \in \{-1;0;1\}$ esetén $y \in \left\{-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$, így mivel ebben az esetben az x-re kapott mindhárom értékhez 4-féle y érték tartozik, ekkor összesen $3 \cdot 4 = 12$ számpár megoldása van az egyenletnek a $[-\pi;\pi]$ intervallumon.

Ha $\cos y = 0$, akkor $|\sin y| = 1$, így ekkor a második egyenlet szerint $|\cos x| + 1 = \frac{3}{2}$, azaz $|\cos x| = \frac{1}{2}$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$ vagy $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, ahol $n, k \in \mathbf{Z}$.

<u>Ekkor keressük a $[-\pi;\pi]$ intervallumon a megoldások számát</u>: Ha $\cos y = 0$, azaz $y \in \left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$, akkor $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$. Mivel mind a két y értékhez 4-féle x érték tartozik, tehát ekkor az egyenletnek összesen $2 \cdot 4 = 8$ számpár megoldása van a $[-\pi;\pi]$ intervallumon.

<u>Összefoglalva</u>: Az egyenletrendszernek összesen 20 számpár megoldása van a $[-\pi;\pi]$ intervallumon.