MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

7. modul
Körbe, körbe, karikába

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A körrel és egyenessel kapcsolatos koordinátageometriai eljárások, módszerek elmélyítése
Időkeret	4 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika Szűkebb környezetben: Algebra, elemi geometria, halmazok Ajánlott megelőző tevékenységek: A kör egyenletének ismerete. Ajánlott követő tevékenységek: Trigonometria
A képességfejlesztés fókuszai	Metakogníció, ismeretek rendszerezése, elmélyítése

JAVASLAT

A koordinátageometria sajátos eszközei akkor alkalmazhatók igazán eredményesen, ha a tanuló elemi síkgeometriai ismeretei biztosak. A modulban ezért elsőször a körrel kapcsolatos alapismeretek felelevenítésére kerül sor, és csak utána annak koordinátageometriában való alkalmazására. Sajnos, az óraszám csökkentése miatti tananyagszűkítés már kevés lehetőség nyújt a koordinátageometria mint elemi geometriai feladatok (pl. azonos tulajdonságú pontok halmazának megkeresésére irányuló) megoldására szolgáló módszer alkalmazására. A modulban találunk ilyen jellegű feladatot is.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Segítség**
2. foglalkozás: **Látómezőnkben a kör**
3. foglalkozás: **Érinti?**
4. foglalkozás: **Mértani hely**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Segítség			
1.	Körrel kapcsolatos elemi geometriai ismeretek felelevenítése feladatokon keresztül	Metakogníció	Feladatlap: 1., 4., 5., 7., 8., 10. feladat
2.	Szerkesztési feladatok	Rész és egész észlelése, problémamegoldás	Feladatlap: 2., 3., 6., 9., 11. feladat
II. Látómezőnkben a kör			
1.	A kör egyenletének felismerése	Számolás, induktív következtetés	Feladatlap: 1– 3. és 8. feladat
2.	A kör és egyenes	Metakogníció, értelmes memória	Feladatlap: 4– 7. és 9. feladat
III. Érinti?			
1.	A kör érintőjével kapcsolatos problémák megoldása	Metakogníció, rendszerezés	Feladatlap: 1– 8. feladat
IV. Ponthalmazok			
1.	Megadott tulajdonságú ponthalmazok keresése, egyenleteik felírása	Metakogníció	Feladatlap: 1– 8. feladat

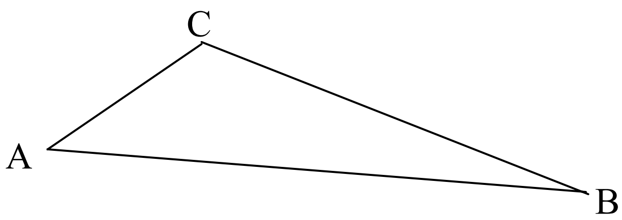
I. SEGÍTSÉG

Koordinátageometriában a sikeres munka egyik feltétele, hogy az éppen tanulmányozott alakzat tulajdonságait jól ismerjék a tanulók. Ezért, a kör egyenletének ismeretét is feltételező koordinátageometriai problémák megoldása előtt – feladatokon keresztül – átismételjük a kör legfontosabb tulajdonságait. Elsősorban azokat, amelyeket majd a következő foglalkozások feladatainak megoldásában is használhatunk.

1. Derékszögű háromszög befogói 5 cm és 12 cm hosszúak. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

Megoldás: $r = 6{,}5\ \text{cm}$

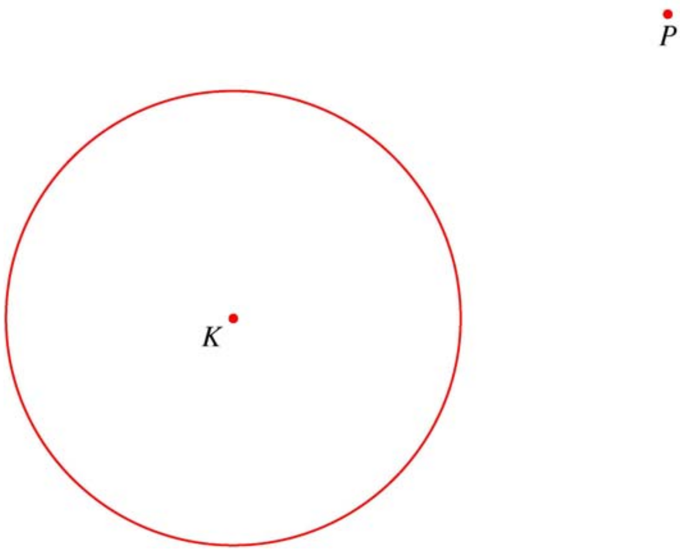
2. Szerkeszd meg az *ABC* háromszög körülírt körét!



3. Szerkeszd meg a kör

a) egy tetszőleges *H* pontjában a kör érintőjét;

b) *P* ponton átmenő érintőit!



4. A 8 cm sugarú kör *K* középpontjától 17 cm távolságra megjelölt *P* pontból milyen hosszú érintőszakasz húzható?

Megoldás: $PE_1 = PE_2 = 15\,\text{cm}$

5. Ismét adott az előző feladat *K* középpontú köre és a *P* pont. Forgassuk a *PK* egyenest pozitív irányba! Jelöljük az ε szöggel elforgatott egyenest *e*-vel. ($0^\circ \le \varepsilon < 180^\circ$, hiszen 180°-os elforgatásnál már az elforgatott egyenes újra a *PK* egyenessel esik egybe.) Az ε milyen értéke esetén a) metszi; b) érinti; c) kerüli el az *e* egyenes a kört?
A hajlásszöget egész fokra kerekítve add meg!

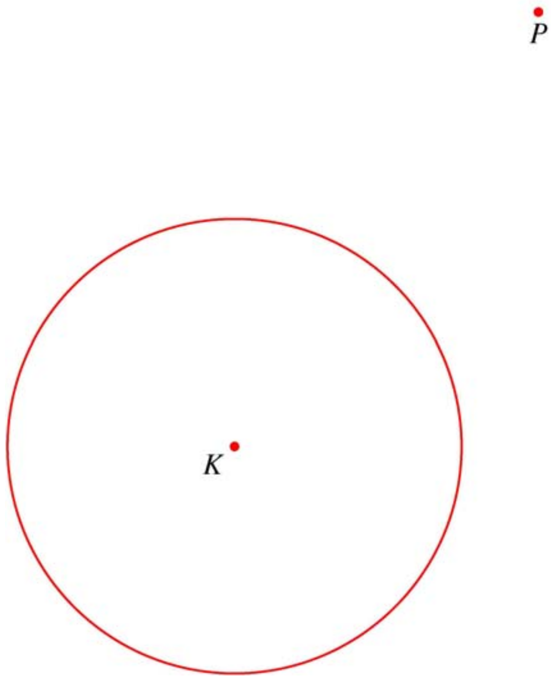
Megoldás: Ha a kört érintő *e* egyenes kérdéses ε szöge hegyesszög, akkor a PKE_1 derékszögű háromszögben $\sin\varepsilon = \dfrac{8}{17}$. Ebből $\varepsilon \approx 28{,}07^\circ$, egészre kerekítve $\varepsilon = 28^\circ$. A tengelyes szimmetria miatt $(PK;e)\angle = 152^\circ$ esetén is érinti az *e* egyenes a kört. Így

a) $0 \le \varepsilon < 28^\circ$ vagy $152^\circ < \varepsilon \le 180^\circ$ esetén metszi az egyenes a kört.

b) $\varepsilon = 28^\circ$ vagy $\varepsilon = 152^\circ$ esetén érinti a kört.

c) $28^\circ < \varepsilon < 152^\circ$ esetén elkerüli az egyenes a kört.

6. Adott egy *K* középpontú kör, és annak külső tartományában egy *P* pont. Szerkeszd meg azt az egyenlőszárú *ABP* háromszöget, amelyben $AP = BP$, és az adott kör a háromszög beírt köre!



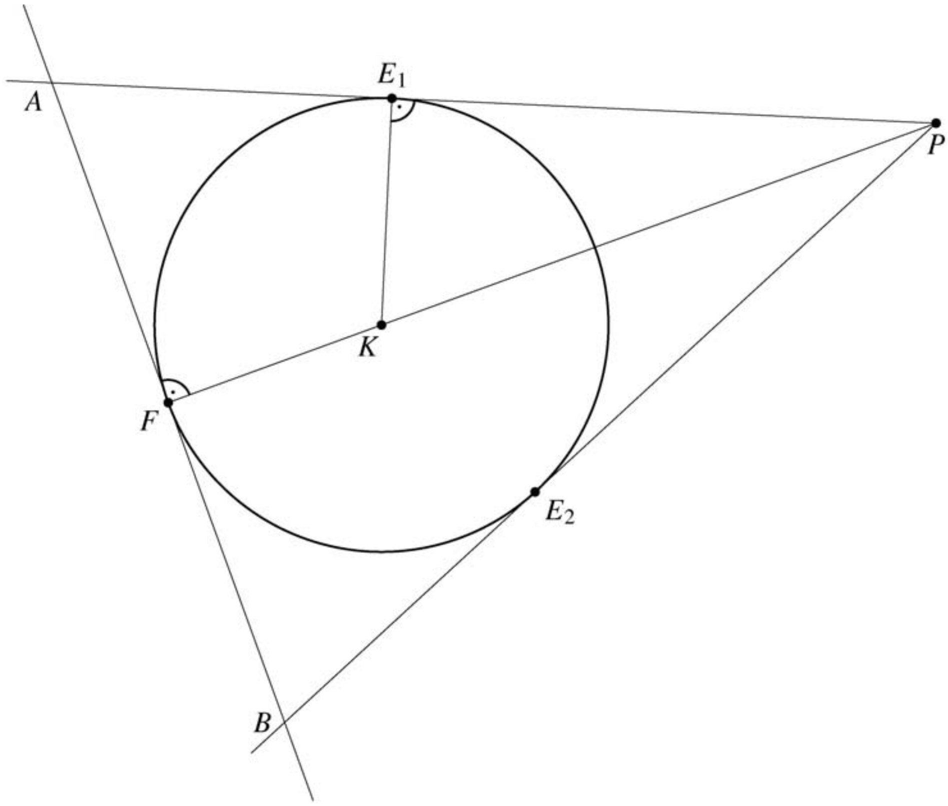
Megoldás: Mivel a keresett egyenlőszárú háromszög *PK* szögfelezője merőlegesen felezi az *AB* alapot, ezért a *PK* félegyenes *K*-n túli meghosszabbítása a kört az *AB* oldal *F* felezőpontjában metszi. Az *F* pontban a *PK* egyenesre állított merőlegesnek a *P* pontból megszerkesztett érintőkkel való metszéspontjai lesznek a keresett háromszög *A* és *B* csúcsai.

7. Számítsd ki, hogy milyen hosszú az előző feladatban megszerkesztett *ABP* egyenlőszárú háromszög *AB* alapja, ha az adott kör sugara 5 cm és $PK = 13$ cm!

I. Megoldás: Az ábrán látható jelöléseket használva: PE_1K háromszög hasonló a PFA háromszöghöz. Mivel $PE_1 = 12\text{ cm}$, így $\frac{PF}{PE_1} = \frac{AF}{E_1K}$, azaz $\frac{18}{12} = \frac{AF}{5}$. Ebből $AF = 7{,}5\text{ cm}$. A háromszög alapjának hossza: $AB = 15\text{ cm}$.

II. Megoldás: Ismert, hogy a háromszög beírt körének *r* sugara, *T* területe és *s* félkerülete között fennáll a $T = rs$ kapcsolat. Mivel $AF = AE_1$ és $BF = BE_2$, így

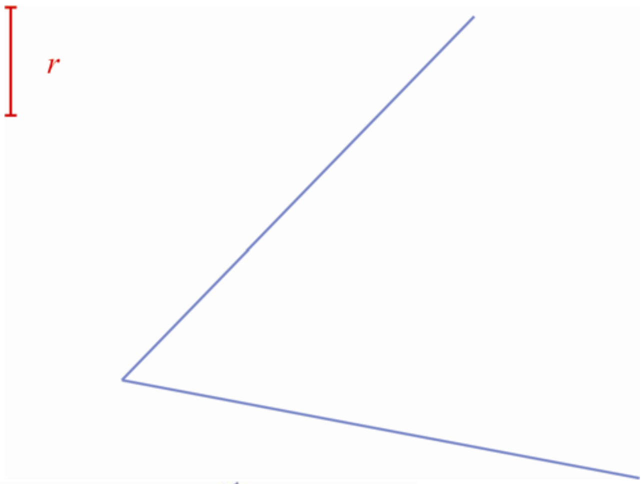
$s = \frac{24 + 2 \cdot AB}{2} = 12 + AB$. Tehát $\frac{AB \cdot 18}{2} = 5 \cdot (12 + AB)$. Ebből $AB = 15\text{ cm}$ adódik.



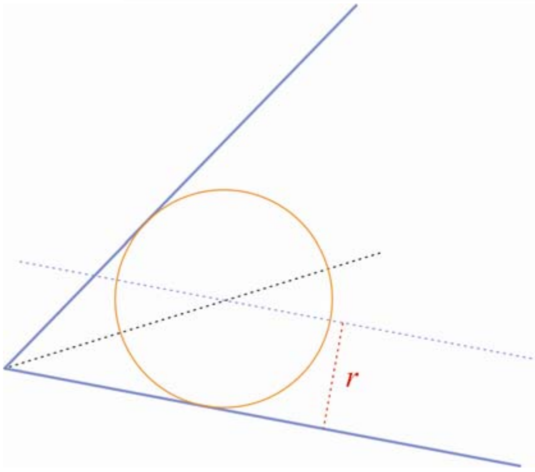
8. Tekintsük azokat a köröket, amelyek átmennek az *A* és *B* (különböző) pontokon. Milyen alakzatot alkot azon körök középpontjainak halmaza?

Megoldás: Az *AB* szakasz felezőmerőlegese.

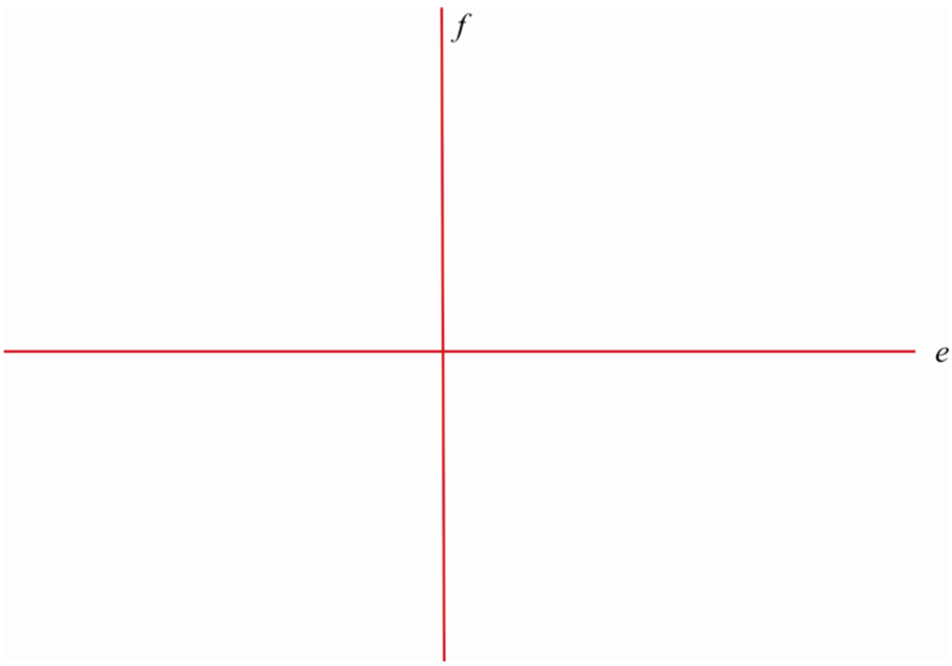
9. Az adott szögtartományba szerkessz olyan adott *r* sugarú kört, amely érinti a szög szárait!



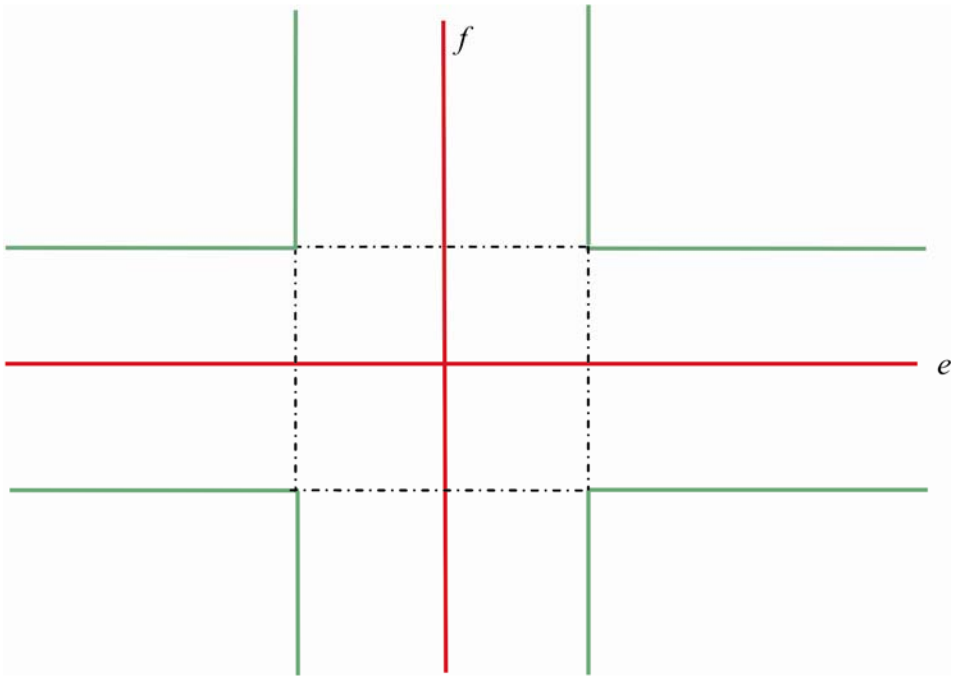
Megoldás:



10. Mi azon 2 cm sugarú körök középpontjainak halmaza, amelyek az egymásra merőleges *e* és *f* egyenes közül legalább az egyiket érintik?



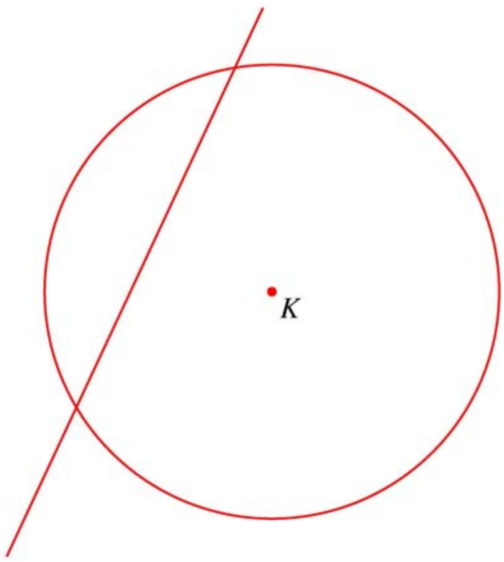
Megoldás:



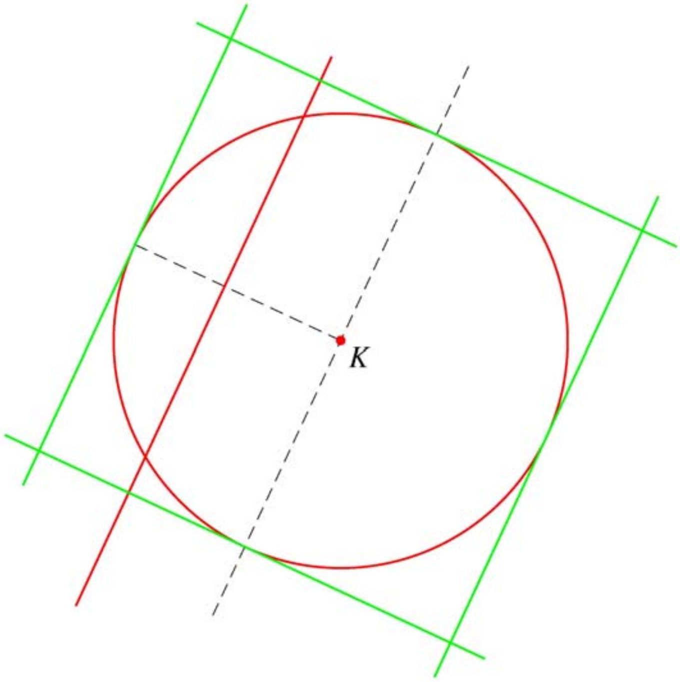
11. Adott az ábrán látható kör és egyenes. Szerkeszd meg a kör azon érintőit, amelyek

a) párhuzamosak az adott egyenessel!

b) merőlegesek az adott egyenesre!



Megoldás:



II. LÁTÓMEZŐNKBEN A KÖR

1. Határozd meg azt az alakzatot, amelynek az egyenlete (Vigyázz!):

a) $x^2 + y^2 = 10x - 6y + 2$; b) $x^2 + y^2 = 6x$; c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 0$;

d) $4x^2 - (2y-1)^2 = 0$; e) $\frac{y+4}{2-x} = \frac{x}{y}$.

Megoldás:

a) $x^2 + y^2 = 10x - 6y + 2 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = 36$. Az alakzat kör: $K(5;-3)$ és $r = 6$.

b) $x^2 + y^2 = 6x \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$. Az alakzat kör: $K(3;0)$ és $r = 3$.

c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 0$. Az alakzat egy pont: $P(3;1)$

d) $4x^2 - (2y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 2y + 1)(2x + 2y - 1) = 0$.

Az alakzat két, egymásra merőleges egyenes, amelyek a $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ koordinátájú pontban metszik egymást. Az egyik egyenes meredeksége 1, a másiké (-1).

e) $\frac{y+4}{2-x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, ha $x \neq 2$ és $y \neq 0$.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ ($x \neq 2$ és $y \neq 0$) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ ($x \neq 2$ és $y \neq 0$).

Az alakzat a $K(1;-2)$ középpontú és $\sqrt{5}$ sugarú kör minden pontja, kivéve három pont: $(0;0)$, $(2;0)$ és $(2;-4)$.

2. Határozd meg az $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus, feleakkora sugarú kör egyenletét!

Megoldás: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 7$. Ennek a körnek a középpontja: $K(-2;4)$, sugara: $r = \sqrt{7}$.

A körrel koncentrikus, feleakkora sugarú kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y-4)^2 = \frac{7}{4}$.

3. Tükrözd az $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ egyenletű kört az x tengelyre, majd annak képét az y tengelyre! Végül az így kapott kört az $y = -x$ egyenletű egyenesre! Írd fel az egyes transzformációk végrehajtásával kapott alakzat egyenletét!

Megoldás:

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$. A kör középpontja: $(3; 1)$, sugara: $r = 4$.

Az x tengelyre tükrözött képének egyenlete: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$, $K(3; -1)$.

A tükörkép y tengelyre tükrözött képének egyenlete: $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$.

Ennek a körnek a középpontja: $K(-3;-1)$.

A $K(-3;-1)$ ponton átmenő, az $y = -x$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $y = x + 2$. A két egyenes metszéspontja: $A(-1;1)$. A K pont tükörképe az $y = -x$ egyenletű egyenesre: $K_1(1;3)$. Tengelyes tükrözéskor a kör sugarának hossza változatlan.

Az utolsó tükrözéskor kapott kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$.

4. Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik az x tengelyt a $(2;0)$ koordinátájú pontban, és 3 a középpontjuk második koordinátájának abszolútértéke!

Megoldás: A körök sugara 3 egység. Középpontjaik: $K_1(2;3)$, illetve $K_2(2;-3)$.

Egyenletük: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ és $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Célszerű a feladat kapcsán megbeszélni a tanulókkal, hogy egy kör akkor és csak akkor érinti az x tengelyt, ha az egyenlete: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = v^2$, ahol $(u;v)$ a kör középpontjának koordinátái. Ekkor a kör sugara: $r = |v|$.

Fogalmaztassuk meg a tanulókkal, hogy milyen azoknak a köröknek az egyenlete, amelyek érintik az y tengelyt!

5. Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik mindkét koordinátatengelyt, és a sugaruk 4 egység!

Megoldás: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$

$(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$

$(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$

$(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

6. Hol metszi az $y = x$ egyenletű egyenes az $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű kört?

Megoldás: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Az $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \\ y = x \end{array}\right\}$

egyenletrendszer megoldásai a $(0;\, 0)$ és a $(7;\, 7)$ számpárok.

Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy egy kör pontosan akkor megy át a koordináta-rendszer origóján, ha az egyenletének polinomalakjában a konstans nulla. Tehát az egyenlete $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0$, ahol $(u; v)$ a kör középpontjának koordinátái. Ekkor a kör sugara: $\sqrt{u^2 + v^2}$.

7. Írd fel az $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű körnek a koordináta-rendszer origóján átmenő érintőjének egyenletét!

Megoldás: Az origó rajta van a körön. A kör K középpontjának koordinátái: $K(4;3)$. Az érintő, az $\overrightarrow{OK}$ vektorra merőleges, origón átmenő egyenes. Egyenlete: $4x + 3y = 0$.

8. Kicsinyítsd az $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű kört a $(0;0)$ pontból $\frac{1}{5}$ arányban. Írd fel a kapott alakzat egyenletét! A transzformáció végrehajtásával hányszorosára változott a kör területe?

Megoldás: Az egyenlete: $\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2 = 1$, a területe huszonötöde az eredeti kör területének.

9. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0;3)$, $B(-4;0)$ és $C(0;0)$. Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

Megoldás: A derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja, sugara az átfogó felének hosszával egyenlő.

A körülírt kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y-1{,}5)^2 = 6{,}25$.

III. ÉRINTI?

Ezen a foglalkozáson a tanulók a kör érintőjével kapcsolatos koordinátageometriai feladatokkal foglalkozhatnak. Az elemi geometriai előkészítés talán megkönnyíti az egyes feladatok megoldástervének elkészítését, így a koordinátageometriai módszerek, eszközök alkalmazására több idő jut. A feladatok nem igényelnek túl bonyolult számolást, éppen azért, hogy a tanulók elsősorban a különböző eljárások helyes alkalmazására tudjanak figyelni. A tanulók önállóan dolgozzanak, de tegyük lehetővé, hogy a munka során a részeredményeket egyeztethessék egymással!

1. Hány közös pontja van az $x^2+y^2=8x$ egyenletű körnek az $y=2x$ egyenletű egyenessel?

Megoldás: Az $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=8x \\ y&=2x \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai: $(0;0)$ és $\left(\frac{8}{5};\frac{16}{5}\right)$. Tehát két közös pontja van a két alakzatnak.

2. Írd fel annak az origó középpontú körnek az egyenletét, amely érinti a $2x-y+5=0$ egyenletű egyenest!

Megoldás: Jelölje *e* az adott egyenletű egyenest, *f* pedig a kör középpontjából az *e* egyenesre állított merőleges egyenest. Az *e* és az *f* egyenesek metszéspontja az érintési pont.

$f: x+2y=0$.

A $\left.\begin{aligned} 2x-y+5&=0 \\ x+2y&=0 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $(-2;1)$. Az érintési pont: $E(-2;1)$. A kör sugara: $r=\sqrt{5}$, az egyenlete: $x^2+y^2=5$.

3. A *g* egyenes merőleges a $3x-2y+20=0$ egyenletű *e* egyenesre. A két egyenes metszéspontja $P(-2;7)$. A $K(-1;2)$ középpontú kör érinti mind a két egyenest.

a) Írd fel a *g* egyenes egyenletét!

b) Határozd meg az *e* és *g* egyenesek által alkotott szögek szögfelezőinek egyenletét!

c) Határozd meg az adott középpontú kör egyenletét!

Megoldás:

a) $\mathbf{n}_g(2;3)$, $P(-2;7)\in g$, így g: $2x+3y=17$.

b) Mivel a *K* pont az *e* és *g* egyenest érintő kör középpontja, így az egyik keresett szögfelező a *PK* egyenes, a másik a *PK* egyenesre merőleges, *P* ponton átmenő egyenes.

Mivel $\overrightarrow{PK}(1;-5)$, a *PK* egyenes egyenlete: $5x + y = -3$; a másik szögfelező egyenlete: $x - 5y = -37$.

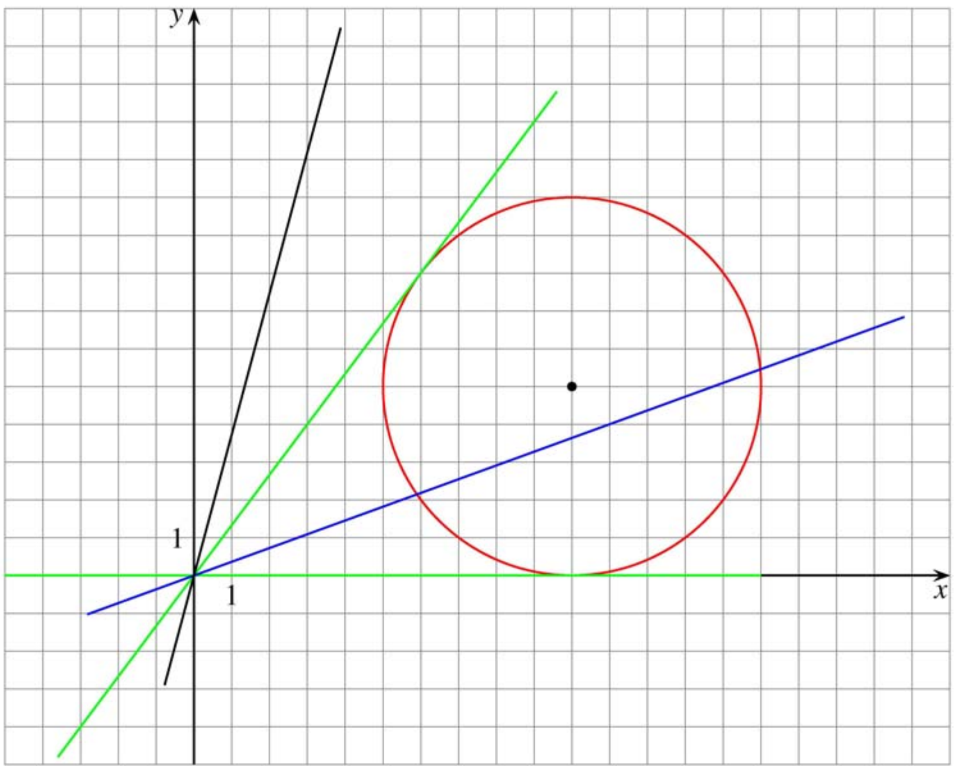
c) A *K* ponton átmenő, *e* egyenesre merőleges *f* egyenes egyenlete: $2x + 3y = 4$. Az *e* és *f* egyenes metszéspontjának koordinátái az $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 20 = 0 \\ 2x + 3y = 4 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $(-4;4)$.

Az *e* és *g* egyenest érintő kör sugara: $r = \sqrt{13}$. A kör egyenlete:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$.

4. Ha az *x* tengelyt forgatnád a koordináta-rendszer origója körül, az elforgatott egyenesek közül melyek kerülik el, érintik, illetve metszik az $(x-10)^2 + (y-5)^2 = 25$ egyenletű kört? Add meg egyenletével a kérdezett tulajdonságú egyeneseket!

Megoldás:



Az y tengellyel egybeeső egyenes elkerüli a kört. Ha az egyenes nem esik egybe az y tengellyel, akkor az egyenletét kereshetjük $y = mx$ alakban.

Az $\left.\begin{array}{l}(x-10)^2+(y-5)^2=25\\ y=mx\end{array}\right\}$ paraméteres egyenletrendszer megoldásai a két alakzat közös pontjainak koordinátái.

Behelyettesítő módszer alkalmazásával $(1+m^2)x^2-10(2+m)x+100=0$ másodfokú egyenlethez jutunk. A megoldás számainak meghatározásához elegendő az egyenlet diszkriminánsát vizsgálnunk.

$$D=100(2+m)^2-400(1+m^2).$$

A diszkrimináns pontosan akkor nulla, ha $m=0$ vagy $m=\frac{4}{3}$. Tehát az egyik érintő az x tengely (az ábráról is leolvasható), a másik az $y=\frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes.

A diszkrimináns pontosan akkor pozitív, ha $0<m<\frac{4}{3}$. A kört metsző egyenesek egyenlete: $y=mx$, ahol $0<m<\frac{4}{3}$.

A kört elkerülő egyenesek: az $x=0$ egyenletű (y tengely), és az $y=mx$ egyenletű egyenesek, ahol $\frac{4}{3}<m$ vagy $m<0$.

5.* Határozd meg annak az x tengelyt érintő körnek az egyenletét, amelyik áthalad az $A(-9;5)$ és $B(-1;9)$ pontokon!

Megoldás: Mivel a kör érinti az x tengelyt, az egyenletét $(x-u)^2+(y-v)^2=v^2$ alakban kereshetjük. A keresett kör $K(u;v)$ középpontja rajta van az AB szakasz f felezőmerőlegesén, amelynek az egyenlete: $2x+y=-3$. Tehát $2u+v=-3$.

A kör egyenletét egy paraméterrel (v-vel) is felírhatjuk: $\left(x+\frac{3+v}{2}\right)^2+(y-v)^2=v^2$.

A kör átmegy pl. a *B* ponton, tehát $\left(-1+\frac{3+v}{2}\right)^2+(9-v)^2=v^2$, azaz

$\left(\frac{1+v}{2}\right)^2+(9-v)^2=v^2$. Az egyenlet ekvivalens a $v^2-70v+325=0$ egyenlettel. Ennek megoldásai: $v=65$, illetve $v=5$. A kör középpontja: $K_1(-34;65)$ vagy $K_2(-4;5)$.

A keresett kör egyenlete: $(x+34)^2+(y-65)^2=4225$ vagy $(x+4)^2+(y-5)^2=25$.

6. Írd fel az $(x-4)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű körnek a $4x+3y=-40$ egyenletű

a) egyenessel párhuzamos érintőit!

b) egyenesre merőleges érintőit!

A feladat megoldásában követhetjük a szerkesztés menetét is, vagy segítségül hívhatjuk a vektorokat. A közölt megoldásban vázlatosan mindkét gondolatmenet szerepel.

Megoldás:

a) A kör középpontján átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenes egyenlete:

$f: 3x-4y=20$. Ennek az egyenesnek metszéspontjai a körrel: $A(8;1)$ és $B(0;-5)$. A kör adott egyenessel párhuzamos érintőinek egyenlete: $4x+3y=35$ és $4x+3y=-15$.

Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy mivel az adott egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}_e(4;3)$, és ennek vektornak valamint a kör sugarának hossza is 5 egység, így ha a kör középpontját eltoljuk az $\mathbf{n}_e(4;3)$, illetve a $(-1)\cdot\mathbf{n}_e(4;3)$ vektorral, éppen a keresett *A* és *B* érintési pontokhoz jutunk.

$\vec{OK}(4;-2)+\mathbf{n}_e(4;3)=\vec{OA}(8;1)$ illetve $\vec{OK}(4;-2)-\mathbf{n}_e(4;3)=\vec{OB}(0;-5)$.

b) A kör középpontján átmenő, az adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete:

$4x+3y=10$. Ennek az egyenesnek metszéspontjai a körrel: $C(1;2)$ és $D(7;-6)$.

A kör adott egyenesre merőleges érintőinek egyenlete: $3x-4y=-5$ és $3x-4y=45$.

A vektorok felhasználásával: $\vec{OK}(4;-2)+\mathbf{v}_e(-3;4)=\vec{OC}(1;2)$, illetve

$\vec{OK}(4;-2)-\mathbf{v}_e(-3;4)=\vec{OD}(7;-6)$.

7.* Mi az egyenlete annak a körnek, amely belülről érinti az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a $P(-4;3)$ pontban, és érinti az y tengelyt!

Megoldás: Két, egymást érintő kör középpontjait összekötő egyenes áthalad a körök közös érintési pontján, ezért a keresett kör középpontja illeszkedik az OP: $y = -\frac{3}{4}x$ egyenletű egyenesre. A keresett $K(u;v)$ középpontú kör érinti az y tengelyt, így az egyenletét $(x-u)^2 + (y-v)^2 = u^2$ alakban kereshetjük. A K pont rajta van az OP egyenesen, ezért $v = -\frac{3}{4}u$. A keresett kör egyenlete egy paraméterrel felírható:

$$(x-u)^2 + \left(y + \frac{3}{4}u\right)^2 = u^2.$$

A P pont rajta van a keresett körön, így $(-4-u)^2 + \left(3 + \frac{3}{4}u\right)^2 = u^2$.

$$(-4-u)^2 + \left(3 + \frac{3}{4}u\right)^2 = u^2 \iff 9u^2 + 200u + 400 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai: $u = -\frac{20}{9}$ és $u = -20$. Mivel a kör belülről érinti az adott kört, ezért középpontjának első koordinátája nem lehet (-20). A kör középpontja: $K\left(-\frac{20}{9};\frac{5}{3}\right)$. Sugara: $\frac{20}{9}$.

A keresett kör egyenlete: $\left(x + \frac{20}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{400}{81}$.

8. Mi azon pontok halmaza a koordináta síkon, amelyekből az $(x+7)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű körhöz húzott érintőszakaszok hossza 12 egység?

Megoldás: Az adott $K(-7;3)$ középpontú kör sugara 5 egység, a keresett P pontokból húzott érintőszakasz hossza 12 egység. Az érintőszakasz, az érintési pontba vezető sugár, és a KP szakasz alkotta derékszögű háromszög KP átfogója 13 egység. Így a keresett ponthalmaz azon pontok halmaza a koordináta síkon, amelyek 13 egység távolságra vannak a K ponttól, tehát egy K középpontú, 13 egység sugarú kör minden pontja.

A keresett ponthalmaz egyenlete: $(x+7)^2 + (y-3)^2 = 169$.

IV. PONTHALMAZOK

A tanulók koordinátageometriai ismereteinek elmélyítésére nagyon jól használhatók az adott tulajdonságú pontok halmazának meghatározására irányuló feladatok. Természetesen ez akkor lenne igazán hasznos, ha a tanulók további alakzatok egyenletét is ismernék (parabola, ellipszis, hiperbola), és elemi geometriai feladatok megoldásához eszközként lehetne használni a koordinátageometriát. Csak a kör és egyenes egyenletének ismeretében is érdemes ilyen módon megfogalmazott feladatokat kitűzni megoldásra, hiszen eközben a tanulók feleleveníthetik különböző elemi geometriai ismereteiket is, és közben lehetőségük nyílik a koordinátageometriában tanult eljárások, módszerek alkalmazására.

1. Az *ABC* derékszögű háromszög két csúcsa rögzített: $A(-2;3)$ és $B(4;1)$. Határozd meg egyenletével azon pontok halmazát, amelyek bármelyike a háromszög harmadik *C* csúcsa lehet!

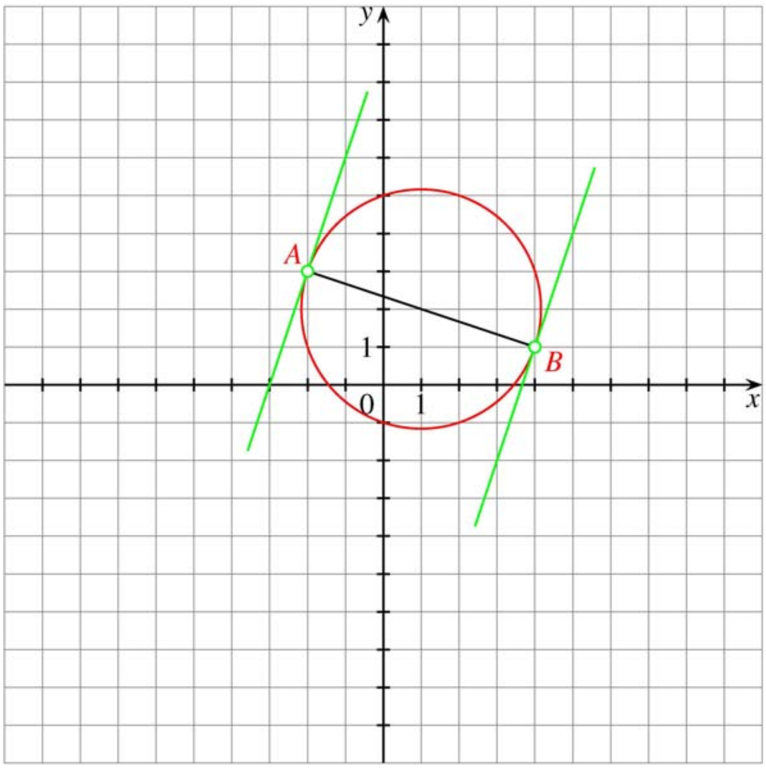
Megoldás: A *C* pont nyilván nem lehet az *AB* egyenes pontja. A háromszög derékszöge vagy az *A*, vagy a *B*, vagy a *C* csúcsnál van.

Az első esetben a háromszög *C* csúcsa az *AB* szakaszra merőleges, az *A* ponton átmenő egyenes minden pontja, az *A* pont kivételével. Egyenlete: $3x - y = -9$, ahol $x \neq -2$.

A második esetben a keresett ponthalmaz a *B* ponton átmenő, *AB* szakaszra merőleges egyenesnek a *B* ponttól különböző pontjai. Egyenlete: $3x - y = 11$, ahol $x \neq 4$.

A harmadik esetben a ponthalmaz az *AB* átmérőjű kör, az *A* és a *B* pont kivételével. Egyenlete: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$, kivéve a $(-2;3)$ és $(4;1)$ pontok.

A keresett ponthalmaz e három alakzat uniója.



2. Egy egyenlőszárú háromszög egyik szárának végpontjai $A(4;2)$ és $B(-1;6)$. A háromszög harmadik csúcsát jelöljük *C*-vel. Határozd meg a lehetséges *C* pontok halmazát! Add meg a ponthalmaz egyenletét!

Megoldás: Az egyenlőszárú háromszög másik szára vagy *AC*, vagy *BC*. A *C* pont nem lehet rajta az *AB* egyenesén.

A keresett ponthalmaz tehát egy *A* középpontú, *AB* sugarú kör, kivéve a *B* pontot és a kör *B*-vel átellenes pontját, illetve a *B* középpontú, *AB* sugarú kör, kivéve az *A* pontot és a kör *A* ponttal átellenes pontját.

A keresett ponthalmaz egyenlete: $(x-4)^2+(y-2)^2=41$, kivéve a $(-1;\,6)$ és a $(9;-2)$ pontok vagy $(x+1)^2+(y-6)^2=41$, kivéve a $(4;\,2)$ és a $(-6;\,10)$ pontok.

3. Egy háromszög két csúcsa $A(1;\,0)$ és $B(5;\,0)$. A háromszög harmadik csúcsa az $y=x$ egyenletű egyenesen mozog.

a) Válassz ki a lehetséges háromszögek közül hármat, és határozd meg a kiválasztott háromszögek súlypontjának koordinátáit!

b) Határozd meg egyenletével az összes ilyen háromszög súlypontjának halmazát!

Megoldás: A háromszög harmadik csúcsa nem lehet az x tengelyen, tehát nem lehet a koordináta-rendszer origója. Az $y=x$ egyenletű egyenes origótól különböző $C(c;c)$ pontja esetén az *ABC* háromszög egyik súlyvonala a *CF* szakasz, ahol $F(3;0)$. Ismert, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalnak az oldalhoz közelebbi harmadolópontja. A *CF* szakasz *F*-hez közelebbi harmadolópontjának koordinátái: $\left(\frac{6+c}{3};\frac{c}{3}\right)$, ahol $c \neq 0$. Ez az *ABC* háromszög súlypontjának koordinátái. Észrevehetjük, hogy ha súlypont első koordinátáját *x*-szel jelöljük, akkor a második koordinátája $x-2$.

Tehát az *ABC* háromszög súlypontjainak halmaza az $y = x-2$ egyenletű egyenes, kivéve annak $(2;0)$ koordinátájú pontja.

4. Az $A(0;0)$ ponton át rajzolj egy tetszőleges $m \neq 0$ iránytangensű egyenest, a $B(6;0)$ ponton át pedig egy $2m$ iránytangensűt. Jelölje *C* a két egyenes metszéspontját.

a) Töltsd ki az alábbi táblázat hiányzó helyeit!

***m* értéke**	-2	$-0{,}5$		$1{,}5$	2	$\sqrt{3}$
***C* pont koordinátái**			(12;–4)			

b) Határozd meg egyenletével a *C* pontok halmazát!

Megoldás:

a)

m értéke:	-2	$-0{,}5$	-1/3	$1{,}5$	2	$\sqrt{3}$
C pont koordinátái:	(12; -24)	(12; -6)	(12;–4)	(12; 18)	(12; 24)	(12; $12\sqrt{3}$)

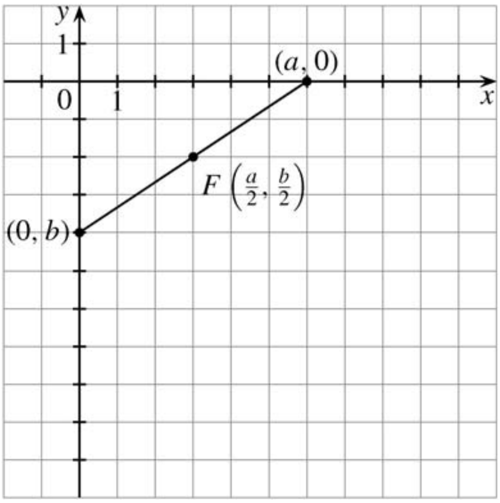
b) Az *A* ponton átmenő egyenes egyenlete: $y = mx$, a *B* ponton átmenő egyenes egyenlete: $y = 2mx - 12m$, ahol $m \neq 0$. A két egyenes metszéspontja: $P(12;12m)$.

Mivel *m* tetszőleges, nullától különböző számot jelöl, így a keresett ponthalmaz az $x = 12$ egyenletű egyenes, kivéve annak $(12;0)$ koordinátájú pontja.

5*. Egy 10 dm hosszú, vékony, elhanyagolható tömegű madzag két végére egy-egy azonos tömegű kis tárgyat erősítünk. Az egyik kis tárgyat (tömegpontot) egy sima asztalra helyezzük. A madzagot kicsi csigán átvetve, annak másik vége szabadon mozoghat. Kezdetben az asztalon lévő tömegpont a lehető legtávolabb (10 dm-re) van a kis csigától.

Határozd meg a két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontjának pályáját, miközben a tömegpont lecsúszik az asztalról!

Megoldás: Helyezzük a két pontból álló rendszert a koordinátasíkra: a kooordináta-rendszer kezdőpontja a csiga helye, tengelyei pedig a tömegpontok felé mutatnak. Legyenek az asztalon lévő tömegpont koordinátái $(a;0)$, a másik tömegponté $(0;b)$, ahol $0 \le a \le 10$ és $-10 \le b \le 0$, és $a+(-b)=10$.



Ekkor a két azonos tömegű pontból álló rendszer tömegközéppontjának helye a két tömegpont helyét összekötő szakasz felezőpontja, tehát $F\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$. Mivel $a+(-b)=10$, így $\frac{b}{2}=\frac{a}{2}-5$, a tömegközéppont koordinátái: $F\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}-5\right)$. Ha F első koordinátáját x-szel jelöljük, akkor a második koordinátája: $y=x-5$, a tömegközéppont ezen az egyenesen mozog. Mivel $0 \le a \le 10$ és $-10 \le b \le 0$, ezért $0 \le x \le 5$ és $-5 \le y \le 0$.

A rendszer tömegközéppontjának pályája az $y=x-5$ egyenletű egyenes $(0;-5)$ és $(5;0)$ koordinátájú pontjait összekötő szakasza.

6. Adott az $A(0;0)$ és $B(6;0)$ pont. Mi azon pontok halmaza a koordinátasíkon, amelyeknek az A ponttól mért távolsága kétszerese a B ponttól mért távolságának?

Megoldás: Keressük azon $P(x;y)$ koordinátájú pontokat, amelyekre $PA=2\cdot PB$, azaz $\sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{(x-6)^2+y^2}$. Az egyenlet mindkét oldala nemnegatív, ezért mindkét oldalt négyzetre emelve nem változik az egyenlet megoldáshalmaza. Ebből az $x^2+y^2-16x+48=0$ adódik. Innen azonos átalakítással az $(x-8)^2+y^2=16$ egyenletet kapjuk, ez pedig a $(8;0)$ középpontú, 4 egység sugarú kör egyenlete. A keresett ponthalmaz e kör pontjainak halmaza.

A keresett ponthalmaz az AB szakasz Apollóniusz-köre, $\lambda = 2$ esetre. Az **Apollóniusz-kör** azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságainak aránya adott (1-től különböző) pozitív szám.

7. Jelöld meg a koordinátasíkon az $A(1;0)$ pontot és az $x = 1$ egyenletű e egyenest! Határozd meg azon pontok halmazát a koordinátasíkon, amelyeknek az A ponttól mért távolságuk négyzetének számértéke megegyezik az e egyenestől mért távolságukkal!

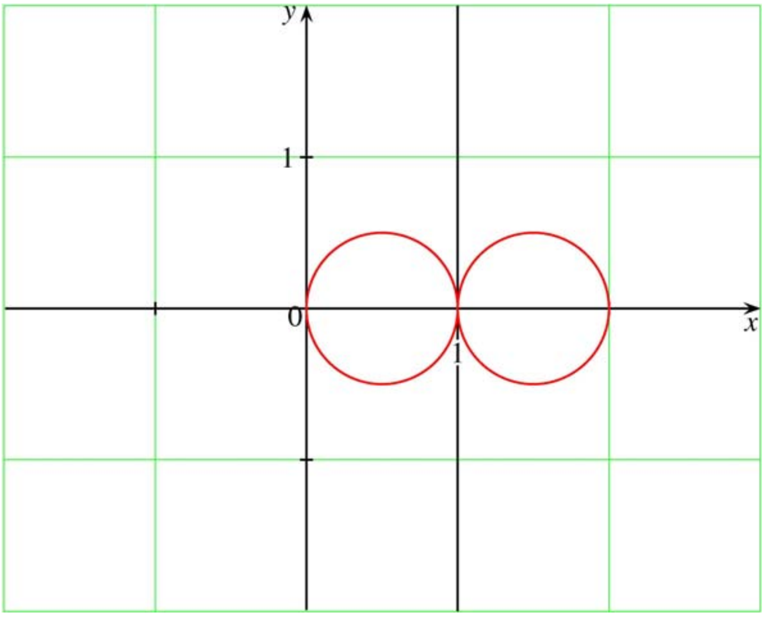
Megoldás: Keressük azon $P(x;y)$ koordinátájú pontokat, amelyekre

$$\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2 = |x-1|.$$

Ha $1 \le x$, akkor $(x-1)^2 + y^2 = x-1$, azaz $x^2 - 3x + y^2 + 2 = 0$. Ebből azonos átalakítással az $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ egyenlet adódik, ami egy olyan kör egyenlete, amelynek a középpontja $\left(\frac{3}{2};0\right)$, sugara $\frac{1}{2}$ egység. Mivel e kör minden pontjának első koordinátája nem kisebb 1-nél, tehát a teljes kör része a keresett ponthalmaznak.

Ha $x \le 1$, akkor $(x-1)^2 + y^2 = 1-x$, azaz $x^2 - x + y^2 = 0$. Ebből $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ egyenlethez jutunk. Ez is egy kör egyenlete: középpontja $\left(\frac{1}{2};0\right)$, sugara $\frac{1}{2}$ egység. Ebben az esetben is a teljes kör hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz.

Így a keresett ponthalmaz két kör: az $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ és az $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ egyenletű körök uniója.


y
1
0
1
x