MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

6. modul
Egyenesen előre!

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	
Időkeret	3 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika Szűkebb környezetben: Algebra, elemi geometria Ajánlott megelőző tevékenységek: Az egyenes különböző megadási módjai, iránytangens, normálvektor fogalma. Az egyenes normálvektoros egyenletének ismerete. Ajánlott követő tevékenységek: A kör egyenlete.
A képességfejlesztés fókuszai	Metakogníció, ismeretek rendszerezése, elmélyítése

JAVASLAT

Gyakorló tanár bizonyára tapasztalta, hogy a koordinátageometria az egyik olyan tananyag, amelyben a csoport „előre haladása” a legegyenetlenebb. Hiszen a tanulók egy része gyorsan átlátja a ponthalmaz – egyenlet kapcsolatot, és könnyedén írja fel különböző módon megadott egyenesek egyenletét, old meg összetettebb feladatot is, míg mások még mindig a technikai részletekkel bajlódnak. A három foglalkozás mindegyike csak az egyenes (és annak részei) egyenletével foglalkozik. A feladatsorok a tananyag alapismeretét segítik elő. Az utolsó foglalkozáson önálló tanulói munkára nyílik lehetőség.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Alakzat és egyenlet**
2. foglalkozás: **Itt is, ott is egyenes**
3. foglalkozás: **„Dolgozni csak pontosan, szépen…”**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Alakzat és egyenlet			
1	Ponthalmazok keresése	Rendszerezés, pontosság, érvelés, bizonyítás	Feladatlap: 1–4. feladat
2	Egyenletével megadott alakzat	Metakogníció, probléma-reprezentáció	Feladatlap: 5–7. feladat
II. Itt is, ott is egyenes			
1	Az egyenes normálvektora, iránytangense	Metakogníció	Feladatlap: 1–2. feladat
2	A háromszög néhány nevezetes vonalának egyenlete	Érvelés, bizonyítás, metakogníció, értelmes memória	Feladatlap: 3. feladat
3.	Az egyenes néhány transzformációja	Rendszerezés	Feladatlap: 4–6. feladat
III. „Dolgozni csak pontosan, szépen…”			
1	Teszt feladatsor megoldása	Metakogníció	Tanári melléklet
2	A megoldások összehasonlítása, megbeszélése	Érvelés, bizonyítás, metakogníció	Tanári melléklet

I. ALAKZAT ÉS EGYENLET

A koordinátageometriával foglalkozó tanuló számára kezdetben a legfontosabb, hogy jól tájékozódjon a koordinátasíkon, és mélyen értse, hogy mit jelent egy alakzat egyenlete. A modul első foglalkozására tervezett feladatok ezt a célt szolgálják.

Egy új fogalom bevezetés előtt, vagy egy új témakör kezdetén különösen fontos, hogy a tanulók minél több tapasztalatot gyűjtsenek az adott területről. A tanulók eddigi tanulmányaik során szerzett koordinátageometriai ismeretei igen eltérőek lehetnek. A tapasztalatszerzésre irányuló feladatok lehetőséget nyújtanak a tanár számára arra is, hogy feltérképezze, hogy melyik tanuló milyen előismerettel rendelkezik a koordinátageometriában.

Az első három feladatban fontos, hogy a tanuló ne csak az első síknegyedben keressen megfelelő pontokat. Az első feladat kitűzésekor természetesen előfordulhat, hogy a csoport minden tagja a négy kérdés mindegyikére „azonnal” a teljes alakzatot adja meg. Ekkor kérhetjük, hogy az állításukat bizonyítsák is be! Egyébként pedig, az összes ponthalmazra vonatkozóan még csak sejtéseket fogalmazzunk meg! Persze, a bizonyítás igényének fellépése esetén, megbeszélhetjük a sejtések igazolását is.

Ponthalmazok keresése

1. Keress a koordinátasíkon legalább 8 olyan pontot, amelyeknek

a) legalább az egyik koordinátája nulla!

b) az ordinátája (második koordinátája) (-3)-szorosa az abszcisszájának (első koordinátájának)!

c) a két koordinátájuk abszolútértéke megegyezik!

d) az abszcisszájuk 2-vel nagyobb az ordinátájuknál!

Mit gondolsz, ha mindegyik esetben a sík összes megadott tulajdonságú pontját meg tudnád keresni, akkor a kapott ponthalmaz milyen alakzatot alkotna?

Megoldás:

a) A két koordinátatengely.

b) A keresett ponthalmaz pontjainak $(x;y)$ koordinátái az $y=-3x$ egyenlet megoldáshalmazának elemei. Tapasztalatunk szerint ez a ponthalmaz az origón átmenő, (-3) meredekségű egyenes.

c) A koordinátatengelyek által alkotott szögek szögfelezői.

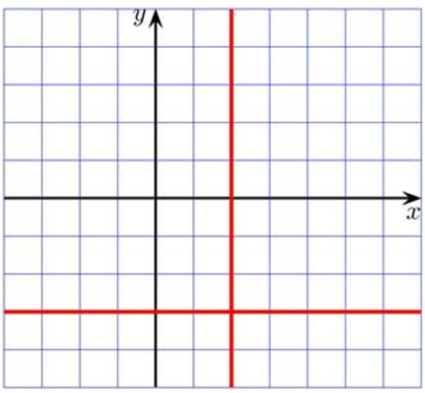
d) Az $y = x - 2$ egyenlet megoldáshalmaza lesz a keresett ponthalmazba tartozó pontok koordinátáinak halmaza. Tapasztalatunk szerint ez a ponthalmaz a $(0;-2)$ ponton áthaladó, 1 meredekségű egyenes.

2. Keress olyan $(x;y)$ koordinátájú pontokat, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenletet! a) $(x-2)(y+3)=0$; b) $xy = xy^2$.

A **2.** feladattal fő célunk ismét a tapasztalatgyűjtés. Az, hogy a csoport tagjai a kérdéses ponthalmaz minden elemét megtalálják-e, elsősorban a tanulók algebrai ismereteitől, fogalmi szinten az egyenlet ismeretének mélységétől függ. Úgy gondoljuk, itt még nem célszerű siettetni a teljes ponthalmaz megtalálását, de ha egy tanuló a második kérdésben csak az $y=1$ egyenletű egyenes pontjait adta meg (vagy csak azok közül adott meg pontokat), bíztassuk, hogy a már felismert tulajdonságú pontokon kívül is keressen pontokat. A feladat megbeszélésekor gyűjtsük össze a csoport tagjainak tapasztalatait, de az egyenlet elemzésére, és az egyenletet kielégítő összes $(x;y)$ számpár megkeresésére csak a **3.** feladat megoldása után térjünk vissza. Ekkor a tanulóknak talán már önállóan is sikerül megkeresni az egyenletek megoldáshalmazát,, illetve meghatározni a teljes alakzatot.

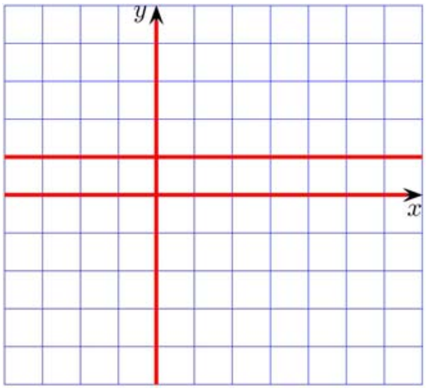
Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalán álló szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Így az egyenletet olyan, és csak olyan pontok $(x;y)$ koordinátái elégíthetik ki, amelyekre $x=2$ és y tetszőleges, vagy $y=-3$ és x tetszőleges valós szám.



b) Az $xy = xy^2$ egyenlet megoldáshalmaza nem változik, ha az egyenletet nullára redukáljuk, majd a kiemelés azonosságát alkalmazva $xy(1-y)=0$ alakra hozzuk.

Így az egyenletet olyan, és csak olyan pontok $(x; y)$ koordinátái elégíthetik ki, amelyekre $x = 0$ és y tetszőleges, vagy $y = 0$ és x tetszőleges, vagy $y = 1$ és x tetszőleges valós szám.



3. Pista a következő feladatot kapta: Határozd meg, hogy milyen alakzatot alkot az olyan $(x; y)$ koordinátájú pontok halmaza, amelyek koordinátáira igaz az $y^2x = 3x^2y$ egyenlőség!

Pista a következőképpen járt el: Elosztotta az egyenlet mindkét oldalát xy-nal. Így az $y = 3x$ egyenlethez jutott. Azt állította, hogy a keresett ponthalmaz azon pontok halmaza, amelyeknek második koordinátája 3-szorosa az első koordinátájuknak. Ezek a pontok egy olyan egyenest alkotnak, amely áthalad az origón és a meredeksége 3. Tehát ez az egyenes a keresett ponthalmaz.

Kati szerint Pista nem helyesen oldotta-e meg a feladatot.

Döntsd el, hogy igaza van-e Katinak! Döntésedet indokold!

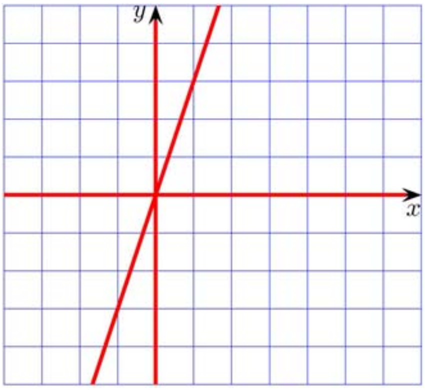
Hogyan oldottad volna meg Pista feladatát?

Ez a feladat sugallja az esetszétválasztás módszerének alkalmazását. Érdemes a tanulókkal a kétféle módszer (nullára redukálás után a kapott kifejezés szorzattá alakítása, illetve az esetszétválasztás) előnyeit és hátrányait is megbeszélni.

Megoldás:

Igaza van Katinak, hiszen pl. a $(0;5)$ számpár is megoldása az egyenletnek, tehát a $(0;5)$ koordinátájú pont is hozzátartozik a keresett alakzathoz. Ezt a pontot Pista nem tartotta a keresett ponthalmaz elemének.

Mivel az egyenlet mindkét oldala osztható xy-nal, az egyenletnek minden olyan $(0; y)$ és $(x;0)$ számpár megoldása, ahol y, illetve x tetszőleges valós számot jelöl. Ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor valóban azoknak a pontoknak a koordinátái elégítik ki az egyenletet, amelyekre $y = 3x$.



A feladat megoldása után célszerű megbeszélni a tanulókkal, hogy a keresett ponthalmaz három egyenesből áll, azaz olyan pontok halmaza, amelyek legalább az egyik egyenesnek elemei. A keresett ponthalmaz tehát e három egyenes uniója.

4. Milyen alakzatot alkot a sík összes olyan pontja, amelyek $(x; y)$ koordinátáit behelyettesítve az alábbi egyenletbe, fennáll az egyenlőség!

a) $\frac{2}{x} = \frac{2}{y}$; b) $y^2 = 2xy$; c) $x^2 - 2xy + y^2 = 9$;

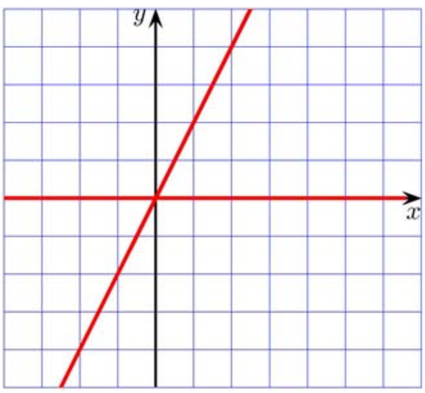
d) $\frac{(x^2-4)(y-2x)(y-4)}{y-1} = 0$; e) $\sqrt{y} = \sqrt{2-3x}$.

Megoldás:

a) $x = y$ és $x \neq 0$. A keresett alakzat: az első és harmadik síknegyed szögfelezője, kivéve a koordináta-rendszer origóját.

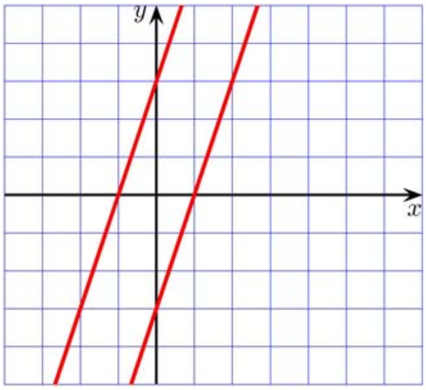
b) $y^2 = 2xy \Leftrightarrow y(y-2x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ és x tetszőleges valós szám, vagy $y = 2x$.

A keresett alakzat a két egyenes uniója.



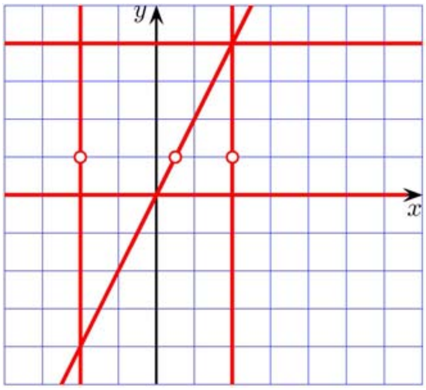
c) $x^2 - 2xy + y^2 = 9 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x-y| = 3$.

Csak a 3 és a (-3) abszolútértéke 3, így $x - y = 3$ vagy $x - y = -3$.



d) $\frac{(x^2-4)(y-2x)(y-4)}{y-1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$ és $y \in \mathbf{R}/\{1\}$, vagy $x=-2$ és $y \in \mathbf{R}/\{1\}$,

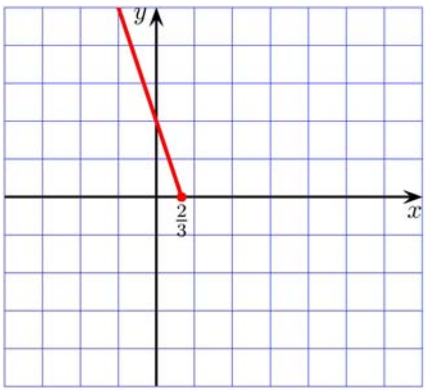
vagy $y=2x$ és $y \neq 1$, vagy $y=4$.



e) $\sqrt{y}=\sqrt{2-3x}$

A számok négyzetgyökének definíciója szerint $y \geq 0$ és $2-3x \geq 0$, azaz $x \leq \frac{2}{3}$ lehet csak. Az ilyen $(x;y)$ számpárok közül azok és csak azok az egyenlet megoldásai, amelyekre $y=2-3x$.

A keresett alakzat egy félegyenes, melynek kezdőpontja $\left(\frac{2}{3};0\right)$, egyenlete $y=2-3x$, és $y \geq 0$.



Egyenletével megadott alakzat

5. Rajta van-e a P pont a következő egyenlettel megadott alakzaton?

a) $x^2 - xy = 2^x$ és $P\left(3;\frac{1}{3}\right)$; b) $y = x^3 - x$ és $P(2;6)$;

c) $\sqrt{y - x^2} = x - 4$ és $P(2;8)$.

Megoldás:

a) Rajta van, mert a $\left(3;\frac{1}{3}\right)$ számpár megoldása az egyenletnek: $3^2 - 3\cdot\frac{1}{3} = 2^3$.

b) Rajta van, mert a $(2;6)$ számpár tagjait behelyettesítve az egyenletbe, fennáll az egyenlőség: $6 = 2^3 - 2$.

c) Nincs rajta az alakzaton, mert a $(2;8)$ számpár nem megoldása az egyenletnek: $\sqrt{8-4} \neq 2-4$.

Indokolhatjuk úgy is, hogy az egyenlet bal oldalán álló kifejezés, ha értelmezve van, az értéke nemnegatív, így a vele egyenlő jobb oldali kifejezés értéke is csak nemnegatív lehet. Mivel $x = 2$ esetén a jobb oldal negatív értékű, tehát a $(2;8)$ számpár nem megoldása az egyenletnek.

6. Van-e az y tengelyen pontja a következő egyenlettel megadott alakzatnak? Ha igen, add meg a pontot a koordinátáival!

a) $3x - 2(y + 3x) = 4$; b) $y^2 + y(x-1) = x^2 + 2$.

Megoldás: Mindkét esetben az a kérdés, hogy van-e olyan y szám, amelyre a $(0;y)$ számpár megoldása az egyenletnek.

a) $-2y = 4$, azaz $y = -2$. Tehát az alakzat $(0;-2)$ koordinátájú pontja illeszkedik az y tengelyre.

b) $y^2 - y - 2 = 0$ egyenlet megoldásai: (-1) és 2. Az alakzatnak két pontja van az y tengelyen: $(0;-1)$ és a $(0;2)$.

7. A következő egyenlettel megadott alakzatnak van-e pontja az x tengelyen? Ha igen, add meg a pontot koordinátáival!

a) $3x - 2(y + 3x) = 4$; b) $(1-x)\cos y = x^2 + y^2 - 1$.

Megoldás: Itt az a kérdés, hogy van-e olyan x szám, amelyre az $(x;0)$ számpár megoldása az egyenletnek.

a) $-3x = 4$ egyenletből $x = -\frac{4}{3}$ adódik. Tehát az alakzat $\left(-\frac{4}{3};0\right)$ koordinátájú pontja illeszkedik az x tengelyre.

b) Az $1 - x = x^2 - 1$, azaz $x^2 + x - 2 = 0$ egyenlet megoldásai: (-2) és 1. Az alakzatnak két pontja van az x tengelyen: $(-2;0)$ és az $(1;0)$.

II. ITT IS, OTT IS EGYENES

1. Válaszd ki a megadott vektorok közül azokat, amelyek normálvektorai az egyenletével megadott *e*, *f*, illetve *g* egyenesnek! Döntésedet indokold!

$\mathbf{a}(1{,}2)$ $\mathbf{b}(4{,}-2)$ $\mathbf{c}(-2{,}1)$ $\mathbf{d}(-1{,}2)$ $\mathbf{h}(-2{,}-4)$ $\mathbf{k}(2{,}1)$ $\mathbf{p}(0{,}2\,;-0{,}1)$ $\mathbf{q}(2\pi;\pi)$

e: $y=\frac{4x-1}{2}$; *f*: $\frac{x-1}{2}=\frac{5-3y}{3}$; *g*: $6(1-x)-3(y+4)=0$.

Megoldás:

$$e:\quad y=\frac{4x-1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 4x-2y=1.$$

Az *e* egyenes normálvektorai: **b**(4; –2), **c**(–2; 1) és **p**(0,2; –0,1).

$$f:\quad \frac{x-1}{2}=\frac{5-3y}{3}\quad\Leftrightarrow\quad 3x+6y=13.$$

Az *f* egyenes normálvektorai: **a**(1; 2) és **h**(–2; –4).

$$6(1-x)-3(y+4)=0\quad\Leftrightarrow\quad 2x+y=-2$$

A *g* egyenes normálvektorai: **k**(2; 1) és $\mathbf{q}(2\pi;\pi)$.

2. Mennyi az $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3$ egyenletű egyenes meredeksége?

Megoldás: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3\ \Leftrightarrow\ y=-\frac{2}{3}x+6$. Az egyenes meredeksége: $-\frac{2}{3}$.

3. Döntsd el, hogy igazak-e az alábbi állítások! Döntésedet indokold!

a) Az *ABC* háromszög *C* csúcspontján átmenő magasságvonalának egyenlete $4x-2y=-3$, ha $A(1;7)$, $B(-1;8)$ és $C(5;-9)$.

b) Az *ABC* háromszög egyik oldalának felezőpontja $K(5;-2)$, ha $A(6;3)$, $B(1;5)$ és $C(4;-7)$?

c) Az $y=2x-4$ és $3y+6x=-4$ egyenletek egy paralelogramma szemközti oldalegyeneseinek egyenletei.

d) Az *ABC* háromszög egyik oldalegyenesének egyenlete $2x-7y=4$, ha $A(3;-1)$, $B(2;0)$ és $C(-4;-3)$.

e) Az *ABC* háromszög egyik oldalfelező merőlegesének egyenlete $5x-6y=-113$, ha $A(-100;5)$, $B(2;73)$ és $C(62;1)$.

A harmadik feladat első négy állításának igazságtartalmát eldöntheti a tanuló rajz alapján is. Már ekkor hangsúlyozzuk, hogy érdemes olyan módszert keresni, amely során nem szükséges a koordinátasíkon ábrát készíteni. Ilyen módszer keresésére ösztönözhet a feladat e) állítása.

Megoldás:

a) Nem igaz, mert ugyan az adott egyenes egyik normálvektora az $\overrightarrow{AB}(-2;1)$ vektor, de a C pont nincs rajta az egyenesen.

b) Igaz, az AC oldal felezőpontja.

c) Nem igaz, mert az $y = 2x - 4$ egyenletű egyenes meredeksége 2, a másik egyenesé pedig (-2).

d) Nem igaz, mert a három csúcspont közül, csak a B pont van rajta az adott egyenesen.

Másik indoklás: Az ABC háromszög oldalvektorai: $\overrightarrow{AB}(-1;1)$, $\overrightarrow{AC}(-7;-2)$ és $\overrightarrow{BC}(-6;-3)$.

Az $\overrightarrow{AC}(-7;-2)$ vektor merőleges az $\mathbf{n}(2;-7)$ vektorra, tehát az AC egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(2;-7)$. De sem az A, sem a C pont nincs az adott egyenesen.

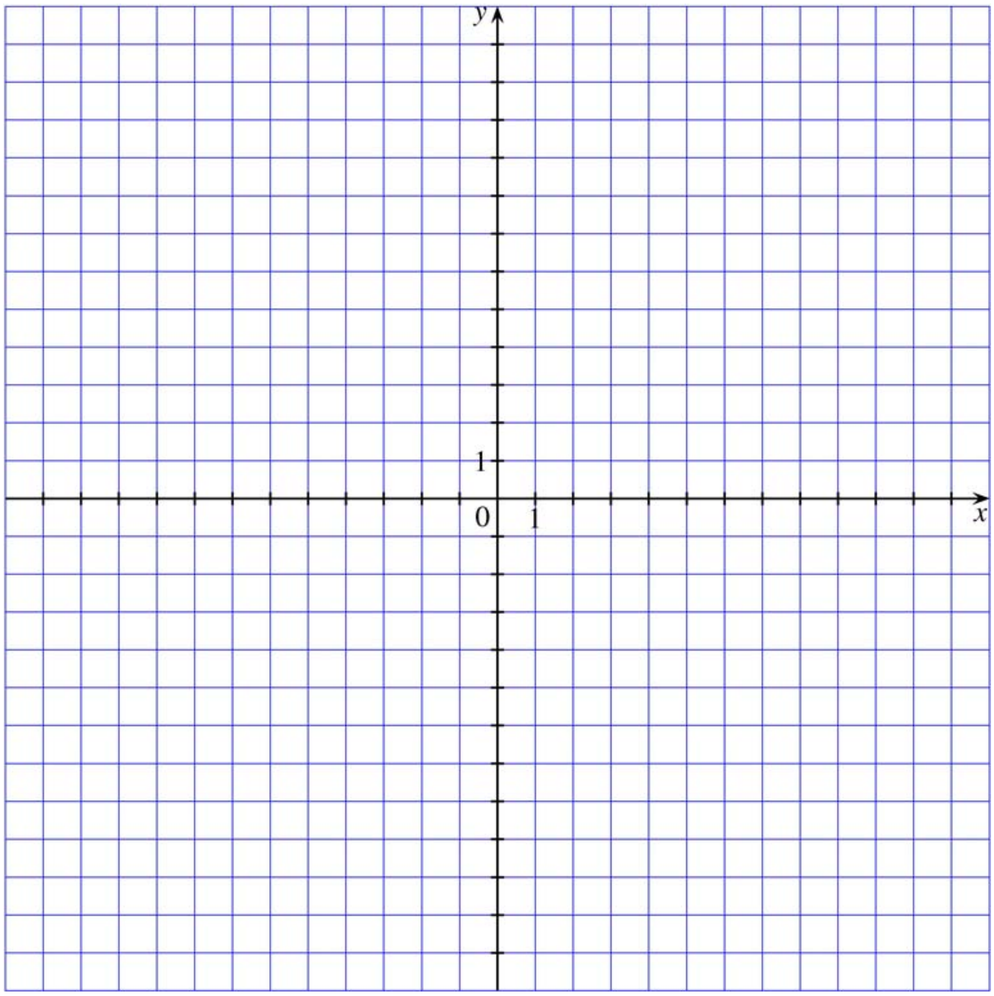
e) Nem igaz. A háromszög oldalfelező pontjai: $F_{AB}(-49;39)$, $F_{AC}(-19;3)$ és $F_{BC}(32;37)$. E pontok közül az $F_{AC}(-19;3)$ pont van rajta a megadott egyenesen. Így az $5x - 6y = -113$ egyenletű egyenes csak az AC oldal felezőmerőlegese lehet.

De az adott egyenesnek az egyik normálvektora $\mathbf{n}(5;-6)$, míg az $\overrightarrow{AC}(162;-4)$, ami nem párhuzamos az n vektorral, tehát nem tartozhat az egyenes normálvektorai közé. Ez azt jelenti, hogy az adott egyenletű egyenes nem merőleges az AC oldalegyenesre, tehát nem lehet ennek az oldalnak a felezőmerőlegese.

4. Egy rombusz átlóinak metszéspontja: $K(-3;2)$; egyik csúcspontja $A(2;4)$.

a) Ennyi adatból a rombusz milyen további adatai határozhatók meg egyértelműen?

b) Eláruljuk a rombusz A csúcsán átmenő egyik oldalegyenesének egy pontját is: $P(11;-4)$. Mekkora a rombusz területe?



Megoldás:

a) Meghatározható az *ABCD* csúcsú rombusz:

- adott *A* csúcsával szemközti C csúcspontjának koordinátái: $C(-8;0)$.
- *AC* átlóegyenesének egyenlete: $2x-5y=-16$.
- *BD* átlóegyenesének egyenlete. $5x+2y=-11$.
- *AC* átlójának hossza: $\sqrt{116}$.

Módszertani megjegyzés: Az összetettebb számításokat igénylő feladatokban –mint itt is– a számítások elvégzése előtt célszerű megtervezni a megoldáshoz vezető számítások sorrendjét. Ezt mutatjuk be a következőkben.

b) Terv: 1. Az *AP* egyenes egyenlete.

2. A *BD* és az *AP* egyenesek metszéspontja (*B*).

3. A *B* tükrözése *K*-ra (*D*).

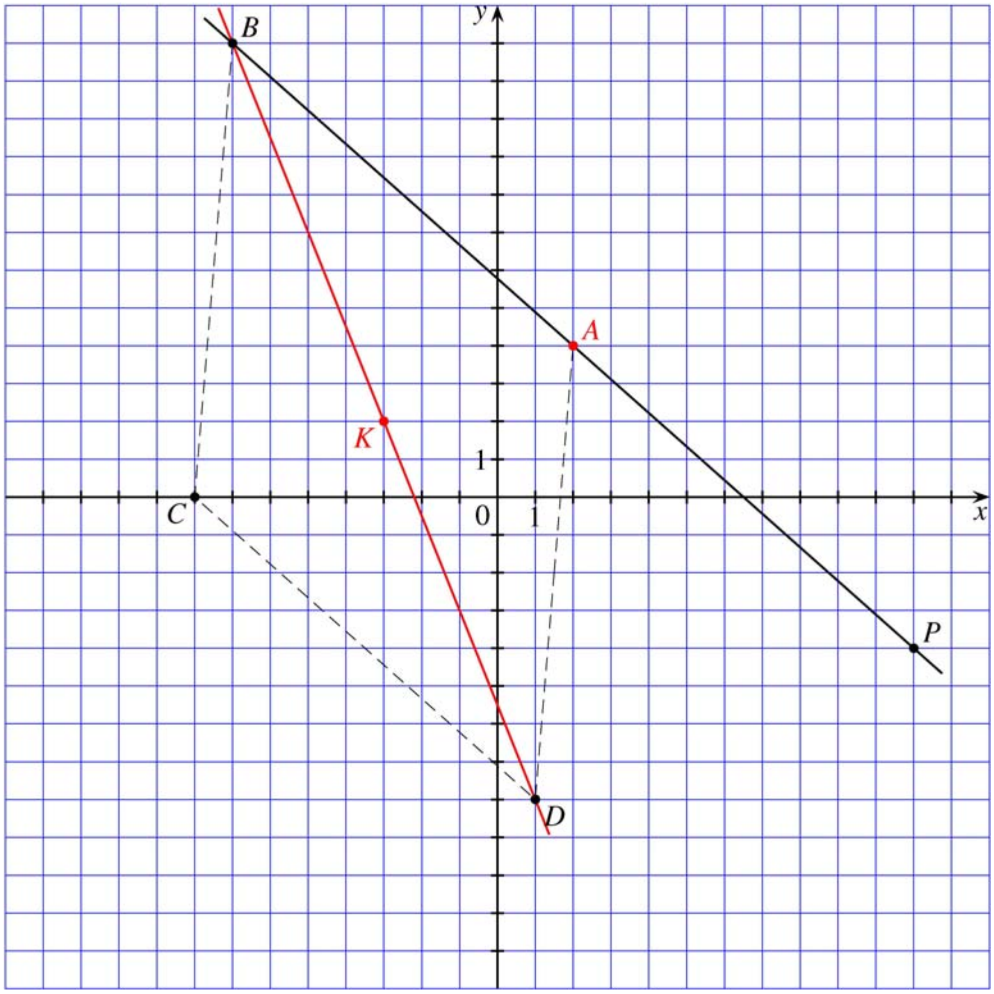
Számítások:

Az *AP* oldalegyenes egyenlete: $8x+9y=52$. A *BD* átlóegyenes és az *AP* oldalegyenes metszéspontja a rombusz csúcsa.

$$\left.\begin{aligned} 5x+2y&=-11 \\ 8x+9y&=52 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x=-7$ és $y=12$. A rombusz harmadik csúcspontja: $(-7;12)$. Ezt a pontot a K pontra tükrözve az $(1;-8)$ koordinátájú pontot kapjuk.

A rombusz csúcsai (szokásos jelölések mellett): $A(2;4)$, $B(-7;12)$, $C(-8;0)$ és $D(1;-8)$.



A rombusz területe: $T=2\cdot\dfrac{AC\cdot BK}{2}=116$ területegység.

5. Tükrözd az x tengelyre és az y tengelyre is a) a $P(3;-2)$ pontot;

b) az AB szakaszt, ha $A(2;-1)$ és $B(6;2)$; c) az $y=2x+3$ egyenletű e egyenest;

d) a $4x+3y=8$ egyenletű f egyenest!

Írd fel az e, illetve f egyenes tükörképeinek egyenletét!

Az AB szakasz egyenlete: $3x-4y=10$, ahol $2\le x\le 6$. Írd fel az AB szakasz tükörképeinek egyenletét!

A szakasz tükrözése egy lehetséges eljárást kínál az egyenes esetében a tükörkép egyenletének meghatározására. (Az egyenes két választott pontjának tükrözése.)

Jó képességű, érdeklődő csoport esetében a következő két gondolatmenetre is rávezethetjük a tanulókat.

1) A tengelyes tükrözés szögtartó és távolságtartó. Mivel az *f* egyenes iránytangense $\left(-\frac{4}{3}\right)$, az *x* tengelyre tükrözött képének (f’) iránytangense $\frac{4}{3}$ lesz. Az *f* egyenes *y* tengelyen lévő pontja $\left(0;\frac{8}{3}\right)$, így ennek tükörképe, a $\left(0;-\frac{8}{3}\right)$ pont rajta lesz az f’ egyenesen. Tehát a tükörkép egyenlete: $y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$, azaz $4x-3y=8$.

2) Tetszőleges $K(x_\circ;y_\circ)$ pont *x* tengelyre vonatkozó tükörképe: $K_1(x_\circ;-y_\circ)$. Ha a K pont rajta van a $4x+3y=8$ egyenletű *f* egyenesen, akkor $4x_\circ+3y_\circ=8$, azaz $y_\circ=-\frac{4}{3}x_\circ+\frac{8}{3}$.

Tehát a *K* pont koordinátái: $K\left(x_\circ;-\frac{4}{3}x_\circ+\frac{8}{3}\right)$. A **K** tükörképének, K_1-nek a koordinátái: $K_1\left(x_\circ;\frac{4}{3}x_\circ-\frac{8}{3}\right)$. A K_1 tehát egy olyan egyenes pontja, amelynek egyenlete: $y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$, azaz $4x-3y=8$.

Megoldás:

Az alakzat	*x* tengelyre tükrözött képe (illetve egyenlete)	*y* tengelyre tükrözött képe (illetve egyenlete)
$P(3;-2)$	$P_1(3;2)$	$P_2(-3;-2)$
$\overline{AB}$	$3x+4y=10,\ 2\le x\le 6$	$3x+4y=-10,\ -6\le x\le -2$
e	$y=-2x-3$	$y=-2x+3$
f	$4x-3y=8$	$4x-3y=-8$

6. Told el a $3x-4y+8=0$ egyenletű *e* egyenest a) a $\mathbf{k}(3;2)$ vektorral;

b) a $\mathbf{p}(8;6)$ vektorral; c) az e egyenesre merőlegesen 6 egységgel!

Írd fel az eltolással kapott alakzat egyenletét!

Megoldás:

a) $P(0;2) \in e$. Mivel $\overrightarrow{OP} + \mathbf{k} = \overrightarrow{OP_1}$, ahol P_1 a P pont képe, ezért $P_1(3;4)$. Az egyenes eltolásával kapott egyenes párhuzamos (vagy egybeeső) az eredeti egyenessel, így az e egyenes eltolásával kapott egyenes egyenlete: $3x - 4y = -7$.

b) Mivel a $\mathbf{p}(8;6)$ vektor az e egyenes egyik irányvektora, az eltolással kapott egyenes az e egyenes.

Ha a tanulók megismétlik az a) feladatban már bevált eljárást, akkor a kapott egyenletből jöhetnek rá, hogy az eltolást megadó vektor párhuzamos az e egyenessel.

c) Az eltolást két, ellentétes irányban hajthatjuk végre.

Az e egyenes egyik normálvektora: $\mathbf{n}_e(3;-4)$. Ennek a vektornak a hossza 5 egység.

A $\frac{6}{5}\mathbf{n}_e$ vektor párhuzamos és egyirányú az $\mathbf{n}_e$ vektorral, a hossza pedig 6 egységnyi. Ez lesz az eltolást megadó egyik vektor. A másik ennek ellentettje.

Az eltolások vektorai: $\frac{6}{5}\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_1\left(\frac{18}{5};-\frac{24}{5}\right)$, illetve $-\frac{6}{5}\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_2\left(-\frac{18}{5};\frac{24}{5}\right)$.

Az e egyenes $\mathbf{n}_1$ vektorral eltolt képének egyenlete: $3x - 4y = -22$.

Az e egyenes $\mathbf{n}_2$ vektorral eltolt képének egyenlete: $3x - 4y = -38$.

III. „DOLGOZNI CSAK PONTOSAN, SZÉPEN…”

Ezen a foglalkozáson lehetőséget nyújtunk az önálló tanulói munkára. A teszt megoldásával minden tanuló felmérheti, hogy jól ismeri-e az eddig tanult koordinátageometriai alapfogalmakat. A foglalkozás három részből áll. Az első 25 percben a tanulók önállóan megoldják a 8 kérdésből álló tesztet. Ezután következik a csoport tagjainak bevonásával a feladatok megoldásának megbeszélése. A tanulók maguk javítják és értékelik a munkájukat. Miután minden tanuló kiszámította, hogy hány pontot ért el, a foglalkozás végén néhány kombinatorikai probléma megoldására is sor kerülhet. (Használjuk ki a teszt értékelése adta lehetőséget. Pl. Kérdezzük meg, hogy hányféle pontszám érhető el a teszt kitöltésével? (42-féle: lásd tanári melléklet) Hányféle különbözőképpen kitöltött teszt eredménye lehet 15 pont? (3 db 6 pontos, 3 rossz válasz és 2-re nem ad választ. Ez $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}=560$-féle kitöltött tesztet jelent.)

Tapasztalat szerint a koordinátageometriai feladatok megoldása időigényes a tanulók számára. Ez is indokolja, hogy csak 8 kérdés szerepel a tesztben. Ha van olyan tanuló, aki a többieknél jóval rövidebb idő alatt megoldotta a tesztet, oldassuk meg vele a tanári mellékletben megadott *Jutalom* tesztet. Ilyenkor természetesen előfordulhat, hogy a tanuló gyorsan dolgozott, de nagyon felületesen. Ezért a tanulói teljesítménybe ne számítsuk be a jutalom teszt megoldására kapható pontokat!

A teszt kérdéseinek jó része a koordinátasíkon felrajzolt helyes ábra segítségével is megoldható. Ilyen esetben a teszt kitöltése nem töltötte be a neki szánt szerepet, de annyi azért ekkor is kiderül, hogy a tanuló fel tud-e rajzolni bármilyen, egyenletével megadott egyenest, és jól kezeli-e a vektorokat. A megoldások megbeszélésekor az ilyen megoldást is dicsérjük meg, de feltétlen osszuk meg a tanulókkal a következő gondolatokat:

A tanulási folyamatban, feladatokon keresztül különböző módszereket ismerünk meg. Ezek a módszerek akkor hasznosak, ha az adatoktól függetlenül is alkalmazhatók. Az ábra alapján leolvasott megoldás is egy módszer, de nyilvánvalóan nem alkalmazható minden, a feladathoz hasonló esetben. (Pl. Túl nagy, vagy túl kicsi számadatok esetén. A rajz szükségszerű pontatlansága miatt (derékszög megállapítása, vagy annak eldöntése, hogy egy pont rajta van-e egy egyenesen.) Igyekezzünk tehát olyan módszert alkalmazni, amelyik bármilyen hasonló probléma megoldásakor is célra vezető.

Ennek megbeszélése után a feladatok megoldásában mindig hangsúlyozzuk ki az éppen alkalmazott módszert. Ha többféle módszerrel is megoldható a probléma, és a tanulók egyike sem alkalmazott másféle módszert, akkor próbáljuk őket rávezetni az alkalmazható másik módszerre.

Tanári melléklet

A teszt megoldásával elérhető pontszámok:

Jó	Nincs	Rossz	Pontszám	A különbözők:
8	0	0	48	1
7	1	0	42	
7	0	1	41	2
6	2	0	36	
6	1	1	35	
6	0	2	34	3
5	3	0	30	
5	2	1	29	
5	1	2	28	
5	0	3	27	4
4	4	0	24	
4	3	1	23	
4	2	2	22	
4	1	3	21	
4	0	4	20	5
3	5	0	18	
3	4	1	17	
3	3	2	16	
3	2	3	15	
3	1	4	14	
3	0	5	13	6
2	6	0	12	
2	5	1	11	
2	4	2	10	
2	3	3	9	
2	2	4	8	
2	1	5	7	
2	0	6	**6**	7

1	7	0	**6**	
1	6	1	5	
1	5	2	4	
1	4	3	3	
1	3	4	2	
1	2	5	1	
1	1	6	**0**	
1	0	7	**-1**	8
0	8	0	**0**	
0	7	1	**-1**	
0	6	2	– 2	
0	5	3	– 3	
0	4	4	– 4	
0	3	5	– 5	
0	2	6	– 6	
0	1	7	– 7	
0	0	8	– 8	9
Össz.:				**45 – 3 =42**

Teszt

Az alábbi feladatok mindegyikére megadott négy válasz közül pontosan egy helyes.
A helyesnek vélt válasz betűjelét karikázd be! Minden helyes válaszra 6 pont kapható. Helytelen válasz 1 pont levonással jár. Ha egy kérdésre nem jelölsz meg választ, arra a feladatra nulla pontot kapsz.

1. Az $e: 2y-3x=1$, $f: 4x-6y=3$ és $g: y=-\frac{3}{2}x+5$ egyenletű egyenesek közül melyiknek normálvektora a $\mathbf{n}(39;-26)$ vektor?

A: g **B:** e **C:** f **D:** Egyiknek sem

2. Ha az A pont helyvektora $\mathbf{a}(2;-3)$, a B pont helyvektora $\mathbf{b}(-2;1)$, akkor az $\overrightarrow{AB}$ vektor párhuzamos és egyirányú a $\mathbf{k}$ vektorral.

A: $\mathbf{k}(1;-1)$ **B:** $\mathbf{k}(1;1)$ **C:** $\mathbf{k}(-4;4)$ **D:** $\mathbf{k}(0;-2)$

3. Melyik pontban metszi az x tengelyt a $2x+y=4$ egyenletű egyenes?

A: $(0;2)$ **B:** $(0;4)$ **C:** $(4;0)$ **D:** $(2;0)$

4. Az $A(1;7)$, $B(-1;8)$ és $C(5;-9)$ háromszög melyik magasságvonalának egyenlete a $4x-2y=28$?

A: Az AC egyenesre merőlegesnek. **B**: Az AB egyenesre merőlegesnek.
C: A BC egyenesre merőlegesnek. **D:** Egyiknek sem.

5. Az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszög derékszögének csúcsa C. Az A csúcs helyvektora $\mathbf{a}(-2;6)$, a C csúcs helyvektora $\mathbf{c}(1;2)$. B csúcs helyvektorának koordinátái:

A: $(4;3)$ vagy $(-4;-3)$ **B:** $(5;5)$ vagy $(-3;-1)$ **C:** $(4;3)$ vagy $(2;1)$ **D:** $(5;5)$

6. Az $x-4y+8=0$ egyenletű és az $y=-\frac{2}{3}x+\frac{17}{3}$ egyenletű egyenes metszéspontja rajta van az e egyenesen.

A: e: $x=3$ **B:** e: $y=\frac{3}{4}x$ **C:** e: $x=\frac{3}{4}y$ **D:** e: $2x-3y=1$

7. Egy ABC háromszög súlypontja $S(4;3)$, két csúcsa pedig $B(9;5)$ és $C(2;7)$. A háromszög A csúcsának koordinátái:

A: $(-3;-6)$ **B:** $(5;0)$ **C:** $(1;-4)$ **D:** $(1;-3)$

8. Az ABC derékszögű háromszög derékszögének csúcsa $C(-1;6)$. A háromszög egy másik csúcsa $A(-4;2)$. Melyik egyenlet <u>nem lehet</u> a háromszög átfogó egyenesének egyenlete?

A: $3x+4y+4=0$ **B:** $x=-4$ **C:** $2x-7y+22=0$ **D:** $3x-4y=-20$

Jutalomteszt

1. A k , n számok mely értéke esetén igaz, hogy az $y = x^2 + kx + n$ egyenletű alakzat áthalad a $(-1;9)$ és $(2;3)$ koordinátájú pontokon?

A: $k = -1$ és $n = 7$ **B:** $k = -3$ és $n = 5$ **C:** $k = -2$ és $n = 3$

D: Egyik eddigi válasz sem helyes.

2. Mit alkotnak a koordinátasík azon pontjai, amelyeknek $(x;y)$ koordinátáira: $x = \sqrt{8 - x^2}$?

A: Két pontot. **B:** Két, egymással párhuzamos egyenest.

C: Egy egyenest. **D:** A többi válasz mindegyike hibás.

3. Egy négyzet két oldalegyenesének egyenlete: *e:* $x - 3y = -9$ és f : $x - 3y = -19$. Hány területegység ennek a négyzetnek a területe?

A: 100 **B:** 10 **C:** Ennyi adatból nem határozható meg. **D:** 9

4. Milyen alakzat egyenlete: $4y^2 - (x + y - 1)^2 = 0$?

A: Két egyenes, melyek egyenlete: $y = x - 1$, illetve $x + 3y = 1$

B: Egy egyenes, melynek meredeksége 1, egy pontja (2;1).

C: Két egyenes, melyek egyenlete: $3y - x = 1$, illetve $x + 3y = 1$

D: Egy egyenes, melynek egyik normálvektora (1;3), egy pontja (1;0).

A teszt feladatainak megoldása

1. Az $e: 2y-3x=1$, $f: 4x-6y=3$ és $g: y=-\frac{3}{2}x+5$ egyenletű egyenesek közül melyiknek normálvektora a $\mathbf{n}(39;–26)$ vektor?

A: g **<u>B</u>:** e **C:** f **D:** Egyiknek sem

Ugyanis $\mathbf{n}(39;–26)=13\cdot\mathbf{n}_1(3;–2)$

2. Ha az A pont helyvektora $\mathbf{a}(2;–3)$, a B pont helyvektora $\mathbf{b}(-2;1)$, akkor az $\overrightarrow{AB}$ vektor párhuzamos és egyirányú a $\mathbf{k}$ vektorral.

A: $\mathbf{k}(1;-1)$ **B:** $\mathbf{k}(1;1)$ **<u>C</u>:** $\mathbf{k}(-4;4)$ **D:** $\mathbf{k}(0;–2)$

Mivel $\overrightarrow{AB}(-4;4)$, és minden vektor párhuzamos (és egyirányú) önmagával, hiszen van két olyan reprezentánsuk, amelyek tartóegyenese párhuzamos egymással.

3. Melyik pontban metszi az x tengelyt a $2x+y=4$ egyenletű egyenes?

A: $(0;2)$ **B:** $(0;4)$ **C:** $(4;0)$ **<u>D</u>:** $(2;0)$

4. Az $A(1;7)$, $B(-1;8)$ és $C(5;–9)$ háromszög melyik magasságvonalának egyenlete a $4x-2y=28$?

A: Az AC egyenesre merőlegesnek. **<u>B</u>**: Az AB egyenesre merőlegesnek.
C: A BC egyenesre merőlegesnek. **D:** Egyiknek sem.

Csak a C pont van rajta az adott egyenesen. Mivel $\overrightarrow{AB}(-2;1)$, így ez a vektor az egyenes egyik normálvektora, tehát az egyenes merőleges az AB oldalegyenesre.

5. Az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszög derékszögének csúcsa C. Az A csúcs helyvektora $\mathbf{a}(-2;6)$, a C csúcs helyvektora $\mathbf{c}(1;2)$. B csúcs helyvektorának koordinátái:

A: $(4;3)$ vagy $(-4;-3)$ **<u>B</u>:** $(5;5)$ vagy $(-3;-1)$ **C:** $(4;3)$ vagy $(2;1)$ **D:** $(5;5)$

A következő módszer nem vezet célhoz: Az AC egyenesre merőleges, C ponton átmenő egyenes egyenlete: $3x-4y=-5$. Ezen az egyenesen a **B** és a **C** válaszban megadott pontok is rajta vannak, így ebből még nem állapítható meg egyértelműen a válasz. (Itt még szükséges lenne a CB szakasz hosszát összehasonlítani az AC szakasz hosszával.)

Célszerű a $\overrightarrow{CA}(-3;4)$ vektor derékszögű elforgatottjainak segítségével megoldani a feladatot.

6. Az $x-4y+8=0$ egyenletű és az $y=-\frac{2}{3}x+\frac{17}{3}$ egyenletű egyenes metszéspontja rajta van az e egyenesen.

A: $e\colon\ x=3$ **<u>B</u>:** $e\colon\ y=\frac{3}{4}x$ **C:** $e\colon\ x=\frac{3}{4}y$ **D:** $e\colon\ 2x-3y=1$

Az adott két egyenes metszéspontja a $(4;3)$ *koordinátájú pont.*

7. Egy *ABC* háromszög súlypontja $S(4;3)$, két csúcsa pedig $B(9;5)$ és $C(2;7)$. A háromszög *A* csúcsának koordinátái:

A: $(-3;-6)$ **B:** $(5;0)$ **C:** $(1;-4)$ **<u>D</u>:** $(1;-3)$

8. Az *ABC* derékszögű háromszög derékszögének csúcsa $C(-1;6)$. A háromszög egy másik csúcsa $A(-4;2)$. Melyik egyenlet <u>nem lehet</u> a háromszög átfogó egyenesének egyenlete?

<u>A</u>: $3x+4y+4=0$ **B:** $x=-4$ **C:** $2x-7y+22=0$ **D:** $3x-4y=-20$

Az $\overrightarrow{AC}(3;4)$, így ez a vektor az **A** válaszban megadott egyenes egyik normálvektora, tehát ez az egyenes merőleges az *AC* oldalra, azért nem lehet a háromszög átfogó egyenese. A többi egyenes egyike sem merőleges vagy párhuzamos az *AC* oldallal.

A jutalomteszt feladatainak megoldása

1. A k, n számok mely értéke esetén igaz, hogy az $y = x^2 + kx + n$ egyenletű alakzat áthalad a $(-1;9)$ és $(2;3)$ koordinátájú pontokon?

A: $k = -1$ és $n = 7$ **B:** $k = -3$ és $n = 5$ **C:** $k = -2$ és $n = 3$

D: Egyik eddigi válasz sem helyes.

Ugyanis a $\left.\begin{aligned} 9 &= 1 - k + n \\ 3 &= 4 + 2k + n \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $k = -3$ és $n = 5$.

2. Mit alkotnak a koordinátasík azon pontjai, amelyeknek $(x; y)$ koordinátáira: $x = \sqrt{8 - x^2}$?

A: Két pontot. **B:** Két, egymással párhuzamos egyenest.

C: Egy egyenest. **D:** A többi válasz mindegyike hibás.

Az y tetszőleges valós számot jelölhet. Az x csak olyan szám lehet, amelyre $0 \le x \le \sqrt{8}$. Ekkor $x = \sqrt{8 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4$. Ennek egyetlen nemnegatív megoldása: $x = 2$.

3. Egy négyzet két oldalegyenesének egyenlete: *e:* $x - 3y = -9$ és f: $x - 3y = -19$. Hány területegység ennek a négyzetnek a területe?

A: 100 **B:** 10 **C:** Ennyi adatból nem határozható meg. **D:** 9

A két egyenes párhuzamos egymással. Az *e* egyenesnek egy pontja a $P(0;3)$. Ebben a pontban állított, *e* egyenesre merőleges *g* egyenes egyenlete: $3x + y = 3$.

Az $\left.\begin{aligned} x - 3y &= -19 \\ 3x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása a $(-1;6)$ számpár. A g és f egyenes metszéspontja: $Q(-1;6)$. A PQ szakasz a négyzet oldala, ennek hossza $\sqrt{10}$. A négyzet területe 10 területegység.

4. Milyen alakzat egyenlete: $4y^2 - (x + y - 1)^2 = 0$?

A: Két egyenes, melyek egyenlete: $y = x - 1$, illetve $x + 3y = 1$

B: Egy egyenes, melynek meredeksége 1, egy pontja (2;1).

C: Két egyenes, melyek egyenlete: $3y - x = 1$, illetve $x + 3y = 1$

D: Egy egyenes, melynek egyik normálvektora (1;3), egy pontja (1;0).

$4y^2 - (x + y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2y - x - y + 1)(2y + x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y - x + 1)(3y + x - 1) = 0$.

Az egyenlet megoldása minden olyan $(x; y)$ számpár, amelyre az $y - x + 1 = 0$ és $3y + x - 1 = 0$ egyenletek közül legalább az egyik teljesül.