MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

5. modul
Arra, annyival!

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A vektor fogalmának, a vektorokkal végzett műveletek elmélyítése.
Időkeret	2 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika Szűkebb környezetben: Eltolás, koordinátageometria Ajánlott megelőző tevékenységek: Vektor fogalma, különböző megadási módjai. Műveletek vektorokkal. Ajánlott követő tevékenységek: Koordinátageometriai ismeretek
A képességfejlesztés fókuszai	Rendszerezés, érvelés, bizonyítás, problémaérzékenység, probléma-reprezentáció, ábrázolás, térlátás, prezentáció, kombinativitás, metakogníció

AJÁNLÁS

A vektor fogalmának, és a közöttük értelmezett műveletek ismerete kiemelten fontos, hiszen a tanulók egyéb területen is használják, alkalmazzák azokat. Az első foglalkozás a már régebben tanultak felelevenítését szolgálja, míg a másodikban az új ismeret, a vektorok skaláris szorzata kerül előtérbe. Az alapfeladatokon túl összetettebb feladatokban is lehetőség nyílik az új fogalom alkalmazására.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Merre?**
2. foglalkozás: **Két vektorból egy szám**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény**
I. Merre?			
1	Vektor, mint az eltolást megadó adat.	Rendszerezés, kombinativitás, térlátás, térbeli viszonyok	Feladatlap: 1–3. feladat
2	Vektorok összege és különbsége. Vektor 90^o-os elforgatottjának koordinátái.	Metakogníció, kreativitás, probléma-reprezentáció, induktív következtetés	Feladatlap: 4–7. feladat
II. Két vektorból egy szám			
1	Két vektor skaláris szorzatával kapcsolatos ismeretek felelevenítése feladatokon keresztül.	Metakogníció, kombinativitás	Feladatlap: 1–3. feladat
2	Skaláris szorzat alkalmazása. Nehezebb feladatokon keresztül az ismeret elmélyítése.	Gondolkodási sebesség, metakogníció, értelmes memória, kombinativitás	Feladatlap: 4–7. feladat

I. MERRE?

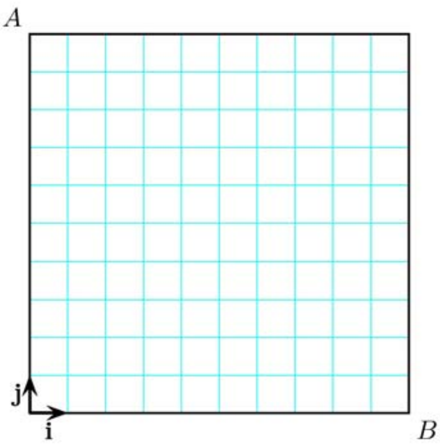
Vektor, mint az eltolást megadó adat

1. Jelölje *A* és *B* egy 10x10-es négyzet két átellenes csúcsát! Told el az *A* pontot egymás után valamilyen sorrendben az alábbi vektorokkal!

$\mathbf{a}(6;-2)$, $\mathbf{b}(-7;-1)$, $\mathbf{c}(0;-8)$, $\mathbf{d}(4;2)$, $\mathbf{e}(-3;1)$, $\mathbf{f}(7;-1)$, $\mathbf{g}(3;-1)$

a) Az eltolásoknak van-e olyan sorrendje, amely az *A* pontot nem a *B* pontba viszi?

b) Megadható-e az eltolásoknak olyan sorrendje, amelyek során az *A* pont nem hagyja el egyszer sem a négyzetlapot?



Megoldás:

a) Mivel a 8 vektor összege a $(10;-10)$ koordinátájú vektor, és az összeadás kommutatív művelet a vektorok körében, ezért a vektorokat bármilyen sorrendben is fűzzük egymás után, az ezzel megadott eltolás minden esetben az A pontot a B pontba viszi.

b) Megadható. Csak arra kell figyelni, hogy a vektorok összegének első tagjától számított bármelyik részösszege olyan vektor legyen, amelynek egyik koordinátájának abszolútértéke sem haladja meg a 10-et. Pl. $\mathbf{a}(6;-2)$, $\mathbf{d}(4;2)$, $\mathbf{c}(0;-8)$, $\mathbf{b}(-7;-1)$, $\mathbf{e}(-3;1)$, $\mathbf{f}(7;-1)$, $\mathbf{g}(3;-1)$.

2. Az *ABCDEFGH* téglatest *A* csúcsából induló élvektorokat jelöljük a következőképpen:

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$.

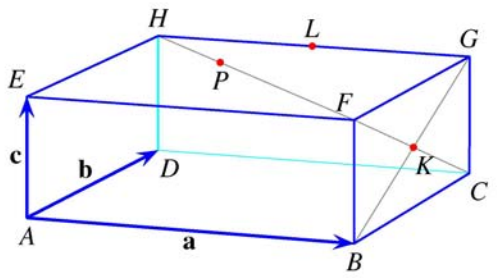
Told el az *A* csúcsot

a) a *BCGF* oldallap *K* középpontjába!

b) a *HG* él *L* felezőpontjába!

c) a *HF* lapátló *H*-hoz közelebbi *P* harmadoló pontjába!

Add meg mindhárom esetben az eltolás vektorát az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal!



Megoldás: (Minden esetben a vektort csak egy lehetséges formában adjuk meg.

a) $\overrightarrow{AK} = \mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$

b) $\overrightarrow{AL} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \dfrac{\mathbf{a}}{2}$

c) Mivel $\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, és $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AF} + 2\cdot\overrightarrow{AH}}{3}$, így

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+2\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{3} = \frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}}{3}.$$

Az eredményünk azt is jelzi, hogy ha a téglatest $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos éleit megduplázzuk, a $\mathbf{c}$ vektorral párhuzamos éleinek hosszát háromszorosára változtatjuk, akkor az eredeti téglatest P pontja az így kapott téglatest A csúcsából induló testátlójának harmadoló pontja lesz.

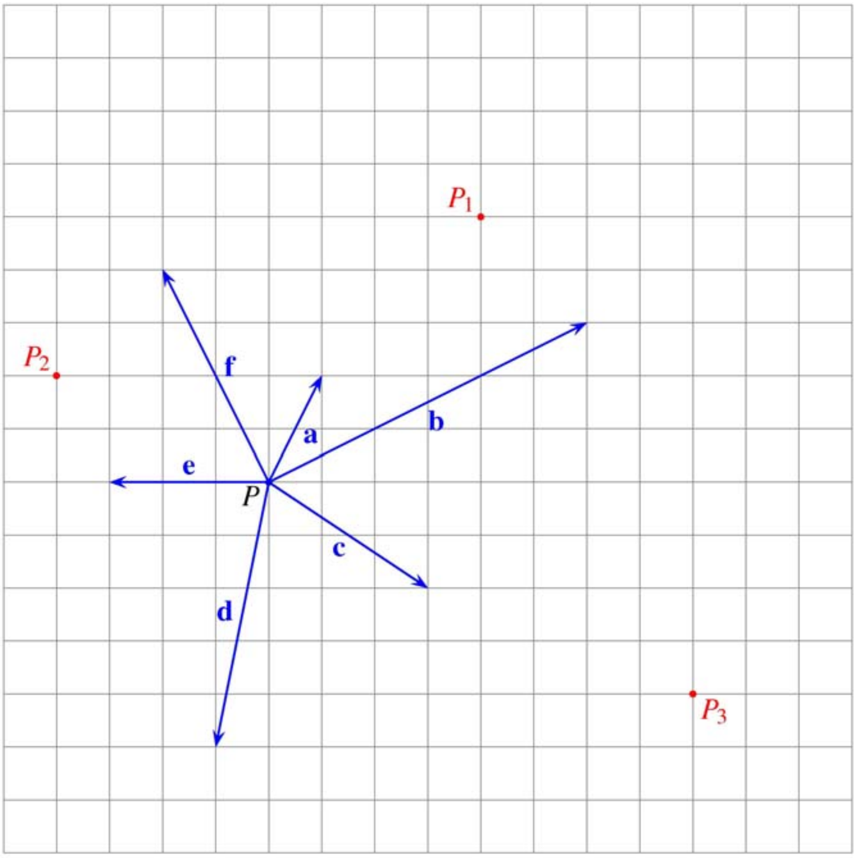
Módszertani megjegyzés: A feladat megbeszélése után – a csoport érdeklődésétől függően - érdemes felvetni a következő kérdést: Jelölje N a téglatest A csúcsából induló testátlójának az EBD háromszög síkját döfő pontját. Vajon igaz-e, hogy az N pont az AG testátló A csúcshoz közelebbi harmadoló pontja? (Mivel $\overrightarrow{AG} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, ezért az A csúcsból az AG testátló A-hoz közelebbi harmadoló pontjába mutató vektor $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$. Viszont az EBD háromszög S súlypontjába mutató vektor: $\overrightarrow{AS} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$. Tehát az S pont az AG testátló A-hoz közelebbi harmadoló pontja. Mivel S az EBD síknak és az AG testátlónak is pontja, ezért azonos N-nel. Mivel nem használtuk ki, hogy a három élvektor páronként merőleges egymásra, ezért a „felfedezésünk" tetszőleges paralelepipedonra igaz.

3. Az ábrán látható hat vektorral megadott eltolások közül választhatunk-e olyanokat (bármelyiket legfeljebb egyszer), amelyek egymás utáni végrehajtása a P pontot

a) a P_1 pontba viszi?

b) a P_2 pontba viszi?

c) a P_3 pontba viszi?



Megoldás:

a) $\overrightarrow{PP_1} = \mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{e}$

b) A megadott vektorokkal nem tolható el a *P* pont a P_2 pontba.

Módszertani megjegyzés: Itt találkozhatnak a tanulók a foglalkozáson először azzal az ötlettel, hogy ne csak rajzban adjuk meg a vektorokat, hanem - a bázisvektorok felvételével - koordinátáikkal is.

Ha a bázisvektorok hosszának (az egységnek) a négyzetháló kis négyzetének oldalhosszát választjuk, és az **i** vektor „vízszintes”, akkor: $\mathbf{a}(1;2)$, $\mathbf{b}(6;3)$, $\mathbf{c}(3;-2)$, $\mathbf{d}(-1;-5)$, $\mathbf{e}(-3;0)$, $\mathbf{f}(-2;4)$. Ekkor $\overrightarrow{PP_2}(-4;2)$. Ennek a vektornak az első koordinátája

(-4) ,és ez csak a $\mathbf{d}+\mathbf{e}$, vagy $\mathbf{a}+\mathbf{e}+\mathbf{f}$ összegvektorok első koordinátájával egyezik meg. Viszont ezek második koordinátája: az első esetben -5, a másodikban 6.

c) $\overrightarrow{PP_3} = \mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$

Műveletek koordinátáival adott vektorokkal

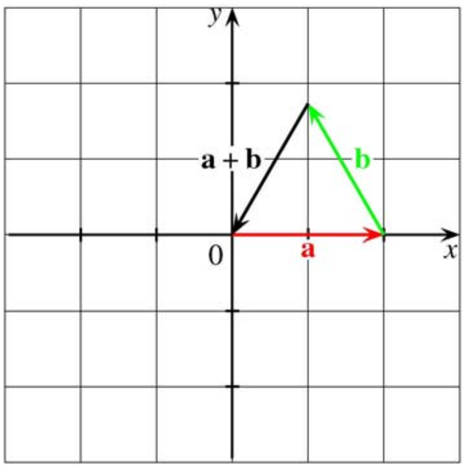
4. Az $\mathbf{a}(2;0)$ vektorhoz adj meg koordinátáival egy olyan $\mathbf{b}$ vektort, amelynek a hossza 2 egység, továbbá **a)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 0$ **b)** $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 0$ **c)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 2$ **d)** $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 2$ **e)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 5$

Megoldás:

a) $\mathbf{b}(-2;0)$

b) $\mathbf{b}(2;0)$

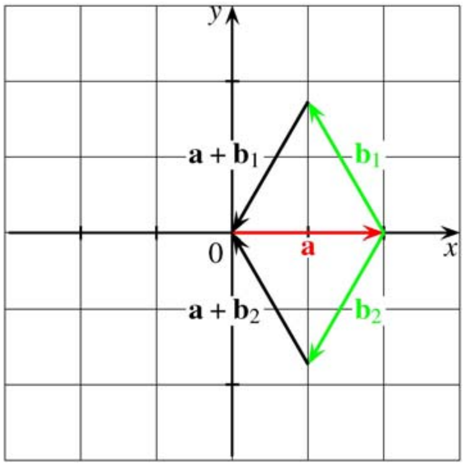
c) $|\,\mathbf{b}\,| = |\,\mathbf{a}\,| = |\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,| = 2$, ezért ha az $\mathbf{a}$ vektor A végpontjából indítjuk a $\mathbf{b}$ vektort, akkor az $\mathbf{a}$ vektor kezdőpontja, az A pont és a $\mathbf{b}$ vektor végpontja egy szabályos háromszöget határoz meg.



A háromszög szabályos, így a $\mathbf{b}$ vektor első koordinátája (-1). A második koordinátája Pitagorasz tételének alkalmazásával számítható ki (a $\mathbf{b}$ vektor második koordinátáját y-nal jelölve) $y^2+1=4$. Ebből $y=\sqrt{3}$ vagy $y=-\sqrt{3}$.

Módszertani megjegyzés: A megoldás a tanulók egy lehetséges gondolatmenetét tükrözi. Az algebrailag kapott eredmény két megoldást sejtet, és ha a gondolatmenet elején nem is jönnek rá, hogy két vektor is eleget tesz a feltételnek, a kapott eredmény segít megtalálni a másik lehetséges vektort.

Két vektor tesz eleget a feltételeknek: $\mathbf{b}_1(-1;\sqrt{3})$ és $\mathbf{b}_2(-1;-\sqrt{3})$.



d) A c) feladat megoldásában látott gondolatmenethez hasonlóból adódik, hogy ennek a feladatnak is 2 megoldása van: $\mathbf{b}_1(1;\sqrt{3})$ és $\mathbf{b}_2(1;-\sqrt{3})$.

e) Két, adott hosszúságú vektor összege akkor a legnagyobb, ha a két vektor párhuzamos és egyirányú. Mivel a keresett **b** vektor hossza is 2 egység, így az összegvektor hosszának legnagyobb értéke 4. Tehát az összegvektor hossza nem lehet 5. Nincs megoldása a feladatnak.

5. Egy hangya sétáját követjük nyomon. Az egyszerűség kedvéért koordinátasíkon adjuk meg a mozgását. Először az origóból a $P_1(6;8)$ pontba mászott el egy egyenes szakasz mentén. Itt a menetirányához képest $+90^\circ$-kal elfordult, és ebben az irányban fele akkora hosszú szakasznyi távolságot ment, mint az előzőben. Így a P_2 pontba jutott. Itt ismét elfordult a menetirányához képest $+90^\circ$-kal, és ebbe az irányba a P_1P_2 szakasz hosszának felével megegyező távolságot megtéve a P_3 pontba jutott. Még egyszer elfordult $+90^\circ$-kal, ismét az előző szakaszban megtett távolság felével egyenes úton haladt, és így a P_4 pontba érkezett.

a) Mennyi utat tett meg összesen a hangya, amíg az origóból a P_4 pontba eljutott?

b) Határozd meg az egyes fordulópontok koordinátáit!

c) A hangya végül kiindulópontjához képest mennyit mozdult el?

Módszertani megjegyzés: A feladatban nincs szó vektorokról, de a szövegben megjelenő „elmozdulás” szó a figyelmünket a vektorok felé irányíthatja. Vegyük fel a koordinátasíkon a bázisvektorokat! (Mivel a koordináta tengelyeken adott az egység, ezzel a bázisvektorok hossza adott. Indítsuk azokat a koordináta-rendszer origójából úgy, hogy az adott pont helyvektorának koordinátái egyezzenek meg a pont koordinátáival.

Megoldás:

a) Mivel $\left|\overrightarrow{OP_1}\right| = 10$, így amíg a P_4 pontba eljutott, összesen $10+5+2{,}5+1{,}25=18{,}75$ egység hosszú utat tett meg.

b) Ha meghatározzuk a fordulópontok helyvektorainak koordinátáit, megtudjuk e pontok koordinátáit is. Ha az $\overrightarrow{OP_1}$ vektort elforgatjuk az O pont körül $+90^\circ$-kal, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektorral párhuzamos, egyirányú és kétszer olyan hosszú vektorhoz jutunk. Mivel az $\overrightarrow{OP_1}$ vektor $+90^\circ$-kal elforgatottjának a koordinátái $(-8;6)$, ezért $\overrightarrow{P_1P_2}(-4;3)$. Az $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}$, így $\overrightarrow{OP_2}(2;11)$. Tehát $P_2(2;11)$. Hasonló eljárással kaphatók meg a többi fordulópont koordinátái is.

$\overrightarrow{P_2P_3}\left(-\frac{3}{2};-2\right)$, így $P_3\left(\frac{1}{2};9\right)$.

$\overrightarrow{P_3P_4}\left(1;-\frac{3}{4}\right)$, ebből adódik, hogy $P_4\left(\frac{3}{2};8\frac{1}{4}\right)$. (A P_4 már nem fordulópont!)

c) A hangya elmozdulása: $\overrightarrow{OP_4}\left(\frac{3}{2};8\frac{1}{4}\right)$.

6. Egy négyzet két szomszédos csúcsa: $A(-1;4)$, $B(5;2)$. Határozd meg a négyzet további két csúcsának (*C* és *D*) koordinátáit!

Módszertani megjegyzés: Ismét célszerű a bázisvektorokat felvenni, és a két adott pont helyvektorát megadni.

Megoldás:

A C csúcshoz eljuthatunk, ha a $\overrightarrow{BA}(-6;2)$ vektort elforgatjuk B pont körül 90°-kal. Ezt két irányba is megtehetjük. A $+90^\circ$-os forgatással a $\overrightarrow{BC_1}(-2;-6)$ vektorhoz, a -90°-

os forgatással a $\overrightarrow{BC_2}\,(2;6)$ vektorhoz jutunk. Így, ebből is észrevehetjük, hogy a feladatnak két megoldása lesz. A C_1 pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{OC_1}(3;-4)$, a C_2 pont helyvektora pedig: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{OC_2}(7;8)$.

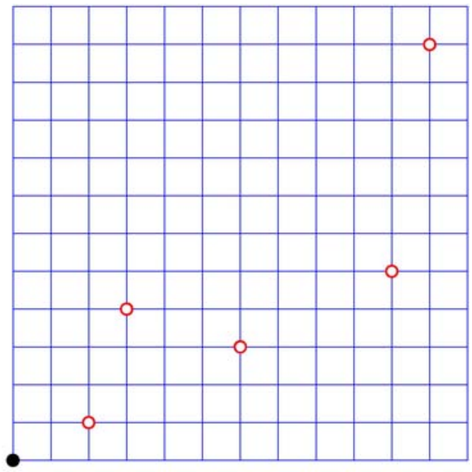
Így $C_1(3;-4)$, illetve $C_2(7;8)$.

A hiányzó negyedik csúcsot vagy az előbbi eljáráshoz hasonló módon, az $\overrightarrow{AB}\,(6;-2)$ vektor A pont körüli elforgatásával kapjuk, vagy úgy, hogy a már meghatározott C_1 (illetve C_2) pont helyvektorához hozzáadjuk a $\overrightarrow{BA}\,(-6;2)$ vektort. Így $D_1(-3;-2)$, illetve $D_2(1;10)$.

Módszertani megjegyzés: A foglalkozás végére egy olyan konstruktív feladatot terveztünk, amelynek megoldása lehetőséget nyújt a szakasz egyik végpontjának és a felezőpontjának ismeretében a szakasz másik végpontjának a meghatározására. Ha marad rá idő, érdemes feleleveníteni, hogy milyen egyenletek megoldásával kaphatjuk meg az ismeretlen végpont koordinátáit.

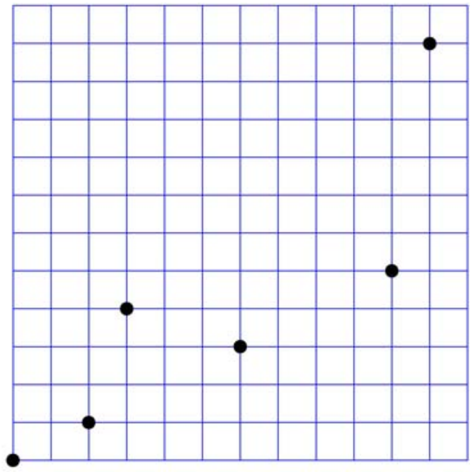
7. Egy, a DÁMA játékhoz hasonló játékot négyzethálós papíron játszanak. Az egyik játékos bábui feketék, a másiké pirosak. A bábuk csak a nagy négyzet oldalán és a belsejében lévő rácspontokon állhatnak, vagy azokra léphetnek. A bábuk a játékmezőből nem léphetnek ki. Az egyik játékos (pl. a fekete bábuval játszó) a másik játékos piros bábuját leveheti, ha a fekete bábuval tud úgy ugrani, hogy a kiindulási pont és az érkezés pont által meghatározott szakasz felezőpontjában van az ellenfél piros bábuja. Innen a fekete bábu tovább is ugorhat, ha az új helyzetben ismét talál egy olyan piros bábut, amelyet az előbb megadott módon át tud ugrani. (Természetesen ugyanilyen szabály szerint veheti le a piros bábus játékos is a másik játékos fekete bábuját.

Az alábbi ábrán látható helyzetben már csak egyetlen fekete bábu van és 5 piros. Most a fekete bábu lépése következik. Találd meg a fekete bábunak azt a lépéssorozatát, amely során minden piros bábut le tud szedni!



Megoldás:

1. lépés: (4;2) pontba
2. lépés: (2;6) pontba
3. lépés: (10;0) pontba
4. lépés: (10;10) pontba
5. lépés: (12;12) pontba



Módszertani megjegyzés: A játék leírását nem fejeztük be. Bíztassuk a tanulókat, hogy a még hiányzó feltételeket ők találják ki! (Pl. Hány bábu legyen az induláskor? Saját bábu hogyan ugorható át?)

A szabályok közé tartozzon az is, hogy ahol már áll bábu, arra a pontra már nem ugorhat más bábu!

II. KÉT VEKTORBÓL EGY SZÁM

Gyűjtsük össze két vektor skaláris szorzatával kapcsolatos ismereteinket!

8. Jelölje $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a bázisvektorokat!

a) Számítsd ki háromféle módon a $(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}$ skaláris szorzatot!

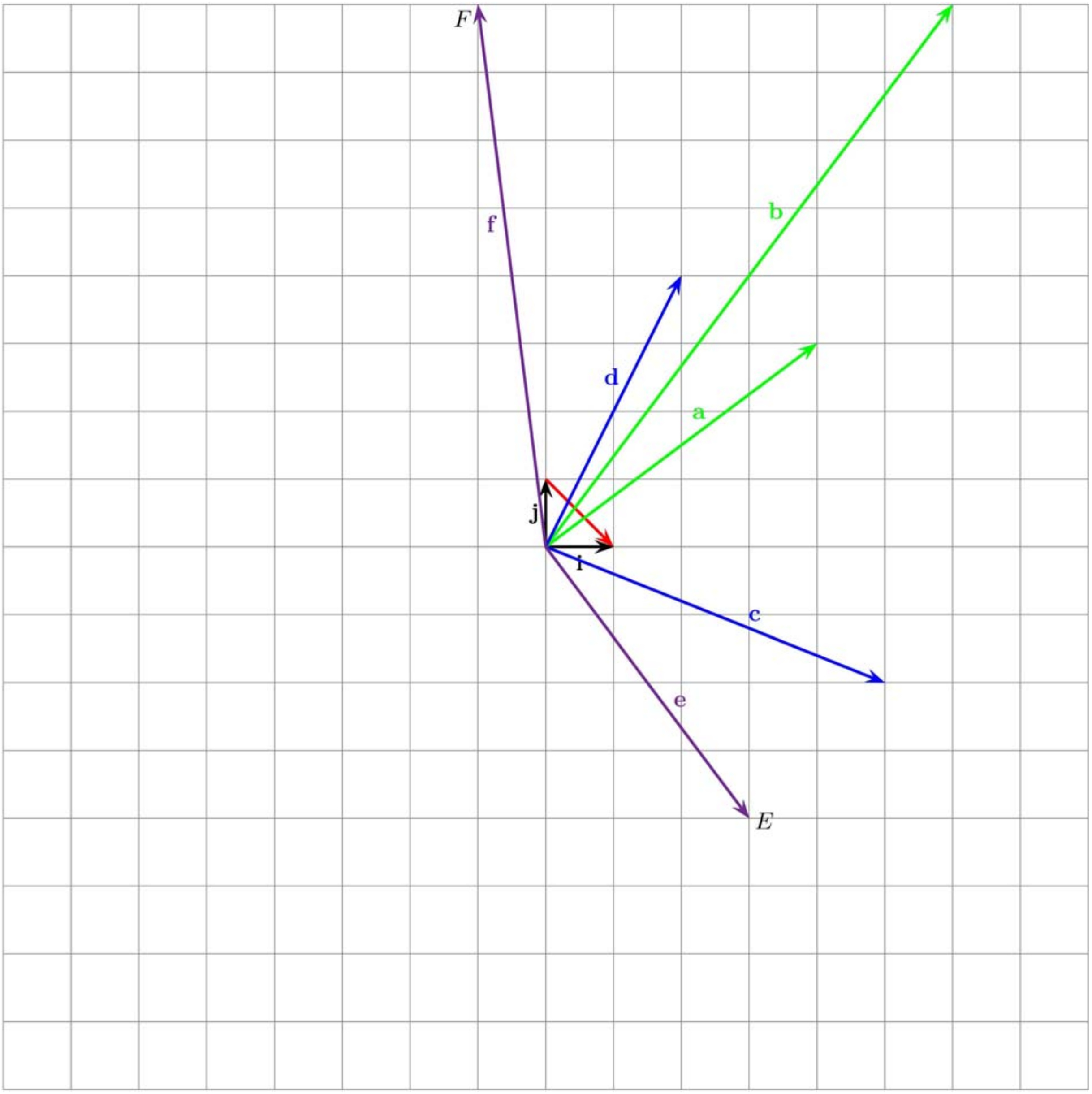
b) Ha $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ és $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$, akkor $\mathbf{ab}=?$

c) Az $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ és $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ vektoroknak mekkora a hossza?

d) Mekkora a hajlásszöge a $\mathbf{c}(5;-12)$ és $\mathbf{d}(2;4)$ vektoroknak?

e) Ha az E pont helyvektora $\mathbf{e}(3;-4)$, az F pont helyvektora pedig $\mathbf{f}(-1;-8)$. Mekkora az $\overrightarrow{EF}$ vektor és az $\mathbf{i}$ bázisvektor hajlásszöge?

Megoldás:



a) $(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}=|\mathbf{i}-\mathbf{j}|\cdot|\mathbf{i}|\cdot\cos 45^\circ=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}^2-\mathbf{j}\mathbf{i}=|\mathbf{i}|^2-0=1$

Mivel az $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ vektor koordinátái $(1;-1)$, és $\mathbf{i}(1;0)$, így $(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}=1\cdot 1+(-1)\cdot 0=1$.

Módszertani megjegyzés: Ennek a feladatnak a megoldása után érdemes megbeszélni a tanulókkal a következőket:

Ha egy $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (vagy $\mathbf{a}-\mathbf{b}$) vektornak kell kiszámítani egy $\mathbf{c}$ vektorral vett skaláris szorzatát, akkor –attól függően, hogy milyen adatok állnak rendelkezésünkre– háromféle mód közül választhatunk.

- Ha ismert a skaláris szorzat tényezőinek hossza, és hajlásszöge, akkor a definíció szerint számolhatunk.

- Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok hossza, és az $(\mathbf{a};\mathbf{c})$ és $(\mathbf{b};\mathbf{c})$ hajlásszögek, akkor az $(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})\mathbf{c}$ skaláris szorzatot a vele azonos $\mathbf{ac}\pm\mathbf{bc}$ alapján célszerű kiszámítani.
- Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok koordinátáikkal adottak, akkor az ismert tétel alkalmazásával juthatunk eredményre.

b) $\mathbf{ab} = 4\cdot 6 + (-3)\cdot 8 = 0$

c) $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 10$

d) $\mathbf{cd} = 13\cdot\sqrt{20}\cos\alpha$, ahol α a két vektor hajlásszöge, és $\mathbf{cd} = 10 - 48 = -38$. Így $\cos\alpha = -\dfrac{38}{13\sqrt{20}} \approx -0{,}6536$, így $\alpha \approx 130{,}8^\circ$.

Módszertani megjegyzés: A következő feladat olyan ismereteket igényel, amely az emelt szintű érettségi tananyaga.

9. Matematika órán a tanár 4 cédula mindegyikére felírt egy-egy koordinátáival megadott vektort, és a cédulákat egy dobozba tette. A dobozból a csoport minden tagja kihúzott visszatevéssel két cédulát. (Azaz a második cédula húzása előtt minden tanulónak vissza kellett rakni a dobozba az elsőként kihúzott cédulát.)

Módszertani megjegyzés: A tanulók azt a feladatot kapták, hogy számítsák ki a kihúzott cédulákon lévő vektorok skaláris szorzatát, és anélkül, hogy a vektorokat lerajzolnák, döntsék el, hogy a két vektor 0°-os szöget, hegyesszöget, derékszöget vagy tompaszöget zárnak-e be egymással. A döntésüket indokolniuk kellett!

a*) A végén kiderült, hogy nem volt két olyan húzás, amikor ugyanakkora szám lett volna a skaláris szorzat. Legfeljebb hány tagja lehetett a csoportnak?

b) Egy alkalommal a cédulákon a következő vektorok voltak. Ekkor legfeljebb hány tagja lehetett a csoportnak?

$\mathbf{a}(-6;\,4)$ $\mathbf{b}(-2;\,3)$ $\mathbf{c}(-8;\,-12)$ $\mathbf{d}(1;\,4)$

c) A b) feladatban megadott vektorok esetén hány húzás esetén kaphatunk olyan vektorokat, amelyek hajlásszöge
- 0°-os?
- hegyesszög?
- derékszög?
- tompaszög?

Megoldás:

a*) Mivel a skaláris szorzás kommutatív művelet, és nem volt két olyan húzás, amelyben a két vektor skaláris szorzata ugyanakkora, legfeljebb annyi tagja lehet a csoportnak, ahány másodosztályú ismétléses kombinációja van a 4 elemnek. Tehát a csoport legfeljebb 10 tagú.

b) Az összes kihúzott két vektor skaláris szorzata:

$\mathbf{a}^2 = 52$	$\mathbf{ab} = 24$	$\mathbf{bc} = -20$	$\mathbf{cd} = -56$
$\mathbf{b}^2 = 13$	$\mathbf{ac} = 0$	$\mathbf{bd} = 10$	
$\mathbf{c}^2 = 208$	$\mathbf{ad} = 10$		
$\mathbf{d}^2 = 17$			

Mivel a 4 megadott vektor esetében 9 különböző skaláris szorzat kapható, legfeljebb 9 tagú lehetett a csoport.

c) A hajlásszög
4 esetben 0°-os;
3 esetben hegyesszög;
1 esetben derékszög;
2 esetben tompaszög.

Nehezebb feladatok

10. Döntsd el, hogy az alábbi vektorok közül melyek merőlegesek egymásra!

$\mathbf{a}(\sqrt{2};-4)$, $\mathbf{b}(\cos 30^\circ;\sin 30^\circ)$, $\mathbf{c}(-\sqrt{48};-\sqrt{6})$, $\mathbf{d}(\sqrt{32};2)$, $\mathbf{e}(-4\sqrt{3};12)$.

Megoldás:

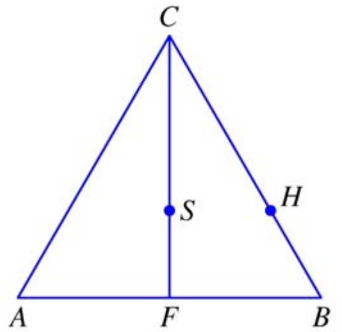
$\mathbf{ad} = 0$, tehát $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$.

$\mathbf{ac} = -4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 0$, ezért $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$. (Ebből az is következik, hogy $\mathbf{d} \parallel \mathbf{c}$. Valóban

$$\mathbf{d} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathbf{c}.$$

$\mathbf{be} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-4\sqrt{3}) + 6 = 0$. Tehát $\mathbf{b} \perp \mathbf{e}$.

11. Az ábrán látható szabályos háromszög oldalának hossza 2 egység, S a háromszög súlypontja, H a BC oldal B csúcshoz közelebbi harmadoló pontja, F pedig az AB oldal felezőpontja.



Határozd meg az alábbi módon megadott számok pontos értékét!

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CS}$; c) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$;

d) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS}$; e*) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Módszertani megjegyzés: Az e) feladatot csak akkor tűzzük ki, ha a tanulók tanórán tanulták már, hogy hogyan lehet a szakasz harmadoló pontjába mutató vektort előállítani a szakasz végpontjaiba mutató vektorokkal!

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-2$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CS}=0$

c) Mivel $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$, ezért $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$

d) Felhasználva a szabályos háromszög tulajdonságait, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AS}$. Így

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS}=\left(3\overrightarrow{AS}\right)\overrightarrow{AS}=3\cdot\left(\overrightarrow{AS}\right)^2.$$

Mivel a háromszög mindegyik magassága $\sqrt{3}$ hosszú, és a szabályos háromszög magassága súlyvonala is, és a súlypont a súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadoló pontja, ezért $\left|\overrightarrow{AS}\right|=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$.

Így $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS}=3\cdot\left(\overrightarrow{AS}\right)^2=3\cdot\left|\overrightarrow{AS}\right|^2=4$.

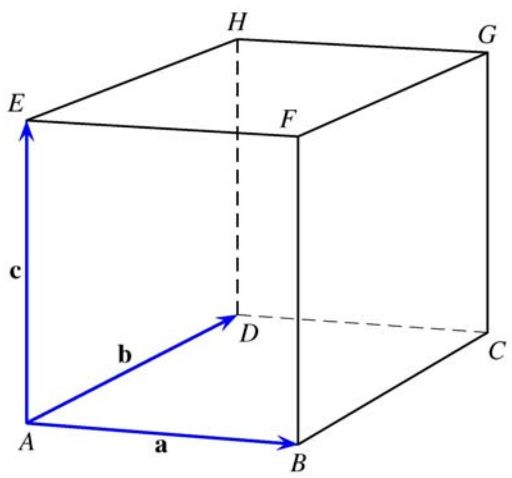
e*) Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AH}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$.

Így $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB}=$

$=\dfrac{2}{3}\cdot4+\dfrac{1}{3}\cdot2\cdot2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{10}{3}$.

12. Az ábrán látható kocka éleinek hossza 10 egység. A kocka A csúcsából induló három élvektor: $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE}=\mathbf{c}$. Számítsd ki az alábbi skaláris szorzatokat!

a) $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{DG}\cdot\mathbf{a}$; c) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FC}$; d) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Megoldás:

a) $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

b) Kétféleképpen is kiszámolhatjuk:

$\overrightarrow{DG}\cdot\mathbf{a}=\overrightarrow{AF}\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{a}+\mathbf{c})\mathbf{a}=\mathbf{a}^2+\mathbf{ca}=100$

$$\overrightarrow{DG}\cdot\mathbf{a}=\left|\overrightarrow{DG}\right||\mathbf{a}|\cos 45^\circ=10\sqrt{2}\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=100$$

c) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FC}=(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{cb}-\mathbf{ac}-\mathbf{c}^2=-100$

Mivel az AFC szabályos háromszög, így az $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{FC}$ vektorok hajlásszöge 120°. A kérdéses skaláris szorzatot a definíció alapján is kiszámíthatjuk:

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FC}=\left|\overrightarrow{AF}\right|\left|\overrightarrow{FC}\right|\cos 120^\circ=10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-100$$

d) $\overrightarrow{AG}\,\overrightarrow{AC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}^2+\mathbf{ba}+\mathbf{ca}+\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2+\mathbf{cb}=200$

Itt is meghatározhatjuk elemi geometriai úton a két vektor hajlásszögét. Az ACG derékszögű háromszögben $AC=10\sqrt{2}$ és $AG=10\sqrt{3}$, így $\cos\alpha=\frac{AC}{AG}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$\overrightarrow{AG}\,\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AG}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha=10\sqrt{3}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=200.$$

13. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egysíkú vektorokról a következőket tudjuk:

- Az $\mathbf{a}$ vektor hossza $\sqrt{3}$ egység, a $\mathbf{b}$ vektoré 3 egység;
- egy nullvektortól különböző $\mathbf{c}$ vektor hajlásszöge az $\mathbf{a}$ vektorral 30°, a $\mathbf{b}$ vektorral pedig 120°-os szöget zár be.

Bizonyítsd be, hogy az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor merőleges a $\mathbf{c}$ vektorra!

Megoldás:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ac}+\mathbf{bc}=|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos 30^\circ+|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos 120^\circ=\sqrt{3}\cdot|\mathbf{c}|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3|\mathbf{c}|\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Mivel a két vektor skaláris szorzata nulla, így valóban az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor merőleges a $\mathbf{c}$ vektorra.

14. Rajzold fel a koordinátasíkon azt az e egyenest, amely átmegy az $A(1;-4)$ ponton, és merőleges az $\mathbf{n}(3;2)$ vektorra!

Milyen módszerrel döntenéd el, hogy rajta van-e a $B(1001;-1504)$, illetve $C\left(\frac{5}{3};-\frac{9}{2}\right)$ pont az *e* egyenesen?

Módszertani megjegyzés: A feladat a tanulók koordinátageometriai ismereteinek előkészítését is szolgálja.
A tanulók számára könnyen látható, hogy az egyik esetben az a gond, hogy a B pont „nem fér a papírra”, a *C* pont koordinátái pedig olyanok, hogy a felkínált koordinátasíkon megrajzolt tengelyek egysége nem teszi könnyűvé a kérdés eldöntését. Az utóbbi esetben lehet, hogy lesz olyan tanuló, aki azt javasolja, hogy rajzoljunk egy másik koordináta-rendszert (abban az egység 6 négyzetoldalnyi legyen), és abban rajzoljuk meg az egyenest, és itt már könnyebben eldönthető, hogy a *C* pont rajta van-e az egyenesen. Így valóban, rajz alapján eldönthető, hogy a *C* pont nincs rajta az *e* egyenesen. De a *B* pont miatt jó lenne kitalálni egy másik módszert is!

Megoldás:

Az, hogy a *B* pont rajta van-e az *e* egyenesen, azon múlik, hogy az *AB* szakasz merőleges-e az **n** vektor tartóegyenesére. Mivel két vektor merőlegességét könnyen el tudjuk dönteni azok skaláris szorzatából, ezért számoljuk ki az $\overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{n}$ skaláris szorzatot. Mivel $\overrightarrow{AB}(1000;-1500)$ és $\mathbf{n}(3;2)$, így $\overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{n} = 3\cdot 1000 - 2\cdot 1500 = 0$, tehát a két vektor merőleges egymásra, és ez azt jelenti, hogy a *B* pont rajta van az *e* egyenesen.

Hasonló módszerrel dönthetjük el, hogy a *C* pont nincs rajta az *e* egyenesen.

$\overrightarrow{AC}\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$, *és* $\overrightarrow{AC}\cdot\mathbf{n} = 1$.