MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

4. modul

Mindig csak a kitevő?

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A logaritmus fogalmának elmélyítése, azonosságainak alkalmazásában a jártasság kialakítása. A szerzett ismeretek tudatosítása.
Időkeret	4 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* Fizika, kémia, biológia *Szűkebb környezetben:* Egyenletek, egyenlőtlenségek ekvivalenciája, azonosságok alkalmazása. *Ajánlott megelőző tevékenységek:* Logaritmus fogalmának, azonosságainak ismerete. *Ajánlott követő tevékenységek:* Trigonometriai számítások, térfogat- és felszínszámítás
A képességfejlesztés fókuszai	A problémaérzékenység, eredetiség, kreativitás, deduktív következtetés, metakogníció, szövegértés, szövegértelmezés, érvelés, bizonyítás, relációszókincs

AJÁNLÁS

A logaritmus fogalma a középiskolai tananyag egyik legnehezebben elsajátítható fogalma. Az első foglalkozásra tervezett játék során a tanulók felidézhetik, és különböző megközelítésben alkalmazhatják a tanórán tanult fogalmat. A további foglalkozások is a logaritmus fogalmának elmélyítését, a rá vonatkozó azonosságok alkalmazásra érett ismeretét segítik elő gyakorlati alkalmazásokon, egyenletek, egyenlőtlenségek gyártásán, különböző szövegkörnyezetbe helyezett problémák megoldásán keresztül. A modul utolsó foglalkozásán a tanulóknak lehetősége nyílik a témakörben szerzett ismereteik mélységének a felmérésére. A modul feldolgozásához nincs szükség tanulói példányra, ezért az I. és a IV. részben a tanári útmutatóban nem szürke háttérrel szereplő részek is csak a tanári útmutatóban találhatók meg.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE

1. foglalkozás: **Fele sem igaz**
2. foglalkozás: **Egyenlet itt is, ott is**
3. foglalkozás: **Alkalmazzuk az ismereteinket!**
4. foglalkozás: **Tesztelünk**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Fele sem igaz			
1	Játék	Együttműködési készség, nyelvi fejlettség, problémamegoldás, gondolkodási sebesség, érvelés, bizonyítás	A játék menetének leírása a tanári útmutatóban. A feladatok: melléklet
II. Egyenlet itt is, ott is			
1	Párkeresés: Adott egyenletek, egyenlőtlenségek megoldáshalmazának kiválasztása adott halmazok közül.	Metakogníció	Feladatlap: 1. feladat
2	Egyenlet „gyártása” megadott kifejezések összekapcsolása a négy alapművelet valamelyikével. Tapasztalatok összegyűjtése. Közelítő megoldás keresése.	Gondolkodási sebesség, metakogníció, értelmes memória	Feladatlap: 2. feladat
3	Nehezebb egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása.	Metakogníció	Feladatlap: 3. feladatsor
III. Alkalmazzuk az ismereteinket!			
1	Logaritmus alkalmazása a számjegyek számának meghatározásában. Tapasztalatok gyűjtése a számológép felhasználásával.	Mennyiségi következtetés, becslés	Feladatlap: 1., 2. feladat

2	Ismeretek alkalmazása gyakorlati probléma megoldásával.	Szövegértelmezés, mennyiségi következtetés, deduktív következtetés	Feladatlap: 3. feladat
3	Ismeretek alkalmazása a matematika más területén.	Analógiás gondolkodásmód, metakogníció	Feladatlap: 4., 5. feladat
4	Vegyes feladatok.	Metakogníció	Feladatlap: 6–8. feladat
IV. Tesztelünk			
1	A hatványozás, az exponenciális és logaritmusfüggvény, egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása, témakörökre vonatkozó tudáspróba.	Metakogníció	Feladatlap a tanári mellékletben

I. FELE SEM IGAZ

Ezen a foglalkozáson játékos formában próbáljuk elmélyíteni a tanulókban a logaritmus fogalmát. A foglalkozást – a megadott kérdéssorral - akkorra időzítsük, amikor a tanulók már a tanórán foglalkoztak a logaritmus fogalmával, megismerték a különböző, adott alapú logaritmusfüggvényeket, és ismerik a logaritmus azonosságait.

A foglalkozás címe már tükrözi a játék lényegét. Alakítsanak ki a tanulók 2-3 fős csoportokat! Ne legyen több a csoportok száma 6-nál, mert ennél több csapat esetén nehezen vezethető a játék. A csapatok a munkaterületüket térben egymástól a lehető legtávolabb alakítsák ki! Csak íróeszköz és négyzethálós papír lehet náluk.

A játék menete:

A tanár írásvetítővel vagy projektorral kivetít három állítást, amelyek közül pontosan egy igaz, kettő hamis. (Ha nem áll rendelkezésre egyik eszköz sem, akkor a tanár a 3 állítás fénymásolt példányát ossza ki a csapatoknak.

A csapatok feladata eldönteni, hogy melyik állítás igaz, majd indokolni, hogy a kiválasztott miért igaz, a másik kettő pedig miért hamis. A válaszadás jogát az a csapat nyeri el, amelyik leghamarabb jelentkezik. Amikor eldőlt, hogy melyik csapat válaszol, a válasz megkezdése előtt minden csapatnak fel kell mutatnia (egy írólapra feljegyezve) annak az állításnak a betűjelét, amelyiket igaznak véli. Ezek után a válaszadás jogát elnyerő csapat egy tagja közli a döntésüket, majd az indoklásokat.

Minden csapat, amelyik helyesen döntött kap 1 pontot, helytelen döntés esetén pedig levonunk egy pontot. A három indoklás mindegyike 1 pontot ér, ha helyes, helytelen indoklás esetén (-1) pont jár. Így tehát minden fordulóban bármelyik csapat nyerhet vagy veszíthet 1 pontot, a válaszadás jogát elnyerő csapat pedig maximum 4 pontot nyerhet, de legfeljebb ugyanennyit veszíthet is. Ha nem az igaz állítást jelöli meg a csapat, de egy állítás hamis mivoltát jól indokolja, akkor (-2) pontot kaphat, hiszen a rossz döntés (-1) pont, és ha mindegyiket indokolja, akkor ennek, illetve a valóban igaznak az indoklása rossz lehet csak, ezért (-2) pont jár, a maradék állítás indoklása lehet helyes, ezért 1 pontot kap a csapat. Ha valamelyik állítás igaz vagy hamis voltát nem indokolja a csapat, azért nulla pont jár.

Az indoklás helyességének eldöntésébe bevonható a többi csapat is, de a végső döntést (azaz, hogy elfogadható-e helyesnek az indoklás) a tanár hozza meg.

A foglalkozás végén derül ki, hogy aznap melyik csapat a győztes, azaz melyikük összpontszáma a legnagyobb. Ha a legtöbb pontot elért csapat pontszáma is negatív, ne hirdessünk győztest, hanem hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy ebben a témakörben az eddigi ismereteik még nem elég mélyek, ezért dolgozzanak nagyobb figyelemmel a tanórán, és feltétlenül vegyenek részt a modul másik két foglalkozásán is.

A mellékletben található állításhármasok tetszőleges sorrendben adhatók fel. Ha a tanár soknak találja 45 percre, vagy egyiket-másikat nehéznek ítéli meg, válogasson belőlük, figyelembe véve a csoport tagjainak motiváltságát, felkészültségét.

Módszertani megjegyzés: A tanulók valószínűleg hamar rájönnek, hogy sokszor egy ellenpéldával könnyű igazolni egy állítás hamis voltát. Ne siettessük ennek felismerését!

Tapasztalat, hogy még a 11.-es tanulók is szóban nehezen tudják megfogalmazni pontosan a gondolataikat. Túl sok a „töltelék” szöveg, gyakran körülményes vagy pongyola a megfogalmazás. Sok esetben mi tanárok is ludasak vagyunk ebben, hiszen sokszor már annak is örülünk, hogy van a tanulónak egy jónak látszó gondolata, és ha ködösen is, de igyekszik megfogalmazni. Mi ilyenkor „gyorsan ki is találjuk”, hogy mit is akart mondani. Ha a játék során valóban csak a jól megfogalmazott indoklást fogadjuk el, a játék következő fordulójában már valószínűleg jobban törekednek rá.

A „Fele sem igaz” játék feladatai

A: Ha $0 < x < y$, akkor $\log_2 x < 0$ és $0 < \log_2 y$.

B: Ha $1 < x$ és $0 < y < 1$, akkor $\log_2 xy = 0$.

C: Ha $0 < x < y$, akkor $\log_2 \frac{y}{x} > 0$

A: Ha $0 < x$, akkor $\log_2 x + \log_{0,5} x = 1$.

B: Ha $x < 2x$, akkor $\log_2 2x - \log_2 x = 1$.

C: Ha $2x \le x$, akkor $\log_{0,5} 2x - \log_{0,5} x = -1$.

A: Végtelen sok olyan rendezett számpár van, amelyben a tagok 10-es alapú logaritmusának összege 1-gyel egyenlő.

B: Csak 4 olyan rendezett számpár van, a $(2;5)$, $(5;2)$, $(1;10)$, $(10;1)$, amelyben a tagok 10-es alapú logaritmusának összege egyenlő 1-gyel.

C: Ha két szám szorzata 10, akkor a 10-es alapú logaritmusuk összege 1.

A: A 2 egyenlő $\lg 1$ kétszeresével.

B: A 2 előállítható valamilyen 1-nél nagyobb számnak olyan logaritmusával, amelynek az alapja valamilyen 1-nél kisebb pozitív szám.

C: A 2 bármilyen, 1-től különböző pozitív szám hatványaként előállítható.

A: Az $\lg x - \lg x$ kifejezés minden x valós szám esetén nullával egyenlő.

B: Az $\lg x^4 = 2\lg x^2$ egyenletnek minden valós szám megoldása.

C: Ha $\lg^2 x - \lg^2 y = 0$, akkor x-nek és y-nak vagy a hányadosa, vagy a szorzata 1-gyel egyenlő.

A: Ha x tetszőleges, 1-nél nagyobb valós számot jelöl, akkor $10^{\lg \lg x} = \lg^2 x$.

B: Ha x tetszőleges pozitív számot jelöl, akkor $\dfrac{10^{2\lg x}}{10} = x^2 - 1$.

C: Ha x tetszőleges, 1-nél nagyobb abszolútértékű valós számot jelöl, akkor $10^{\lg(x^2-1)} + 1 = x^2$.

A: Ha $\dfrac{\lg x - \lg y}{2} = \lg(xy)$, akkor $y = \dfrac{1}{3x}$.

B: Ha $4^{\lg 2} = a$, akkor $2^{\lg 4} + 4^{\lg 16} = a + a^4$.

C: $\log_2^2 12 - \log_2^2 6 = 6$

A: $\log_{16} 32 < \log_4 8 < \log_3 6$

B: $\log_{0,5} 8 < \log_{0,2} 0{,}1 < \log_{0,25} 8$

C: $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{6} < \log_3 6$

A: Tetszőleges x valós szám esetén $\log_6 (2^x + 6^x) \le x$.

B: $\dfrac{\log_7 5}{\log_7 2} = \log_7 3$

C: $\log_{\sqrt{a}} a^4 + \log_a a^2 + \log_{a^2} a = \dfrac{\log_a a^{21}}{2}$, ahol az a tetszőleges, 1-től különböző pozitív számot jelöl.

A: Ha a és b is 1-től különböző pozitív szám, és $b > a$, akkor $\log_a b^2 > 2$.

B: $\log_2 3 + \log_3 2 \ge 2$

C: Ha $\log_2 \log_3 \log_4 a = 1$, akkor $a = 1024^2$.

A „Fele sem igaz” játék feladatainak megoldása

A: Ha $0 < x < y$, akkor $\log_2 x < 0$ és $0 < \log_2 y$.

Megoldás: Nem igaz. Pl. $4 < 8$.

B: Ha $1 < x$ és $0 < y < 1$, akkor $\log_2 xy = 0$.

Megoldás: Nem igaz. Pl. $x = 4$ és $y = 0{,}5$.

C: Ha $0 < x < y$, akkor $\log_2 \frac{y}{x} > 0$.

Megoldás: Igaz, mert ha x és y is pozitív, akkor $\log_2 \frac{y}{x} = \log_2 y - \log_2 x$, és mivel a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán $x < y$ esetén $\log_2 x < \log_2 y$, tehát $0 < \log_2 y - \log_2 x = \log_2 \frac{y}{x}$. (Indokolható úgy is, hogy mivel $0 < x < y$, így $1 < \frac{y}{x}$. A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, így $0 < \log_2 \frac{y}{x}$.

A: Ha $0 < x$, akkor $\log_2 x + \log_{0,5} x = 1$.

Megoldás: Nem igaz, mert $\log_{0,5} x = -\log_2 x$, ha x pozitív, így az összegük 0.

B: Ha $x < 2x$, akkor $\log_2 2x - \log_2 x = 1$.

Megoldás: Igaz, mert ha $x < 2x$, akkor $0 < x$, és $\log_2 2x - \log_2 x = \log_2 \frac{2x}{x} = \log_2 2 = 1$.

C: Ha $2x \le x$, akkor $\log_{0,5} 2x - \log_{0,5} x = -1$.

Megoldás: Nem igaz, mert a feltételből következik, hogy $x \le 0$, és a nempozitív számoknak nem értelmezzük a 0,5 alapú logaritmusát.

A: Végtelen sok olyan rendezett számpár van, amelyben a tagok 10-es alapú logaritmusának összege 1-gyel egyenlő.

Megoldás: Igaz, mert ahhoz, hogy az $(x; y)$ rendezett számpárra teljesüljön, hogy $\lg x + \lg y = 1$, ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a számpár mindkét tagja pozitív legyen, és a szorzatuk 10 legyen. Ilyen számpár pedig végtelen sok van.

B: Csak 4 olyan rendezett számpár van, a $(2;5)$, $(5;2)$, $(1;10)$, $(10;1)$, amelyben a tagok 10-es alapú logaritmusának összege egyenlő 1-gyel.

Megoldás: Nem igaz. Pl. $(0{,}1;100)$.

C: Ha két szám szorzata 10, akkor a 10-es alapú logaritmusuk összege 1.

Megoldás: Nem igaz, mert lehet, hogy mindkét szám negatív, és a szorzatuk 10, de negatív számoknak nem értelmezzük a 10-es alapú logaritmusát.

A: A 2 egyenlő $\lg 1$ kétszeresével.

Megoldás: Nem igaz, mert $\lg 1 = 0$, és $2 \cdot 0 \neq 2$.

B: A 2 előállítható valamilyen 1-nél nagyobb számnak olyan logaritmusával, amelynek az alapja valamilyen 1-nél kisebb pozitív szám.

Megoldás: Nem igaz, mert minden 1-nél nagyobb szám bármilyen 1-nél kisebb pozitív alapú logaritmusa negatív, így nem lehet 2-vel egyenlő.

C: A 2 bármilyen, 1-től különböző pozitív szám hatványaként előállítható.

Megoldás: Igaz, mert a logaritmus definíciója szerint, ha $0 < a \neq 1$, akkor $2 = a^{\log_a 2}$.

A: A $\lg x - \lg x$ kifejezés minden x valós szám esetén nullával egyenlő.

Megoldás: Nem igaz, mert a kifejezés nempozitív számokra nincs értelmezve, tehát nem lehet 0-val egyenlő.

B: A $\lg x^4 = 2\lg x^2$ egyenletnek minden valós szám megoldása.

Megoldás: Nem igaz. Pontosan egy számra, a nullára nem értelmezzük az egyenlet jobb és bal oldalán álló kifejezéseket, így ekkor nem lehetnek egyenlők, tehát az egyenletnek nem minden valós szám megoldása.

C: Ha $\lg^2 x - \lg^2 y = 0$, akkor x-nek és y-nak vagy a hányadosa, vagy a szorzata 1-gyel egyenlő.

Megoldás: Igaz, hiszen $\lg^2 x - \lg^2 y = (\lg x - \lg y)(\lg x + \lg y) = \lg\frac{x}{y} \cdot \lg xy$, és ha ez a szorzat nulla, akkor legalább az egyik tényező nulla. Így $\frac{x}{y} = 1$ vagy $xy = 1$.

Indokolható így is: $\lg^2 x - \lg^2 y = 0$, azaz $\lg^2 x = \lg^2 y \Leftrightarrow \lg x = \lg y$ vagy $\lg x = -\lg y$. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő függvény, így $x = y$ vagy $x = \frac{1}{y}$, azaz $\frac{x}{y} = 1$ vagy $xy = 1$.

A: Ha x tetszőleges, 1-nél nagyobb valós számot jelöl, akkor $10^{\lg\lg x} = \lg^2 x$.

Megoldás: Nem igaz, mert a logaritmus definíciója szerint a bal oldal $\lg x$-szel egyenlő, és az $\lg x$ nem egyezik meg minden 1-nél nagyobb x számra $\lg^2 x$-szel.

B: Ha x tetszőleges pozitív számot jelöl, akkor $\frac{10^{2\lg x}}{10} = x^2 - 1$.

Megoldás: Nem igaz, mert $\frac{10^{2\lg x}}{10} = \frac{10^{\lg x^2}}{10} = \frac{x^2}{10}$, és $\frac{x^2}{10}$ nem minden pozitív számra egyezik meg $x^2 - 1$-gyel.

C: Ha x tetszőleges, 1-nél nagyobb abszolútértékű valós számot jelöl, akkor $10^{\lg(x^2-1)} + 1 = x^2$.

Megoldás: Igaz, mert a megadott x számokra a bal oldal értelmezve van, és a logaritmus definíciója szerint $10^{\lg(x^2-1)} = x^2 - 1$.

A: Ha $\frac{\lg x - \lg y}{2} = \lg(xy)$, akkor $y = \frac{1}{3x}$.

Megoldás: Nem igaz, mert ha $\frac{\lg x - \lg y}{2} = \lg(xy)$, akkor mivel az egyenlet csak pozitív x-re és y-ra értelmezett, így $\frac{\lg x - \lg y}{2} = \lg x + \lg y$, ebből következik, hogy $\lg x - \lg y = 2\lg x + 2\lg y$, azaz $\lg y = -\frac{\lg x}{3}$, tehát $\lg y = \lg \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, és ebből a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése miatt $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ következik, és $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \neq \frac{1}{3x}$ minden pozitív x-re.

B: Ha $4^{\lg 2} = a$, akkor $2^{\lg 4} + 4^{\lg 16} = a + a^4$.

Megoldás: Igaz, mert $2^{\lg 4} = 4^{\lg 2}$, és $4^{\lg 16} = \left(4^{\lg 2}\right)^4$.

C: $\log_2^2 12 - \log_2^2 6 = 6$

Megoldás: Nem igaz, mert $\log_2^2 12 - \log_2^2 6 =$

$= (\log_2 12 - \log_2 6)(\log_2 12 + \log_2 6) = \log_2 2 \cdot \log_2 72 = \log_2 72 > \log_2 64 = 6$, mivel a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán.

A: $\log_{16} 32 < \log_4 8 < \log_3 6$

Megoldás: Igaz, mert $\log_{16} 32 = \log_{16} 2 + 1 = \frac{1}{4} + 1$, $\log_4 8 = \log_4 2 + 1 = \frac{1}{2} + 1$,

$\log_3 6 = \log_3 2 + 1$, és a $\log_3 2 > \frac{1}{2}$, hiszen a 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő, és $2 > \sqrt{3}$, és $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

B: $\log_{0,5} 8 < \log_{0,2} 0{,}1 < \log_{0,25} 8$

Megoldás: Nem igaz, mert $\log_{0,5} 8 = -3$, $\log_{0,25} 8 = -\frac{3}{2}$ és $\log_{0,2} 0{,}1 > 0$, hiszen az 1-nél kisebb pozitív alapú logaritmusfüggvény értéke a $]0;1[$ intervallumon pozitív.

C: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6} < \log_3 6$

Megoldás: Nem igaz, mert az $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$ olyan számot jelöl, amelyre $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$, azaz $3^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}} = 6$ teljesül, a $\log_3 6$ számra $3^{\log_3 6} = 6$ áll fenn, tehát a két kitevő megegyezik.

A: Tetszőleges x valós szám esetén $\log_6 (2^x + 6^x) \le x$.

Megoldás: Nem igaz. Pl. $x = 1$ esetén $\log_6 8 > \log_6 6 = 1$, mert a 6-os alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán. (Vagy: $\log_6 (2^x + 6^x) \le x \iff \log_6 (2^x + 6^x) \le \log_6 6^x \iff 2^x + 6^x \le 6^x \iff 2^x \le 0$, és ez egyetlen valós számra sem teljesül.

B: $\frac{\log_7 5}{\log_7 2} = \log_7 3$

Megoldás: Nem igaz, mert $\frac{\log_7 5}{\log_7 2} = \log_2 5$, és $\log_2 5 > 2$, míg $\log_7 3 < 1$.

C: $\log_{\sqrt{a}} a^4 + \log_a a^2 + \log_{a^2} a = \dfrac{\log_a a^{21}}{2}$, ahol az a tetszőleges, 1-től különböző pozitív számot jelöl.

Megoldás: Igaz, mert $\log_{\sqrt{a}} a^4 + \log_a a^2 + \log_{a^2} a = 8 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$ és $\dfrac{\log_a a^{21}}{2} = \dfrac{21}{2}$.

A: Ha a és b is 1-től különböző pozitív szám, és $b > a$, akkor $\log_a b^2 > 2$.

Megoldás: Nem igaz. Pl. $2 > 0{,}5$, de $\log_{0{,}5} 4 = -2 < 2$.

B: $\log_2 3 + \log_3 2 \geq 2$

Megoldás: Igaz, mert $\log_2 3 + \log_3 2 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 2} + \log_3 2 = \dfrac{1}{\log_3 2} + \log_3 2$, másrészt $\log_3 2$ pozitív számot jelöl, és tudjuk, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2.

C: Ha $\log_2 \log_3 \log_4 a = 1$, akkor $a = 1024^2$.

Megoldás: Nem igaz, mert ha $\log_2 \log_3 \log_4 a = 1$, akkor $\log_3 \log_4 a = 2$, ebből következik, hogy $\log_4 a = 9$, és így $a = 4^9 = 2^{18}$, míg $a = 1024^2 = 2^{20}$.

II. EGYENLET ITT IS, OTT IS

Módszertani megjegyzés: A foglalkozást célszerű az első feladat kitűzésével kezdeni. A párkeresést a tanulók több esetben végezhetik behelyettesítéssel is, vagy kizárásos alapon. Ekkor, a logaritmusos alakban megadott számok tízes számrendszerbeli alakjának a meghatározásává válik a feladat,, illetve értelmezési tartomány vizsgálattá, de több esetben ilyenkor is elkerülhetetlen a logaritmus azonosságainak alkalmazása. Úgy hiszem, hogy a feladat megoldása ilyen módszer alkalmazása esetén is hasznos lehet. Természetesen a feladat fő célja az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásában való jártasság kialakítása, így a feladat megoldásának megbeszélésekor feltétlen oldják meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

1. Az alábbi táblázat bal oldali oszlopában található egyenleteknek, egyenlőtlenségeknek keresd meg a megoldáshalmazát a táblázat jobb oldali oszlopában! Választásodat indokold!

A: $\lg x + \lg 2 = -1$	**a:** $\{16\}$
B: $\lg 4 + \lg 25 = \lg x^2$	**b:** $\{-1\}$
C: $\log_4(x+2) - \log_4 2 = 2$	**c:** $\{\varnothing\}$
D: $\log_2 x^2 + \log_2 x^4 \geq 0$	**d:** **R**
E: $\dfrac{\log_{0,5}(x+16) + \log_{0,5} 8}{\log_{0,5} x} = 2$	**e:** $\{30\}$
F: $\log_{\frac{1}{7}} x \leq \log_8 x$	**f:** $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$
G: $\log_3(2^x - 4^x) = x \cdot \log_3 4$	**g:** $\left\{\dfrac{1}{20}\right\}$
H: $\lg(x^2+1) - \lg x^2 \geq 1$	**h:** $[1;+\infty[$
I : $\lg(x^2+2) + \lg(x^2+1) \leq \lg(x^4 + 3x^2 + 2)$	**i:** $\left[-\dfrac{1}{3};0\right[\cup \left]0;\dfrac{1}{3}\right]$
J: $9^{\log_3 x} + 2x + 1 = 0$	**j:** $\{10;-10\}$

Megoldás:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
g	j	e	f	a	h	b	i	d	c

A: A pozitív számok halmazán $\lg x + \lg 2 = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{20}$.

B: A nullától különböző valós számok halmazán $\lg 4 + \lg 25 = \lg x^2 \Leftrightarrow 100 = x^2 \Leftrightarrow$ $x \in \{10;-10\}$.

C: A (-2)-nél nagyobb valós számok halmazán $\log_4(x+2)-\log_4 2=2 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2}=16 \Leftrightarrow$ $x=30$.

D: A nullától különböző valós számok halmazán $\log_2 x^2+\log_2 x^4\geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x^6\geq 0 \Leftrightarrow$ $x^6\geq 1$ (a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő tulajdonsága miatt) $\Leftrightarrow$ $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

E: Az 1-től különböző pozitív valós számok halmazán $\frac{\log_{0,5}(x+16)+\log_{0,5}8}{\log_{0,5}x}=2 \Leftrightarrow$

$\log_{0,5}(x+16)+\log_{0,5}8=2\log_{0,5}x \Leftrightarrow \log_{0,5}8(x+16)=\log_{0,5}x^2$ (a 0,5 alapú logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése miatt) $\Leftrightarrow$ $x^2-8x-128=0$. Ennek az egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van, a 16.

F: $\log_{\frac{1}{7}}x\leq\log_8 x$. A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\log_{\frac{1}{7}}x$ és $g(x)=\log_8 x$ függvények közül az f szigorúan csökkenő, a g szigorúan növő az értelmezési tartományán. Mivel $f(1)=g(1)=0$, így az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $\left[1;+\infty\right[$.

G: Minden olyan x valós számra, amelyen az egyenlet bal oldalán álló kifejezés értelmezve van $\log_3(2^x-4^x)=x\cdot\log_3 4 \Leftrightarrow \log_3(2^x-4^x)=\log_3 4^x$. A 3-as alapú logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése miatt $2^x-4^x=4^x \Leftrightarrow 2\cdot(2^x)^2-2^x=0$ $\Leftrightarrow 2^x(2\cdot 2^x-1)=0$. Mivel $2^x>0$ minden valós szám esetén, így $2^x=\frac{1}{2}$, azaz $x=-1$. Behelyettesítéssel adódik, hogy erre a számra értelmezve van az egyenlet mindkét oldala, és az értékük egyenlő egymással.

H: A nullától különböző valós számok halmazán $\lg(x^2+1)-\lg x^2\geq 1 \Leftrightarrow \lg\frac{x^2+1}{x^2}\geq 1$, és mivel a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, így $\frac{x^2+1}{x^2}\geq 10$. Mivel a megadott alaphalmazon $x^2>0$, így az $\frac{x^2+1}{x^2}\geq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{9}\geq x^2$. Ennek az egyenlőtlenségnek a nullától különböző valós számok halmazán megoldása minden olyan x szám, amelyre $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right[\cup\left]0;\frac{1}{3}\right]$.

I: Az $\lg(x^2+2)+\lg(x^2+1)\le\lg(x^4+3x^2+2)$ egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés értelmezve van minden valós számra. Mivel $(x^2+2)(x^2+1)=x^4+3x^2+2$, így a jobb oldali kifejezés értelmezési tartománya is a valós számok halmaza.

$\lg(x^2+2)+\lg(x^2+1)\le\lg(x^4+3x^2+2) \iff \lg(x^2+2)(x^2+1)\le\lg(x^4+3x^2+2)$. Mivel a szorzat és a polinom értéke minden valós számra pozitív és megegyező, ezért a tízes alapú logaritmusuk is egyenlő egymással. Tehát mivel az egyenlőtlenségben az egyenlőség mindig teljesül, így a kisebb vagy egyenlő reláció is fennáll minden valós szám esetén.

J: A pozitív számok halmazán értelmezett egyenlet $9^{\log_3 x}+2x+1=0 \iff x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0$. Ennek az egyenletnek nincs pozitív megoldása, így az eredeti egyenletnek sincs valós megoldása.

2.

lg (x + 3)	lg x	1

Kapcsold össze az első két kifejezést a négy alapművelet valamelyikével, s az így kapott kifejezést tedd egyenlővé 1-gyel! Oldd meg az összes így kapható egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az x pozitív számot jelöl:

a. $\lg x+\lg(x+3)=1 \iff \lg x(x+3)=1 \iff x(x+3)=10$, ennek egyetlen pozitív megoldása a 2.

b. $\lg x-\lg(x+3)=1 \iff \lg\dfrac{x}{x+3}=1 \iff \dfrac{x}{x+3}=10$, és ennek az egyenletnek a pozitív számok halmazán nincs megoldása, tehát az eredeti egyenletnek sincs.

c. $\lg(x+3)-\lg x=1 \iff \lg\dfrac{x+3}{x}=1 \iff \dfrac{x+3}{x}=10$. Ennek az egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van: $x=\dfrac{1}{3}$.

d. $\dfrac{\lg x}{\lg(x+3)}=1 \iff \lg x=\lg(x+3)$. Mivel a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő, két különböző pozitív szám logaritmusa nem lehet egyenlő, tehát nincs valós megoldása az egyenletnek.

e. Ha $x\neq 1$, akkor $\dfrac{\lg(x+3)}{\lg x}=1$. Az előbbiek szerint ennek az egyenletnek sincs megoldása.

f. $\lg x\cdot \lg(x+3)=1$. Ennek az egyenletnek csak közelítő megoldását tudjuk megkeresni. Nyílván az 1-nél nagyobb számok között kell keresnünk a megoldást. Mivel az $f(x)=\lg x$ és a $g(x)=\lg(x+3)$ függvények szigorúan növők ezen a halmazon, ezért ha $x>10$, akkor mindkét függvény értéke nagyobb, mint 1, tehát a megoldást a $]1;10]$ halmazon kell keresnünk. Néhány egész szám behelyettesítése után a tanulók könnyen kideríthetik, hogy mivel $\lg 8\cdot \lg 11\approx 0{,}94$ és $\lg 9\cdot \lg 12\approx 1{,}0298$, a megoldást a 8-nál nagyobb, és 9-nél kisebb számok között kell keresniük. További próbálkozással az is kideríthető, hogy az x megoldás $8{,}6<x<8{,}7$. A keresett megoldás két értékes jegyre tehát: 8,7.

Módszertani megjegyzés: Érdeklődő csoporttal célszerű megvitatni, hogy milyen algoritmussal érdemes folytatni a keresést. Könnyen lehet, hogy ők javasolják, hogy a már megtalált nyílt intervallum felezőpontjában nézzük meg először a függvényértékek szorzatát: $\lg 8{,}65\cdot \lg 11{,}65\approx 0{,}9992$, tehát $8{,}65<x<8{,}7$, majd az így szűkített intervallumnak újból a felezőpontjában: $\lg 8{,}675\cdot \lg 11{,}675\approx 1{,}0014$, így $8{,}65<x<8{,}675$. Ilyen módon a tanulók ízelítőt kapnak az egyenletek közelítő megoldásának számközfelező módszerrel való megkeresésére.

3. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenséget!

a) $\log_5 \log_{32} x+\log_{25}\log_{32} x+1{,}5=0$;

b) $\dfrac{1}{2}\lg^2 x-\lg 2\sqrt{x^7}+2+\lg 20=0$

c) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2x-1}+2\cdot 4^{x-1}\right)\geq 0$;

d)* $x^{2-lg\frac{x}{2}}\geq 4$;

e)* Határozd meg a koordinátasíkon azon $(x;y)$ koordinátájú pontok halmazát, amelyekre $x^{\log_3 y}+y^{\log_3 x}=2$ teljesül!

Megoldás:

a) A $\log_{32} x$-nek az 5-ös, illetve 25-ös alapú logaritmusa csak akkor értelmezhető, ha $\log_{32} x > 0$. A 32-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, és 1-nél nulla az értéke, így x csak olyan valós számot jelölhet, amelyre $x > 1$ teljesül.

Ekkor $\log_5 \log_{32} x + \log_{25} \log_{32} x + 1{,}5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 \log_{32} x + \frac{\log_5 \log_{32} x}{2} + 1{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\log_5 \log_{32} x + 1{,}5 = 0$, azaz $\log_5 \log_{32} x = -1$. A logaritmus definíciója szerint $\log_{32} x = \frac{1}{5}$, ebből $x = 2$. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az ekvivalens átalakítások során nem vétettünk számolási hibát, ez a szám valóban megoldása az egyenletnek.

b) A bal oldali kifejezés csak pozitív x számokra értelmezhető. Az $\frac{1}{2}\lg^2 x - \lg 2\sqrt{x^7} + 2 + \lg 20 = 0$ egyenletben tekinthetnénk a $\lg x$-et változónak, ha a második tagban az lg után x állna. A logaritmus azonosságainak alkalmazásával alakítsuk át e kifejezést! $\lg 2\sqrt{x^7} = \lg 2 + \frac{7}{2}\lg x$. Így a megoldandó egyenlet: $\frac{1}{2}\lg^2 x - \lg 2 - \frac{7}{2}\lg x + 2 + \lg 20 = 0$.

A $\lg x$-re másodfokú egyenletben a konstanst vegyük még szemügyre! Mivel $\lg 20 = \lg 2 + 1$, ezért $\frac{1}{2}\lg^2 x - \frac{7}{2}\lg x + 3 = 0$, azaz $\lg^2 x - 7\lg x + 6 = 0$ a megoldandó egyenlet.

Innen $\lg x$-re 6, illetve 1 adódik. Az egyenlet megoldásai tehát $x = 10^6$ vagy $x = 10$.

Módszertani megjegyzés: A szaktanárok között sincs egyetértés abban a kérdésben, hogy az egyenlet megoldásával kapott gyököt minden esetben szükséges-e behelyettesítéssel ellenőrizni. Ha a megoldás során olyan vizsgálatokat végeznek a tanulók, amely biztosítja, hogy nincs gyökvesztés, akkor érdemes arra bíztatni őket, hogy behelyettesítéssel ellenőrizzék a kapott gyökök helyességét. A gond az, hogy a tanulók ezt a vizsgálatot elhagyják vagy nagyon felületesen hajtják végre,, illetve elmarad a behelyettesítéssel ellenőrzés is, így egyáltalán nem lehetnek biztosak abban, hogy minden megoldást megkaptak, és hogy a kapott gyökök valóban megoldásai az eredeti egyenletnek. Sok esetben –pl. ennél az egyenletnél is– ha az ellenőrzést pontos értékekkel akarja végrehajtani a tanuló, a logaritmus azonosságait alkalmaznia kell, s ha ezt a megoldás során rosszul alkalmazta, várható, hogy az ellenőrzésnél is. Meggondolandó, hogy ilyen esetben ne bíztassuk-e a tanulót arra, hogy az ellenőrzést a számológép felhasználásával hajtsák végre, még akkor is, ha tudjuk, hogy sok esetben így csak közelítőleg mutatjuk meg a megoldás helyességét.

c) Mivel $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, és az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő a pozitív számok halmazán, a $\log_{\frac{1}{2}} (2^{2x-1} + 2 \cdot 4^{x-1}) \geq 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $0 < 2^{2x-1} + 2 \cdot 4^{x-1} \leq 1$. Feladatunk e két exponenciális egyenlőtlenség közös megoldásainak megkeresése. A $0 < 2^{2x-1} + 2 \cdot 4^{x-1}$ egyenlőtlenség minden valós számra teljesül, hiszen az összeg mindkét tagja csak pozitív lehet. Azonos átalakítással adódik, hogy $2^{2x-1} + 2 \cdot 4^{x-1} = \frac{4^x}{2} + \frac{4^x}{2} = 4^x$, tehát $2^{2x-1} + 2 \cdot 4^{x-1} \leq 1 \iff 4^x \leq 1$. Mivel a 4-es alapú exponenciális függvény szigorúan növő a valós számok halmazán, és $4^0 = 1$, így $4^x \leq 1 \iff x \leq 0$. Megoldás tehát minden nempozitív valós szám.

Módszertani megjegyzés: Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása során is tudatosíthatjuk a tanulókban, hogy az egyenlőtlenségek megoldása közben az egyes lépéseknél különösen fontos annak vizsgálata, hogy az újabb és újabb egyenlőtlenségek megoldáshalmaza azonos-e, hiszen így elkerülhető a gyökvesztés, másrészt nem véges megoldáshalmaz esetén nem áll módunkban a behelyettesítéssel ellenőrzés, azaz a hamis gyökök kiszűrése.

A d*) egyenlőtlenséget csak jól felkészült csoportnak tűzzük ki megoldásra. A megoldás menetének leírása itt is részletesebb, mert így egyúttal egy lehetséges feldolgozási mód bemutatására is lehetőség nyílik.

d*) *I. Megoldás:*

Az $x^{2-\lg\frac{x}{2}} \geq 4$ egyenlőtlenség megoldása csak pozitív szám lehet. A kitevőben 10-es alapú logaritmus szerepel. Ha az egyenlőtlenségben a bal oldali pozitív értékű kifejezés 10-es alapú logaritmusa szerepelne, akkor a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alkalmazásával a $\left(2 - \lg\frac{x}{2}\right) \cdot \lg x$ kifejezéshez jutnánk, amelyik a megfelelő logaritmus azonosság alkalmazásával könnyen átalakítható $\lg x$-re nézve másodfokú kifejezéssé: $\left(2-\lg\frac{x}{2}\right)\cdot\lg x=(2-\lg x+\lg 2)\cdot\lg x$. Célszerűnek látszik az eredeti egyenlőtlenség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát venni. Megtehetjük, mert az egyenlőtlenség jobb oldalán is pozitív szám áll. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, így $x^{2-\lg\frac{x}{2}}\geq 4 \Leftrightarrow \lg x^{2-\lg\frac{x}{2}}\geq \lg 4$. Az előzőekben látott azonos átalakítással, az ezzel azonos megoldáshalmazú $(2-\lg x+\lg 2)\cdot\lg x\geq\lg 4$ egyenlőtlenséghez jutunk.

$(2-\lg x+\lg 2)\cdot\lg x\geq\lg 4 \quad\Leftrightarrow\quad 0\geq\lg^2 x-(2+\lg 2)\cdot\lg x+2\lg 2$. (A $\lg 4$ átírását $2\lg 2$-re az teszi célszerűvé, hogy az együttható egyik tagjában már szerepel a $\lg 2$.

Vezessük be az új $y=\lg x$ változót!

Így a megoldandó egyenlőtlenség $0\geq y^2-(2+\lg 2)y+2\lg 2$. A jobb oldali kifejezés zérushelyei: $y_{1,2}=\dfrac{2+\lg 2\pm\sqrt{(2+\lg 2)^2-8\lg 2}}{2}$.

A diszkrimináns:

$(2+\lg 2)^2-8\lg 2=4+4\lg 2+\lg^2 2-8\lg 2=4-4\lg 2+\lg^2 2=(2-\lg 2)^2$, így

$y_{1,2}=\dfrac{2+\lg 2\pm|2-\lg 2|}{2}=\dfrac{2+\lg 2\pm(2-\lg 2)}{2}$, azaz $y_1=2$, illetve $y_2=\lg 2$.

Mivel a másodfokú egyenlőtlenség főegyütthatója pozitív, a

$0\geq y^2-(2+\lg 2)y+2\lg 2$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $\lg 2\leq y\leq 2$.

(Figyelembe vettük, hogy $\lg 2<2$.

Így adódik, hogy pontosan azok az x valós számok lehetnek megoldásai az eredeti egyenlőtlenségnek, amelyekre fennáll, hogy $\lg 2\leq\lg x\leq 2$. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növő, ezért $\lg 2\leq\lg x\leq 2 \Leftrightarrow 2\leq x\leq 100$. Tehát a keresett megoldáshalmaz: $[2;100]$.

d*) *II. Megoldás*

Módszertani megjegyzés: Más módon is elindíthatjuk a megoldást, és úgy hiszem nagyon hasznos a kétféle megközelítési mód megismerése. Miután tisztáztuk, hogy a megoldás csak pozitív szám lehet, és felhívtuk a figyelmet arra, hogy a kitevőben 10-es alapú logaritmus szerepel, akkor a folytatás a következőképpen is alakulhat.

Ha a hatvány alapja is 10 lenne, talán könnyebben kezelhető kifejezéshez jutnánk. Tudjuk, hogy a 10-es alapú exponenciális függvény minden pozitív értéket felvesz, és ez egyúttal azt is jelenti, hogy minden pozitív szám felírható 10 hatványaként. Valóban, $0 < x = 10^{\lg x}$, így az $x^{2-\lg 0,5x} \geq 4 \Leftrightarrow \left(10^{\lg x}\right)^{2-\lg 0,5x} \geq 4 \Leftrightarrow$ $10^{\lg x\cdot(2-\lg 0,5x)} \geq 4$. Mivel a 10 hatványait nehéz 4-gyel összehasonlítani, a 4-et is írjuk fel 10 hatványaként, és egyúttal végezzük el a bal oldali hatvány kitevőjében a kijelölt műveleteket. $10^{\lg x\cdot(2-\lg 0,5x)} \geq 4 \Leftrightarrow 10^{2\lg x - \lg x\cdot\lg 0,5x} \geq 10^{\lg 4}$. Ha $\lg 0,5x$ helyett a vele azonosan egyenlő $\lg x - \lg 2$-t írunk, az $10^{2\lg x - \lg x(\lg x - \lg 2)} \geq 10^{\lg 4}$ egyenlőtlenséghez jutunk. A 10-es alapú exponenciális függvény monotonitásának alkalmazásával az első megoldásban már látott egyenlőtlenség megoldása a feladat.

e*) A feltétel szerint $x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 2$. Most nem célszerű mindkét oldal hármas alapú logaritmusát venni, mert a bal oldalon álló összeg logaritmusát nem tudjuk tovább alakítani. Írjuk fel mindkét hatvány alapját 3 hatványaként (ezt megtehetjük, hiszen x és y is csak pozitív lehet), majd alkalmazzuk a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot!

$x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow 3^{\log_3 x\cdot\log_3 y} + 3^{\log_3 y\cdot\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow$

$3^{\log_3 x\cdot\log_3 y} + 3^{\log_3 x\cdot\log_3 y} = 2$.

Így $2\cdot 3^{\log_3 x\cdot\log_3 y} = 2 \Leftrightarrow 3^{\log_3 x\cdot\log_3 y} = 1 \Leftrightarrow \log_3 x\cdot\log_3 y = 0$.

A szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényező nulla (a másik pedig ekkor értelmezve van). Így $\log_3 x = 0$ és $y \in \mathbf{R}^+$ vagy $\log_3 y = 0$ és $x \in \mathbf{R}^+$. Tehát a keresett ponthalmaz azon (x;y) koordinátájú pontok halmaza amelyekre $x = 1$ és y tetszőleges pozitív valós szám, vagy $y = 1$ és x bármilyen pozitív valós szám, azaz a koordinátasíkon a keresett ponthalmaz két (megadott egyenletű) nyílt félegyenest alkot.

III. ALKALMAZZUK AZ ISMERETEINKET!

Módszertani megjegyzés: A tanulók ezen a foglalkozáson a logaritmus tanulmányozása során szerzett ismereteik néhány további alkalmazási területével találkozhatnak. Célszerű először az első feladattal foglalkozni. Bíztassuk a tanulókat, hogy valamilyen, általuk megalkotott rendszer szerint végezzék a kísérleteket. Az a) kérdésben kért tapasztalatokat gyűjtsük össze, és hagyjuk, hogy a tanulók maguk próbálják az indokokat megfogalmazni. Ha nem sikerül tisztázni a kérdést, akkor b) probléma megoldása valószínűleg segít majd, hiszen az egyes lépések „eredményét” ki tudják számolni.

4. András a számítógép számológépével végzett kísérleteket. Beírt egy pozitív számot, majd egymás után annyiszor nyomta be a számológép *log* gombját, amíg a gép ki nem írta, hogy „A bevitt adat érvénytelen”. Minden egyes szám esetén feljegyezte, hogy hányadik lépésben jutott az „érvénytelen” kiíráshoz.

a) Végezz ilyen kísérleteket a saját számológépeden! Mit tapasztaltál?

b) András beírta a 10^{10} számot. Ezzel a számmal végrehajtva a kísérletet, hányadik lépésben jutott először az érvénytelen kiíráshoz?

András azután egy elég sokjegyű számot a következőképpen hozott létre: sorban, egymás után beírta 1-től 20-ig az összes egész számot. Az így kapott számot jelöljük *n*-nel.

c) Hány számjegyű az n szám?

d) Ezzel a számmal milyen eredménnyel végződött a kísérlet?

e) Melyik az a legnagyobb n szám, amelyre $\lg\lg\lg\lg n$ értelmezhető, de $\lg\lg\lg\lg\lg n$ már nem?

Megoldás:

a) A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növekvő tulajdonságát alkalmazva:

Ha a beírt n szám kétjegyű, akkor $1 < \lg n < 2$, és $0 < \lg\lg n < 1$, ebből $\lg\lg\lg n < 0$, így a $\lg\lg\lg\lg n$ már nem értelmezhető.

Ha a beírt n szám kilenc számjegyű, azaz $10^8 \le n < 10^9$, akkor $8 \le \lg n < 9$, ebből $\lg 8 \le \lg\lg n < \lg 9$. Mivel $0 < \lg 8 < 1$ és $0 < \lg 9 < 1$, így $\lg\lg\lg n < 0$, tehát a $\lg\lg\lg\lg n$ már nem értelmezhető.

b) $\lg 10^{10} = 10 \lg 10 = 10$, így $\lg\lg 10^{10} = \lg 10 = 1$, ebből $\lg\lg\lg 10^{10} = \lg 1 = 0$.

A nulla logaritmusát nem értelmezzük, így a negyedik lépésre már kiírja a gép, hogy érvénytelen az adatbevitel.

c) $9+11\cdot 2=31$. Az n szám 31 számjegyű.

d) Mivel a beírt n szám 31 számjegyű, és $10^{30}<n<10^{31}$, akkor $30<\lg n<31$, ebből $\lg 30<\lg\lg n<\lg 31$. Mivel $1<\lg 30<2$ és $1<\lg 31<2$, így $0<\lg\lg\lg n<1$. Ez azt jelenti, hogy $\lg\lg\lg\lg n<0$, tehát a $\lg\lg\lg\lg\lg n$ már nem értelmezhető.

e) A feltétel szerint a $\lg\lg\lg\lg\lg n$ már nem értelmezett, így $\lg\lg\lg\lg n\le 0$. Így $\lg\lg\lg n\le 1$, ebből adódik, hogy $\lg\lg n\le 10$, ezért $\lg n\le 10^{10}$. Tehát ekkor $n\le 10^{(10^{10})}$, így a legnagyobb ilyen n szám a $10^{(10^{10})}$.

Módszertani megjegyzés: Érdemes a tanulókkal meggondoltatni, hogy hogyan nézne ki ennek a számnak a 10-es számrendszerbeli alakja (az 1-es után 10 000 000 000 db nulla áll), és vajon ismernek-e olyan adatot, amelyik ilyen nagy számmal adható meg. Pl. $1\,\textit{fényév}=9{,}4605\cdot 10^{15}\,m$, a Tejútrendszer átmérője közel 100 ezer fényév.

5 Hány számjegyből áll a 3^{100} tízes számrendszerbeli alakja? Mi a szám utolsó számjegye?

Megoldás:

$\lg 3^{100}=100\cdot\lg 3\approx 47{,}71$. A 10-es alapú exponenciális függvény szigorúan növekedő, így $10^{47}<10^{\lg 3^{100}}<10^{48}$, azaz $10^{47}<3^{100}<10^{48}$, tehát 48 számjegyű.

Ha sorban felírjuk a 3 pozitív egész kitevőjű hatványait, a végződések periodikus sorozatot alkotnak (3, 9, 7, 1). A periódus hossza 4, s mivel a 100-as kitevő 4-gyel osztható, az utolsó számjegy 1.

Módszertani megjegyzés: A tanulók valószínűleg nem először találkoznak a 6. feladatban található fogalmakkal. A tanulók ugyan még nem foglalkoztak a mértani sorozat fogalmával, de a feladatban szereplő fogalmak ismeretében ez nem lehet akadálya a feladat sikeres megoldásának. A feladat kitűzése előtt érdemes feleleveníteni a százalékszámítással kapcsolatos alapismereteket.

6. András testvérének születésekor szüleik 500 000Ft-ot lekötöttek egy banknál. Feltételezve, hogy 18 éven keresztül nem változtatja meg a bank az éves kamatlábat, évi hány százalékos kamat esetén kétszereződik meg a betett összeg 18 év elteltével? (Minden év leteltekor az éves kamatot a tőkéhez csatolják.

Megoldás:

Ha x % az éves kamatláb, akkor 18 év elteltekor a felvehető összeg Ft-ban: $5\cdot 10^5\left(1+\frac{x}{100}\right)^{18}$. A feladat szerint $5\cdot 10^5\left(1+\frac{x}{100}\right)^{18}=10\cdot 10^5$, azaz $\left(1+\frac{x}{100}\right)^{18}=2$.

Jelöljük p-vel az $1+\frac{x}{100}$ kifejezést, ekkor a megoldandó egyenlet: $p^{18}=2$. Így $18\lg p=\lg 2$, azaz $\lg p=\frac{\lg 2}{18}\approx 0{,}0167$, ebből $p\approx 1{,}0392$.

3,92%-os kamatláb esetén még nem teljesül a feltétel, hiszen $5\cdot 10^5\cdot 1{,}0392^{18}\approx 998975$. A 3,93 %-os kamatláb esetén viszont biztosan megkétszereződik a pénz 18 év alatt, hiszen ekkor $5\cdot 10^5\cdot 1{,}0393^{18}\approx 1000706$ (Ft) a felvehető összeg.

7. Ha a pozitív számoknak csak a pozitív kitevőjű hatványait értelmeztük volna, akkor milyen számoknak nem lenne 10-es alapú logaritmusa? Ekkor milyen számoknak lenne 0,5 alapú logaritmusa?

Megoldás:

Ha minden pozitív számnak csak a pozitív kitevőjű hatványát értelmeztük volna, akkor a 10-nek is csak ilyen kitevőjű hatványa lenne értelmezve, tehát $10^{\lg a}=a$ egyenletben $\lg a>0$ lehetne csak, ami pl. a 10-es alapú exponenciális függvény monotonitása miatt, azt jelenti, hogy $a>1$ lehetne csak. Tehát az 1 vagy annál kisebb pozitív számoknak nem értelmeztük volna a 10-es alapú logaritmusát.

Hasonló meggondolással adódik, hogy a $0{,}5^{\log_{0,5} b}=b$ egyenletben szereplő hatvány kitevője csak pozitív lehet, és $\log_{0,5} b>0$ pontosan akkor teljesül, ha $0<b<1$. Tehát ekkor csak az 1-nél kisebb pozitív számoknak lenne értelmezve a 0,5 alapú logaritmusa.

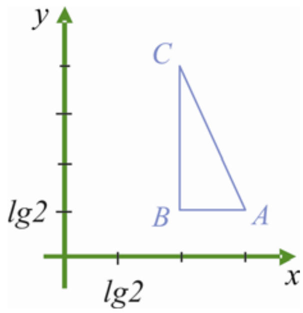
8. Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(\lg 8;\lg 2)$, $B(\lg 4;\lg 2)$ és $C(\lg 4;\lg 16)$ Mekkora a háromszög területe?

Megoldás:

Mivel $\lg 16=4\lg 2$, $\lg 8=3\lg 2$ és $\lg 4=2\lg 2$, ezért az adott pontok koordinátáit a következőképpen is felírhatjuk:

$A(3\lg 2;\lg 2)$, $B(2\lg 2;\lg 2)$ és $C(2\lg 2;4\lg 2)$

A tengelyeken jelöljük ki az $\lg 2$ számnak, és annak néhány többszörösének a helyét! Így a háromszög:

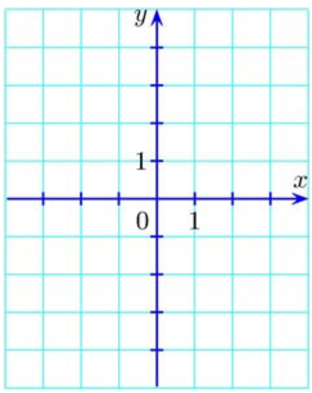


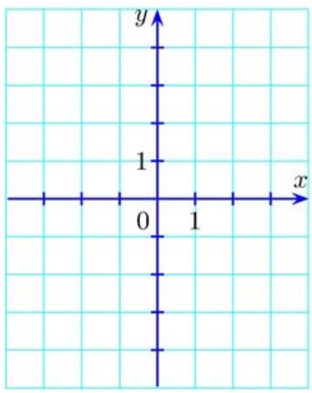
A derékszögű háromszög befogóinak hossza: $\lg 2$ és $3\lg 2$, így a területe: $T=\dfrac{3\lg^2 2}{2}\approx 0{,}1359$.

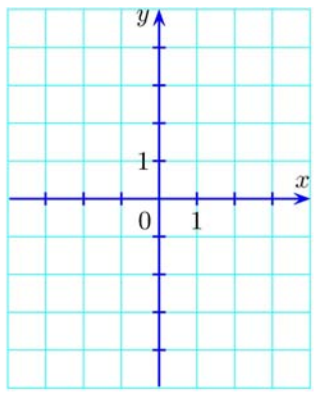
9. Határozd meg a $[-3\ ;\ 3]$ intervallum legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető az alábbi kifejezés!

a) $f(x)=10^{\lg x}$ b) $g(x)=\lg 10^{x}$ c) $h(x)=10^{\frac{1}{2}\cdot\lg x^2}$

A kapott halmazon értelmezett *f*, *g* és *h* függvényeket ábrázold egy-egy derékszögű koordináta-rendszerben!







Megoldás:

$D_f=\left]0;3\right]$, és $f(x)=x$, grafikonja az *AB* balról nyílt szakasz, ahol $A(0;0)$ és $B(3;3)$.

$D_g=[-3;3]$ és $g(x)=x$, grafikonja a *CB* zárt szakasz, ahol $C(-3;-3)$ és $B(3;3)$.

$D_h=[-3;3]/\{0\}$ és $h(x)=10^{\frac{1}{2}\cdot\lg x^2}=10^{\lg|x|}=|x|$, grafikonját a *DA* balról zárt és jobbról nyílt, továbbá az *AB* balról nyílt és jobbról zárt szakaszok alkotják, ahol $D(-3;3)$, $A(0;0)$ és $B(3;3)$.

10. Fejezd ki az alábbi képletekből az *A* változót! (*A*, *B* és *t* pozitív számot jelölnek)

a) $\lg t=\dfrac{\lg A-\lg B}{2}$ b) $\dfrac{\lg(A-B)}{\lg t}=2$ c) $10^{2\lg B+\frac{1}{2}\lg A}=t$

Ha $B = 2$, akkor a t változó milyen értéke esetén lesz a három képlet közül az elsőben a legnagyobb az A értéke?

Megoldás:

Mivel A, B és t pozitív számot jelölnek, így

a) $\lg t = \dfrac{\lg A - \lg B}{2} \iff \lg t^2 = \lg \dfrac{A}{B} \iff A = B \cdot t^2$

b) $\dfrac{\lg(A-B)}{\lg t} = 2 \iff \lg(A-B) = \lg t^2 \iff A = t^2 + B$

c) $10^{2\lg B + \frac{1}{2}\lg A} = t \iff 10^{2\lg B + \frac{1}{2}\lg A} = 10^{\lg t} \iff 2\lg B + \dfrac{1}{2}\lg A = \lg t \iff$

$\lg B^2\sqrt{A} = \lg t \iff \sqrt{A} = \dfrac{t}{B^2} \iff A = \dfrac{t^2}{B^4}$

Ha $B = 2$, akkor

a) $A = 2t^2$; b) $A = t^2 + 2$; c) $A = \dfrac{t^2}{16}$.

Minden pozitív t esetén $2t^2 > \dfrac{t^2}{16}$. Mivel $2t^2 > t^2 + 2$ pontosan akkor, ha $t^2 > 2$, és ez pozitív t esetén akkor és csak akkor teljesül, ha $t > \sqrt{2}$. Így minden $t > \sqrt{2}$ esetén lesz az A változó értéke az első esetben a legnagyobb.

8. Számológép használata nélkül döntsd el, hogy melyik szám a nagyobb! Döntésedet indokold!

a) $\log_2 5$ vagy $\log_5 16$

b) $\log_3 \pi - 1$ vagy $1 - \log_\pi 3$

Megoldás:

a) $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$ és $\log_5 16 < \log_5 25 = 2$, így $\log_5 16 < \log_2 5$.

(Elképzelhető, hogy lesz olyan tanuló, aki ugyanolyan alapú logaritmussal fejezi ki mindkét kifejezést, pl. 2-es alapúval. A megoldás ekkor kicsit hosszadalmasabb: $\log_5 16 = 4\log_5 2 = 4 \cdot \dfrac{1}{\log_2 5}$. Mivel $\log_2 5 > 2$, így a reciproka, azaz $0 < \dfrac{1}{\log_2 5} < \dfrac{1}{2}$, ebből adódik, hogy $0 < \dfrac{4}{\log_2 5} < 2$. Tehát $\log_5 16 < 2$, míg $\log_2 5 > 2$,ezért $\log_5 16 < \log_2 5$).

b) $\log_3 \pi - 1 = \log_3 \pi - \log_3 3 = \log_3 \frac{\pi}{3}$

$1 - \log_\pi 3 = \log_\pi \pi - \log_\pi 3 = \log_\pi \frac{\pi}{3}$

Mivel $\pi > 3$, így ugyanannak az 1-nél nagyobb számnak két különböző, 1-nél nagyobb alapú logaritmusát kell összehasonlítanunk. Az összehasonlítást többféleképpen is elvégezhetjük: a két függvény grafikonjának összehasonlításával, a logaritmus definíciójának felhasználásával, vagy mindkét kifejezés azonos alapú logaritmussal való kifejezésével.

Az utóbbi esetben: $\log_\pi \frac{\pi}{3} = \frac{\log_3 \frac{\pi}{3}}{\log_3 \pi}$. Tudjuk, hogy $3 < \pi$, és a 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorúan növekvő a pozitív számok halmazán, így
$1 = \log_3 3 < \log_3 \pi$.

Mivel $0 < \log_3 \frac{\pi}{3}$, ezért $\frac{\log_3 \frac{\pi}{3}}{\log_3 \pi} < \log_3 \frac{\pi}{3}$. Tehát $1 - \log_\pi 3 < \log_3 \pi - 1$.

IV. TESZTELÜNK

Módszertani megjegyzés: Bármilyen munkát végzünk is, időnként szükségünk van visszajelzésre, hogy mennyire volt a munkánk hatékony és eredményes. Különösen fontos ez a tanulási folyamat során. Ezért néha célszerű beiktatni olyan délutáni foglalkozást is, ahol módja van minden tanulónak lemérni, hogy egy-egy témakörben mennyire biztosak az ismeretei. A tanulók felmérőjét semmiképpen ne osztályozzuk, ezzel is erősítve a felmérő fő célját, a szembesülést ismereteik mélységével. (Pedagógiai eszközökkel érjük el, hogy a felmérést komolyan vegyék.

A felmérő megoldásainak megbeszélése után célszerű egyénileg megbeszélni a tanulókkal, hogy milyen probléma megoldása okozott nekik gondot, és annak vajon mi lehetett az oka. Egyénre szabott feladatokat javasoljunk nekik otthoni munkára, de figyeljünk arra, hogy a feladatok ne legyenek egysíkúak. Ha ugyanazt a problémát más és más szövegkörnyezetbe helyezzük, nemcsak a tanuló asszociatív memóriáját fejleszthetjük.

A felmérővel a tanulók többféle ismeretét is szeretnénk megvizsgálni. A foglalkozás ideje (45 perc) ezt csak úgy teszi lehetővé, ha nem várjuk el az egyes feladatok részletes kidolgozását. Erre legalkalmasabb a tesztforma. Sokan idegenkednek alkalmazni a tesztet az ismeretek felmérésére. A legtöbbször hangoztatott érvek:

„Nem dönthető el, hogy a tanuló valóban igyekezett-e megoldani a feladatot, vagy csak véletlenszerűen választott a megadott válaszok közül egyet.”

„A teszt megoldása nem tükrözi a feladat megoldási folyamatát, így könnyen előfordulhat hogy több helytelen következtetés vezetett a helyes eredményhez.”

„A precízen, gondosan dolgozó tanuló hátrányba kerül a gyors gondolkodású, de felületes tanulóval szemben, hiszen az előbbi tanuló ideje nagy része a megoldás részletes leírására fordítódik, míg a másik tanuló elnagyolt gondolatmenete gyorsabb és eredményesebb lehet.”

Elkerülhető a tanulók vaktában adott válasza, ha meg tudjuk értetni a tanulókkal, hogy most nem mi akarjuk megtudni, hogy mennyit gyarapodott a tudásuk, hanem ők kapnak egy lehetőséget ismereteik felmérésére. Ezt azzal is alátámaszthatjuk, hogy biztosítjuk őket: nem fogjuk a felmérőjüket megnézni, hiszen mindenki maga javítja majd a saját felmérőjét, tehát nincs értelme az „önbecsapásnak”. (Így természetesen nem is osztályozzuk a felmérőket.

Egyénre szabott otthoni feladatok kitűzése megoldható pl. úgy, hogy a tesztfeladatokhoz gyakorló feladatokat rendelünk, és így mindenki kiválaszthatja a számára otthon megoldandókat.

A második ellenérvben megfogalmazott gond is elkerülhető, hiszen a megoldások megbeszélése során lehetősége van a tanulóknak a hibás gondolatmenet felismerésére. Mivel a tanulók hajlamosak arra, hogy a helyes tesztválasz meghallása után (ha az egyezik az ő válaszával) már nem annyira figyelnek a megoldás megbeszélésre, ezért ne közöljük előre a helyes válasz betűjelét. Az csak a megoldásokkal derül majd ki.

Egyre több felsőoktatási intézményben alkalmaznak tesztformát a számonkéréskor. Ez is indokolhatja alkalmankénti használatát a középiskolában. A teszt megíratása után érdemes megbeszélni velük, hogy a tesztnél fölösleges a megoldást gondosan leírniuk, de fontos, hogy precízen, minden feltételre figyelve dolgozzanak. Természetesen, ne hagyják figyelmen kívül a megadott válaszokat! Ha nincs idejük, vagy nem tudják a problémát megoldani, igyekezzenek kizárásos elv alkalmazásával megtalálni a helyes választ. (Itt tehát nem arról van szó, hogy találomra választunk egy választ, hanem mérlegelünk, hogy melyik lehet a legvalószínűbb. Ez sokszor van olyan hasznos a tanuló számára, mint a probléma deduktív megoldása.

A megoldásra javasolt időtartam: 30 perc

Ha nem elegendő a megoldások megbeszélésére 15 perc, a következő foglalkozást az elmaradtak megbeszélésével kezdhetjük.

Teszt

Minden feladatban a négy válasz közül pontosan egy helyes. Karikázza be a helyesnek vélt válasz betűjelét! A munka során számológép és függvénytábla nem használható!

1. Minden valós x-re a $2 \cdot 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4}$ kifejezés a 2-nek hányadik hatványával egyenlő?

A: 2^{x+5} **B:** 32 **C:** $x+5$ **D:** $4x+11$

2. A $\dfrac{3^{2x} - 3^x}{3^x - 1}$ kifejezés mivel egyenlő minden nullától különböző x valós szám esetén?

A: $9 + 3^x$ **B:** $\dfrac{3^x}{3^x - 1}$ **C:** $3^x - 1$ **D:** 3^x

3. Az alábbi állítások között hány hamis állítás van?

a) Az $f(x) = \log_{0,1} x^2$ legbővebb értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza.

b) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2^x$ függvény inverz függvénye a $g(x) = 0{,}5^x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény.

c) Ha $3^y > 2^x$, akkor $y > x$.

A: 0 **B:** 1 **C:** 2 **D:** 3

4. Ha $5^{x+3} > \dfrac{1}{5}$ és $0{,}5^{2x} > 2$, akkor

A: $x > -4$ **B:** $-4 < x < -0{,}5$ **C:** $-0{,}5 < x$ **D:** $< -4 < x < 0{,}5$

5. Mivel egyenlő $\dfrac{\log_2 \sqrt{8}}{2}$?

A: $\dfrac{1}{2}$ **B:** 3 **C:** $\dfrac{3}{2}$ **D:** $\dfrac{3}{4}$

6. Mivel egyenlő $\dfrac{\log_3 2 + \log_3 18}{2} - \log_3 2$?

A: 1 **B:** 2 **C:** -1 **D:** 3

7. Mivel egyenlő $\log_2 \dfrac{3}{4} - \dfrac{\log_2 81}{4}$?

A: -2 **B:** $-\dfrac{\log_2 27}{4}$ **C:** 2 **D:** $-\dfrac{3}{4}\log_2 3$

8. Hány egyenlőség igaz az alábbiak közül?

$\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3}=-2$ $5^{\log_5 25}=2$ $\log_5 0{,}2=-1$

A: 0 **B:** 1 **C:** 2 **D:** 3

9. Ha $3^t=2$, akkor

A: $t=\log_2 3$ **B:** $t=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}$ **C:** $t=\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$ **D:** $t=\lg 3-\lg 2$

10. Ha $3^{\log_3(-y)}-4^{\log_2(-y)}-y+1=0$, akkor $\dfrac{y}{|y|}$ egyenlő

A: 1-gyel **B:**1-gyel vagy (-1)-gyel **C:** (-1)-gyel **D:** 0-val

11. Mivel egyenlő $\log_2^2 6-\log_2^2 3$?

A: $2\log_2^2 3$ **B:** 1 **C:** $\log_2 18$ **D:** $\log_2^2 3$

12. Hány számjegyből áll az 50^{80} tízes számrendszerbeli alakja?

A: 134 **B:** 135 **C:** 136

D: Éppen annyi számjegyből, ahányból áll a 80^{50}.

13. A valós számok halmazának melyik az a lehető legbővebb részhalmaza, amelyen értelmezhető az $\log_x(3-x)(x+2)$ kifejezés?

: $]0;3[$ **B:** $]-2;1[\cup]1;3[$ **C:** $]-2;3[$ **D:** $]0;1[\cup]1;3[$

14. Ha $\log_2(x-5)(x+3)=3$, akkor mivel egyenlő x^2-2x?

A: 15 **B**: 18 **C:** 23 **D:** 24

15. Mivel egyenlő $x^{\lg y}-y^{\lg x}$, ha x és y is tetszőleges pozitív valós számot jelöl?

A: 1 vagy -1 **B**: 0 **C**: 1, ha $x>y$.

D: Függ az x, illetve y értékétől.

A teszt feladatainak megoldása

1. Minden valós x-re a $2\cdot 2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}$ kifejezés a 2-nek hányadik hatványával egyenlő?

A: 2^{x+5} **B:** 32 **C:** $x+5$ **D:** $4x+11$

Mivel $2\cdot 2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}=32\cdot 2^{x}=2^{x+5}$

2. A $\dfrac{3^{2x}-3^{x}}{3^{x}-1}$ kifejezés mivel egyenlő minden nullától különböző x valós szám esetén?

A: $9+3^{x}$ **B:** $\dfrac{3^{x}}{3^{x}-1}$ **C:** $3^{x}-1$ **D:** 3^{x}

$$\frac{3^{2x}-3^{x}}{3^{x}-1}=\frac{3^{x}(3^{x}-1)}{3^{x}-1}=3^{x}$$

3. Az alábbi állítások között hány hamis állítás van?

a) Az $f(x)=\log_{0,1}x^{2}$ legbővebb értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza.

b) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=2^{x}$ függvény inverz függvénye a $g(x)=0,5^{x}$ ($x\in R$) függvény.

c) Ha $3^{y}>2^{x}$, akkor $y>x$.

A: 0 **B:** 1 **C:** 2 **D:** 3

4. Ha $5^{x+3}>\frac{1}{5}$ és $0,5^{2x}>2$, akkor

A: $x>-4$ **B:** $-4<x<-0,5$ **C:** $-0,5<x$ **D:** $<-4<x<0,5$

5. Mivel egyenlő $\dfrac{\log_2\sqrt{8}}{2}$?

A: $\frac{1}{2}$ **B:** 3 **C:** $\frac{3}{2}$ **D:** $\frac{3}{4}$

6. Mivel egyenlő $\dfrac{\log_3 2+\log_3 18}{2}-\log_3 2$?

A: 1 **B:** 2 **C:** -1 **D:** 3

$$\frac{\log_3 2+\log_3 18}{2}-\log_3 2=\frac{\log_3 36}{2}-\log_3 2=\log_3 6-\log_3 2=\log_3 3=1.$$

7. Mivel egyenlő $\log_2\frac{3}{4}-\frac{\log_2 81}{4}$?

<u>A</u>: -2 **B:** $-\frac{\log_2 27}{4}$ **C:** 2 **D:** $-\frac{3}{4}\log_2 3$

$$\log_2\frac{3}{4}-\frac{\log_2 81}{4}=\log_2\frac{3}{4}-\log_2 3=-\log_2 4=-2.$$

8. Hány egyenlőség igaz az alábbiak közül?

$\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3}=-2$ $5^{\log_5 25}=2$ $\log_5 0{,}2=-1$

A: 0 **B:** 1 **<u>C</u>:** 2 **D:** 3

9. Ha $3^t=2$, akkor

A: $t=\log_2 3$ **B:** $t=\frac{\lg 3}{\lg 2}$ **<u>C</u>:** $t=\frac{\lg 2}{\lg 3}$ **D:** $t=\lg 3-\lg 2$

10. Ha $3^{\log_3(-y)}-4^{\log_2(-y)}+y+1=0$, akkor $\frac{y}{|y|}$ egyenlő

A: 1-gyel **B:** 1-gyel vagy (-1)-gyel **<u>C</u>:** (-1)-gyel **D:** (-2)-vel

Az y csak negatív számot jelölhet.

$3^{\log_3(-y)}-4^{\log_2(-y)}+y+1=0 \Leftrightarrow -y-y^2+y+1=0 \Leftrightarrow y^2=1$. Így $y=-1$, $\frac{y}{|y|}=-1$.

11. Mivel egyenlő $\log_2^2 6-\log_2^2 3$?

A: $2\log_2^2 3$ **B:** 1 **<u>C</u>:** $\log_2 18$ **D:** $\log_2^2 3$

$$\log_2^2 6-\log_2^2 3=(\log_2 6-\log_2 3)(\log_2 6+\log_2 3)=\log_2 2\cdot\log_2 18=\log_2 18.$$

12. Hány számjegyből áll az 50^{80} tízes számrendszerbeli alakja?

A: 134 **B:** 135 **<u>C</u>:** 136

D: Éppen annyi számjegyből, ahányból áll a 80^{50}.

$\lg 50^{80}=80\cdot\lg 50\approx 135{,}9$, így 136-jegyű.

13. A valós számok halmazának melyik a lehető legbővebb részhalmaza, amelyen értelmezhető az $\log_x(3-x)(x+2)$ kifejezés?

A: $]0;3[$ **B:** $]-2;1[\cup]1;3[$ **C:** $]-2;3[$ **<u>D</u>:** $]0;1[\cup]1;3[$

14. Ha $\log_2(x-5)(x+3)=3$, akkor mivel egyenlő x^2-2x?

A: 15 **B**: 18 **<u>C</u>:** 23 **D:** 24

$\log_2(x-5)(x+3)=3 \;\Leftrightarrow\; (x-5)(x+3)=8 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x=23$.

15. Mivel egyenlő $x^{\lg y}-y^{\lg x}$, ha *x* és *y* is tetszőleges pozitív valós számot jelöl?

A: 1 vagy -1 **<u>B</u>:** 0 **C:** 1, ha $x>y$.

D: Függ az *x*, illetve *y* értékétől.

Az x és y is csak pozitív számot jelölhet, így $x^{\lg y}-y^{\lg x}=\left(10^{\lg x}\right)^{\lg y}-\left(10^{\lg y}\right)^{\lg x}=0$