MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

3. modul

Exponenciálisan nő vagy csökken?

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	Adott szempontok alapján exponenciális egyenlőtlenségek önálló megalkotása, azok megoldása. Az adott témakörben jártasság kialakítása, az elsajátított ismeretek gyakorlati alkalmazása.
Időkeret	3 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* Laboratóriumi kísérletek adatainak elemezése, közelítése függvényekkel. *Szűkebb környezetben:* Exponenciális függvények monotonitása. Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek önálló létrehozása és megoldása. Algebrai kifejezések azonos átalakítása. Egyenletek, egyenlőtlenségek ekvivalenciája. *Ajánlott megelőző tevékenységek:* Exponenciális függvények ábrázolása. Valószínűségszámítási alapismeretek. *Ajánlott követő tevékenységek:* A logaritmus fogalma és azonosságai. A logaritmusfüggvények grafikonja, tulajdonságai.
A képességfejlesztés fókuszai	A problémaérzékenység, eredetiség, kreativitás, metakogníció, szövegértés, szövegértelmezés, deduktív következtetés, kombinativitás, relációszókincs.

AJÁNLÁS

A matematika órán a tanulók sok exponenciális egyenletet (egyenlőtlenséget) megoldanak. A délutáni foglalkozáson a különböző megoldási módok elsajátítását egyenletek (egyenlőtlenségek) „gyártásával”, előállításával segítjük elő. Egy-egy megoldási mód igazán akkor válik valódi ismeretté, ha meghatározott feltételek mellett elő is tudunk állítani olyan egyenletet, amelynek megoldása során azt a módot alkalmazhatjuk.
Az exponenciális függvények, azok tulajdonságainak ismerete a gyakorlatban is sokszor alkalmazható. Az első foglalkozás betekintést igyekszik nyújtani a témakör kutatómunkában való felhasználására. Ezek a feladatok – éppen a szokatlanságuk miatt – nem könnyűek, de mindenképpen érdemes a tanulókat megismertetni velük, hiszen az iskolában tanult ismeretek alkalmazása a későbbi munkájuk során mindig komoly érdeklődést válthat ki a tanulókban.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE

1. foglalkozás: **Csak exponenciálisan!**
2. foglalkozás: **Gyártsunk egyenleteket!**
3. foglalkozás: **Egyenlőtlenek küzdelme**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Csak exponenciálisan!			
1	Laboratóriumi kísérlet adatainak közelítése exponenciális függvénnyel.	Szövegértés, szöveg értelmezése, eredetiség, problémaérzékenység, becslés, számolás	Feladatlap: 1., 2. feladat
2	Exponenciális függvény gyakorlati alkalmazása.	Szövegértés, számolási képesség	Feladatlap: 3. feladat
3	A függvény grafikonjának ismeretében annak képlettel megadása. Adott függvények képleteinek felhasználásával adott megoldáshalmazú egyenlet, illetve egyenlőtlenség alkotása.	Metakogníció	Feladatlap: 4. feladat
II. Gyártsunk egyenleteket!			
1	Adott kifejezésekkel egyenlet létrehozása, és annak megoldása.	Kreativitás, eredetiség, deduktív következtetés, műveletvégzési sebesség	Kifejezés- és számkártyák (tanári példány)
2	Egyenlet „gyártása” a gyökök ismeretében önállóan létrehozott lineáris kitevőjű kifejezések, és a műveletek közül az összeadás és kivonás felhasználásával. Tapasztalatok összegyűjtése.	Kreativitás, eredetiség, deduktív következtetés, problémaérzékenység, metakogníció	Tanári útmutató: 2. feladat
3	Adott egyenletek megoldása.	Metakogníció	Tanári útmutató: további lehetőség a differenciálásra

4	Egyenlet „gyártása” a gyökök ismeretében önállóan létrehozott lineáris kitevőjű kifejezések, továbbá a négy alapművelet és az *n*-edik gyökvonás felhasználásával.	Rendszerezés, kreativitás, találékonyság	Tanári útmutató: 3. feladat

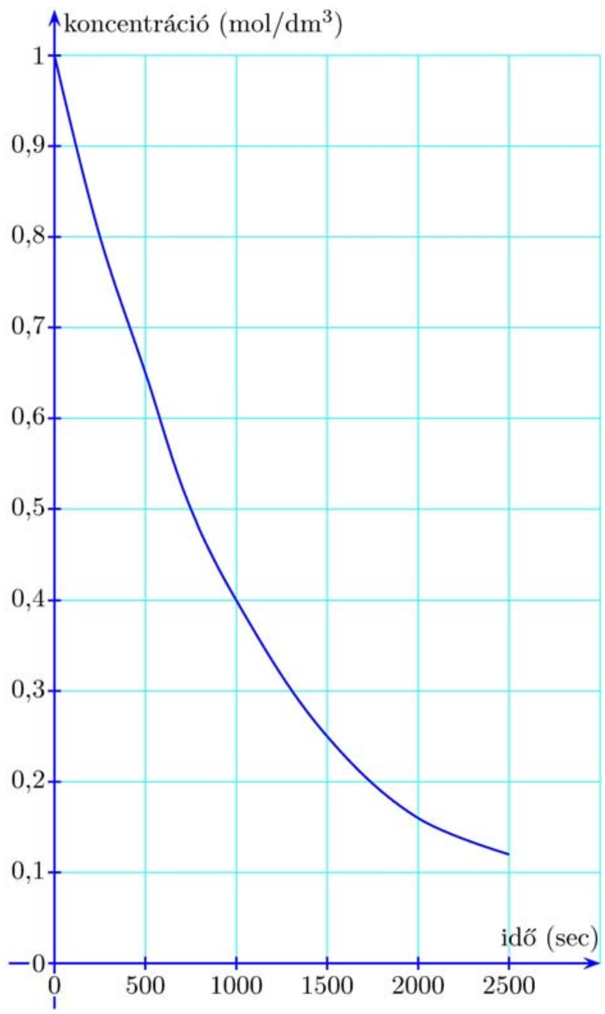
III. Egyenlőtlenek küzdelme			
1	Exponenciális függvények monotonitásának vizsgálata, exponenciális függvénygrafikonok összehasonlítása.	Valószínűségi következtetés, relációszókincs,	Feladatlap: 1., 2. feladat
2	Ismeretek alkalmazása gyakorlati probléma megoldásával.	Szövegértelmezés, mennyiségi következtetés, deduktív következtetés	Feladatlap: 3. feladat
3	Adott exponenciális egyenlőtlenségek önálló megoldása kis segítségadás mellett.	Rendszerezés, metakogníció	Feladatlap: 4., 5. és 6. feladat

I. CSAK EXPONENCIÁLISAN!

A kutatómunka során gyakran előfordul, hogy a mért adatokat egy függvénnyel próbálják közelíteni. Természetesen véges sok adat esetében a feladat nem egyértelmű. Ezen a foglalkozáson ilyen jellegű feladatokkal is foglalkozunk. A megoldás során mód nyílik az exponenciális függvény egyik nagyon fontos tulajdonságának a felismerésére is.

Módszertani megjegyzés: Az első feladat a) kérdésének megvitatása során feltétlen várjuk el, hogy a tanulók érvekkel támasszák alá véleményüket. Valószínűleg azzal érvelnek a tanulók, hogy 0 helyen 1 a függvény értéke, vagy azzal, hogy a grafikon alakja „hasonlít” egy 1-nél kisebb, pozitív alapú exponenciális függvény grafikonjára. Az exponenciális függvény egy fontos tulajdonságának felfedezése érdekében vizsgáljanak meg két, a tanulók által is ismert exponenciális függvényt a következő szempont szerint: Hogyan változik a függvény értéke x, $x + b$, $x + 2b$, $x + 3b$, stb helyeken? Egy adott függvényen b különböző értékei mellett hajtsuk végre a vizsgálatot!

1. A grafikon egy A anyag koncentrációjának időbeli változását mutatja reakció közben, állandó hőmérsékleten.



a) A grafikon alapján lehetséges-e, hogy a folyamat exponenciálisan zajlott le?

Az alábbi táblázat az A anyag koncentrációjának mérésekor készült jegyzőkönyv egy részlete.

Idő (sec	0	750	1500	2250
Koncentráció $\left(\frac{mol}{dm^3}\right)$	1	0,5	0,25	0,15

b) A jegyzőkönyvi adatok alapján mondható-e, hogy a folyamat időben exponenciálisan zajlott le? Miért?

*Megoldás***:**

a) Az $f(x) = a^x$ (ahol a pozitív, x pedig tetszőleges valós számot jelöl) függvény jellemző tulajdonsága, hogy ha az x változót rendre ugyanakkora számmal megnöveljük, a megfelelő függvényérték rendre ugyanannyiszorosára változik. Tehát $a^{x+b} = a^x \cdot a^b$, $a^{x+2b} = a^{x+b} \cdot a^b$.

Ahhoz, hogy azt feltételezhessük, hogy a folyamat exponenciálisan zajlik le, a mért adatoknak ezt a tulajdonságot tükröznie kell.

A grafikonról az adatok 0,1 pontossággal olvashatók le. 500 s-kor mért adat 0,6-nél valamivel nagyobb, 1000-nél 0,4, 1500-nál 0,25 körüli, 2000-nél 0,15, 2500-nál 0,1 körüli. 500-anként leolvasható adatok rendre kb. 0,6-szorosra változnak, tehát a grafikon alapján lehet, hogy a folyamat exponenciálisan zajlik le.

Módszertani megjegyzés: Nem bizonyítjuk, hogy ha egy függvénynek megvan e tulajdonsága, akkor az exponenciális, ezért csak feltételes módban fogalmazhatjuk meg válaszainkat.

b) 750-enként növelve az időt, a koncentráció az első két esetben mindig a felére csökken, míg az utolsó esetben 0,6-szeresére. Amennyiben a mért adatok század pontosságúak, a folyamat nem exponenciálisan zajlott le időben.

2. Az alábbi táblázat egy laboratóriumban végzett kísérlet mérési adatait tartalmazza.

A folyamat indulásától eltelt idő (percben):	1	2	3	4	5	6
Mért adatok:	0,601	0,359	0,216	0,130	0,078	0,047

A kísérlet többszöri elvégzése után a kísérletet végző kutató azt sejti, hogy a folyamat időben exponenciálisan zajlik le.

a) A látott adatok mennyiben támasztják alá a laboratórium vezetőjének sejtését?

b) A kísérletet végző kutató úgy gondolta, hogy két exponenciális függvény jöhet számításba: $f(x)=0{,}6^x$ és $g(x)=0{,}601^x$. Vizsgáld meg mindkét függvény esetében, hogy ha a folyamatot a megadott függvény írja le, mekkora az eltérés a mért adatok és a függvény értékei között? Az eltérést tízezredekre kerekített függvényértékekkel számold ki! Az eltérések ismeretében, a kísérletező személy helyében melyik függvényt választanád?

Megoldás:

a) $\dfrac{0{,}359}{0{,}601}\approx 0{,}597$; $\dfrac{0{,}216}{0{,}359}\approx 0{,}602$; $\dfrac{0{,}130}{0{,}216}\approx 0{,}602$; $\dfrac{0{,}078}{0{,}130}=0{,}600$; $\dfrac{0{,}047}{0.078}\approx 0{,}603$

Az egyenlő időközönként mért adatok hányadosa közel egyenlő, egy századra megegyező. Az eltérést mérési hiba is okozhatja, így lehet, hogy a sejtés jó, a folyamat időben valóban exponenciálisan mehet végbe.

b)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)=0{,}6^x$	0,6	0,36	0,216	0,1296	0,0778	0,0467
Mért adatok:	0,601	0,359	0,216	0,130	0,078	0,047
Az eltérés:	$+\dfrac{10}{10000}$	$-\dfrac{10}{10000}$	0	$+\dfrac{4}{10000}$	$+\dfrac{2}{10000}$	$+\dfrac{3}{10000}$
$g(x)=0{,}601^x$	0,601	0,3612	0,2171	0,1305	0,0784	0,0471
Mért adatok:	0,601	0,359	0,216	0,130	0,078	0,047
Az eltérés:	0	$-\dfrac{22}{10000}$	$-\dfrac{11}{10000}$	$-\dfrac{5}{10000}$	$-\dfrac{4}{10000}$	$-\dfrac{1}{10000}$

Az egyes esetekben az eltérések abszolútértéke az f függvény esetében 2 helyen ($x=1$ és $x=6$) nagyobb, a g függvény esetében 4 helyen nagyobb, mint a másik függvényé. Így az eltérések alapján a kutató az f függvényt választhatná.

Megjegyzés: Indokolhatjuk a döntést úgy is, hogy az abszolút eltérések összege az f függvény esetében összesen: $\frac{29}{10\,000}$, míg a g függvény esetében: $\frac{43}{10\,000}$.

3. Egy kutatóintézetben azt tapasztalták, hogy a K növény hajtásának hosszát az első két napon a $h(t) = 0{,}02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t}$ (mm) képlet adja meg, ahol t értékét órában mérték.

a) Milyen hosszú volt a hajtás a megfigyelés kezdetekor?

b) Mennyit nőtt az első napon?

c) A megfigyelés kezdetekor mért magasságnak hányszorosát érte el a növény hajtása a második nap végén?

Ugyanebben az intézetben, a K növény vizsgálatával egy időben egy H növény hajtásának növekedését is mérték. Ennél a növénynél azt tapasztalták, hogy a hajtásának hossza időben a $d(t) = 0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t}$ képlet szerint változik az első két napon (az időt itt is órában, a hosszt mm-ben mérték).

d) Add meg képlettel, hogy t óra múlva hányszorosa a H növény hajtásának hossza a K növényének! ($0 \le t \le 48$)

e) Mikor lesz a két növény azonos magasságú?

Megoldás:

a) $h(0) = 0{,}02$, tehát 0,02 mm hosszú a hajtás.

b) $h(24) - h(0) = 0{,}02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot 24} - 0{,}02 \approx 0{,}53$ (mm)

c) $\frac{10^{0{,}06 \cdot 48}}{0{,}02} \approx \frac{758{,}6}{0{,}02} = 37930$. Tehát kb. 37 930-szorosát érte el a második nap végére.

d) $\frac{d(t)}{h(t)} = \frac{0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t}}{0{,}02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t}} = 20 \cdot 10^{-0{,}03 \cdot t}$

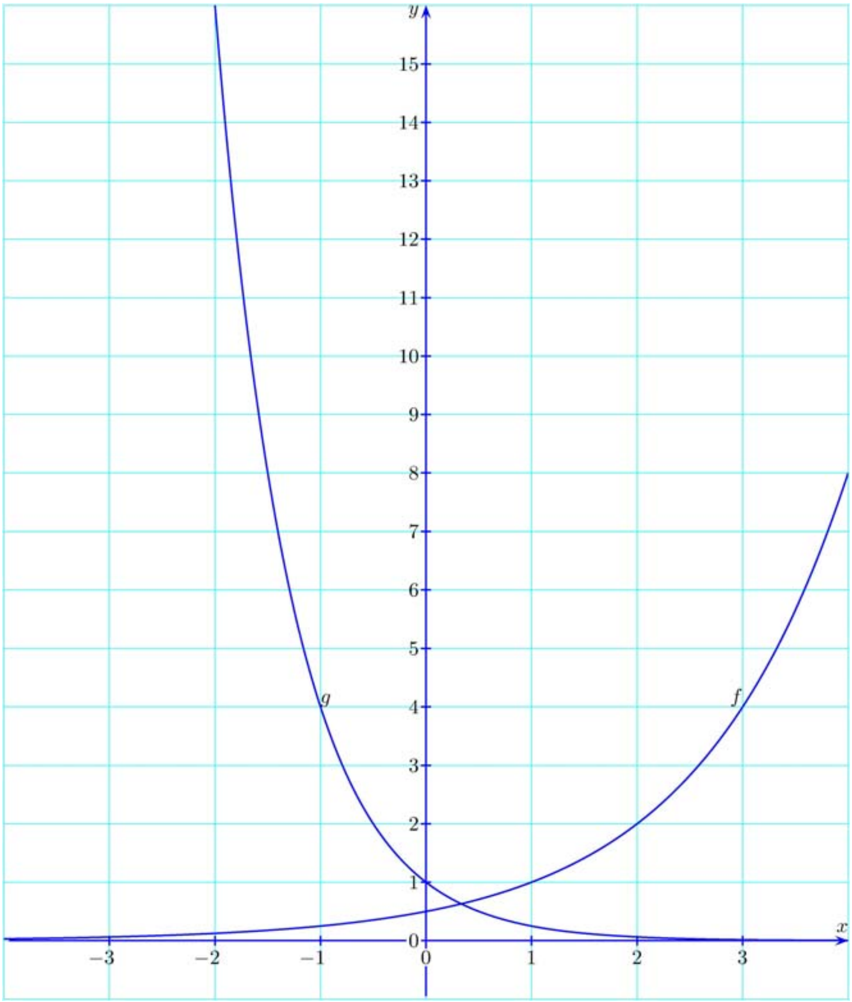
e) $d(t) = h(t)$ pontosan akkor, ha $20 \cdot 10^{-0{,}03 \cdot t} = 1$, azaz $10^{0{,}03 \cdot t} = 20$. Rövid próbálkozás után ($10^{1{,}1} \approx 12{,}59$; $10^{1{,}3} \approx 19{,}95$; $10^{1{,}31} \approx 20{,}42$) kideríthető, hogy

$1{,}3 < 0{,}03t < 1{,}31$, így $43{,}33 < t < 43{,}67$.

Tehát a 44-edik órában lesz a két növény hajtása azonos hosszúságú.

Módszertani megjegyzés: A negyedik feladat előkészíti a következő foglalkozás anyagát (megadott megoldáshalmazú exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek megalkotása). A negyedik feladat **d.** kérdésében „gyártandó" egyenlőtlenség sikeres előállításához segítséget nyújthatunk a következőképpen is: Számítsák ki mindkét függvény értékét a megadott intervallum végpontjaiban, majd az intervallum egy belső helyén is. Mit vehetünk észre? (A szorzatuk legalább 1, és legfeljebb 2.

4. Ebben a feladatban egyenletet, illetve egyenlőtlenségeket kell gyártani. Minden esetben használd fel mindkét, adott grafikonú függvény képletét!



a) Melyik két exponenciális függvény grafikonja látható az ábrán! A függvényeket add meg képletükkel!

b) Írj fel egy olyan egyenletet, amelynek a megoldáshalmaza a $\{0\}$!

c) Írj fel egy olyan egyenlőtlenséget, amelynek a megoldáshalmaza az R halmaz!

d) Írj fel két olyan egyenlőtlenséget, amelyek mindegyike pontosan akkor teljesül, ha $x \in [-2;-1]$!

Megoldás:

a) $f(x) = 2^{x-1}$ és $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

b) $2^{x-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{1}{2} = 0$

c) Pl. $2^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 0$

d) Pl. $1 \leq 2^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 2$. Valóban, hiszen ebből $1 \leq 2^{-x-1} \leq 2$ adódik. A 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan növő az **R** halmazon, így $0 \leq -x-1 \leq 1$. Ebből már könnyen adódik, hogy mindkét egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $x \in [-2;-1]$.

II. GYÁRTSUNK EGYENLETEKET!

Módszertani megjegyzés: Az exponenciális egyenletek megoldása bár sok esetben leleményességet is kíván, de a hatványozás tulajdonságainak készség szinten való ismerete és alkalmazása szinte minden ilyen egyenlet sikeres megoldásához vezet. Tapasztalatunk szerint mélyebb tudásra tesznek szert a tanulók, ha maguk is hoznak létre egyenleteket. Különösen érdekes lehet számukra, ha bepillantást nyerhetnek a tanári munka műhelytitkaiba. „Vajon hogyan készít ő egyenletet?” A „gyártás” közben a tanulók könnyebben felismerik, hogy egyik és másik egyenlet sikeres megoldásához milyen megoldási móddal célszerű próbálkozni.
Ezen a foglalkozáson a tanulók párban dolgozzanak!

5. Egyenlet létrehozása adott kifejezésekkel

Módszertani megjegyzés: Tanári előkészítő munka: A csoport létszámának megfelelő példányban készítse el a kifejezéseket és a számokat tartalmazó cédulákat. (A csoport felkészültségének ismeretében néhány kifejezés ki is hagyható. Nem baj, ha ugyanaz a kifejezés többször is előfordul. A számokból kétszerannyi készüljön, mint a kifejezésekből. Csoportosítsa a cédulákat két dobozba, az egyikbe az exponenciális kifejezések, a másikba a számok kerüljenek.
Minden tanuló húz egy exponenciális kifejezést és két számot. Feladatuk az, hogy a kapott kifejezések felhasználásával egyenletet készítsenek, majd a létrehozott egyenletet oldják meg. Könnyen előfordulhat, hogy egy tanuló olyan egyenletet hoz létre, amelynek a gyökét közelítő értékkel tudja csak megadni. Ekkor a megoldást egy tizedesjegy pontossággal várja el a tanár. Itt a számológép hatványozási műveletgombját használják a tanulók. Pl. $2^x = 5$ esetében $x \approx 2{,}3$, mert $2^{2,3} \approx 4{,}9246$ és $2^{2,4} \approx 5{,}2780$.

Először legyen egy próbajáték! Ezt együtt beszélje meg a csoport.

Kihúzta valaki pl. a $\frac{3}{9^{x-1}}$ kifejezést, és a 3 és 6 számokat. Tegyük fel, hogy a következő egyenletet alkotta meg: $\frac{3}{9^{x-1}} + 3 = 6$. Oldjuk is meg! $\frac{1}{9^{x-1}} = 1$, innen $9^{x-1} = 1$. Mivel a 9-nek csak a nulladik hatványa 1, így az egyenlet egyetlen megoldása: $x = 1$.

Ha viszont a kifejezésből és a két számból a következő egyenletet alkotta meg: $\frac{3}{9^{x-1}} = \frac{3}{6}$, akkor ebből a $9^{x-1} = 6$ egyenlet adódik. Mennyi lehet az $x - 1$? Próbáljunk ki néhány, számításba jövő kitevőt! $9^{0,6} \approx 3,7372$, $9^{0,7} \approx 4,6555$, $9^{0,8} \approx 5,7995$, $9^{0,9} \approx 7,2247$. Tehát a keresett x megoldás egy tizedesjegy pontossággal: 1,8.

A kifejezések:

2^{x-3}	$0,5^{2x-1}$	$\dfrac{1}{4^{x+1}}$	$0,25^{1-x}$	2^{3x}	$\left(2^x\right)^x$
$\dfrac{2^{x-2}}{4^x}$	$2\cdot 4^{x-2}$	$\dfrac{3}{2^{2x-1}}$	$8^{0,5x+1}$	$2^{x+1}+2^{x+2}$	$\dfrac{2}{2^{x-1}}$
4^{2x-1}	$\dfrac{2^{x+4}}{2^{x-2}}$	8^{1-x}	$\dfrac{1}{0,125^x}$	$2^{x+1}\cdot 2^{x+2}$	$\dfrac{1}{2^{1-x}}$
$\dfrac{1}{4}\cdot 0,25^{x-2}$	$2\cdot 4^{0,5x-0,5}$	$\dfrac{2^{3-2x}}{4}$	$1^x\cdot 2^x\cdot 4^x$	$2^{x+1}\cdot 0.5^{1-x}$	$2\cdot\dfrac{4^x}{2^{x-1}}$

A számok: Pl.

2	2	2	4	4	4
8	8	8	8	8	0,5
0,5	0,25	0,25	16	16	32
32	-2	-4	-8	0,125	0,125
64	64	64	3	3	12

6	6	10	10	24	24

Munka közben a tanár bíztatja a tanulókat, hogy többféle egyenletet is hozzanak létre. Minden pár a legjobbnak vélt, a többiek számára is tanulságos egyenletét, és annak megoldását írja le egy lapra! A lapon a kifejezést és a két számot is tüntessék fel! Az elkészült munkákat cseréljék ki egymás között a párok, és ellenőrizzék a megoldás helyességét!
A már ellenőrzött megoldásokat a tanár beszedi, így biztosan lesz módja minden pár munkájába betekinteni.

6. Egyenlet létrehozása a gyökök ismeretében

Módszertani megjegyzés: A tanulók ismét egyenletet alkotnak, de most már az exponenciális kifejezéseket is maguk találják ki.
A feladat a következő: A tanár előre mond egy számot. A létrehozandó egyenletnek olyannak kell lennie, hogy ez a szám megoldása legyen az egyenletnek. A tanulóknak az egyenletet néhány (legalább kettő) olyan 3-as alapú exponenciális kifejezésből kell létrehozniuk, amelyeknek a kitevője valamilyen, általuk kitalált lineáris kifejezés. Az exponenciális kifejezéseket a műveleti jelek közül a kivonással és az összeadással kapcsolhatják össze. Az egyenlet gyártásához bármilyen számot felhasználhatnak.
A létrehozott egyenletet algebrai úton oldják meg a tanulók, így megvizsgálhatják, hogy van-e több megoldása is az egyenletnek. Egyúttal arra is rájöhetnek, hogy milyen esetben kaphatnak 3^x-re elsőfokú, másodfokú vagy magasabb fokú egyenletet.
Pl. $x = 2$ esetében egy lehetséges egyenlet: $3^{x+1} - 3^{2x} + 3^x + 45 = 0$.
Ez az egyenlet $\left(3^x\right)^2 - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$ alakra hozható. Az egyenletnek csak egy megoldása van, hiszen a 3^x-re másodfokú egyenletből $3^x = 9$, illetve $3^x = -5$ adódik. Az utóbbi egyenletnek nincs megoldása, az elsőnek pedig egyetlen megoldása a 2.

Segítsük a tanulókat pl. a következőképpen: Gondoljanak ki egy lineáris kitevőjű 3-as alapú exponenciális kifejezést, majd a megadott gyökkel számítsák ki annak értékét. Egy újabb kifejezés értékét is számítsák ki, majd e kettőt valamelyik megengedett műveleti jellel kapcsolják össze. Vagy újabb exponenciális kifejezést gondolnak ki, vagy e kettőből alkotott kifejezést teszik egyenlővé a kiszámolt értékkel.

A tanulópárok sorban mutassák be egyenletüket a táblánál! A többi pár feladata megoldani az egyenletet. Ezután gyűjtsék össze az egyenletek gyártása során szerzett tapasztalatokat!
A megbeszélés során különösen fontos, hogy a tanár szerepe irányító legyen!

Célszerű a tanulókat rávezetni a következő tanulságok felismerésére:
Ha olyan azonos alapú hatványokat adunk össze (vagy vonunk ki egymásból), amelyek mindegyikének a kitevője olyan lineáris kifejezés, amelynek a főegyütthatója 1, akkor egy hatványra nézve elsőfokú egyenletet kaphatunk.
Ha olyan azonos alapú hatványokat adunk össze (vagy vonunk ki egymásból), amelyek kitevői csupa olyan lineáris kifejezés, amelyek főegyütthatója 1 vagy 2, illetve 1 vagy -1, akkor egy hatványra nézve másodfokú egyenletet kaphatunk.
Ha 2-nél nagyobb főegyütthatójú lineáris kifejezés is előfordul valamelyik hatvány kitevőjében, akkor egy hatványra nézve harmadfokú, vagy annál magasabb fokú egyenlethez juthatunk.

A **7.** feladatot csak érdeklődőbb, felkészültebb tanulókkal végeztessük el! Ha a tanár úgy látja, hogy a csoportnak még nincs meg a kellő gyakorlata az ilyen exponenciális egyenletek megoldásában, akkor –ha marad még idő rá– azt javaslom, hogy oldják meg az alábbi egyenleteket:

i) $\frac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}} = 4^{-1,25}$; **(ii)** $4^{x} + 2^{x} - 2\cdot 4^{x-1} = 6 - 2^{2x-1}$;

(iii) $0,0625^{x} - 0,25^{x+1} = 2 - \frac{5}{4^{x+1}}$.

Megoldás:

i) $\frac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}} = 4^{-1,25} \Leftrightarrow 2^{\frac{x-7}{2}} = 2^{-\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x-7=-5 \Leftrightarrow x=2$

ii) $4^{x} + 2^{x} - 2\cdot 4^{x-1} = 6 - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{x} - \frac{1}{2}\cdot 2^{2x} = 6 - \frac{1}{2}\cdot 2^{2x} \Leftrightarrow \left(2^{x}\right)^{2} + 2^{x} - 6 = 0$

Ennek a 2^{x}-re másodfokú egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van, a 2, azaz $2^{x} = 2$.
Így az eredeti egyenletnek egyetlen megoldása van, az 1.

iii) $0,0625^{x} - 0,25^{x+1} = 2 - \frac{5}{4^{x+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^{x} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 2 - \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \Leftrightarrow$

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^x-2=0$$

A kapott $\left(\frac{1}{4}\right)^x$-re másodfokú egyenletnek egyetlen pozitív megoldása az 1, így az eredeti egyenlet egyetlen megoldása a 0.

7. Nehezítsük a feladatot!

Módszertani megjegyzés: Az eddigi feltételeket továbbiakkal is kiegészítjük: Az összeadáson és kivonáson túl a szorzás és az osztás, a hatványozás és az n-edik gyökvonás is alkalmazható. Tehát az exponenciális kifejezés szorozható vagy osztható egy számmal, illetve két exponenciális kifejezés szorozható vagy osztható egymással, illetve az exponenciális kifejezés hatványozható, vagy adott pozitív n esetén ($2\le n$) belőle n-edik gyök is vonható.

Pl. Legyen megoldása az 1.

$$\sqrt{16\cdot 3^{x-1}+3^{2x}}-2\cdot 3^x+1=0 \iff \sqrt{16\cdot 3^{x-1}+3^{2x}}=2\cdot 3^x-1$$

Az egyenlet minden valós számra értelmezve van. Mivel az utóbbi egyenlet bal oldalán nemnegatív értékű kifejezés áll, így ha $3^x\ge\frac{1}{2}$, akkor a négyzetre emeléssel nem változik az egyenlet megoldáshalmaza.

$$\sqrt{16\cdot 3^{x-1}+3^{2x}}=2\cdot 3^x-1 \iff 16\cdot 3^{x-1}+3^{2x}=\left(2\cdot 3^x-1\right)^2 \iff$$

$$16\cdot 3^{x-1}+3^{2x}=4\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^x+1 \iff 0=3\cdot 3^{2x}-\frac{28}{3}\cdot 3^x+1$$

Ennek a 3^x-re másodfokú egyenletnek két pozitív megoldása van: a 3 és az $\frac{1}{9}$. Mivel 3^x-re teljesülni kell a $3^x\ge\frac{1}{2}$ egyenlőtlenségnek, az $\frac{1}{9}$ nem ad megoldást. Az egyenlet egyetlen megoldása tehát az 1.

Ilyen feltételek mellett a tanulók könnyen kaphatnak olyan magasabb fokú egyenletet, amelyet már nem tudnak megoldani. Itt esetleg hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy ha egy harmadfokú egyenletnek ismerik az egyik gyökét, akkor a nullára redukált egyenletben szereplő kifejezés felbontható egy elsőfokú és egy másodfokú kifejezés szorzatára.

Törekedjenek a tanulók olyan egyenletek létrehozására, amelyeket meg tudnak majd oldani, de ragaszkodjunk hozzá, hogy legalább két exponenciális kifejezés szerepeljen az egyenletben.

III. EGYENLŐTLENEK KÜZDELME

Az egyenlőtlenségek megoldása jó lehetőséget nyújt a különböző tananyagrészekben szerzett ismeretek alkalmazására. Különösen alkalmas az egyes függvények monotonitásáról tanultak hasznosítására és az algebrai ismeretek elmélyítésére. Ezen a foglalkozáson elsősorban exponenciális egyenlőtlenségeket oldunk meg.

Módszertani megjegyzés: A foglalkozás elején célszerű megbeszélni a tanulókkal, hogy ha egy egyenlőtlenség megoldása során a mérlegelvet alkalmazzuk, mire kell figyelnünk. Ilyenekre gondolunk:

$a \geq b$	$a \geq b$	$a \geq b$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$a + c \geq b + c$, ahol c valós szám	$ac \geq bc$, ahol c <u>pozitív</u>	$ac \leq bc$, ahol c <u>negatív</u>

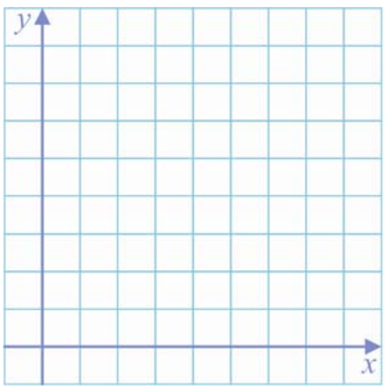
Ezek után, a 8. feladat megoldásával a függvények monotonitásáról tanultakat idézhetik föl a tanulók.

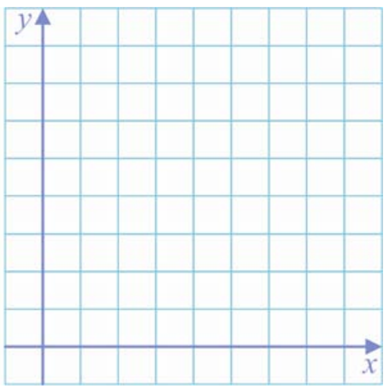
8. Vázold az alábbi egyik koordináta-rendszerben az $f(x) = 0{,}5^x$, a másikban a $g(x) = 3^x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonját! Válassz véletlenszerűen két-két pontot a grafikonok pontjai közül! Jelöld a kiválasztott pontok első koordinátáját x_1-gyel, illetve x_2-vel! Hogyan jelölnéd a pontok második koordinátáját az egyik, illetve a másik esetben? Fejezd be a következő megkezdett mondatokat:

„Ha $x_1 < x_2$, akkor …”

„$0{,}5^{x_1} > 0{,}5^{x_2}$ pontosan akkor, ha …”

„Ha $3^{x_1} > 3^{x_2}$, akkor….”





Megoldás:

„Ha $x_1 < x_2$, akkor $0{,}5^{x_1} > 0{,}5^{x_2}$ és $3^{x_1} < 3^{x_2}$."

„$0{,}5^{x_1} > 0{,}5^{x_2}$ pontosan akkor, ha $x_1 < x_2$."

„Ha $3^{x_1} > 3^{x_2}$, akkor $x_1 > x_2$."

9. Mekkora a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk egymás után két kifejezést az alábbiak közül, akkor az elsőnek választott kifejezés értéke kisebb minden negatív x szám esetén, mint a másodiknak választott kifejezés értéke?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad 2^x \qquad 1 \qquad 4^x$$

Módszertani megjegyzés: Segítő kérdések lehetnek a következők:

Ha x helyére egy negatív számot írunk, a kapott értékek alapján hogyan állíthatók növekvő sorrendbe a kifejezések?

Vajon ez lesz-e a sorrend tetszőleges negatív x szám esetén is?

Hogyan bizonyítható, hogy negatív x szám esetén $4^x < 2^x$?

(Erre a kérdésre lehet, hogy bizonyításként a két kifejezésből alkotott függvények grafikonját rajzolják meg. De honnan tudjuk, hogy a 4^x -ből alkotott függvény grafikonja a másik „alatt" van az x tengely negatív felén?)

Algebrai bizonyítás: $4^x < 2^x \iff 2^{2x} < 2^x$, és mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan növő a valós számok halmazán, így az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $2x < x$, azaz $x < 0$.

I. megoldás: Minden negatív x szám esetén $4^x < 2^x < 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Bármelyik két kifejezést is választjuk ki egymás után, az elsőnek kiválasztottnak az értéke ugyanazon x szám esetén vagy nagyobb, vagy kisebb, mint a másodiknak kiválasztott kifejezés értéke. Így ugyanannyiszor fordul elő, hogy az elsőnek választott kifejezés értéke kisebb, mint a másodiké, mint az, hogy nagyobb. A kérdéses valószínűség: $\frac{1}{2}$.

II. megoldás: Mivel bármelyik kifejezés kiválasztása ugyanakkora valószínűséggel következik be, a kérdéses esemény valószínűségét a kedvező és összes esetek összeszámlálásával is megkaphatjuk.

Ha az 1.-nek választott kifejezés:	2. húzáskor a kedvező esetek száma:
4^x	*3*
2^x	*2*
1	*1*
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	*0*

A kedvező esetek száma: 6

Az összes esetek száma: $4 \cdot 3 = 12$

Tehát a kérdéses valószínűség: $\frac{1}{2}$.

10. Egy előző foglalkozáson már „találkoztatunk” egy K növény hajtásának hosszát megadó képlettel: $h(t) = 0{,}02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t}$, és egy H növény hajtásának hosszát megadóéval: $d(t) = 0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t}$. Mindkettőben a hosszat mm-ben, az idő t értékét órában mérték. A megfigyelést két napon keresztül végezték.

a) A megfigyelés kezdetétől számítva melyik növény hajtása, hány teljes órán keresztül volt rövidebb a másikénál?

b)* A megfigyelés kezdetétől számított hányadik órában volt a növények hajtáshosszának különbsége kb. $\frac{7}{8}$ mm?

Módszertani megjegyzés: A b)* feladatot csak érdeklődő, jól felkészült tanulóknak tűzzük ki megoldásra!

10/a, I. megoldás: Mivel $h(0) = 0{,}02$ és $d(0) = 0{,}4$, a megfigyelés kezdetekor a K növény hajtása rövidebb a H növény hajtásánál. Mivel mindkét képlettel egy-egy szigorúan növekvő (és folytonos) függvény adható meg, a h függvény értéke mindaddig kisebb lesz, míg el nem éri a d függvény értékét. A $h(t) = d(t)$ egyenlet közelítő megoldása 43,4 óra. Tehát a K növény hajtása a megfigyelés kezdetétől számítva 43 teljes órán át rövidebb, mint a másik növény hajtása.

10/a, II. megoldás: A megoldandó egyenlőtlenség: $0{,}02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t} < 0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t}$, ahol $0 \le t \le 48$. Mindkét oldalt pozitív értékű kifejezésekkel osztva a $10^{0{,}03 \cdot t} < 20$ egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel $20 \approx 10^{1{,}3}$, így $10^{0{,}03 \cdot t} < 20 < 10^{1{,}31}$. Mivel a 10-es alapú exponenciális függvény szigorúan növő, ezért $0{,}03t < 1{,}31$. Ebből $t < 43{,}67$, azaz a K növény hajtása 43 teljes órán át rövidebb, mint a másik növény hajtása.

10/b, megoldás:* A szöveg szerint a $\left|0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t} - 0.02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t}\right| \approx \frac{7}{8}$ egyenlet megoldása a feladat.

Tudjuk, hogy $1 \le 10^{0{,}03 \cdot t} \le 20$ esetén $0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t} \ge 0.02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t}$, így ekkor a megoldandó egyenlet $0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t} - 0.02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t} \approx \frac{7}{8}$. Vezessük be az $y = 10^{0{,}03 \cdot t}$ új ismeretlent! Ekkor az egyenlet: $0{,}4y - 0{,}02y^2 \approx \frac{7}{8}$, azaz $2y^2 - 40y + 87{,}5 \approx 0$, ahol $1 \le y \le 20$. A másodfokú egyenlet gyökei: $y = 17{,}5$ és $y = 2{,}5$. Így $10^{0{,}03 \cdot t} \approx 17{,}5$ vagy $10^{0{,}03 \cdot t} \approx 2{,}5$. Mivel $1 \le 10^{0{,}03 \cdot t} \le 20$ esetén kerestük a megoldást, mindkét egyenletből kapunk megoldást: $t_1 \approx 41{,}4$ és $t_2 \approx 13{,}3$.

Módszertani megjegyzés: Itt is (a logaritmus ismeretének hiánya miatt) t-re a megoldást (egy tizedesjegy pontossággal) kettős közelítéssel, 10 hatványainak használatával állapítsák meg a tanulók!

Mivel $10^{0{,}03 \cdot 48} \approx 27{,}54$, így ha $20 < 10^{0{,}03 \cdot t} \le 27{,}54$, akkor a megoldandó egyenlet: $0.02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t} - 0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t} \approx \frac{7}{8}$.

Az $y = 10^{0{,}03 \cdot t}$ ismeretlen bevezetésével a $2y^2 - 40y - 87{,}5 \approx 0$ egyenletet kapjuk, ahol $20 < y \le 48$.. Ennek az egyenletnek egyetlen megfelelő megoldása van: $y \approx 22{,}0$. A $10^{0{,}03 \cdot t} \approx 22{,}0$ megoldása $t \approx 44{,}7$.

Az első két napon a megfigyelés kezdetétől számítva kb. 13,3 óra, 41, 4 óra és 44,7 óra múlva lesz a két növény hajtásának hossza kb. $\frac{7}{8}$ mm-rel eltérő.

Módszertani megjegyzés: A **11.** feladatban a tanulók egy kis segítséget is kapnak. Így elképzelhető, hogy a tanulók önállóan is meg tudják oldani az egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenség megoldásának megbeszélésekor feltétlen hangsúlyozzuk ki a különbségeket az egyenlet és egyenlőtlenség megoldása között. (Melyik esetben elegendő felhasználni a függvény hozzárendelésének kölcsönösen egyértelműségét, melyikben van szükség a függvény monotonitásának ismeretére is? Hogyan alkalmazhatjuk a mérlegelvet az egyik és másik esetben?)

11. Oldd meg a valós számok halmazán a $5 \cdot 0{,}2^{x} < 0{,}04^{2x^2-2x}$ egyenlőtlenséget!

(Segítség: $0{,}04 = 0{,}2^2$)

Megoldás: Az $5 \cdot 0{,}2^{x} < 0{,}04^{2x^2-2x}$ egyenlőtlenségből azonos átalakítással az $5 \cdot 0{,}2^{x} < 0{,}2^{4x^2-4x}$ egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel $0{,}2^{x}$ pozitív minden valós x esetén, így az $5 < 0{,}2^{4x^2-5x}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza azonos az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmazával. Tudjuk, hogy $5 = 0{,}2^{-1}$, ezért a megoldandó egyenlőtlenség: $0{,}2^{-1} < 0{,}2^{4x^2-5x}$.

Mivel a 0,2-es alapú exponenciális függvény szigorúan csökkenő a valós számok halmazán, ezért a $-1 > 4x^2 - 5x$ másodfokú egyenlőtlenség megoldása a feladat. Ennek azon x valós számok a megoldásai, amelyekre $\frac{1}{4} < x < 1$.

12. Oldd meg a valós számok halmazán a $0{,}04^{x-1} - 0{,}2^{x-1} + 5^{1-x} \le 625$ egyenlőtlenséget!

Segítség: $0{,}04 = 0{,}2^2$ és $5 = 0{,}2^{-1}$ vagy $0{,}2 = 5^{-1}$, $0{,}04 = 5^{-2}$

Módszertani megjegyzés: A feladatot a tanulók próbálják önállóan megoldani. Javasoljuk nekik, hogy a padszomszédok egyike az 5-t, a másik tanuló a 0,2-t tartsa meg közös alapnak!

Megoldás:

$0{,}04^{x-1} - 0{,}2^{x-1} + 5^{1-x} \le 625$	$0{,}04^{x-1} - 0{,}2^{x-1} + 5^{1-x} \le 625$
$0{,}2^{2x-2} - 0{,}2^{x-1} + 0{,}2^{x-1} \le 625$	$5^{-2x+2} - 5^{1-x} + 5^{1-x} \le 625$
$0{,}2^{2x-2} \le 0{,}2^{-4}$	$5^{-2x+2} \le 5^{4}$
Mivel a 0,2-es alapú exponenciális függvény szigorúan csökkenő a valós számok halmazán, így $2x - 2 \ge -4$, azaz	Mivel az 5-ös alapú exponenciális függvény szigorúan növő a valós számok halmazán, így $-2x + 2 \le 4$, azaz
$x \ge -1$	$x \ge -1$

13. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{1 - 0{,}75^{x+1}} \cdot \left(2^{x-3} - 0{,}25\right) \le 0$ egyenlőtlenséget!

Módszertani megjegyzés: Az alábbi megoldás egyúttal a feldolgozás egy lehetséges módját is tükrözi.

Megoldás: A feladatunk annak megállapítása, hogy e szorzat mikor nulla, vagy mikor negatív.

Két kifejezés szorzata pontosan akkor nulla egy x szám esetén, ha ezen a helyen mindkettő értelmezve van és legalább az egyik kifejezés értéke nulla.

$2^{x-3} - 0{,}25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x-3} = 2^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$. Ezen a helyen a másik tényező értelmezve van, értéke $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$1 - 0{,}75^{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$.

Ezen a helyen a másik tényező értelmezve van, értéke $(-0{,}1875)$.

Két kifejezés szorzata pontosan akkor negatív egy x szám esetén, ha ezen a helyen mindkettő értelmezve van és a két kifejezés értéke különböző előjelű szám. Mivel $\sqrt{1 - 0{,}75^{x+1}} \ge 0$ minden olyan x szám esetén, amelyre értelmezve van, így a $\sqrt{1 - 0{,}75^{x+1}} \cdot \left(2^{x-3} - 0{,}25\right) < 0$ egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha $2^{x-3} - 0{,}25 < 0$, azaz $2^{x-3} < 2^{-2}$. A 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan növő a valós számok halmazán, így $x < 1$.

Már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen számokra értelmezett mindkét kifejezés. A második tényező minden valós számra, az első pedig pontosan akkor, ha $1 - 0{,}75^{x+1} \ge 0$, azaz $1 \ge 0{,}75^{x+1}$. Mivel a 0,75 alapú exponenciális függvény szigorúan csökkenő a valós számok halmazán, így $0 \le x + 1$, azaz $-1 \le x$.

Összefoglalva: Megoldás minden olyan x valós szám, amelyre fennáll: $-1 \le x \le 1$.