MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

2. modul

Csak permanensen!

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A hatványazonosságok ismeretének elmélyítése, azok készség szinten alkalmazása. A hatvány fogalmának kiterjesztése racionális kitevőkre. Az adott témakörben szerzett tanórai ismeretek rendszerezése, elmélyítése.
Időkeret	2 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* Csillagászat és mikrofizika. *Szűkebb környezetben:* Algebrai kifejezések azonos átalakítása. Hatványfüggvény, gyökfüggvény fogalma, értelmezési tartománya, értékkészlete. Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása. *Ajánlott megelőző tevékenységek:* Hatványozás azonosságai. A hatvány fogalmának kiterjesztése valós kitevőre. Számok normálalakja. Valószínűségszámítási alapismeretek. *Ajánlott követő tevékenységek:* Exponenciális függvények, azok tulajdonságai. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Az exponenciális függvények alkalmazása a kutatómunkában.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás, számlálás, számítás:* A szám fogalmának elmélyítése. A számok különböző alakja. Műveleti tulajdonságok. *Rendszerezés, kombinatív gondolkodás:* Az adott témakörben tanult ismeretek alkalmazási lehetőségének felismerése különböző szövegkörnyezetben. Igaz–hamis állítások kiválasztása. A kreatív gondolkodási mód fejlesztése.

AJÁNLÁS

A hatvány fogalmának mélyebb ismerete nélkül nehezen birkóznak meg a tanulók a logaritmus fogalmával. Ez a foglalkozás segít elmélyíteni a pozitív számok különböző kitevőjű hatványának fogalmát, és az erre érvényes öt azonosság alkalmazásra érett ismeretét. A modulban mindezt elsősorban feladatok önálló megoldásán keresztül érjük el. A feladatanyag végigkíséri a tanulókat a hatványfogalom kialakulásának egyes lépésein, míg végül, ismereteik alapján önállóan rendszerezik azokat. A hatványfüggvények kapcsán előkerül az inverz függvény fogalma is.

Az egyes foglalkozások anyaga bővebb annál, mint amennyi „belefér” egy 45 perces foglalkozásba. Így jobban nyílik lehetőség a differenciálásra is, illetve jobban figyelembe vehető a csoport felkészültsége, előképzettsége. Bátran válogassunk a feladatok között!

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Látómezőnkben az öt azonosság**
2. foglalkozás: **Teremtsünk rendet!**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Látómezőnkben az öt azonosság			
1	Pozitív egész kitevőjű hatványokkal végzett műveletek kiszámítása fejben a definíció alkalmazásával. Hatványok összehasonlítása.	Értelmes memória, deduktív következtetés, rendszerezés	Feladatlap: 1., 2., 3. feladat
2	A hatványozás azonosságainak tudatos alkalmazása egész kitevőjű hatványok esetében.	Tanulási és műveletvégzési sebesség, analógiák felismerése	Feladatlap: 4., 5., 6. feladat
3	A nagyon nagy és nagyon kicsi számok alkalmazása több más tudományterületen.	Szövegértés, számolási képesség	Feladatlap: 7., 8. feladat
4	A hatvány fogalmának előkészítése az azonosságok tudatos alkalmazásán keresztül.	Deduktív következtetés, analógiák felismerése	Feladatlap: 9–12., és 14., 15. feladatai
5	Egyszerű exponenciális egyenletek megoldása.	Számolás, deduktív gondolkodás, mennyiségi következtetés	Feladatlap: 13. feladat

II. Teremtsünk rendet!			
1	A törtkitevőjű hatvány fogalmának tudatosítása hamis–igaz állítások felismerésével.	Értelmes memória, metakogníció	Feladatlap: 1., 2. feladat
2	A törtkitevőjű hatvány és a gyök közötti eltérések.	Számolási képesség, deduktív következtetés, probléma-érzékenység	Feladatlap: 3., 4., 5. feladat
3	Összefoglaló táblázat készíttetése.	Rendszerezés	Modul leírás (tanári példány)

4	Néhány hatványfüggvény ábrázolása, tulajdonságaik felismerése, egyenlőtlenségek önálló létrehozása, megoldása. Inverz függvény párok keresése, felismerése.	Kombinatív gondolkodás, metakogníció, számolás, deduktív gondolkodás	Feladatlap: 6. feladat

I. LÁTÓMEZŐNKBEN AZ ÖT AZONOSSÁG

Módszertani megjegyzés: Ezen a foglalkozáson a fő cél a hatványozás azonosságainak biztos alkalmazása. Ha van a csoportban olyan tanuló, aki még mindig nem ismeri jól az azonosságokat, hagyjuk, hogy az első három feladatot a pozitív egész kitevőjű hatvány definíciójának alkalmazásával oldja meg.
Az első feladatot igyekezzenek a tanulók valóban fejben megoldani. Az első három feladatot egyszerre tűzzük ki. Csak akkor célszerű a megoldásokat egyeztetni, ha a tanulók zöme mindegyik részfeladatra adott megoldást.

1. Próbáld fejben kiszámolni az alábbi kifejezések tízes számrendszerbeli alakját!

a) $\dfrac{9^{16}}{3^{30}}$

b) $\dfrac{6^{24}}{2^{25}\cdot 3^{24}}$

c) $2^7\cdot 5^6$

d) $\dfrac{2^9\cdot 2^{20}}{8\cdot 4^{13}}$

e) $\dfrac{27^{13}}{9^{19}}$

f) $\dfrac{6\cdot 4^{12}}{2^{22}}$

g) $\dfrac{3^8}{3^7+3^8}$

h) $\dfrac{4^{10}+4^{10}}{4^9+4^9}$

Megoldás:

a) $\dfrac{9^{16}}{3^{30}}=3^2=9$

b) $\dfrac{6^{24}}{2^{25}\cdot 3^{24}}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

c) $2^7\cdot 5^6=2\,000\,000$

d) $\dfrac{2^9\cdot 2^{20}}{8\cdot 4^{13}}=1$

e) $\dfrac{27^{13}}{9^{19}}==3$

f) $\dfrac{6\cdot 4^{12}}{2^{22}}=3\cdot 2^3=24$

g) $\dfrac{3^8}{3^7+3^8}=\dfrac{3^8}{3^7(1+3)}=\dfrac{3}{4}=0{,}75$

h) $\dfrac{4^{10}+4^{10}}{4^9+4^9}=\dfrac{2\cdot 4^{10}}{2\cdot 4^9}=4$

2. Melyik a nagyobb? Döntésedet indokold!

a) $3\cdot 4^6$ vagy $11\cdot 2^{10}$

b) $12^{12}\cdot 4^{12}$ vagy 7^{24}

c) 24^{23} vagy 5^{46}

d) 90^{40} vagy $9\cdot 9^{79}$

e) $3\cdot 2^{21}+2^{22}$ vagy 8^8

Megoldás:

a) $3\cdot 4^6 = 3\cdot 2^{12} = 12\cdot 2^{10} > 11\cdot 2^{10}$

b) $12^{12}\cdot 4^{12} = 48^{12}$ és $7^{24} = 49^{12}$, és mivel a hatványfüggvények a pozitív egészszámok halmazán szigorúan növők, így $12^{12}\cdot 4^{12} < 7^{24}$.

c) $5^{46} = 25^{23}$, és mivel a páratlan kitevőjű hatványfüggvények szigorúan növők, így $24^{23} < 5^{46}$.

d) $9\cdot 9^{79} = 9^{80} = 81^{40}$, és mivel a hatványfüggvények a pozitív egészszámok halmazán szigorúan növők, így $90^{40} > 9\cdot 9^{79}$.

e) $3\cdot 2^{21} + 2^{22} = 3\cdot 2^{21} + 2\cdot 2^{21} = 5\cdot 2^{21} = 10\cdot 2^{20}$, és $8^8 = 2^{24} = 2^4\cdot 2^{20} = 16\cdot 2^{20}$, így $3\cdot 2^{21} + 2^{22} < 8^8$.

3. Melyik szám 24. hatványával egyezik meg a $\dfrac{16^6\cdot 25^{12}}{4^{12}}$ kifejezés?

Megoldás:

$\dfrac{16^6\cdot 25^{12}}{4^{12}} = \dfrac{2^{24}\cdot 5^{24}}{2^{24}} = 5^{24}$. Tehát az 5-nek a 24-edik hatványával egyenlő a kifejezés.

4. A hatványozás azonosságait számozzuk a következőképpen:

I. $a^n\cdot a^k = a^{n+k}$ **II.** $\dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ **III.** $a^n b^n = (ab)^n$

IV. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ **V.** $(a^n)^k = a^{nk}$

Az alábbiakban egy-egy kifejezést átalakítottunk a hatványazonosságok felhasználásával. Döntsd el, hogy az egyes esetekben mely azonosságokat használtunk fel, és az alkalmazott azonosság sorszámát írd az egyenlet mellé! (A kitevők egész számokat jelölnek.

Megoldás:

a) $2^{3x} = 8^x$ **(V.)** b) $9\cdot 3^x = 3^{x+2}$ **(I.)** c) $2^{x+1}\cdot 3^{x+1} = 6^{x+1}$ **(III.)**

d) $5^{2x+1} = 5\cdot 25^x$ **(V., I.)** e) $4^{3x-1} = \dfrac{64^x}{4}$ **(V., II.)** f) $3^{2x-1}\cdot\dfrac{3^x}{9} = 3^{3x-3}$ **(II., I.)**

g) $4^{x+1}\cdot 2^x = 2^{3x+2}$ **(V., I.)** h) $\dfrac{25^{2x}}{5^x} = 5^{3x}$ **(V., II.)**

i) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1} = \dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ **(I. vagy II.)** j) $50^x\cdot 4^{x+1} = 2^{3x+2}\cdot 5^{2x}$ **(III., V., I.)**

5. Melyik szám 50-edik hatványával egyezik meg a $32^{10}\cdot 9^{25}\cdot(\sqrt{2})^{100}$ kifejezés?

Megoldás:

$32^{10}\cdot 9^{25}\cdot(\sqrt{2})^{100}=2^{50}\cdot 3^{50}\cdot 2^{50}=12^{50}$. Tehát a kifejezés 12-nek az 50. hatványával egyenlő.

6. Mivel egyenlő $\dfrac{6^{2x}\cdot 9^{x+4}}{4^{x}\cdot 81^{x+3}}$?

Megoldás: $\dfrac{6^{2x}\cdot 9^{x+4}}{4^{x}\cdot 81^{x+3}}=\dfrac{2^{2x}\cdot 3^{2x}\cdot 3^{2x+8}}{2^{2x}\cdot 3^{4x+12}}=\dfrac{3^{4x+8}}{3^{4x+12}}=3^{-4}=\dfrac{1}{81}$.

Módszertani megjegyzés: A következő két feladat megoldása során bíztassuk a tanulókat, hogy normálalakkal számoljanak!

7. Egy apuka a kisfiának szemléltetni szeretné a Naprendszert. A Napot egy kb. 10 cm átmérőjű naranccsal modellezi. Ha ugyanilyen arányban kicsinyítené a Földet is, akkor mekkora átmérőjű tárgyat kellene választania? Mekkora sugarú körpályán kellene mozgatnia a „Földet” a „Nap” körül, ha a Nap–Föld távolságot is ugyanilyen arányban szeretné kicsinyíteni? (A közepes Nap–Föld távolság: $1{,}496\cdot 10^{8}$ km. A Nap egyenlítőjének átmérője: $1{,}392\cdot 10^{6}$ km, a Földé: $1{,}2756\cdot 10^{4}$ km.

Megoldás:

A kicsinyítés aránya: $\dfrac{1}{1{,}392\cdot 10^{10}}$.

A modellben a Föld átmérője: $\dfrac{1{,}2756\cdot 10^{7}}{1{,}392\cdot 10^{10}}\approx 0{,}9\cdot 10^{-3}\ (\mathrm{m})=0{,}9\ (\mathrm{mm})$, tehát például gombostűfejjel modellezhető a Föld.

A modellben a Nap–Föld távolság: $\dfrac{1{,}496\cdot 10^{11}}{1{,}392\cdot 10^{10}}\approx 1{,}07\cdot 10=10{,}7\ (\mathrm{m})$.

8. Az arany atomjának átmérője kb. $3\cdot 10^{-8}$ cm.

a) Hányszor érné körbe a Földet az egyenlítő mentén az az „aranyfonal”, amelyet 1 mol mennyiségű arany atomjainak „szoros”, egysoros egymás után illesztésével hoznánk létre? (A Föld sugara kb. 6378 km.)

b) Ha szorosan egymás mellé tekernénk az 1 mol mennyiségű arany atomjaiból készített „aranyfonalat" az egyenlítő köré, milyen széles aranyszalaghoz jutnánk?

Megoldás:

a) A Föld egyenlítőjének hossza kb. $40\cdot 10^{8}$ cm. Az egyenlítő egyszeri körbetekeréséhez $\dfrac{40\cdot 10^{8}}{3\cdot 10^{-8}}\approx 13{,}3\cdot 10^{16}$ (db) aranyatom szükséges. A $6\cdot 10^{23}$ db atomból készített „aranyfonal" $\dfrac{6\cdot 10^{23}}{13{,}3\cdot 10^{16}}\approx 4{,}5\cdot 10^{6}$-szor tekerhető az egyenlítő köré.

b) Mivel a fonal szélessége 1 atomnyi, azaz kb. $3\cdot 10^{-8}$ cm, és kb. $4{,}5\cdot 10^{6}$ – *szor* tekerhetnénk körbe, így a szalag szélessége kb. 1,4 mm széles lenne.

Módszertani megjegyzés: Ha nincs elég idő, ne oldassuk meg a 9.-12. feladatok mindegyikét, hanem a tanár –a csoport ismeretében– válasszon közülük egyet-kettőt! A többit otthoni megoldásra javasolhatja.

9. Ha $2^{x}=a$ és $3^{x}=b$, akkor mivel egyenlő 36^{x}?

Megoldás: $36^{x}=4^{x}\cdot 9^{x}=\left(2^{x}\right)^{2}\cdot\left(3^{x}\right)^{2}=a^{2}\cdot b^{2}$

10. Ha $2^{x}=a$ és $3^{x}=b$, akkor mivel egyenlő $4^{x}+2\cdot 6^{x}+9^{x}$?

Megoldás: $4^{x}+2\cdot 6^{x}+9^{x}=\left(2^{x}\right)^{2}+2\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+\left(3^{x}\right)^{2}=\left(2^{x}+3^{x}\right)^{2}=(a+b)^{2}$

11. Ha $2^{x}=3$, akkor mivel egyenlő $(8^{x}-4^{x})(2^{-x}+1)$?

Megoldás: $(8^{x}-4^{x})(2^{-x}+1)=\left[\left(2^{x}\right)^{3}-\left(2^{x}\right)^{2}\right]\cdot\left(\dfrac{1}{2^{x}}+1\right)=\left(3^{3}-3^{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}+1\right)=18\cdot\dfrac{4}{3}=24$

12. Ha $3^{x}=2$ és $3^{y}=5$, akkor mivel egyenlő $3^{y-x}+(3^{3x}-3^{y})^{x}$?

Megoldás: $3^{y-x}+(3^{3x}-3^{y})^{x}=\dfrac{3^{y}}{3^{x}}+\left[\left(3^{x}\right)^{3}-3^{y}\right]^{x}=\dfrac{5}{2}+(8-5)^{x}=\dfrac{5}{2}+3^{x}=\dfrac{5}{2}+2=\dfrac{9}{2}$

Módszertani megjegyzés: Az előző feladatok megoldása után talán már könnyebben meg tudják oldani a tanulók az alábbi exponenciális egyenleteket. Itt még ne nevezzük így ezeket az egyenleteket!

Az egyenletek gyökének ellenőrzését nem írtuk le, és nem tettünk rá utalást sem. Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy a kapott gyököt (gyököket) behelyettesítéssel ellenőrizzék, így van esélyük arra, hogy az egyenlet átalakítása során vétett számolási hibát észrevegyék.
A tanárok sem egységesek abban a tekintetben, hogy az egyenlet megoldása során alkalmazott függvény melyik tulajdonságára hivatkozva jussanak az eredeti egyenlettel azonos megoldáshalmazú egyenlethez. Pl. $2^x = 4 \iff x = 2$. Az ekvivalenciát indokolhatjuk a következőképpen: Mert a 2-es alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelműen képezi le a valós számok halmazát a pozitív számok halmazára.
De indokolhatjuk így is: Mert a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton a valós számok halmazán.
Másik példa: $\log_2 x = 3 \iff x = 8$. Indokolhatunk a 2-es alapú logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésével, vagy a szigorúan monoton tulajdonságával, de a 2-es alapú exponenciális függvény ugyanezen tulajdonságaival és a logaritmus definíciójával is, hiszen $\log_2 x = 3 \iff 2^{\log_2 x} = 2^3$, és mivel a 2-es alapú logaritmus definíciója szerint $2^{\log_2 x} = x$, így $x = 8$.
Ebben az anyagban az ilyen esetekben az indoklást nem írjuk le, végezze a tanár az eddigi tanári gyakorlata szerint.

13. Milyen *x* egész számra igaz az egyenlőség?

a. $2^x \cdot 8^x \cdot 16^x = 4^4$; b. $3^{2010} + 9^{1005} + 27^{670} = 3^x$;

c. $2 \cdot 5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} - 2^6 \cdot 5^x = 25$.

Megoldás:

a. $2^x \cdot 8^x \cdot 16^x = 4^4$

$2^{8x} = 2^8 \iff x = 1$

b. $3^{2010} + 9^{1005} + 27^{670} = 3^x$

$3^{2010} + 3^{2010} + 3^{2010} = 3^x$

$3 \cdot 3^{2010} = 3^x$

$3^{2011} = 3^x \iff x = 2011$

c. $2 \cdot 5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} - 2^6 \cdot 5^x = 25$

$50 \cdot 5^x + 15 \cdot 5^x - 64 \cdot 5^x = 25$

$5^x = 25 \iff x = 2$

Módszertani megjegyzés: A következő két feladat segít előkészíteni a hatvány fogalmának kiterjesztését tört kitevőre.

14. A 2-nek hányadik hatványával egyenlő $\sqrt{2^{100}}$?

*Megoldás***:** $\sqrt{2^{100}}$ pozitív számot jelöl. $\left(\sqrt{2^{100}}\right)^2 = 2^{100}$, és $\left(2^{50}\right)^2 = 2^{100}$, így a kifejezés a 2-nek 50. hatványával egyenlő.

15. Az $5^{(5^5)}$ ötödik gyöke mivel egyenlő?

*Megoldás***:** $5^{(5^5)} = 5^{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}$. Mivel $\left(\sqrt[5]{5^{(5^5)}}\right)^5 = 5^{(5^5)}$, továbbá $\left(5^{5\cdot5\cdot5\cdot5}\right)^5 = 5^{(5^5)}$, és a páratlan kitevőjű hatványfüggvények hozzárendelése kölcsönösen egyértelmű, így az $5^{(5^5)}$ kifejezés ötödik hatványa $5^{(5^4)}$-nel egyenlő.

II. TEREMTSÜNK RENDET!

Módszertani megjegyzés: A hatvány fogalmának kiterjesztése törtkitevőre nem könnyű anyagrész a tanulók számára. Ez a foglalkozás a tanulói ismeretek elmélyítését célozza meg feladatokon keresztül. Célszerű biztosítani a diákok számára –amennyire lehet– az önálló munka lehetőségét. Így a feladatok megoldása során minden tanuló lemérheti, hogy ebben a témakörben mennyire biztosak már az ismeretei.

Módszertani megjegyzés: Mielőtt a feladatokat kitűznénk, érdemes a tanulókkal végiggondoltatni, hogy milyen számnak milyen kitevőjű hatványát értelmezték már.

A foglalkozásra szánt első négy feladatot egyszerre adjuk fel, és csak miután minden tanuló kialakított valamilyen véleményt, akkor célszerű együtt megbeszélni a megoldást.

16. Az alábbi 4 állítás mindegyike valós számok hatványaira vonatkozik. Melyik állítás hamis?

A: Negatív számnak értelmezzük a negatív egész kitevőjű hatványát.

B: Negatív szám nulladik hatványa pozitív.

C: Negatív számnak értelmezzük a $\frac{2}{4}$ kitevőjű hatványát.

D: Negatív számnak a negatív páratlan kitevőjű hatványa is negatív.

Megoldás: A **C** állítás hamis.

17. Melyik állítás hamis? „Ha egy valós szám ...

A: megegyezik a (-1)-edik hatványával, akkor a szám abszolútértéke 1.”

B: nulladik hatványa 1, akkor a szám nem egyenlő nullával.”

C: pozitív kitevőjű hatványa nulla, akkor a szám csak nulla lehet.”

D: páros kitevőjű hatványa pozitív, akkor a szám is pozitív.”

Megoldás: A **D** válasz a hamis.

18. Hány olyan x egész szám van, amelyre az $f(x) = (-5)^{\frac{4}{x}}$ kifejezés értelmezhető?

Megoldás: Negatív számnak csak egész kitevőjű hatványa értelmezett, ezért azok az x egész számok a megoldások, amelyekre a $\frac{4}{x}$ kifejezés értéke egész. Ez 4, 2, 1, –1, —2 és –4 esetén áll fenn. A kifejezés tehát 6 egész számra értelmezhető.

19. Döntsd el, hogy az alábbi kifejezések közül melyeket nem értelmezzük! Amelyeket értelmeztük, annak add meg a tízes számrendszerbeli alakját!

$$\frac{(-1)^{-3}}{2},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3},\ (\sqrt{2})^{-4},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}},\ -\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}},\ \left(2-\frac{7}{3}\right)^{0,1},\ \pi^{0}$$

Megoldás:

$\frac{(-1)^{-3}}{2}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=-8$; $(\sqrt{2})^{-4}=\frac{1}{4}=0{,}25$;

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ kifejezést nem értelmezzük;

$-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}=-2$; $\left(2-\frac{7}{3}\right)^{0,1}$ kifejezést nem értelmezzük; $\pi^{0}=1$.

Módszertani megjegyzés: A 20. feladat megoldása után lehetőség nyílik annak tisztázására is, hogy pl. a lehető legbővebb halmazon értelmezett $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ és $g(x)=\sqrt[3]{x}$ függvények nem azonosak. Célszerű a két függvényt ábrázoltatni, majd utána az alábbi két egyenletet megoldatni: $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-2=0$ és $\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}-2=0$.

Az $x^{\frac{1}{3}}$-ra, illetve $\sqrt[3]{x}$-re másodfokú egyenletek megoldása 2 és (-1).

Az első egyenletnek csak egy megoldása van, a 8, míg a másodiknak kettő: a 8 és a (-1).

20. Az alábbi öt egyenlet közül válaszd ki azokat, amelyek minden pozitív valós számra teljesülnek! Döntésedet indokold!

a) $x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ b) $(-x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-x}$ c) $x^{x^{2}}=x^{2x}$

d) $(x^{x})^{2}=x^{2x}$ e) $5^{\frac{2}{x}}=\sqrt[x]{25}$

Megoldás:

a) $x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ egyenlet teljesül minden pozitív valós x-re, hiszen mind a két oldalon álló kifejezés értéke pozitív, és a két kifejezés harmadik hatványa egymással egyenlő.

b) $(-x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-x}$ A törtkitevőjű hatvány alapja negatív minden pozitív x-re. Mivel a negatív alapú törtkitevőjű hatványt nem értelmezzük, az egyenlet nem teljesül egyetlen pozitív számra sem.

c) $x^{x^2} = x^{2x}$ Az egyenlet nem teljesül minden pozitív számra, hiszen pl. $x = 3$ esetén $3^9 \neq 3^6$. Pozitív számok közül csak az 1 és a 2 megoldása az egyenletnek.

d) $(x^x)^2 = x^{2x}$ egyenlet teljesül minden pozitív valós x-re, hiszen ilyen számokra mindkét kifejezés értelmezve van, és a hatvány hatványozására vonatkozó azonosság szerint a két kifejezés értéke megegyezik.

e) $5^{\frac{2}{x}} = \sqrt[x]{25}$ A jobb oldali kifejezést csak 2, vagy annál nagyobb egész számokra értelmeztük, így az egyenlet nem teljesül minden pozitív számra.

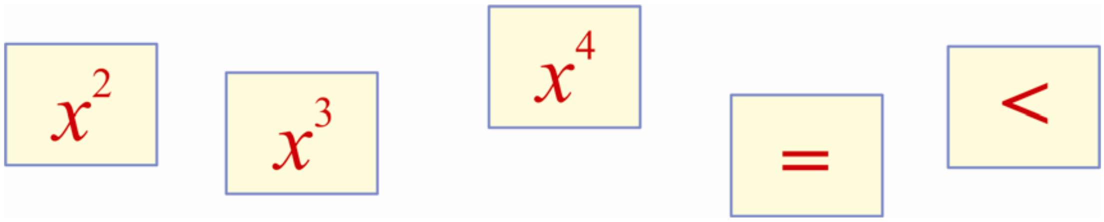
Módszertani megjegyzés: Ezen öt feladat megoldása után terveztessünk a tanulókkal egy olyan táblázatot, amelyből könnyen kiolvasható, hogy a valós számoknak milyen kitevőjű hatványát értelmeztük, és melyikét hogyan. A legjobban sikerült táblázatot készíttessük el csinos formában is, és sokszorosítsuk a tanulók számára, vagy vetítsük ki projektorral!

Összefoglaló táblázat: (Egy lehetséges megoldás)

a^x	x neg. irrac. szám	$x = -\frac{p}{q}$ $(p;q)=1$ $q \neq 1$	$x = -n$ $n \in \mathbf{Z}^+$	$x = 0$	$x = n$ $n \in \mathbf{Z}^+$	$x = \frac{p}{q}$ $(p;q)=1$ $q \neq 1$	x poz. irrac. szám
$a > 0$	Kettős közelí- tésse	$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	**1**	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ darab}}$	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$	Kettős közelí- tésse
$a = 1$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$a = 0$	—	—	—	—	**0**	**0**	**0**
$a = -1$	—	—	$= \begin{cases} 1, & ha\ n\ ps \\ -1, & ha\ n\ prl \end{cases}$	**1**	$= \begin{cases} 1, & ha\ n\ ps \\ -1, & ha\ n\ prl \end{cases}$	—	—
$a < 0$	—	—	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	**1**	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ darab}}$	—	—

Módszertani megjegyzés: Ha nem maradt idő a 21. feladat megoldására, adjuk fel otthoni munkára, és a következő foglalkozást a megoldás megbeszélésével kezdhetjük.

21. Öt kártya mindegyikére egy-egy kifejezést vagy relációjelet írtunk. A kártyák a következők:



A kártyákat két dobozba helyezzük el. Az 1. dobozba a kifejezéseket, a 2. dobozba a relációjeleket. Először az 1. dobozból húzunk egy kártyát, lerakjuk az asztalra, majd a 2. dobozból egy kártyát, és az előbbi mellé, jobbra helyezzük. Végül ismét az 1. dobozból húzunk egy kártyát, és azt a relációjeles kártya után rakjuk.

a) Hány különböző egyenletet, illetve egyenlőtlenséget kaphatunk így?

b) Oldd meg az így kapható egyenleteket a valós számok halmazán!

c) Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

I) $x^2 > x^3$; II) $x^3 > x^4$; III) $x^2 < x^4$.

d) Vázold egy koordináta-rendszerben az $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ és $h(x) = x^4$ függvények grafikonját a $[-1{,}5;\, 1{,}5]$ intervallumon!

e) Vázold a d) feladatban már felvett koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket is!

$j(x) = \sqrt{x}$, ahol $x \in \left[0;\, 2\frac{1}{4}\right]$; $k(x) = \sqrt[3]{x}$, ahol $x \in \left[-3\frac{3}{8}; 3\frac{3}{8}\right]$;

$m(x) = \sqrt[4]{x}$, ahol $x \in \left[0; 5\frac{1}{16}\right]$.

Válaszd ki az *f*, *g*, *h*, *j*, *k* és *m* függvények közül az inverzpárokat!

f) Írj fel olyan egyenlőtlenséget az e) feladatban megadott függvények kifejezéseinek felhasználásával, amelynek a megoldáshalmaza:

i) $[0;1]$; ii) $]0;1]$; iii) $\{0\} \cup [1;+\infty[$.

Módszertani megjegyzés: Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy a d) kérdésbeli függvények ábrázolásakor vegyék figyelembe a c) alatti egyenlőtlenségek megoldását!

Az f) feladat második és harmadik kérdése már nehezebb. Segítő kérdés lehet pl.: Milyen művelet nem végezhető el a nullával? Vagy egy másik segítség: A nullával bármilyen számot megszorzunk, a szorzat nulla lesz.

Megoldás:

a) 3 egyenletet és 6 egyenlőtlenséget kaphatunk.

b) $x^2 = x^3$ | $x^2 = x^4$ | $x^3 = x^4$

$0 = x^2(x-1)$ | $0 = x^2(x^2-1)$ | $0 = x^3(x-1)$

$x = 0$ vagy $x = 1$ | $0 = x^2(x-1)(x+1)$ | $x = 0$ vagy $x = 1$

$x = 0$ vagy $x = 1$ vagy $x = -1$

c) I) $x^2 > x^3$

$0 > x^2(x-1)$

A 0 nem megoldása az egyenlőtlenségnek. Ha $x \neq 0$, akkor $x^2 > 0$, így az egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha

$0 > x-1$ és $x \neq 0$

$1 > x$ és $x \neq 0$

Az I) egyenlőtlenség megoldása: A nulla kivételével minden 1-nél kisebb valós szám.

II) $x^3 > x^4$

$0 > x^3(x-1)$

$\left.\begin{matrix} x^3 < 0 \\ 0 < x-1 \end{matrix}\right\}$ vagy $\left.\begin{matrix} 0 < x^3 \\ x-1 < 0 \end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix} x < 0 \\ 1 < x \end{matrix}\right\}$ vagy $\left.\begin{matrix} 0 < x \\ x < 1 \end{matrix}\right\}$

A II) egyenlőtlenség megoldása: Minden nullánál nagyobb és 1-nél kisebb valós szám.

III) $x^2 < x^4$

$0 < x^2(x^2-1)$

A nulla nem megoldása az egyenlőtlenségnek. Ha $x \neq 0$, akkor $x^2 > 0$, így az egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha

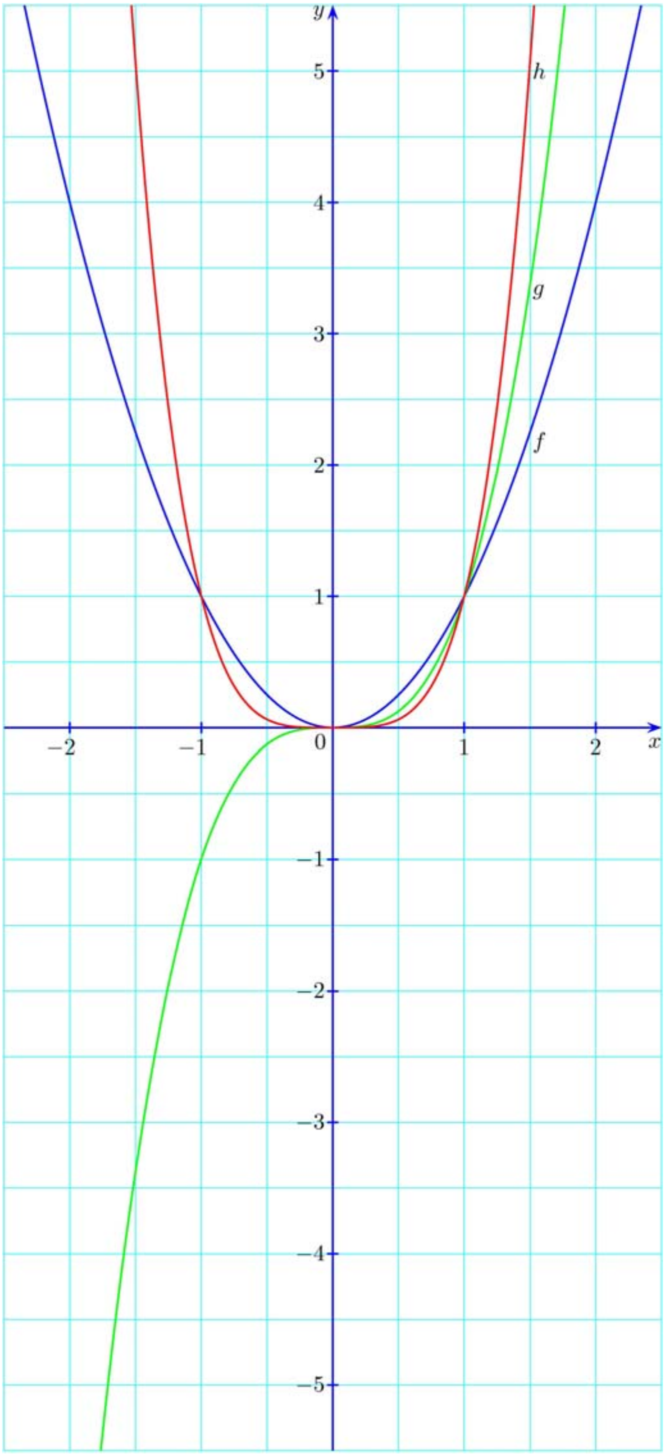
$0 < x^2 - 1$ és $x \neq 0$

$1 < x^2$ és $x \neq 0$

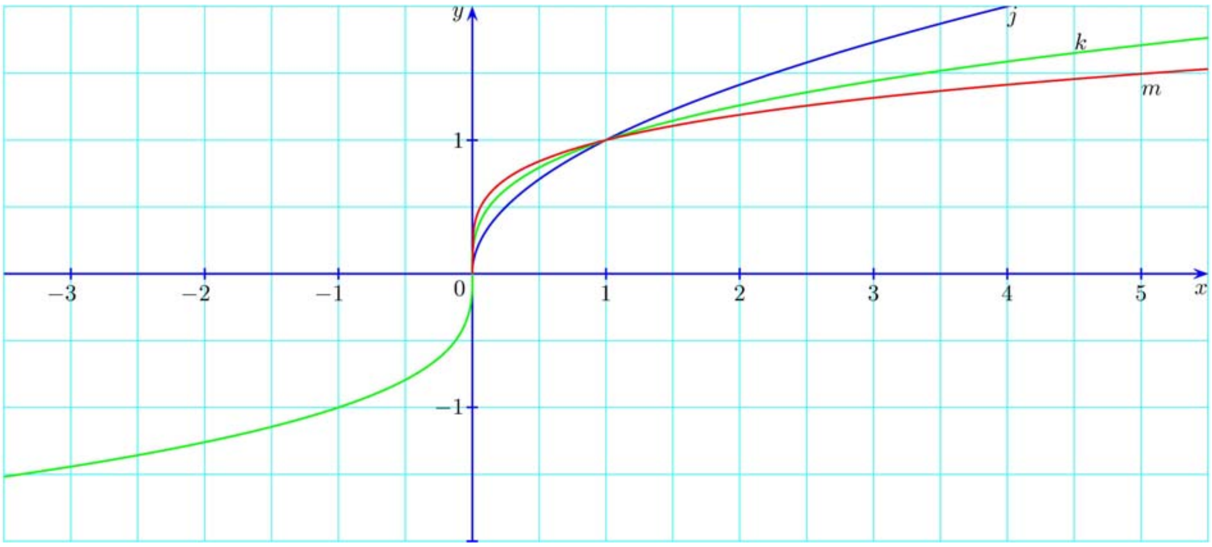
$x < -1$ vagy $1 < x$

A III) egyenlőtlenség megoldása: Minden –1-nél kisebb vagy 1-nél nagyobb valós szám.

d)



e)



Inverz függvények: csak a *g* és *k*.

f) i) $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x} \geq \sqrt{x}$ egyenlőtlenségek közül bármelyik.

ii) Pl. $\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$

iii) Pl. $\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-1\right) \geq 0$