MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

1. modul
Mennyire lehetséges?

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A valószínűségszámítási ismeretek bővítése. Eseményalgebra
Időkeret	3 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Biológia, fizika, szociológia Szűkebb környezetben: Kombinatorika Ajánlott megelőző tevékenységek: A valószínűségszámítás klasszikus modellje, binomiális eloszlás Ajánlott követő tevékenységek: Hatvány fogalmának kiterjesztése
A képességfejlesztés fókuszai	Kombinativitás, valószínűségi következtetés, mennyiségi következtetés, érvelés, bizonyítás

AJÁNLÁS

A 11-edikesek délutáni matematika foglalkozására készült C modulok eltérnek az eddigiektől. Most már a legfontosabb cél, a középszintű érettségire való felkészítés segítése, az önálló tanulói munka előtérbe helyezése. A foglalkozások tananyagtartalmukban szorosan követik a délelőtti matematika órán tanultakat.

Ez a modul a tanterv első témaköréhez (Kombinatorika, valószínűségszámítás) kapcsolódó. Mindhárom foglalkozás segít elmélyíteni a tananyagbeli fogalmakat, ismereteket, a kombinatorikus gondolkodásmód elsajátítását. Az önálló tanulói munka mellett, amikor módszertanilag indokolt, a csoportfoglalkozásra is lehetőség nyílik. A 3. foglalkozásra tervezett játék szinte „észrevétlenül” támogatja az előbb említett célkitűzéseinket.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Esemény, esemény hátán**
2. foglalkozás: **Lottó és társai**
3. foglalkozás: **Feladatvásár**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Esemény, esemény hátán			
1	Események között értelmezett művelete, biztos és lehetetlen esemény.	Metakogníció, rendszerezés, problémamegoldás	Feladatlap: 1–4. feladat
2	Eseményalgebra (tesztfeladatok megoldása).	Ismeretek elmélyítése, rendszerezése, érvelés, bizonyítás, prezentáció	Feladatlap: 5–14. feladat
II. Lottó és társai			
1	Ismerkedés a „HÚZHATOD” szerencsejátékkal.	Kombinativitás, valószínűségi következtetés, mennyiségi következtetés, érvelés, bizonyítás	Feladatlap: 1–5. feladat
III. Feladatvásár			
1	Játék, sok feladattal. Tanári előkészítés szükséges: fénymásolás 33 boríték	Kombinativitás, valószínűségi következtetés, mennyiségi következtetés, érvelés, bizonyítás, kreativitás	Feladatlapok, 1, 3 és 5 petákos feladatok (Tanári kézikönyvben)

I. ESEMÉNY, ESEMÉNY HÁTÁN

Módszertani megjegyzés: Eseményalgebrával a tanulók a 10-edik osztályban ismerkedtek meg. Most – feladatokon keresztül – felelevenítjük az akkor megismert műveleteket (események szorzata, összege, és az esemény komplementere). Az első feladat lehetőséget nyújt annak megbeszélésére is, hogy egy racionális szám tizedestört-alakja mikor véges. (Ez akkor teljesül, ha a számláló és a nevező relatív prímek, a nevező nagyobb, mint 1, és a nevező törzstényezős felbontásában csak két prímszám fordul elő: a 2 és/vagy az 5.

1. Az $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{19},\frac{1}{20}$ törtek mindegyikét egy-egy cédulára írjuk. Az így kapott 19 cédula közül egyet véletlenszerűen kihúzunk.

Az *A* esemény pontosan akkor következik be, ha a kihúzott cédulán lévő szám tizedestört-alakja véges, a *B* esemény pedig pontosan akkor, ha a kihúzott cédulán lévő szám reciproka prímszám.

I. Hányféleképpen következhet be az *A* esemény?

II. Hányféleképpen következhet be az *B* esemény?

III. Fogalmazd meg, hogy milyen eseményeket jelölnek az alábbi események, és számítsd ki, hogy hányféleképpen következhetnek be!

a) AB b) $A+B$ c) $\overline{A}$ d) $A\,\overline{B}$ e) $\overline{A}+B$ f) $\overline{AB}$

Megoldás:

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$
Tizedes tört:	**0,5**	$0,\dot{3}$	**0,25**	**0,2**	$0,1\dot{6}$	$0,\dot{1}4285\dot{7}$	**0,125**	$0,\dot{1}$	**0,1**	$0,\dot{0}\dot{9}$
Reciprok:	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**

$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{20}$
$0,08\dot{3}$	$0,\dot{0}7692\dot{3}$	$0,0\dot{7}1428\dot{5}$	$0,0\dot{6}$	**0,0625**	$0,0\dot{5}882\dot{3}$	$0,0\dot{5}$	$0,0\dot{5}263\dot{1}$	**0,05**
12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20

I. Az A esemény 7-féleképpen következhet be.

II. A B esemény is 7-féleképpen következhet be.

III. A kihúzott racionális szám

a) véges tizedestört és a reciproka prímszám. Ez az esemény 2-féleképpen következhet be;

b) a két tulajdonság közül (véges tizedestört, illetve a reciproka prímszám) legalább az egyik teljesül. Ez az esemény 12-féleképpen következhet be;

c) szakaszosan végtelen tizedestört. Ez az esemény 12-féleképpen következhet be;

d) véges tizedestört és a reciproka nem prímszám. Ez az esemény 5-féleképpen következhet be;

e) a két tulajdonság közül (szakaszosan végtelen tizedestört, illetve a reciproka prímszám) legalább az egyik teljesül. Ez az esemény 14-féleképpen következhet be;

f) a két tulajdonság közül (szakaszosan végtelen tizedestört, illetve a reciproka nem prímszám) legalább az egyik teljesül. Ez az esemény 17-féleképpen következhet be.

2. Hat pénzérmét dobtunk fel. Válaszd ki a biztos és a lehetetlen eseményeket! Választásodat indokold!

a) A fejek száma több mint az írásoké.

b) Nincs fej köztük.

c) A fejek és az írások száma is páros

d) A fejek és az írások száma is prím.

e) A fejek száma hárommal több az írásokénál.

f) A fejek és írások számának különbsége páros szám.

Megoldás:

a) Egyik sem: pl. FFFFII, de FFFIII.

b) Egyik sem: pl. IIIIII, de FFIIII.

c) Egyik sem: pl. FFIIII, de FIIIII.

d) Egyik sem: pl. FFFIII, de FIIIII.

e) Lehetetlen esemény, hiszen csak 6 érménk van! (Ha *f* a fejek száma, és *i* az írások száma, akkor az $(i+3)+i=6$ egyenletnek nem egész szám a megoldása.)

f) Biztos esemény, mert $6-0, 5-1, 4-2, 3-3$ mindegyike páros szám.

3. Andrásnak Balázs a következőt ajánlja: Ő mond két játékszabályt, ezek közül András választ, hogy melyik szerint fognak játszani. (Minden játék után van nyertes.)

A szabályok:

Az első szerint mindketten feldobnak egy-egy dobókockát és András nyer, ha kisebbet dobott, mint Balázs. A másik szabály szerint egyikük három érmét feldob és András nyer, ha a fejek száma több az írások számánál.

Mit tanácsolnál Andrásnak, melyik szabályt válassza?

Megoldás:

Az első esetben: a 36 lehetőség közül 15 kedvező András számára, hiszen 6-féleképpen dobhatnak ugyanakkora számot, és a maradék 30 esetben éppen annyiszor fordul elő, hogy András dobott száma kisebb, mint Balázsé, mint az, hogy nagyobb. Ebben az esetben Andrásnak $\frac{15}{36} \approx 41{,}7\%$ az esélye a nyerésre.

A második esetben: A 8 lehetőség közül éppen 4 kedvező András számára: FFF, FFI, FIF, IFF. Ebben az esetben 50% az esélye a nyerésre.

A második szabály szerinti játék kedvezőbb Andrásnak.

4. Kata három barátnőjét, Annát, Borit és Cilit várja látogatóba. Jelölje *A*, *B*, *C* rendre azokat az eseményeket, hogy Anna, Bori illetve Cili meglátogatja Katát!

I. Mit jelentenek az alábbi események: $A+B$, $A\cdot B$, $B\cdot\overline{C}$?

II. Add meg az eseményalgebra jelöléseivel az alábbi eseményeket!

a) Mindhárman meglátogatják Katát.

b) Barátnői közül van Katának látogatója.

c) Legalább két látogatója van Katának.

d) Legfeljebb két látogatója van .

e)* Pontosan egy látogatója van.

Megoldás:

I. Az $A+B$ esemény: Anna és Bori közül legalább egyikük meglátogatja Katát.

Az AB esemény: Kati és Bori is meglátogatja Katát.

Az $A\cdot B\cdot\overline{C}$ esemény: Bori meglátogatja Katát, de Cili nem.

II. a) ABC

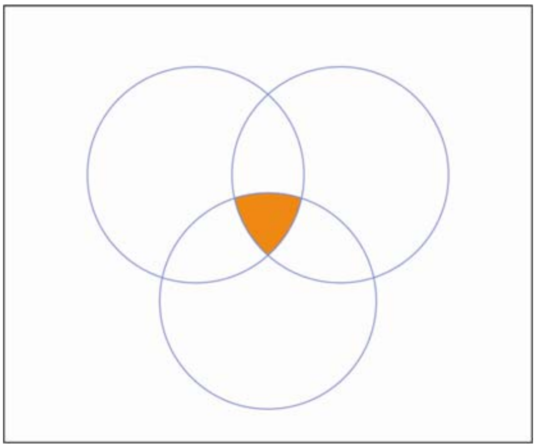
b) $A+B+C$

c) $AB+AC+BC$

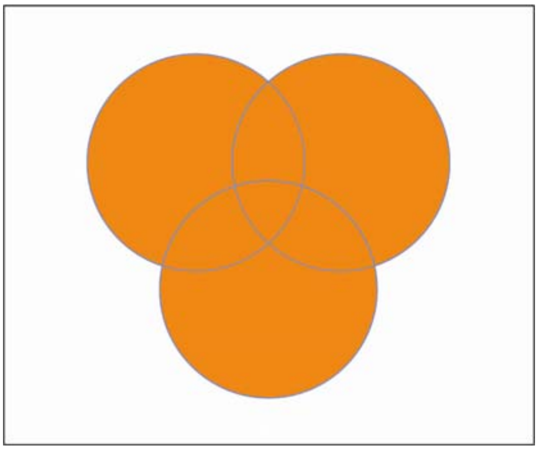
d) $\overline{ABC}$

e)* $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{A}\cdot\overline{C}+C\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}$

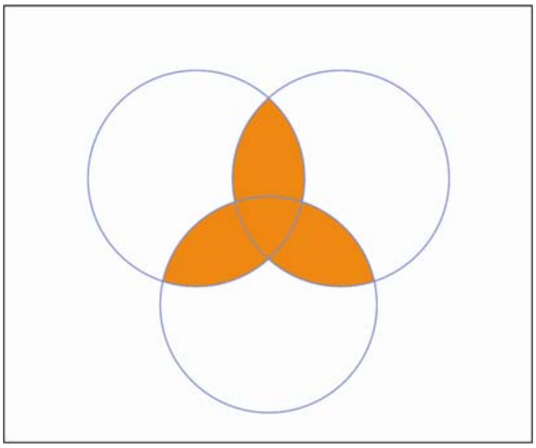
Az alábbi ábrákon a színes területek jelzik az eseményeknek megfelelő halmazokat.



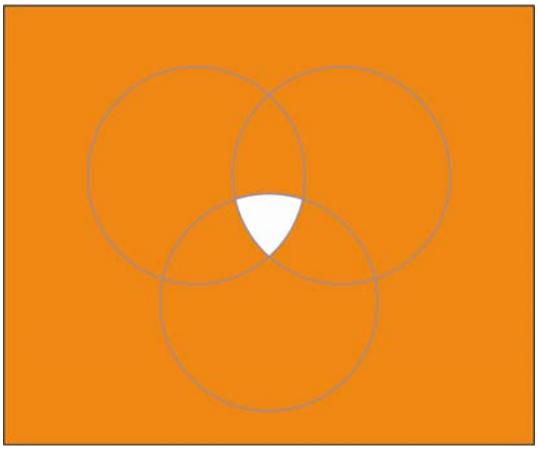
a)



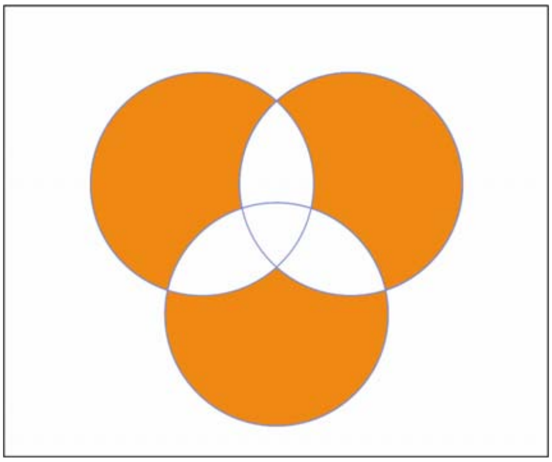
b)



c)



d)



e)

A következő tíz feladat mindegyikében 4 válasz van, és közülük pontosan egy igaz. Add meg az általad igaznak vélt választ, és karikázd be a betűjelét!

Minden feladatban ugyanazt az eseményt jelentik a következők:
A: Anna szemüveges; *B*: Bori szemüveges; *C*: Cili szemüveges.

Módszertani megjegyzés: A tesztfeladatokban a helyes válasz betűjelét aláhúzással jelöltük. A megoldásokat indokolhatjuk Venn-diagrammal, a matematika logika fogalmainak alkalmazásával (van olyan, minden), de Morgan-azonosságok felhasználásával is. Mindhárom indoklási módra a **11.** feladat megoldásában adtunk példát.

5. Melyik jelöli azt az eseményt, hogy mindhárman szemüvegesek?

a) $A+B+C$ b) $A\cdot B\cdot C$ c) $A\cdot B+C$

d) Az esemény nem írható fel sem az a), sem a b), sem a c) válasz szerint.

6. Melyik jelöli azt az eseményt, hogy Anna szemüveges, de Cili nem?

a) $A\cdot\overline{C}$ b) $\overline{A\cdot C}$ c) $A+\overline{C}$

d) Az esemény nem írható fel sem az a), sem a b), sem a c) válasz szerint.

7. Melyik jelöli azt az eseményt, hogy Anna szemüveges, ám Bori és Cili egyike sem?

a) $A+\overline{B}+\overline{C}$ b) $A\cdot\overline{B\cdot C}$ c) $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$

d) Az esemény nem írható fel sem az a), sem a b), sem a c) válasz szerint.

8. Mit jelent az $A(B+C)$ esemény?

a) Ha Bori szemüveges, akkor Cili nem.

b) Anna és a másik két lány közül az egyik szemüveges.

c) A lányok között legalább két szemüveges van.

<u>d)</u> Annával együtt legalább ketten szemüvegesek.

9. Mi az $A+B+C$ esemény jelentése?

a) Ha Bori szemüveges, akkor Anna nem.

b) Közülük pontosan egy szemüveges.

<u>c)</u> Legalább az egyikük szemüveges.

d) Vagy csak Anna, vagy csak Bori, vagy csak Cili szemüveges.

10. Mit jelent az $A \cdot \overline{B} \cdot C$ esemény?

a) Anna szemüveges, a többiek nem.

b) csak Anna és Cili szemüveges.

c) Anna szemüveges, és Bori és Cili egyike is.

d) közülük pontosan egy nem szemüveges.

11. Hogyan fogalmaznád meg az $\overline{A \cdot B \cdot C}$ eseményt?

a) egyikük sem szemüveges.

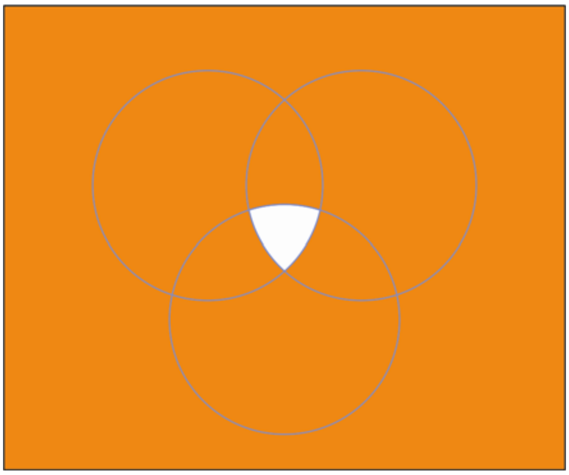
b) pontosan ketten szemüvegesek.

c) pontosan egy szemüveges közülük.

d) a három lány között van olyan, aki nem szemüveges.

Indokolási módok:

1. Venn-diagrammal:



2. Az $\overline{A \cdot B \cdot C}$ esemény jelentése az, hogy nem igaz, hogy Anna is, Bori is és Cili is szemüveges, tehát van olyan közöttük, aki nem szemüveges.

3. Mivel $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, és ez azt jelenti, hogy legalább az egyik lány közülük nem szemüveges.

12. Az $\overline{A + B + C}$ esemény jelentése:

a) Közülük pontosan egy szemüveges.

b) Közülük senki sem szemüveges.

c) Közülük pontosan ketten szemüvegesek.

d) Nem felel meg sem az a), sem a b), sem a c) válaszoknak.

13. Mit takar az $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ állítás?

a) Van olyan köztük, aki nem szemüveges.

b) Egyikük sem magas.

c) Pontosan egy olyan van, aki nem szemüveges.

d) Nem felel meg sem az a), sem a b), sem a c) válaszoknak.

14. Jelölje *A, B, C, D* a következő eseményeket: *A*: András éhes, *B*: Balázs éhes, *C*: Csaba éhes, *D*: Dani éhes. Ekkor az $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}}$ esemény jelentése:

a) Nincs éhes a fiúk között.

b) Van éhes a fiúk között.

c) Mind a négyen éhesek.

d) Nem felel meg sem az a), sem a b), sem a c) válaszoknak.

II. LOTTÓ ÉS TÁRSAI

Módszertani megjegyzés: Ezen a foglalkozáson a „HÚZHATOD!" szerencsejátékkal ismerkedhetnek meg a tanulók. A játék kapcsán mód és lehetőség nyílik a már ismert fogalmak elmélyítésére.
A játékszabály ismertetése után minden tanulóval töltessük ki a tanulói munkafüzetben található játékszelvényt. Ezután sorsoljunk! Nézzük meg, hogy volt-e nyertes szelvény, majd ismételjük meg a sorsolást! A sorsolást sokszor hajtsuk végre. A sorsolások eredményeit írjuk fel a táblára.

„HÚZHATOD!" szerencsejáték leírása: A szelvényen egy 4x5-ös mezőben 1-20-ig vannak feltüntetve a számok. A játékosnak a szelvényen hat számot kell megjelölnie. A sorsoláson a 20 szám közül 6 számot húzunk ki. Nyereményre jogosít az a szelvény, amelyen legalább 2, legfeljebb 6 találatot ért el a fogadó.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

Módszertani megjegyzés: A szelvények kitöltése után kérdezzük meg, hogy legfeljebb hány szelvényt lehet kitölteni úgy, hogy a kitöltött szelvényeken minden szám legfeljebb egyszer legyen megjelölve? (Skatulyaelv, legfeljebb 3-at).
A sorsolások végrehajtása után számoltassuk ki a kihúzott számok gyakoriságát!

1. Határozd meg, hogy az *n* darab sorsoláson melyik szám milyen gyakorisággal fordult elő!

Szám:	Gyakoriság:	Szám:	Gyakoriság:	Szám:	Gyakoriság:	Szám:	Gyakoriság:
1		**6**		**11**		**16**	
2		**7**		**12**		**17**	
3		**8**		**13**		**18**	
4		**9**		**14**		**19**	
5		**10**		**15**		**20**	

Módszertani megjegyzés: (Az érdeklődők a www.net.szerencsejatek.hu cím alatt megtekinthetik az ötöslottó és a hatoslottó nyertes számainak gyakoriságát.
Az egyes sorsolások alkalmával feljegyezték a nyertes szelvények számát is. Becsüljék meg a tanulók, hogy egy szelvénnyel játszva, a 0-tól 6-ig találatok közül vajon hány találat elérésének legnagyobb a valószínűsége? Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy nyerek, vagy annak, hogy nem nyerek? A becslések elhangzása után oldják meg a tanulók a **2.**, **3.** és **4.** feladatot.

2. Számold ki, hogy hány szelvény kitöltése esetén lenne biztosan 6 találatunk!

Megoldás: $\binom{20}{6} = 38760$

Módszertani megjegyzés: Ha van a tanulók szelvényei között nyertes, akkor azt a sorsolási eredményt, amelyikkel ezt elérte, hagyjuk fenn a táblán, a többit töröljük le. Ha nincs, akkor válasszunk ki egyet, és nevezzük azt az e heti sorsolás nyertes számainak, és azt hagyjuk a táblán. Ezen a héten tehát ezeket a számokat húzták ki. Így a tanulók könnyebben tudják összeszámolni a **3.** feladatban megadott események kedvező kimeneteleinek számát.

3. Ezen a héten egy szelvénnyel játszom. Mekkora a valószínűsége, hogy a találataim száma
a) hat? b) öt? c) négy? d) három? e) kettő? f) egy? g) nulla?

Megoldás:

1.megoldás:

a) $\mathbf{P}\ (a) = \dfrac{1}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}0000257$

b) $\mathbf{P}\ (b) = \dfrac{6 \cdot 14}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}002167$

c) $\mathbf{P}\ (c) = \dfrac{\binom{6}{4} \cdot \binom{14}{2}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}0352$

2. megoldás:

$\mathbf{P}(a) = \binom{6}{6} \cdot \dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{5}{19} \cdot \dfrac{4}{18} \cdot \dfrac{3}{17} \cdot \dfrac{2}{16} \cdot \dfrac{1}{15} \approx 0{,}0000257$

$\mathbf{P}\ (b) = \binom{6}{5} \cdot \dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{5}{19} \cdot \dfrac{4}{18} \cdot \dfrac{3}{17} \cdot \dfrac{2}{16} \cdot \dfrac{14}{15} \approx 0{,}002167$

$\mathbf{P}\ (c) = \binom{6}{4} \cdot \dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{5}{19} \cdot \dfrac{4}{18} \cdot \dfrac{3}{17} \cdot \dfrac{14}{16} \cdot \dfrac{13}{15} \approx 0{,}0352$

d) $\mathbf{P}\ (d) = \dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{14}{3}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}1878$ $\qquad$ $\mathbf{P}\ (d) = \binom{6}{3}\cdot\dfrac{6}{20}\cdot\dfrac{5}{19}\cdot\dfrac{4}{18}\cdot\dfrac{14}{17}\cdot\dfrac{13}{16}\cdot\dfrac{12}{15} \approx 0{,}1878$

e) $\mathbf{P}\ (e) = \dfrac{\binom{6}{2}\cdot\binom{14}{4}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}3874$ $\qquad$ $\mathbf{P}\ (e) = \binom{6}{2}\cdot\dfrac{6}{20}\cdot\dfrac{5}{19}\cdot\dfrac{14}{18}\cdot\dfrac{13}{17}\cdot\dfrac{12}{16}\cdot\dfrac{11}{15} \approx 0{,}3874$

f) $\mathbf{P}\ (f) = \dfrac{\binom{6}{1}\cdot\binom{14}{5}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}3099$ $\qquad$ $\mathbf{P}\ (f) = 6\cdot\dfrac{6}{20}\cdot\dfrac{14}{19}\cdot\dfrac{13}{18}\cdot\dfrac{12}{17}\cdot\dfrac{11}{16}\cdot\dfrac{10}{15} \approx 0{,}3099$

g) $\mathbf{P}\ (g) = \dfrac{\binom{14}{6}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}0775$ $\qquad$ $\mathbf{P}\ (g) = \dfrac{14}{20}\cdot\dfrac{13}{19}\cdot\dfrac{12}{18}\cdot\dfrac{11}{17}\cdot\dfrac{10}{16}\cdot\dfrac{9}{15} \approx 0{,}0775$

4. Ezen a héten is egy szelvénnyel játszom. Mekkora a valószínűsége, hogy nyertes leszek?

Megoldás: $\mathbf{P} = \mathbf{P}\ (f) - \mathbf{P}\ (g) \approx 1 - 0{,}3099 - 0{,}0775 = 0{,}6126$.

Módszertani megjegyzés: A kiszámolt valószínűségeket tanulságos összehasonlítani. Kiderült, hogy annak a valószínűsége, hogy nyerek nagyobb, mint annak, hogy nem nyerek. Vegyék észre, hogy a 2-es találat valószínűsége éppen ötszöröse, a 3-as találaté pedig $\dfrac{80}{33}$-szorosa a nulla találat valószínűségének!

5. Egy baráti társaság külön játékot játszik a „HÚZHATOD!” szelvényeinek felhasználásával. A játékosoknak most is hat számot kell megjelölniük, de az ő játékukban sorsolás a következőképpen történik: Négy szám közül (I, II, III, és IV) húznak ki hatszor visszatevéssel egy-egy számot. A kihúzott római számok a szelvény oszlopait jelölik. Nyertes az a szelvény, amelyen a megjelölt számok éppen azokban az oszlopokban vannak, amelyeket a sorsoláskor kihúztak. Pl. Ha a sorsoláskor kihúzott számok: I, I, IV, III, III, II., ekkor nyertes szelvény például a: 3, 5, 6, 8, 11, 17 számokkal megjátszott, hiszen két szám (az 5 és 17) az I. oszlopban szerepel, kettő(a 3 és 11) a III.-ban, egy szám (a 6-os) a II.-ban és egy szám (a 8-as) a IV.-ben. Ha a sorsoláskor hatszor ugyanazt a számot húzzák ki, a sorsolás érvénytelen, és ekkor újból végrehajtják a sorsolást.

a) A példában szereplő sorsolás esetén (I, I, IV, III, III, II) legfeljebb hány különböző nyertes szelvény lehet?

b)* Ha két érvényes sorsolásban a kisorsolt római számok csak sorrendben különböznek, akkor a két sorsolás azonos. Hányféle lehet az érvényes sorsolások száma?

c)* Ha minden héten egyszer sorsolnak, előfordulhat-e, hogy másfél éven keresztül nincs két olyan sorsolás, amelyen azonos a sorsolás eredménye?

d)* Mekkora a valószínűsége, hogy egy sorsolás érvénytelen lesz?

A *-gal jelölt feladatokat csak akkor tűzzük ki, ha a tanulók tanulták az ismétléses kombinációk számának meghatározását.

Megoldás:

a) $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 2500$

b)* Négy szám közül kell kiválasztani 6-szor egy-egy számot úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. E sorsolások száma a négy elem hatodosztályú ismétléses kombinációinak számával megegyező, azaz $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$. De ezek között ott vannak azok az esetek, amikor hatszor ugyanazt a számot húzzuk ki, és ezek érvénytelen sorsolások. Ezek száma 4. Így 80 különböző érvényes sorsolás lehet.

c)* Egy évben 52 héttel számolva, másfél év alatt 78-szor sorsolnak. Mivel 80 különböző sorsolási eredmény lehet, tehát előfordulhat, hogy másfél éven keresztül nincs két azonos sorsolás.

d)* $\mathbf{P} = \frac{4}{84} \approx 0{,}0476$.

III. FELADATVÁSÁR

Módszertani megjegyzés: Ezen a foglalkozáson a tanulók „fizetést” is kapnak a munkájukért. Minden helyesen megoldott feladattal 1 vagy 3 vagy 5 petákot szerezhetnek. A foglalkozás végén árverésre kerül három tesztfeladat, és a válaszadási jog elnyeréséért licitálhatnak a tanulók. A játék alatt tegyük lehetővé, hogy minden tanuló önállóan dolgozhasson!

A játék menete:

Erre a foglalkozásra minden tanuló hozzon magával 3 szabályos dobókockát! A játék kezdetén a tanulók mindegyike végrehajt egy dobást a 3 kockával, és a dobott számokat feljegyzi. E három szám összege lesz annak az 1 petákos feladatnak sorszáma, amelyet a tanuló megkap a tanártól. Ha a feladatot jól megoldotta, megszerezte az 1 petákot, akkor újra dobhat a kockákkal. (A helyes megoldás végeredményét tízes számrendszerbeli alakban fogadjuk csak el! Ezt a játék elején közöljük a tanulókkal!) A dobott számok összege – ha különbözik az előző dobásokétól – egy újabb megoldandó feladat sorszámát adja meg. Ha a tanuló egy általa már megoldott feladat sorszámát kapná ismét, akkor újra dobhat. Ha a tanuló megoldása hibás, nincs javítási lehetősége, újból kell dobnia, és így egy másik feladat megoldásával próbálkozhat újra, hogy megszerezze a petákot. (Természetesen 1 dobókocka három egymás utáni feldobásával is megkaphatja a megfelelő feladatot, de 3 kockával gyorsabban megy a játék.

A petákok gyűjtésére a csoportnak meghatározott ideig van lehetősége. Ezt az időtartamot a tanár döntse el, hiszen függ a csoport létszámától, a tanulók felkészültségétől, munkatempójuktól. A megadott idő letelte után a diákok 2 kocka dobásával megismétlik a játékot, de most egy-egy feladat megoldásával 3 petákot szerezhetnek. Ekkor is előre megadott ideig gyűjthetik a petákokat.

Végül 1 kocka dobásával 5 petákos feladathoz juthatnak. Itt is előre adja meg a tanár, hogy mennyi ideig gyűjthetik az ötpetákosokat. Ha letelt az idő, minden tanuló számolja össze, hogy hány petákot gyűjtött! Az összmunkaidő ne haladja meg a 35 percet! Így lehetőség nyílik az utolsó 10 percben az árverésre.

Az árverés:

Előre közöljük a tanulókkal, hogy összesen 3 feladat kerül „kalapács alá”. Mindhárom esetben a feladat kérdésére 4 választ is megadunk, de közülük csak egy a helyes. Az árverés megkezdésekor felolvassa a tanár az első feladatot és a 4 lehetséges választ. Majd megmondja a feladat kikiáltási árát. Rövid töprengési időt hagyva, kezdődik a licitálás. A „Senki többet harmadszor?” kérdés elhangzása (illetve a képzeletbeli kalapács ütése) után már nem lehet tovább licitálni. A legtöbb petákot felajánló tanuló nyeri el a választás lehetőségét. Akár helyesen választ, akár nem a 4 válasz közül, a licit során felajánlott petákokat elveszti. Ha helyesen válaszol, akkor ő a mai foglalkozás „Első nyertese". (Ha van a tanárnak ideje, kedve egy tréfás oklevelet készíteni, akkor oklevelet is kap a diák. Az árverés folytatódik a második, majd a harmadik feladat ismertetésével, kikiáltási árával, licitálással. Így lehet, hogy lesz „Második nyertes" és „Harmadik nyertes" is. Ha egy tanulónak sikerül legalább kétszer nyertessé válnia, akkor ő „A nap győztese".

A kikiáltási ár összegét a tanár adja meg. Feltétlenül vegyük figyelembe, hogy a tanulók zöme hány petákot tudott begyűjteni. A kikiáltási ár lehetőleg alacsony legyen, hogy a kevés petákkal rendelkező tanulónak is legyen lehetősége a licitálásra.

A játék menetének ismeretében még inkább érthető, hogy miért fontos az önálló tanulói munka biztosítása. Ha hagyja a tanár, hogy a tanulók egymás mellett ülve dolgozzanak, könnyen előfordulhat, hogy ugyanolyan sorszámú feladatot kap két szomszéd, és az egyik esetleg érdemtelenül jut a jutalompetákhoz. Ez nagyon megronthatja a játék komolyságát.

Tanári előkészítő munka:

A mellékletben találhatók az 1, 3 és 5 petákos feladatok, illetve az árverésre szánt 3 feladat. Másolja le a tanár az 1 petákos feladatokat annyi példányban, ahány tagja van a csoportnak, majd vágja szét a másolatokat feladatonként, és az azonos sorszámú 1 petákos feladatokat helyezze egy borítékba. A 16 boríték mindegyikére írja rá a benne lévő feladat sorszámát, és azt, hogy 1 petákos. Hasonlóan járjon el a 3 és az 5 petákos feladatokkal is. Az egyes feladatok megoldását (végeredményét) írja ki egy lapra, hogy minél gyorsabban tudja ellenőrizni a tanulók által megmutatott megoldás helyességét. (A gondos előkészítés nagyon fontos, mert ha a tanár egyedül vezeti a foglalkozást, és a tanulók a könnyű 1 petákos feladatok megoldásával viszonylag gyorsan megbirkóznak, akkor a tanár ellenőrzésére várva hamar lelohadhat a diákok játékkedve.

Érdemes petákokat is készíteni. A licitálás sokkal szórakoztatóbb, ha „igazi" petákokkal szállnak be a licitálásba, és nem virtuális petákokkal.

A játék zökkenőmentes lehet, ha a tanár az éppen felhasználásra kerülő borítékokat a tanári asztalra helyezi ki. A játék kezdetekor a tanár osztja ki a megfelelő sorszámú feladatot a tanulóknak, de menet közben már a tanulók maguk veszik ki az újabb feladatot a megfelelő számú borítékból. A tanár így már könnyebben és gyorsabban tudja ellenőrizni a megoldásokat.

Tanári melléklet – 1 petákos feladatok

3	Egy hagyományos dobókockát ötször egymás után feldobunk, és a dobott számokat – a dobás sorrendjében – balról jobbra egymás után lejegyezzük. Így hány különböző ötjegyű páros szám állítható elő?
4	Három dobókockával dobva, mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4?
5	Egy tanár minden tanórán 2 tanulót feleltet, s a felelőket a következőképpen választja ki: az óra előtt hat diák nevét felírja egy-egy cédulára, s az óra kezdetekor egy diák a 6 cédula közül kihúz kettőt. Akiknek a nevét kihúzta, azok lesznek az aznapi felelők. Hányféle kimenetele lehet egy adott napon a húzásnak?
6	Egy versmondó verseny döntőjébe 8 tanuló jutott be: András, Balázs, Cili, Dénes, Erzsi, Feri, Gizi, Huba. Hányféle olyan helyezési sorrend alakulhat ki, amelyben fiú az első helyezett?
7	Egy pályázatra beérkezett 20 mű közül három pályamunkát tudnak díjazni, egyenként 10 000 Ft-tal. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni?
8	Egy négyszintes irodaház első szintjén 10, második szintjén 12, harmadik szintjén 14, a negyedik szintjén 16 ember dolgozik. A szomszédos irodaház egyik dolgozója, András április 1-én tréfából véletlenszerűen kiválaszt 5 dolgozót, és lehívatja őket a portára. (Az 5 embernek két kiválasztását akkor tekintjük különbözőnek, ha a két kiválasztásban legalább egy ember nem azonos. Hányféleképpen választhatja ki András az 5 embert?
9	Mennyi annak a valószínűsége, hogy az E, E, E, K, R, Z, S, S betűket találomra egymás mellé helyezve a SZEKERES szót kapjuk eredményül?
10	Egy 12.-es osztályba 18 fiú és 12 lány jár. Az osztály jutalmul 6 szalagavató báli meghívót kapott. Úgy döntöttek, hogy a meghívókat kisorsolják, de azt előre elhatározták, hogy egy ember legfeljebb egy meghívót nyerhet. Mekkora a valószínűsége, hogy mind a 6 meghívót lány nyeri?
11	Egy pályázati felhívásra 16 pályamű érkezett be. Két első, egy második és egy harmadik díjat osztanak ki. Hányféleképpen alakulhat a díjazottak köre?
12	Egy dobozban húsz golyó van, ezek 35 százaléka piros, a többi kék. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha találomra két golyót kihúzunk, akkor mindkettő kék lesz?

13	Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy olyan tört értéke, melynek számlálóját és nevezőjét is kockadobással adjuk meg, nem kisebb 1-nél?
14	Egy téglalap csúcspontjainak koordinátái: (0;0), (8;0), (8;4) és (0;4). Mennyi a valószínűsége, hogy a téglalap belsejében lévő rácspontok közül véletlenszerűen kiválasztott pont első koordinátája nagyobb a másodiknál?
15	Mekkora a valószínűsége, hogy egy 3-mal kezdődő 7 jegyű telefonszám jegyei mind különbözőek? (A telefonszám jegye 1-től 9-ig lehet bármelyik számjegy.
16	Egy négyszintes irodaház első szintjén 10, második szintjén 12, harmadik szintjén 14, a negyedik szintjén 16 ember dolgozik. A szomszédos irodaház egyik dolgozója, András április 1-én tréfából véletlenszerűen kiválaszt 5 dolgozót, és lehívatja őket a portára. Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind az 5 lehívott a negyedik szinten dolgozik?
17	Piros, fehér és zöld játékkockát helyeztünk el egy dobozba. Egyet találomra kiveszünk, és dobunk vele. Mekkora a valószínűsége, hogy a piros kockával 6-ost dobunk?
18	Az első 1000 pozitív egész szám közül kiválasztunk egy számot olyan módon, hogy minden szám kiválasztásának valószínűsége egyenlő. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám700-nál nem kisebb?

Az 1 petákos feladatok megoldása:

3. Az első négy dobás mindegyike 6-féle lehet, az utolsó dobás 3-féle. Így $6^4 \cdot 3 = 3888$ különböző ötjegyű páros szám állítható elő.

4. A kedvező esetek száma 3, az összes esetek száma 6^3, így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{3}{6^3} \approx 0{,}0139.$$

5. $\binom{6}{2} = 15$.

6. $5 \cdot 7! = 25\,200$.

7. $\binom{20}{3} = 1140$.

8. A négy szinten összesen 52 ember dolgozik. A választás során a csak sorrendben eltérőket nem különböztetjük meg, így $\binom{52}{5} = 2598960$ kiválasztás lehet.

9. $P = \dfrac{1}{\dfrac{8!}{3!\cdot 2!}} = \dfrac{3!\cdot 2!}{8!} \approx 0{,}000298$.

10. $P = \dfrac{\binom{12}{6}}{\binom{30}{6}} \approx 0{,}0156$.

11. $\binom{16}{2} \cdot 14 \cdot 13 = 21\,840$.

12. 7 piros, 13 kék golyó van. $P = \dfrac{\binom{13}{2}}{\binom{20}{2}} \approx 0{,}4105$.

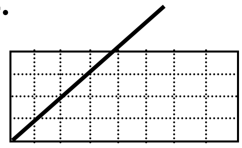
13. A kedvező esetek száma: 21.

Ha a számláló:	A nevező:
1	1-féle
2	2-féle
3	3-féle
4	4-féle
5	5-féle
6	6-féle

Az összes esetek száma: 36.

$$P = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \approx 0{,}5833.$$

14.



A téglalap belső tartományában összesen 21 rácspont van. Ezek közül 15 pontnak nagyobb az első koordinátája, mint a második. $P = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \approx 0{,}7143$.

15. $P = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{9^6} \approx 0{,}0379$.

16. $P = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{3570} \approx 0{,}00168$.

17. $A = \{\text{pirosat húzunk}\}$, $B = \{6-\text{ost dobunk}\}$. A és B független események.

$P(AB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \approx 0{,}0556$.

18. Kedvező eset: A kiválasztott szám700, vagy annál nagyobb, és 1000, vagy annál kisebb.

301 ilyen természetes szám van. $P = \frac{301}{1000} = 0{,}301$.

Tanári melléklet – 3 petákos feladatok

2	Egy kollégiumi szobában három diák, Anna, Bea és Cili lakik. Összesen négy csészéjük, öt csészealjuk és hat kiskanaluk van (az egyes csészék, csészealjak, kiskanalak mind különbözőek). Anna, Cili és Bea ebben a sorrendben leülnek teázni a pultszerű asztal mellé. Hányféleképpen teríthetnek a teázáshoz, ha mindhárman egy-egy csészét, csészealjat és kanalat kapnak?
3	Egy hagyományos dobókockát ötször egymás után feldobunk, és a dobott számokat – a dobás sorrendjében – balról jobbra egymás után lejegyezzük. Az összes előállított ötjegyű szám közül véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott számnak pontosan négy számjegye 6-os?
4	Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 32 fős csoportból négyszer véletlenszerűen választva, pontosan háromszor választjuk ki a névsor elsőjét?
5	Egy kockával kétszer egymás után dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye kisebb, mint a másodiké?
6	Jóska egy kis cetlire írta fel egy új ismerősének telefonszámát. A papírt sajnos elvesztette. Arra emlékezett, hogy a hétjegyű telefonszám első jegye 2. A következő három számjegy a π első három számjegye, de nem emlékezett rá, hogy milyen sorrendben. Még az is eszébe jutott, hogy az utolsó három számjegy mindegyike páros. Hány próbálgatás után sikerül telefonon biztosan elérni az ismerősét?
7	Egy 11.-es, 30 fős osztályba jár Anna, Balázs és Cili is. Az osztály a szalagavató bál megrendezéséért jutalmul 5 állójegyet kap egy koncertre. Úgy döntöttek, hogy a meghívókat kisorsolják, de azt előre elhatározták, hogy egy ember legfeljebb egy jegyet nyerhet. Mekkora a valószínűsége, hogy Anna és Balázs nyer jegyet, de Cili nem?
8	Dobjunk fel egy pénzérmét. Ha az eredmény írás lesz, akkor még egyszer dobunk, ha fej, akkor még kétszer. Mennyi a valószínűsége, hogy összesen 1 írást dobunk?
9	Egyik tanítási napon a 30 fős osztály tagjai közül 10-en írtak matematikából dolgozatot, 16-an fizikából. 8 tanuló nem írt dolgozatot aznap egyik tantárgyból sem. Véletlenszerűen kiválasztva az osztály tanulói közül egyet, mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló aznap pontosan egy dolgozatot írt?
10	Egy négyszintes irodaház első szintjén 10, második szintjén 12, harmadik szintjén 14, és a negyedik szintjén 16 ember dolgozik. A szomszédos irodaház egyik dolgozója, András április 1-jén tréfából véletlenszerűen kiválaszt 5 dolgozót, és lehívatja őket a portára. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 lehívott a második, a többi 3 pedig a harmadik szinten dolgozik?

11	Egy nemzetközi tábor 100 tagjának mindegyike az angol, német és orosz nyelvek közül legalább az egyik nyelven jól beszél. 80 résztvevő beszél angolul. 10 résztvevő csak angolul és oroszul, 20 táborozó csak németül és oroszul, és 25 résztvevő csak angolul és németül tud. Mindhárom nyelven 5 táborozó beszél jól. Találomra kiválasztunk a résztvevők közül egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy a három idegennyelv közül csak angolul beszél jól?
12	A bevásárlóközpont egyik pénztáránál nem állt senki sorba. Ekkor 8 ember, 4 nő és 4 férfi elindult ehhez a pénztárhoz, és sorba álltak a pénztár előtt. Hányféle olyan sorrend alakulhat ki, amelyben azonos nemű emberek nem állnak közvetlen egymás után?

A 3 petákos feladatok megoldása:

2. $(4\cdot 3\cdot 2)\cdot(5\cdot 4\cdot 3)\cdot(6\cdot 5\cdot 4)=172800$

3. Az egyetlen nem hatos dobás 5-féle lehet. Ez a dobás sorrendben 5 helyen jelenhet meg. Így $P=\frac{5\cdot 5}{6^5}\approx 0{,}0032$.

4. $P=4\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^3\cdot\frac{31}{32}\approx 0{,}000118$.

5. *I. megoldás:*

Összesen 6^2 különböző kimenetele lehet a kísérletnek.
A kedvező esetek:

Ha az első dobás:	A kedvező második dobások száma:
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

A keresett valószínűség: $P=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}\approx 0{,}4167$.

II. megoldás:

Ha egy kockát kétszer egymás után feldobunk, az első dobás vagy kisebb, mint a második, vagy vele egyenlő, vagy nagyobb nála. Annak a valószínűsége, hogy a két dobás egyenlő: $\frac{6}{36}$. Szimmetria miatt a másik két lehetőség ugyanannyiféleképpen következik be, tehát e két esemény valószínűsége ugyanannyi. A valószínűségüket P-vel jelölve: $\frac{6}{36}+P+P=1$. Innen $P=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

6. $3!\cdot 5^3=750$.

7. Mivel Anna és Balázs a nyertesek között van, és Cili nem, a többi 3 nyertes 27 tanuló közül választható ki, hiszen sem Anna, sem Balázs, sem Cili nem választható. $P=\frac{\binom{27}{3}}{\binom{30}{5}}\approx 0{,}0205$.

8. A kedvező esetek: IF, FIF, FFI. Ezek száma tehát 3. Az összes lehetőségek: II, IF, FFF, FFI, FIF, FII, ezek száma 6. Így $P=\frac{1}{2}$.

9. Csak matematika dolgozatot 6, csak fizikát 12 tanuló írt. $P=\frac{6+12}{30}=0{,}6$.

10. $P=\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{14}{3}}{\binom{52}{5}}\approx 0{,}0092$.

11. Csak angolul 40 táborozó beszél jól. $P=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$.

12. $2\cdot 4!\cdot 4!=1152$.

Tanári melléklet – 5 petákos feladatok

1	Egy versmondó verseny döntőjébe 8 tanuló jutott be: András, Balázs, Cili, Dénes, Erzsi, Feri, Gizi, Huba. Ha ugyanakkora az esélye bármelyik sorrend kialakulásának, mekkora a valószínűsége, hogy Cili, Erzsi, Gizi valamilyen sorrendben, közvetlen egymás utáni helyezett lesz?
2	100 alma között 12 férges. Kiveszünk az almák közül válogatás nélkül 6-ot. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább két férges?
3	Egy 6 fiúból és 6 lányból álló társaság alkalmi munkát szeretne vállalni. Kiderült, hogy 8 ember mehet másnap újságot kihordani, 4 pedig ugyanaznap fagylaltot kimérni. Sorsolással döntik el, hogy ki melyik munkát vállalja el. Mennyi a valószínűsége, hogy a mindkét csoportban ugyanannyi a fiúk száma, mint a lányoké?
4	A fiúk és lányok születési valószínűségét $\frac{1}{2}$-nek tekintve, mekkora annak a valószínűsége, hogy egy ötgyermekes családban két fiú és három lány van?
5	Egy 200 fős században 15 lúdtalpas katona van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a századból véletlenszerűen kiválasztva 5 embert, közülük pontosan 3 lúdtalpas?
6	András és Bence kosárlabda-játékosok. András 0,8 valószínűséggel, Bence 0,4 valószínűséggel talál a kosárba. A B esemény valószínűsége hány szorosa az A esemény valószínűségének? A esemény: András 20 dobásból pontosan 12-szer talál be. B esemény: Bence 20 dobásból pontosan 6-szor dob kosarat.

Az 5 petákos feladatok megoldása:

1. A három lányt ebben a sorrendben egy „objektumnak” tekintve, az öt fiú és ez az „objektum” sorrendje $6!$-féle lehet. Bármelyik esetben a három lány sorrendje 6-féle lehet. A kedvező esetek száma: $6 \cdot 6!$. Az összes lehetséges sorrendek száma: $8!$. Bármelyik sorrend kialakulása egyenlő valószínűségű, így $\mathrm{P} = \frac{6 \cdot 6!}{8!} = \frac{3}{28} \approx 0{,}107$.

2. Annak a valószínűsége, hogy a) nincs közöttük férges: $P_1 = \frac{\binom{88}{6}}{\binom{100}{6}} \approx 0{,}4546$.

b) pontosan 1 férges: $P_2 = \frac{12 \cdot \binom{88}{5}}{\binom{100}{6}} \approx 0{,}3944$.

Így annak a valószínűsége, hogy közöttük legalább két férges van:

$$P = 1 - \frac{\binom{88}{6}}{\binom{100}{6}} - \frac{12 \cdot \binom{88}{5}}{\binom{100}{6}} \approx 0{,}1510.$$

3. Kedvezők azok esetek, amikor 4 fiú és 4 lány megy másnap újságot kihordani, és 2fiú és 2 lány megy fagylaltot kimérni. Ezeknek az eseteknek a száma: $\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = 225$.

A 12 embert két (8 és 4 tagú) csoportba osztani összesen $\binom{12}{8} = 495$-féleképpen lehet.

$\mathrm{P} = \frac{225}{495} \approx 0{,}4546$.

4. Az összes lehetséges esetek száma: $2^5 = 32$. A kedvező esetek: FFLLL, FLFLL, FLLFL, FLLLF, LFFLL, LFLFL, LFLLF, LLFFL, LLFLF, LLLFF. Ezek száma 10. Tehát a kérdéses valószínűség: $\frac{5}{16}$.

5. $P = \dfrac{\binom{15}{3} \cdot \binom{185}{2}}{\binom{200}{5}} \approx 0{,}00305$.

6. Az A esemény valószínűsége: $P(A) = \binom{20}{12} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^{8} \approx 0{,}02216$.

A B esemény valószínűsége: $P(B) = \binom{20}{6} \cdot 0{,}4^{6} \cdot 0{,}6^{14} \approx 0{,}1244$.

$\dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} \approx 5{,}61$, tehát kb. 5,61-szeres.

TESZTKÉRDÉSEK

1. Pali így tölti ki az ötöslottó szelvényét: először kiválaszt két számot, a harmadik megjelölt szám egyenlő az első kettő, a negyedik az első három, végül az ötödik az első négy szám összegével. A harmadik szám legfeljebb mekkora lehet?

A: 20 **B:** 21 **C:** 22 **D:** 23

2. Egy sorshúzásnál hét ember egyenként húz hét olyan gyufaszál közül, amelyekből 6 egyforma hosszú, egyik pedig rövidebb a többinél. Kinek van a többinél nagyobb esélye arra, hogy a „rövidebbet húzza”?

A: A negyediknek. **B:** Az elsőnek. **C:** A hetediknek.

D: A többi válasz mindegyike hibás.

3. Tekintsük az $\mathbf{a}(1;0)$ vektor $+30^\circ$, $+45^\circ, +60^0$, $+90^\circ$-os elforgatottjait! E 4 vektor közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott vektornak legalább az egyik koordinátája racionális szám?

A: 0,25 **B:** 0,5 **C**: 0,75 **D:** 1

A tesztfeladatok megoldása

1. Pali így tölti ki az ötöslottó szelvényét: először kiválaszt két számot, a harmadik megjelölt szám egyenlő az első kettő, a negyedik az első három, végül az ötödik az első négy szám összegével. A harmadik szám legfeljebb mekkora lehet?

A: 20 **B:** 21 <u>**C:**</u> 22 **D:** 23

Megoldás:

A számokat a következőképpen jelölhetjük: a, b, $a+b$, $2a+2b$, $4a+4b$.

Mivel $4a+4b \le 90$, azaz $a+b \le 22{,}5$, és a és b is pozitív egész számot jelöl, ezért a harmadik szám legfeljebb 22 lehet. Tehát a **C** válasz a helyes.

2. Egy sorshúzásnál hét ember egyenként húz hét olyan gyufaszál közül, amelyekből 6 egyforma hosszú, egyik pedig rövidebb a többinél. Kinek van a többinél nagyobb esélye arra, hogy a „rövidebbet húzza”?

A: A negyediknek. **B:** Az elsőnek. **C:** A hetediknek.

<u>**D**</u>**:** A többi válasz mindegyike hibás.

Megoldás:

Annak a valószínűsége, hogy az első ember a rövidet húzza: $P_1 = \frac{1}{7}$,

annak a valószínűsége, hogy a másodiknak húzó ember húzza ki a rövidebbet:

$P_2 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7}$,

annak a valószínűsége, hogy a harmadiknak húzó ember húzza ki a rövidebbet:

$P_3 = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$,

és így tovább. Végül annak a valószínűsége, hogy a hetediknek húzó ember húzza ki a rövidebbet: $P_7 = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{7}$.

Minden húzónak ugyanakkora az esélye, tehát a **D** válasz a helyes.

3. Tekintsük az $\mathbf{a}(1;0)$ vektor $+30^\circ$, $+45^\circ$, $+60^0$, $+90^\circ$-os elforgatottjait! E 4 vektor közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott vektornak legalább az egyik koordinátája racionális szám?

A: 0,25 **B:** 0,5 <u>C:</u> 0,75 **D:** 1

Megoldás: $\mathbf{e}_{30^\circ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{e}_{45^\circ}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{e}_{60^\circ}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{e}_{90^\circ}(0;1)$

$\mathrm{P} = \frac{3}{4} = 0{,}75$, tehát a **C** válasz a helyes.