MATEMATIKA „C”
11. évfolyam

10. modul

Ezt már mind tudjuk?

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	Ebben a tanévben tanult ismeretek felelevenítése, elhelyezése az eddigi ismeretek rendszerébe.
Időkeret	2 foglalkozás
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, kémia. Szűkebb környezetben: Vektorműveletek. A függvény fogalma, értelmezési tartománya, értékkészlete. Egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek megoldása. Síkgeometria. Ajánlott megelőző tevékenységek: Szögfüggvények fogalma, alkalmazása számolási feladatokban. Trigonometrikus függvények ábrázolása. Az egyenes és a kör egyenlete. Hatványozás értelmezése valós kitevőre, logaritmus fogalma, tulajdonságai. Valószínűségszámítás. Ajánlott követő tevékenységek: 12-edik évben folytatni a tanulmányokat.
A képességfejlesztés fókuszai	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, metakogníció. Az adott témakörben tanult ismeretek alkalmazási lehetőségének felismerése különböző szövegkörnyezetben. Igaz-hamis állítások kiválasztása. Hibás gondolatmenet felismerése. A kreatív gondolkodási mód fejlesztése.

JAVASLAT:

Ez a modul a tanév utolsó két foglalkozását tartalmazza. Az egész évi tananyag áttekintése feladatokon keresztül nagyon fontos része a tanulásnak, csak sajnos nem mindig marad erre idő a tanórákon. Az első foglalkozás egy, a tanult témakörök tananyagát felelevenítő feladatsorból áll. A feladatok nincsenek tematikus elrendezésben, éppen azért, hogy elősegítsük a tanulók fejében a tanult tananyag egységbe, rendszerbe szerveződését. A másik foglalkozás - a vázlatban megadott témakörökben - a tanulói ismeretek felmérését szolgálja.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE:

1. foglalkozás: **Csak vegyesen!**
2. foglalkozás: **Ezzel vége?**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Csak vegyesen!			
1	A tanévben tanult ismeretanyag felelevenítése (nem tematikus rend szerint csoportosított) feladatokon keresztül	Értelmes memória, deduktív következtetés, rendszerezés	Feladatlap: 1–10. feladat
II. Ezzel vége?			
1	Teszt írása (vektor, szögfüggvények, alkalmazása sokszögekben, hatványozás, logaritmus, koordináta-geometria, valószínűségszámítás)	Értelmes memória, metakogníció, kombinatív gondolkodás	Teszt: 1–20. feladat

I. CSAK VEGYESEN!

Az olyan tanítási módszer, amely előtérbe helyezi a tanulók önálló foglalkoztatását, nagyon időigényes, de azt mutatják a tapasztalatok, hogy hatékonyabb a tanárközpontú módszernél. Éppen az időigényesség miatt ritkán jut idő a tanévvégi ismétlésre. Abban szinte minden tanár egyetért, hogy az egész évben megismert fogalmak, ismeretek áttekintése, azok rendszerezése, az eddigi ismeretekbe való beágyazása nagyon hasznos lenne. A délutáni foglalkozáson lehetőséget teremtünk erre.

Javaslat: A feladatokat csoportfoglalkozás keretében oldják meg. A csoportok számára ugyanazokat a feladatokat tűzzük ki, s abban a sorrendben, ahogyan az a tanulói munkafüzetben is szerepel. (A tematikus ismétlés nem segíti az ismeretek rendszerré válását.) Bizonyos időközönként adjunk lehetőséget a csoportoknak, hogy megoldásaikat összevessék! Ha szükséges, egy-egy felmerülő problémát frontálisan beszéljünk meg.

1. Add meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát!

a) $f(x)=2^{\sin x}$ **b)** $g(x)=\lg\cos^2 x$ **c)** $h(x)=\log_{0,5}\left(2^{2x}-2^x\right)$

Megoldás:

a) Az $f(x)$ értelmezési tartománya (ÉT) **R**, mert minden valós számnak értelmezzük a szinuszát, és a 2-nek tetszőleges valós kitevőjű hatványát.

b) A $g(x)$ ÉT-a $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi,\, n\in Z\right\}$, mert $0\le\cos^2 x\le 1$, és e számok közül csak a nullának nincs tízes alapú logaritmusa, így $\cos^2 x\ne 0$, azaz $\cos x\ne 0$.

c) A $g(x)$ ÉT-a $\mathbf{R}^+$. A $2^{2x}-2^x>0$, azaz $2^x(2^x-1)>0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel 2^x pozitív minden valós x számra, így a $2^x>1$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a keresett értelmezési tartomány. $1=2^0$, és a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, ezért $x>0$ és $x\in\mathbf{R}$.

2. a) Add meg az $a(\sqrt{3}\cdot\cos 150°; 2\cdot\sin 150°)$ és $\mathbf{b}(4\,; 4\cos(-60)^\circ)$ vektorok koordinátáinak tízes számrendszerszerbeli alakját!

b) Számítsd ki a két vektor skaláris szorzatát!

c) Mekkora a két vektor hajlásszöge?

Megoldás:

a) $a(\sqrt{3}\cdot\cos 150°; 2\cdot\sin 150°)=a\,(-1{,}5; 1)$ és $\mathbf{b}(4\,; 4\cos(-60)^\circ)=\mathbf{b}(4\,; 2)$.

b) $\mathbf{ab} = -6 + 2 = -4$

c) $|\mathbf{a}| = \sqrt{3{,}25}$ és $|\mathbf{b}| = \sqrt{20}$, így $\mathbf{ab} = \sqrt{3{,}25} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos\alpha$, ahol α a két vektor hajlásszöge. $-4 = \sqrt{3{,}25} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{4}{\sqrt{3{,}25} \cdot \sqrt{20}} \approx -0{,}4961$.

Mivel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, így $\alpha \approx 119{,}7^\circ$.

3. Írd fel az $A(-2;3)$ és $B(4;1)$ pontok által meghatározott AB szakasz

a) felezőpontjának koordinátáit!

b) tartóegyenesének egyenletét!

c) felezőmerőlegesének egyenletét!

d) Thalesz-körének egyenletét!

Megoldás.

a) $F(1\,;2)$

b) Mivel $\overrightarrow{AB}(6;-2)$, így az AB egyenes egyik normálvektora: $\mathbf{n}(1;3)$. Az AB egyenes egyenlete: $x + 3y = 7$.

c) $f: 3x - y = 1$

d) $\overrightarrow{AF}(3;-1)$ és $\left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{10}$. Az AB szakasz Thalesz-körének egyenlete:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$, ahol $(x;y) \neq (-2;3)$ és $(x;y) \neq (4;1)$.

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^{x+2} = \sqrt[x+1]{9^{8-x}}$

b) $\log_2 \sin^2 x + \log_2 \cos^2 x + \log_2 4 = 0$

c) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 1 = 0$

d) $2^{\sin^2 x} \cdot 2^{2\cos^2 x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}$

Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy a **b)** egyenletben nem célszerű alkalmazni a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot, mert a $\sin^2 x$ és a $\cos^2 x$ között ismert kapcsolat van.

Megoldás:

a) $1 \le x$ és $x \in \mathbf{Z}$. Ekkor $3^{x+2} = \sqrt[x+1]{9^{8-x}} \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^{\frac{16-2x}{x+1}}$. A 3-as alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésű, így $x + 2 = \dfrac{16-2x}{x+1}$, azaz

$(x+2)(x+1) = 16 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$.

A másodfokú egyenlet megoldásai: 2 és (-7). Csak a 2 lehet megoldás, és behelyettesítéssel adódik, hogy valóban az.

b) Mivel sem $\sin^2 x$, sem $\cos^2 x$ nem lehet nulla, így $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$.

Ekkor $\log_2 \sin^2 x + \log_2 \cos^2 x + \log_2 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$. A alapú logaritmus definícióját alkalmazva: $4\sin^2 x\cos^2 x = 2^0$, azaz $4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$.

$4\sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vagy $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

Mivel e számok szinuszának és koszinuszának a négyzete $\frac{1}{2}$ és

$\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 4 = (-1) + (-1) + 2 = 0$, az $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $n \in \mathbf{Z}$ számok az egyenlet megoldásai.

c) Az x tetszőleges valós szám lehet.

$\sin^2 x + \sin x \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ vagy $\sin x = \cos x$.

Az egyenlet megoldásai: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, vagy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

d) Az x tetszőleges valós szám lehet.

$2^{\sin^2 x} \cdot 2^{2\cos^2 x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = 2^{-\sin x}$. Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény hozzárendelése kölcsönösen egyértelmű, ezért a megoldandó egyenlet: $\sin^2 x + 2\cos^2 x = -\sin x$.

$\sin^2 x + 2\cos^2 x = -\sin x \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \cdot (1 - \sin^2 x) = -\sin x \Leftrightarrow$

$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$.

A $\sin x$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\sin x = 2$ vagy $\sin x = -1$. Mivel $-1 \leq \sin x \leq 1$, a $\sin x = 2$ egyenletnek nincs megoldása, míg $\sin x = -1 \Leftrightarrow$

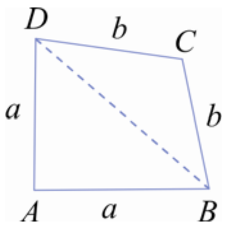
$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

Mivel $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)=1$, továbbá a kapott gyökök koszinusza nulla, és

$2^1\cdot 2^0=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, az egyenlet megoldásai valóban $\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, ahol $n\in\mathbf{Z}$ számok.

5. Egy konvex négyszög egyik szöge derékszög, a közrefogó két oldal mindegyike *a* hosszú. A derékszöggel szemközti szög 120°-os, és e szöget közrefogó mindkét oldal *b* hosszú. Hányszorosa az *a* oldal a *b*-nek?

Megoldás:



A *BDA* derékszögű háromszög átfogója $a\sqrt{2}$ hosszú. A *DBC* háromszög *DB* oldalára alkalmazzuk a koszinusztételt!

$2a^2=2b^2-2b^2\cos 120^\circ$, azaz $2a^2=3b^2$. Mivel *a* és *b* pozitív számokat jelölnek, így $a=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot b$.

6. Az alábbi idézetek egy-egy iskolai dolgozatból valók. Keresd meg, és javítsd ki a hibákat!

1. „Az $e: 3y-2x=5$ egyenletű egyenes egy pontja $P(1;-1)$. Ezen a ponton átmenő, az *e* egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $2x+3y+1=0$.”

2. „A $\log_3 x^2-\log_3(x+2)-1=0$ egyenlet alaphalmaza azok az *x* valós számok, amelyekre $-2<x$ teljesül. Mivel $1=\log_3 3$, az egyenlet:

   $\log_3 x^2-\log_3(x+2)-\log_3 3=0$.

   A logaritmus azonosságait alkalmazva: $\log_3 x^2-\log_3\frac{x+2}{3}=0$, azaz $\log_3\frac{3x^2}{x+2}=0$.

   A logaritmus definíciója szerint: $\frac{3x^2}{x+2}=1$.”

3. „Ha a háromszög oldalainak hossza: $a=6\ cm$, $b=4\ cm$, és a b oldallal szemközti szöge $\beta=30^\circ$, akkor $\frac{6}{4}=\frac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ}$, így $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, és ebből $\alpha\approx 49^\circ$. A háromszög harmadik szöge kb. $101{,}4^\circ$.”

Megoldás:

1. Hibák:

- Az *e* egyenesnek nem pontja a $P(1;-1)$ pont, mert $3(-1)-2\cdot 1\neq 5$.
- Az *e* egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}_e(-2;3)$, és ez a vektor a f egyenes egyik irányvektora, tehát az *f* egyenes egyik normálvektora: $\mathbf{n}_f(3;2)$, így a $P(1;-1)$ ponton átmenő, e egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $3x+2y=1$.

2. Hibák:

- Az egyenlet azon x valós számokra értelmezhető, amelyekre $x\neq 0$ és $-2<x$.
- Az $\log_3 x^2-\log_3(x+2)-\log_3 3=0$ egyenletben a $\log_3 x^2$ kifejezésből kivonva nem a $\log_3(x+2)-\log_3 3$ kifejezés van, hanem $\log_3(x+2)+\log_3 3$, mivel $\log_3 x^2-\log_3(x+2)-\log_3 3=\log_3 x^2-\left(\log_3(x+2)+\log_3 3\right)$. Az utolsó egyenlet helyesen: $\frac{x^2}{3(x+2)}=1$.

3. Hibák:

- A $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ egyenlet alaphalmaza a $]0°;180°[$ intervallum, és ezen a halmazon az egyenletnek két megoldása van: $\alpha\approx 49^\circ$ és $\alpha\approx 131^\circ$. Mindkét szög esetén létezik a háromszög, így a feladat feltételeinek két háromszög tesz eleget.
- A háromszög belső szögeinek összege pontosan 180°, így a harmadik szög közelítő értéke nem adható meg $101{,}4^\circ$-osnak. Helyesen: Az egyik háromszög szögei: 30°, kb. 49° és kb. 101° (vagy 30°, kb. $48{,}6^\circ$ és kb. $101{,}4^\circ$).

7. Egy urnában 7 piros, 8 fehér és 9 zöld golyó van. Kihúzunk egymás után három golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a három kihúzott golyó fehér, ha

a) a kihúzott golyót nem tesszük vissza

b) a kihúzott golyót visszatesszük?

Megoldás:

a) $\mathbf{P}(A)=\frac{8}{24}\cdot\frac{7}{23}\cdot\frac{6}{22}=\frac{7}{253}\approx 0{,}028$

b) $\mathbf{P}(B)=\frac{8}{24}\cdot\frac{8}{24}\cdot\frac{8}{24}=\frac{1}{27}\approx 0{,}037$

8. Matematika órán a tanár röpdolgozatot íratott. Két feladatot tűzött ki. Az elsőt a tanulók 70%-a, a másodikat pedig a tanulók 60%-a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, és kilencen mindkét feladatot megoldották.

a) Hány diák írta meg a dolgozatot?

b) Az iskolába ellátogatott a matematika szaktanácsadó. A kijavított röpdolgozatok közül kettőt véletlenszerűen kihúzott. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott dolgozatok egyike egy mindkét, a másik pedig csak az első feladatot megoldó tanulóé?

Megoldás:

a) Ha x-szel jelöljük a tanulók számát, akkor $0,7x + (0,6x - 9) = x$. Ebből $x = 30$. Mivel az első feladatot így 21 tanuló írta meg, közülük 9 a másodikat is megírta, és a „maradék” 9 tanuló csak a második feladatot, tehát a másodikat összesen 18 tanuló oldotta meg, és ez valóban a 30-nak 60%-a.

A dolgozatot tehát 30 tanuló írta meg.

b) Ha a kétfajta dolgozat kihúzásának sorrendje számít, akkor a következőképpen járhatunk el:

Annak a valószínűsége, hogy az elsőnek kihúzott dolgozatban mindkét feladat megoldott: $\frac{9}{30}$, azaz $\frac{3}{10}$. Annak a valószínűsége, hogy a másodiknak kihúzott dolgozatban csak az első feladat megoldása szerepel: $\frac{12}{29}$. Mindkét esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége: $\frac{9}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{36}{290}$.

A fordított sorrendben kihúzás valószínűsége rendre $\frac{12}{30}$ és $\frac{9}{29}$. Így ebben az esetben mindkét esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége: $\frac{12}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{36}{290}$. Mivel a szaktanácsadó vagy egyik, vagy másik sorrendben húzhatta ki a két dolgozatot, a keresett valószínűség: $2 \cdot \frac{36}{290} = \frac{72}{290} \approx 0,248$.

Ha a kétfajta dolgozat kihúzásának sorrendje számít, akkor a következőképpen járhatunk el:

Mivel bármelyik dolgozat kihúzásának valószínűsége ugyanakkora, alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűségszámítás modelljét. Az összes esetek száma: $\binom{30}{2}$, a kedvező esetek száma: $9\cdot 12$. A keresett valószínűség: $\frac{9\cdot 12}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{72}{290} \approx 0{,}248$.

9. Állapítsd meg, hogy mi azon körök középpontjainak halmaza, amelyek az $e: 2x - y + 5 = 0$ és $f: 2x - y = 3$ egyenletű egyenesek mindegyikét érintik!

Megoldás:

A keresett alakzat a két (párhuzamos) egyenes középpárhuzamosa. Az y tengelyt az e egyenes a $(0;5)$, az f egyenes pedig $(0;-3)$ koordinátájú pontban metszi. Van olyan kör, amely mindkét egyenest érinti, és a középpontja e két pont által meghatározott szakasz F felezőpontja, hiszen az F pont a két egyenesből álló alakzatnak az egyik szimmetria-középpontja.

Mivel az $F(0;1)$, a középpárhuzamosra illeszkedik, a keresett ponthalmaz egyenlete: $y = 2x + 1$.

10. Egy szabályos tizenkétszög oldalának hossza 4 cm. Milyen hosszú a sokszög legrövidebb átlója?

Megoldás:

A szabályos tizenkétszög minden belső szöge 150°-os. A sokszög legrövidebb átlója a két szomszédos oldal (nem közös) végpontjait összekötő d szakasz. Ennek hossza a koszinusztétel alkalmazásával kiszámítható:

$$d^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot \cos 150^\circ = 32 + 16\sqrt{3} = 16\cdot(2+\sqrt{3}) \approx 59{,}7.$$

$$d = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 7{,}7.$$

A legrövidebb átló hossza kb. 7,7 cm.

II. EZZEL VÉGE?

Az utolsó foglalkozáson már nehéz a tanulókat gondosan kidolgozott megoldások leírására rávenni. Mégis szeretnénk, ha ez az idő is tartalmasan, töprengéssel telne el.

Tapasztalat szerint a tanulók kedvelik a tesztet, mert „nem kell annyit írni”, „lehet a választ annak alapján is kiválasztani, hogy melyiket tartom a legvalószínűbb eredménynek.” A tanárok egy része éppen az utóbbi miatt nem tartja megfelelő munkaformának a tesztet, pedig ha meggondoljuk, a tanuló későbbi életében sokszor adódhat olyan helyzet, amikor kevés információ alapján kell kiválasztania a lehetséges megoldások közül a legvalószínűbbet.

Erre a foglalkozásra 20 kérdésből álló tesztet készítettünk. (Lásd a tanári mellékletet.) A kérdések a tanév során tanult ismeretekre támaszkodnak. A tanári mellékletben megtalálható a feladatok megoldása, és megjelöltük a helyes válaszok betűjelét is.

Ha a tanár szeretné pontozással is ösztökélni a tanulókat arra, hogy ne véletlenszerűen válaszszanak a négy válasz közül, javasoljuk a következő pontozást:

Helyes válasz megjelölése: 6 pont.

Helytelen válasz megjelölése: (-1) pont.

Nem jelöli meg egyik választ sem: 0 pont.

A tesztet a megírás után azonnal ki lehet javítani például úgy, hogy a diákok kicserélik egymással tesztlapjaikat, és ők javítják. Ekkor nem célszerű a megoldást is megbeszélni, hanem sorban megadni a helyes válasz betűjelét, és utána, ha marad idő, a vitát kiváltó feladatok megoldása megbeszélhető.

Teszt (Ismétlés)

Az alábbi feladatok mindegyikére négy válasz adott, amelyek közül pontosan egy helyes. Karikázd be az általad helyesnek vélt válasz betűjelét!

1. Mivel egyenlő $\log_2 \frac{2^{10} \cdot 2^{11}}{4^5}$?

A: 10 **B:** 1 **C:** 11 **D:** 2^{11}

2. Mivel egyenlő $\log_3 \sqrt[3]{3^{63}}$?

A: 62 **B:** 21 **C:** 3^{21} **D:** 0

3. Mivel egyenlő $3 \cdot 0{,}5^{\log_{0,5} 3} \cdot 2^{\log_2 5}$?

A: 5 **B:** $27 \cdot 5$ **C:** $27 \cdot 15$ **D:** 45

4. Hányszorosa a $4^{18} + 4^{19}$ a $20 \cdot 4^{17}$-nek?

A: $5 \cdot 4^{19}$ **B:** 5 **C:** $\frac{4^{19}}{5}$ **D:** 1

5. A valós számok halmazának mi a legbővebb részhalmaza, amelyen az $f(x) = \frac{1}{\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)^x}$ függvény értelmezhető?

A: A racionális számok halmaza. **B:** A pozitív egész számok halmaza.

C: Az egész számok halmaza. **D:** A valós számok halmaza.

6. Melyik állítás hamis? „Ha egy valós szám

A: megegyezik a (-1)-edik hatványával, akkor a szám abszolútértéke 1."

B: nulladik hatványa 1, akkor a szám nem egyenlő nullával."

C: pozitív kitevőjű hatványa nulla, akkor a szám csak nulla lehet."

D: páros kitevőjű hatványa pozitív, akkor a szám is pozitív."

7. 10-nek hányadik hatványával egyenlő a $2^{\lg 2}$?

A: $(\lg 2)^2$ **B:** $\lg 2$ **C:** $10^{2^{\lg 2}}$ **D:** $2 \lg 2$

8. A következő két egyenletnek hány közös valós megoldása van?

$$2^x - 2^{-x} = 3 \text{ és } 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$$

A: 1 **B:** 2 **C:** 3 **D:** Egy sem.

9. Ha az A pont helyvektora $\mathbf{a}(4;-3)$, a B pont helyvektora $\mathbf{b}(-1;4)$, akkor az $\overrightarrow{BA}$ vektor koordinátái:

A: $(-5;7)$ **B:** $(3;-7)$ **C:** $(3;1)$ **D:** $(5;-7)$

10. A megadott egyenletű egyenesek közül melyik halad át az $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ egyenletű kör középpontján?

A: $2x - 3y = 5$ **B:** $3x - y = 9$ **C:** $x + 3y + 2 = 0$ **D:** $y = 3$

11. Az $e: x - 3y + 9 = 0$ és $f: 2x - 3y = -12$ egyenletű egyenesek metszéspontja rajta van a g egyenesen, ha

A: $g: 3y - x = 5$ **B:** $g: y = -2x - 3$ **C:** $g: 2x - y = 4$ **D:** $g: 4y - x = 11$

12. A $P(-2;3)$ ponton átmenő, a $2x - 3y = 0$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete:

A: $3x + 2y = 0$ **B:** $y = \frac{2}{3}x + 4$ **C:** $3y - 2x = 13$ **D:** $2x - 3y = 12$

13. Egy rombusz egyik átlóegyenesének egyenlete: $3x - 4y + 5 = 0$, szimmetriaközéppontja: $K(1\,;\,2)$. Melyik a rombusz másik átlóegyenesének egyenlete?

A: $(3 - x)(2 - y) = x(y + 2) - 4$ **B:** $4x + 3y = 18$

C: $(x - 2)(y + 2) = (x + 1)(y + 6)$ **D:** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

14. Egy α hegyesszögű derékszögű háromszögben $\text{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$, a háromszög területe 27 cm^2.

Hány cm a két befogóhossz különbségének abszolútértéke?

A: 3 **B:** 2,5 **C:** 2 **D:** 1,5m

15. Hány megoldása van a $\dfrac{\sin^2 x - \frac{3}{4}}{2\cos x - 1} = 0$ egyenletnek a $[-180°;360°]$ intervallumon?

A: Nincs megoldása **B:** 1 **C:** 2 **D:** 3

16. Mekkora az **a** és **b** vektor hajlásszöge, ha $\mathbf{a} = (\cos 800^\circ)\,\mathbf{i} + (\sin 800^\circ)\,\mathbf{j}$ és

$\mathbf{b} = \cos(-100^\circ)\,\mathbf{i} - \sin(-100^\circ)\,\mathbf{j}$?

A: 160° **B:** 80° **C:** 20° **D:** 180°

17. Egy háromszög oldalainak hossza: $a = 8$ cm, $b = 15$ cm és $c = 19$ cm. Szögei szerint milyen ez a háromszög?

A: Hegyesszögű **B:** Tompaszögű **C:** Derékszögű

D: Van 60°-os szöge.

18. Egy szabályos dobókockát hatszor egymás után feldobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott számok között legalább egy hatos dobás lesz?

A: $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^6$ **B:** $\dfrac{6^6 - 5^6}{6!}$ **C:** $1 - \dfrac{5}{6}$ **D:** $\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$

19. Öt barát (Anna, Balázs, Cili, Dénes és Erika) moziba megy. Az öt jegy a 12. sor bal oldali 1.-5. helyére szól. Ha véletlenszerűen ülnek le, mekkora a valószínűsége, hogy Anna és Dénes egymás mellett, az 1-es és 2-es helyet foglalja el?

A: $\dfrac{2}{\binom{5}{2}}$ **B:** $\dfrac{12}{5!}$ **C:** $\dfrac{3!}{5!}$ **D:** Egyik eddigi válasz sem helyes.

20. Öt barát (Anna, Balázs, Cili, Dénes és Erika) moziba megy. Az öt jegy a 12. sor bal oldali 1.-5. helyére szól. Véletlenszerűen ülnek le. Jelölje A azt az eseményt, hogy Anna és Dénes egymás mellett foglal helyet. Melyik műveletsor adja meg helyesen a kedvező esetek és az összes esetek számát, és így az A esemény valószínűségét?

A: $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}}$ **B:** $\mathbf{P}(A) = \dfrac{4!}{5!}$ **C:** $\mathbf{P}(A) = \dfrac{2 \cdot 4!}{5!}$ **D:** $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{2}}$

Az ismétlő teszt feladatainak megoldása

1. Mivel egyenlő $\log_2 \frac{2^{10} \cdot 2^{11}}{4^5}$?

A: 10 **B:** 1 **C:** 11 **D:** 2^{11}

Megoldás: $\log_2 \frac{2^{10} \cdot 2^{11}}{4^5} = \log_2 \frac{2^{21}}{2^{10}} = \log_2 2^{11} = 11$.

2. Mivel egyenlő $\log_3 \sqrt[3]{3^{63}}$?

A: 62 **B:** 21 **C:** 3^{21} **D:** 0

Megoldás: $\log_3 \sqrt[3]{3^{63}} = \log_3 3^{21} = 21$.

3. Mivel egyenlő $3 \cdot 0{,}5^{\log_{0,5} 3} \cdot 2^{\log_2 5}$?

A: 5 **B:** $27 \cdot 5$ **C:** $27 \cdot 15$ **D:** 45

Megoldás: $3 \cdot 0{,}5^{\log_{0,5} 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$.

4. Hányszorosa a $4^{18} + 4^{19}$ a $20 \cdot 4^{17}$-nek?

A: $5 \cdot 4^{19}$ **B:** 5 **C:** $\frac{4^{19}}{5}$ **D:** 1

Megoldás: $4^{18} + 4^{19} = 4^{18}(1+4) = 5 \cdot 4^{18} = 20 \cdot 4^{17}$.

5. A valós számok halmazának mi a legbővebb részhalmaza, amelyen az $f(x) = \frac{1}{\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)^x}$ függvény értelmezhető?

A: A racionális számok halmaza. **B:** A pozitív egész számok halmaza.

C: Az egész számok halmaza. **D:** A valós számok halmaza.

Megoldás: $f(x) = \frac{1}{\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)^x} = \frac{1}{(-2)^x}$, és negatív számnak csak tetszőleges egész kitevőjű hatványát értelmezzük.

6. Melyik állítás hamis?

„Ha egy valós szám

A: megegyezik a (-1)-edik hatványával, akkor a szám abszolútértéke 1."

B: nulladik hatványa 1, akkor a szám nem egyenlő nullával."

C: pozitív kitevőjű hatványa nulla, akkor a szám csak nulla lehet."

D: páros kitevőjű hatványa pozitív, akkor a szám is pozitív."

Megoldás: Az **A** állítás igaz, mert ha $a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$.

A **B** állítás igaz, mert ha $a^0 = 1$, akkor mivel csak a nullának nem értelmezzük a nulladik hatványát, a többi számé viszont 1, tehát a feltételből következik, hogy $a \neq 0$.

A **C** állítás igaz, mert a pozitív számok pozitív kitevőjű hatványa pozitív, a negatív számok pozitív egész kitevőjű hatványa értelmezett, és az nem nulla. Csak a nulla pozitív kitevőjű hatványa nulla.

A **D** állítás hamis, mert pl. $(-3)^2 = 9$.

7. 10-nek hányadik hatványával egyenlő a $2^{\lg 2}$?

A: $(\lg 2)^2$ **B:** $\lg 2$ **C:** $10^{2^{\lg 2}}$ **D:** $2\lg 2$

Megoldás: $10^x = 2^{\lg 2} > 0 \Leftrightarrow x = \lg 2^{\lg 2} = \lg 2 \cdot \lg 2 = (\lg 2)^2$.

8. A következő két egyenletnek hány közös valós megoldása van?

$$2^x - 2^{-x} = 3 \text{ és } 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$$

A: 1 **B:** 2 **C:** 3 **D:** Egy sem.

Megoldás: $2^x - 2^{-x} = 3 \Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$, mert ha az első egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a pozitív értékű 2^x kifejezéssel, és a kapott egyenletet nullára redukáljuk, a második egyenlethez jutunk. Ezért minden megoldásuk közös. A második egyenlet 2^x-ben másodfokú, megoldásai: $2^x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ vagy $2^x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$. A második megoldásnak $2^x < 0$ miatt nincs értelme, az első pedig a 2-es alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése miatt pontosan egy megoldást ad.

9. Ha az A pont helyvektora $\mathbf{a}(4;-3)$, a B pont helyvektora $\mathbf{b}(-1;4)$, akkor a $\overrightarrow{BA}$ vektor koordinátái:

A: $(-5;7)$ **B:** $(3;-7)$ **C:** $(3;1)$ <u>**D:**</u> $(5;-7)$

Megoldás: $\overrightarrow{BA} = \mathrm{a} - \mathrm{b} = (5;-7)$.

10. A megadott egyenletű egyenesek közül melyik halad át az $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ egyenletű kör középpontján?

A: $2x - 3y = 5$ <u>**B:**</u> $3x - y = 9$ **C:** $x + 3y + 2 = 0$ **D:** $y = 3$

Megoldás: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2$, ez pedig olyan kör egyenlete, amelynek a középpontja: $K(2;-3)$. Ennek a pontnak koordinátái csak a **B** egyenletet elégítik ki.

11. Az $e: x - 3y + 9 = 0$ és $f: 2x - 3y = -12$ egyenletű egyenesek metszéspontja rajta van a g egyenesen, ha

A: $g: 3y - x = 5$ **B:** $g: y = -2x - 3$ **C:** $g: 2x - y = 4$ <u>**D:**</u> $g: 4y - x = 11$

Megoldás: Az e és az f egyenes metszéspontja: $M(-3;2)$. Ennek a pontnak a koordinátái csak a **D** egyenletet elégítik ki.

12. A $P(-2;3)$ ponton átmenő, a $2x - 3y = 0$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete:

A: $3x + 2y = 0$ **B:** $y = \frac{2}{3}x + 4$ <u>**C:**</u> $3y - 2x = 13$ **D:** $2x - 3y = 12$

Megoldás: A keresett egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(2;-3)$, pontja $P(-2;3)$, így egyenlete $2x - 3y = -13 \Leftrightarrow 3y - 2x = 13$.

13. Egy rombusz egyik átlóegyenesének egyenlete: $3x - 4y + 5 = 0$, szimmetriaközéppontja: $K(1;2)$. Melyik a rombusz másik átlóegyenesének egyenlete?

<u>**A:**</u> $(3-x)(2-y) = x(y+2) - 4$ **B:** $4x + 3y = 18$

C: $(x-2)(y+2) = (x+1)(y+6)$ **D:** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

Megoldás: A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. A keresett egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(4;3)$, pontja a $K(1\,;\,2)$, így az egyenlete: $4x+3y=10$.

$(3-x)(2-y)=x(y+2)-4 \iff 6-2x-3y=2x-4 \iff 4x+3y=10$.

14. Egy α hegyesszögű derékszögű háromszögben $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$, a háromszög területe $27\ \mathrm{cm}^2$.

Hány cm a két befogóhossz különbségének abszolútértéke?

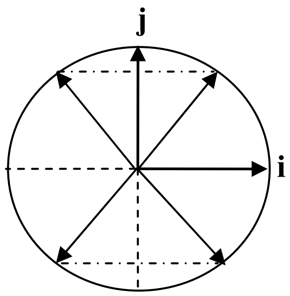
A: 3 **B:** 2,5 **C:** 2 **D:** 1,5m

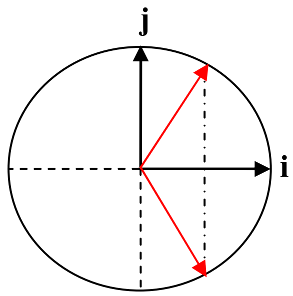
Megoldás: A $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$ feltételből (és a hegyesszög kotangensének definíciójából) következik, hogy a háromszög befogóinak hossza: $2x$ és $3x$. Így a területe: $27=T=\frac{2x\cdot 3x}{2}$, azaz $x^2=9$, és ebből $0<x=3$ (cm).

15. Hány megoldása van a $\frac{\sin^2 x-\frac{3}{4}}{2\cos x-1}=0$ egyenletnek a $[-180°;360°]$ intervallumon?

A: Nincs megoldása **B:** 1 **C:** 2 **D:** 3

Megoldás: $\frac{\sin^2 x-\frac{3}{4}}{2\cos x-1}=0 \iff \sin^2 x-\frac{3}{4}=0$ *és* $2\cos x-1\neq 0$.





A bal oldali ábrán azt a 4 egységvektort rajzoltuk meg, amelyek irányszögei megoldásai az első egyenletnek, míg a másik ábrán közülük azt a kettőt, amelyek irányszögei nem megoldásai az egyenletnek. Tehát az egyenlet megoldásai a II. és III. síknegyedben lévő egységvektorok irányszögei. Ha az **i** vektor (-180°)-os elforgatottjából kiindulva növeljük a forgásszögét 0°-osra, majd tovább növeljük 360°-ig, a két vektort összesen 3-szor érjük el, ami azt jelenti, hogy a $[-180°;360°]$ intervallumban pontosan 3 megoldása van az egyenletnek (120°, – 120°, 240°).

16. Mekkora az **a** és **b** vektor hajlásszöge, ha $\mathbf{a} = (\cos 800^\circ)\,\mathbf{i} + (\sin 800^\circ)\,\mathbf{j}$ és

$\mathbf{b} = \cos(-100^\circ)\,\mathbf{i} - \sin(-100^\circ)\,\mathbf{j}$?

A: 160° **B:** 80° **<u>C:</u>** 20° **D:** 180°

Megoldás: $\mathbf{a} = (\cos 800^\circ)\,\mathbf{i} + (\sin 800^\circ)\,\mathbf{j} = (\cos 80^\circ)\,\mathbf{i} + (\sin 80^\circ)\,\mathbf{j}$, *az **a** és **i** vektor hajlásszöge* 80°.

$\cos(-100^\circ)\,\mathbf{i} - \sin(-100^\circ)\,\mathbf{j} = \cos(-100^\circ)\,\mathbf{i} + (-\sin(-100^\circ))\,\mathbf{j} = \cos 100^\circ\ \mathbf{i} + \sin 100^\circ\ \mathbf{j}$,

így a **b** vektor a II. síknegyedben rajzolható meg, a **b** és **i** vektor hajlásszöge 100°. Az **a** és **b** vektor hajlásszöge 20°**.**

17. Egy háromszög oldalainak hossza: $a = 8$ cm, $b = 15$ cm és $c = 19$ cm. Szögei szerint milyen ez a háromszög?

A: Hegyesszögű **<u>B:</u>** Tompaszögű **C:** Derékszögű

D: Van 60°-os szöge.

Megoldás: $19^2 = 8^2 + 15^2 - 16 \cdot 15 \cdot \cos\gamma$ egyenletből $16 \cdot 15 \cdot \cos\gamma = -72$, azaz $\cos\gamma$ negatív, tehát a háromszög tompaszögű.

18. Egy szabályos dobókockát hatszor egymás után feldobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott számok között legalább egy hatos dobás lesz?

<u>A:</u> $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$ **B:** $\frac{6^6 - 5^6}{6!}$ **C:** $1 - \frac{5}{6}$ **D:** $\left(\frac{5}{6}\right)^6$

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy egyik dobott szám sem lesz 6-os: $\left(\frac{5}{6}\right)^6$. A kérdés, ennek az eseménynek a komplementere, ennek a valószínűsége $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$**.**

19. Öt barát (Anna, Balázs, Cili, Dénes és Erika) moziba megy. Az öt jegy a 12. sor bal oldali 1.-5. helyére szól. Ha véletlenszerűen ülnek le, mekkora a valószínűsége, hogy Anna és Dénes egymás mellett, az 1-es és 2-es helyet foglalja el?

A: $\dfrac{2}{\binom{5}{2}}$ **B:** $\dfrac{12}{5!}$ **C:** $\dfrac{3!}{5!}$ **D:** Egyik eddigi válasz sem helyes.

Megoldás: Ha Anna és Dénes leül valamilyen sorrendben az 1-es és 2-es székre, a 3.-5. helyekre a többi három ember 3!-féleképpen foglalhat helyet. Ha Anna és Dénes fordított sorrendben ül le a két helyre, ekkor is 3!-féle leülési lehetősége van B-nek, C-nek és E-nek. Így a kedvező esetek száma: $2\cdot 3!$. Az összes esetek száma: $5!$, tehát $\mathbf{P}=\dfrac{2\cdot 3!}{5!}$.

20. Öt barát (Anna, Balázs, Cili, Dénes és Erika) moziba megy. Az öt jegy a 12. sor bal oldali 1.-5. helyére szól. Véletlenszerűen ülnek le. Jelölje *A* azt az eseményt, hogy Anna és Dénes egymás mellett foglal helyet. Melyik műveletsor adja meg helyesen a kedvező esetek és az összes esetek számát, és így az *A* esemény valószínűségét?

A: $\mathbf{P}(A)=\dfrac{\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}}$ **B:** $\mathbf{P}(A)=\dfrac{4!}{5!}$ **C:** $\mathbf{P}(A)=\dfrac{2\cdot 4!}{5!}$ **D:** $\mathbf{P}(A)=\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{2}}$

Megoldás: Az *A* esemény bekövetkezik az A, B, C, D és E minden olyan permutációjával, amelyben A és D egymást követő elemek. A kedvező esetek száma megegyezik ezeknek a permutációknak a számával. Ezek száma pedig: $2\cdot 4!\,(=48)$. Az összes lehetséges kimenetelek száma: az öt elem összes permutációjának száma, azaz $5!\,(=120)$, így $\mathbf{P}(A)=\dfrac{2\cdot 4!}{5!}$.