Matematika C
10. osztály

8. modul
Terv és valóság

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A tanuló környezetében lévő tárgyak, épületek hosszúságadatainak mérése, a már tanult trigonometriai ismeretek alkalmazása, a matematika órán hallott geometriai feladatok adatainak szembesítése a mért adatokkal. Közelítő számítási alapismeretek elsajátítása.
Időkeret	3 foglalkozás
Ajánlott korosztály	15–16 évesek (10. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: földmérők munkája, eszközei Szűkebb környezetben: matematika órán, „köznapi életből vett" geometriai feladatok megoldása. Fizika órán hibakorlátok megállapítása. Ajánlott megelőző tevékenységek: szögfüggvények ismerete derékszögű háromszögben
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás Mennyiségi következtetés, Becslés, mérés Szöveges feladat megoldása, probléma megoldás, metakogníció Rendszerezés, kombinativitás

AJÁNLÁS

A feladatgyűjteményekben gyakran találkoznak a tanulók olyan feladatokkal, amelyekben épületek magasságának, megközelíthetetlen tárgyak távolságának kiszámítása a feladat.

Ezekben a feladatokban a szükséges adatok rendelkezésre állnak. A tanulókban is felmerülhet a hiányérzet: vajon ha adott egy probléma (pl. egy épület magasságának meghatározása), akkor milyen adatok mérésével tudnám elérni a célomat? Vajon a rendelkezésemre álló eszközökkel milyen hibahatárokkal tudnám végrehajtani a mérést?

Ezekre a kérdésekre keresi a választ ez a modul. A mérést természetesen komoly tervezőmunka előzi meg. A mérés többszöri elvégzése, a méréshibák becslése, a mért adatokkal a kérdéses mennyiség kiszámítása, a kiszámított mennyiség ellenőrzése, szembesítése a tárgy, épület megismerhető valódi méreteivel – mindez része a munkának. Ez a sok tevékenység nem fér egyetlen foglalkozás időtartamába, ezért javaslom az első két foglalkozást egyszerre megtartani.

A harmadik foglalkozás témaköre már régen kikerült a matematika tantervi anyagából. Ez azért is sajnálatos, mert a gyakorlati problémák „beszivárgása" a matematika órákra szükségessé teszi a közelítő számítás alapismereteinek elsajátítását is. A kalkulátorok használata (ami természetesen elkerülhetetlen) is előidézi a gyakorló tanár által sokszor látott problémát, amikor a tanuló például egy hegy magasságát ezredmilliméter pontossággal határozza és adja meg. A modul nem a közelítő számítás elméletével ismertet meg, hanem a tanulók tapasztalatok gyűjtése során sajátítják el a szükséges alapismereteket.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Mérünk és számolunk (1. rész)			
1.	A probléma megfogalmazása, a mérés megtervezése	Pontosság, kreativitás, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, hosszúság becslése, gondolkodási sebesség, ismeretek rendszerezése	Eszközök: Körző, vonalzó, számológép, mérőeszközök Tanulói munkafüzet: Mérések és Vázlatok Szükséges eszközök Szögmérés Egy-egy lehetséges mérési mód
II. Mérünk és számolunk (2. rész)			
1.	Terepen a mérések végrehajtása	Pontosság, analógiás gondolkodás, becslési képesség, figyelemkoncentráció, eredetiség, elemző képesség, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, hosszúság becslése, gondolkodási sebesség, ismeretek rendszerezése, rugalmas gondolkodás, problémamegoldás	Eszközök: Körző, vonalzó, számológép, egyenes léc, szögmérő, erős cérna, kisméretű nehezék
2.	A mérés hibahatárainak becslése.	Analógiás gondolkodás, becslési képesség, elemző képesség, gondolkodási sebesség, ismeretek rendszerezése, rugalmas gondolkodás	Eszköz: Számológép
3.	Számítás a mért adatokkal és a becsült hibahatárokkal.	Pontosság, analógiás gondolkodás, gondolkodási sebesség, ismeretek rendszerezése, rugalmas gondolkodás, problémamegoldás	Eszköz: Számológép

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
III. Közelítő számítások			
1.	Számolás közelítő értékekkel	Számolási képesség, műveletvégzési sebesség, pontosság, figyelemkoncentráció, problémaérzékenység, gondolkodási sebesség, ismeretek rendszerezése, rugalmas gondolkodás, problémamegoldás, elemző képesség	Eszköz: Számológép Tanulói munkafüzet: Számolás közelítő értékekkel
2.	A kör kerülete	Számolási képesség, műveletvégzési sebesség, pontosság, figyelemkoncentráció, problémaérzékenység, gondolkodási sebesség, ismeretek rendszerezése, rugalmas gondolkodás, problémamegoldás, elemző képesség	Eszköz: Számológép Tanulói munkafüzet: A kör kerülete
3.	Idézetek dolgozatokból	Számolási képesség, műveletvégzési sebesség, pontosság, figyelemkoncentráció, problémaérzékenység, gondolkodási sebesség, ismeretek rendszerezése, rugalmas gondolkodás, problémamegoldás, elemző képesség	Eszköz: Számológép Tanulói munkafüzet: Idézetek dolgozatokból

I–II. MÉRÜNK ÉS SZÁMOLUNK

A tanítási órán nincs alkalom és lehetőség arra, hogy a tanulók a geometria számolási feladatok adatait kinn, a terepen méréssel határozzátok meg. Kevés lehetőség adódik becslésre, hibahatárok megállapítására Ezen a foglalkozáson e kérdésekkel foglalkozunk.

Az egy-egy foglalkozásra megszabott 45 perc – úgy vélem – nem elegendő ennek a komplex feladatnak az elvégzésére, ezért javaslom, hogy vonjunk össze két foglalkozást.

A foglalkozás négy részből áll:

1. A probléma megfogalmazása, a mérés megtervezése
2. A mérések végrehajtása terepen
3. A mérés hibahatárainak becslése
4. Számítás a mért adatokkal és a becsült hibahatárokkal

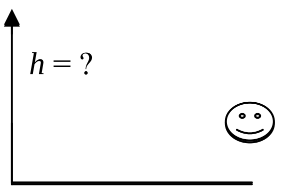
Tanulói munkafüzet: Mérések és Vázlatok

A következő problémákat javaslom kitűzésre:

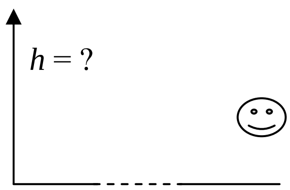
a) Egy épület (fa) magasságának kiszámítása, feltéve, hogy az épület (fa) megközelíthető.
b) Egy olyan épület (ablak vagy fa) magasságának kiszámítása, amelyik nem közelíthető meg.
c) Két tárgy (épület, fa) távolságának kiszámítása, ha a tárgyak távolsága közvetlenül nem mérhető meg.

A feladat kitűzésekor készítsünk egy sematikus vázlatot:

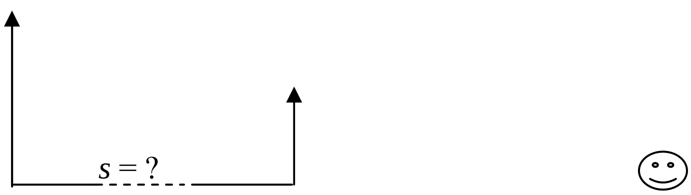
a)



b)



c)



Tanulói munkafüzet: Szükséges eszközök

Szervezzünk 3 fős csoportokat! Minden csoport számára biztosítsuk a következő eszközöket:

- szögmérő
- mérőszalag (legalább 30 m-es)
- vékony, egyenes léc
- rajzszög és vékony, erős cérnára kötött nehezék
- talajba leszúrható egyenes bot

Először minden csoport készítsen tervet, hogy milyen adatokat mérnének meg ahhoz, hogy a mért adatokból már kiszámíthatók legyenek a kérdéses hosszúságok!

Miután a tanulók megismerték a méréshez használható eszközök listáját, egyértelművé válik számukra, hogy szögeket és hosszúságokat mérhetnek. Mivel már ismerik a szögfüggvényeket, azok derékszögű háromszögben való alkalmazását is, illetve a háromszögek hasonlóságának alapeseteivel is foglalkoztak tanórán, valószínű, hogy tanári segítség nélkül is tudnak többféle tervet készíteni.

Szögmérést (talajra merőleges síkban) a következőképpen végezhetnek a tanulók:

Egy léc oldalára erősítenek egy szögmérőt, annak közepére egy függőónt (cérnából és a végén nehezékből készíthető). A lécet úgy állítják be, mintha egy távcső csöve lenne. A függőón és a léc által bezárt tompaszögből a derékszöget visszaszámolva az emelkedési szöghöz jutnak.

Tanulói munkafüzet: Szögmérés

Az alábbiakban néhány mérési lehetőséget vázolunk:

Tanulói munkafüzet: Egy-egy lehetséges mérési mód

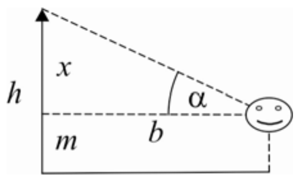
a) Egy épület (fa) magasságának kiszámítása, feltéve, hogy az épület (fa) megközelíthető.

i) Mérendő adatok: m, α , b

Kiszámítandó: $h = x + m$

Megoldás:

$h = m + b \cdot tg\alpha$



ii) Mérendő adatok:

a segédtárgy c hossza,

a két árnyék a és b hossza.

Kiszámítandó: a h hosszúság.

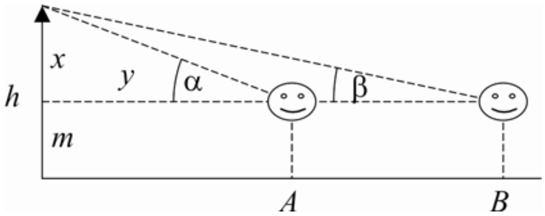
Megoldás:

$h = \frac{ac}{b}$

b) Egy olyan épület (ablak vagy fa) magasságának kiszámítása, amelyik nem közelíthető meg.

i) Mérendő adatok: *AB*, α, β, *m*.

Kiszámítandó: *x* és *y*.



Megoldás:

Mivel $tg\beta = \frac{x}{AB + y}$ és $tg\alpha = \frac{x}{y}$, így $(AB + y) \cdot tg\beta = y \cdot tg\alpha$.

Ebből $y = \frac{AB \cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$.

Ezért $x = y \cdot tg\alpha = \frac{AB \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$.

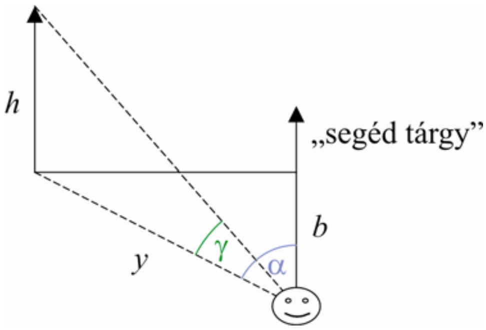
A kérdéses magasság: $h = x + m = \frac{AB \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta} + m$.

ii) Mérendő adatok: derékszög, α , γ , *b*.

Kiszámítandó: *y* és *h*.

Megoldás:

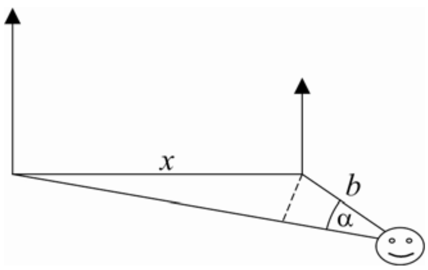
Mivel a talajszinten lévő derékszögű háromszögből: $y = \dfrac{b}{\cos\alpha}$, másrészt a h és y befogójú derékszögű háromszögben $tg\gamma = \dfrac{h}{y}$, így $h = \dfrac{b \cdot tg\gamma}{\cos\alpha}$



c) Két tárgy (épület, fa) távolságának kiszámítása, ha a tárgyak távolsága közvetlenül nem mérhető meg.

i) Mérendő adatok: α , β , *b*.

Számítandó: *y* és *x* (ahol β az *x* és *b* oldalak hajlásszöge, és *y* a β szög csúcsából húzott magasság hossza).



Megoldás:

Az *y* és *b* oldalak által határolt derékszögű háromszögben: $y = b\sin\alpha$

Az *x* és *y* oldalak által közrefogott szög: $\beta - (90^\circ - \alpha) = \beta - 90^\circ + \alpha$, és az általuk meghatározott derékszögű háromszögben:

$$\cos(\beta - 90^\circ + \alpha) = \frac{y}{x}$$

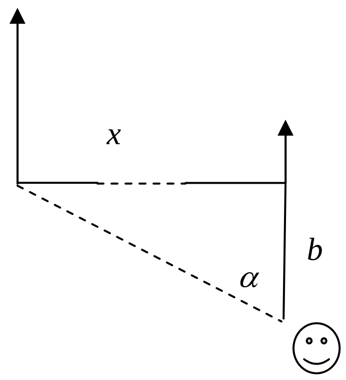
Így $x = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{\cos(\beta - 90^\circ + \alpha)}$.

ii) Mérendő adatok: derékszög, α , *b*.

Számítandó: *x*.

Megoldás:

$x = b \cdot tg\alpha$



A mérések megtervezése után írják le a tanulók a kérdéses mennyiség kiszámításának módját is! Így már paraméteresen megfogalmazódik a probléma megoldása is.

A terephelyet (a mérésbe bevont épületeket, fákat) célszerű előre kiválasztanunk. A csoportok forgószínpadszerűen végezhetnék el mind a három fajta (vagy esetleg több fajta) mérést.

Célszerű a csoportokkal jegyzőkönyvet készíttetni. Egy-egy mérést legalább kétszer végezzenek el!

Fontos a becslés, a valóság méreteinek érzékelése. Egy mérés befejezésekor becsüljék meg, hogy a mért hosszúságok, szögek valódi mértéke mennyire térhet el a mérttől. Ezt feltétlen jegyezzék fel a csoportok, mert a végén a hibahatárokkal is ki kell számítaniuk a kérdéses mennyiségeket. Ez nagyon tanulságos lehet a számukra: egy mért adat mindig egy intervallumnak, a hibahatárok által megszabott intervallumnak az eleme. A hibahatárok természetesen a mérést végző személy „gondosságán, pontosságán" kívül elsősorban a mérés eszközeinek „jóságán" múlik.

A mérés befejezése után (az iskola épületébe visszatérve) kiszámíthatják a csoportok mindhárom feladatban a kérdezett mennyiséget. Vessék össze eredményeiket a hibahatárokkal kiszámolt értékekkel!

Érdemes összehasonlítani az egyes csoportok eredményeit is! Ha ugyanazokat az adatokat mérték, akkor is tanulságos lehet az egyes mérések összevetése, de különösen érdekes a különböző módon mért adatokkal kapott eredmények összehasonlítása. Célszerű a táblán összesíteni az egy-egy feladatra kapott eredményeket. Ha eltérések mutatkoznak az egyes csoportok mért adatai között, vizsgáltassuk meg, hogy az eltérés a becsült hibahatárokon belül van-e. Ha nem, mi lehet az oka?

Ha épület magasságának meghatározása volt a feladat, a foglalkozás végén biztassuk a tanulókat, hogy tudják meg, milyen magas az épület valójában!

Tanulói munkafüzet

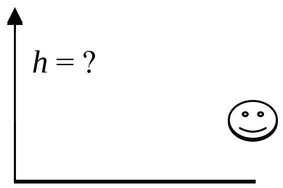
I–II. MÉRÜNK ÉS SZÁMOLUNK

Mérések:

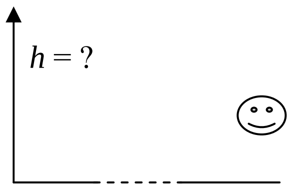
a) Egy épület (fa) magasságának kiszámítása, feltéve, hogy az épület (fa) megközelíthető.
b) Egy olyan épület (ablak vagy fa) magasságának kiszámítása, amelyik nem közelíthető meg.
c) Két tárgy (épület, fa) távolságának kiszámítása, ha a tárgyak távolsága közvetlenül nem mérhető meg.

Vázlatok:

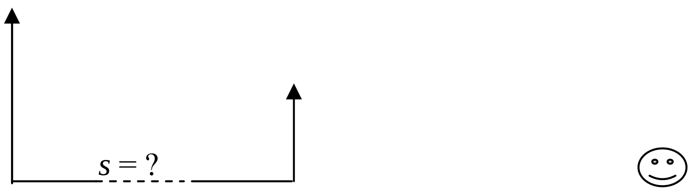
a)



b)



c)



Szükséges eszközök:

- szögmérő
- mérőszalag (legalább 30 m-es)
- vékony, egyenes léc
- rajzszög és vékony, erős cérnára kötött nehezék
- talajba leszúrható egyenes bot

Szögmérés (talajra merőleges síkban):

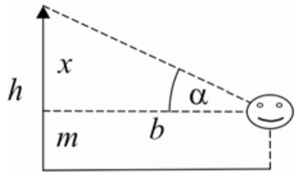
Egy léc oldalára erősítünk egy szögmérőt, annak közepére egy függőónt (cérnából és a végén nehezékből készíthető). A lécet állítsuk be úgy, mintha egy távcső csöve lenne. A függőón és a léc által bezárt tompaszögből a derékszöget visszaszámolva az emelkedési szöghöz jutnak.

Egy-egy lehetséges mérési mód:

a) Egy épület (fa) magasságának kiszámítása, feltéve, hogy az épület (fa) megközelíthető.

Mérendő adatok: *m*, α , *b*.

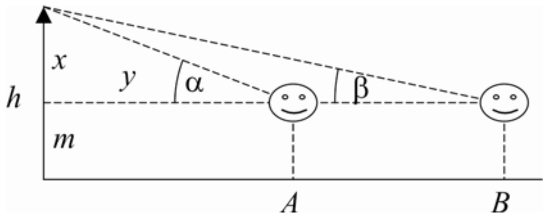
Kiszámítandó: $h = x + m$.



b) Egy olyan épület (ablak vagy fa) magasságának kiszámítása, amelyik nem közelíthető meg.

Mérendő adatok: *AB*, α , β , *m*.

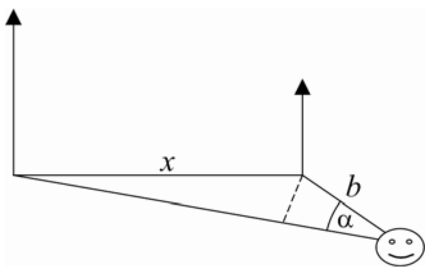
Kiszámítandó: *x* és *y*.



c) Két tárgy (épület, fa) távolságának kiszámítása, ha a tárgyak távolsága közvetlenül nem mérhető meg.

Mérendő adatok: α , β , *b*.

Kiszámítandó: *y* és *x* (ahol β az *x* és *b* oldalak hajlásszöge, és *y* a β szög csúcsából húzott magasság hossza).



III. KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSOK

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

Szerintetek mennyi lehetett Magyarország lakossága a ti születési évetekben?

Az 1990-ben mért adatok szerint akkor a népesség száma: 10 375 323 fő volt.

Hogyan értelmezzük ezt az adatot?
Mi lehet az első kérdés egy ilyen adat láttán?

Ez az adat egy meghatározott napra (pl. január 1-én éjfélre) vonatkozó adat. 1990-es év folyamán a népesség száma nagy valószínűséggel milyen értékek között lehetett?

Sok esetben nem ismerjük a pontos értéket. Ekkor közelítő értékkel számolunk. Pl. a π leggyakrabban használt közelítő értéke 3,14, pedig használhatnánk a 3,142-t vagy a 3,1416 közelítő értéket is, sőt, ha akarnánk, felírhatnánk tíz, húsz, 600 tizedesre is, ha szükségünk lenne rá, hiszen ezek mind a π-nek közelítő értékei, hiszen π irracionális szám. (Mit is jelent ez az utóbbi megállapítás?)

1. Számolás közelítő értékekkel

(Javasolt idő: 40 perc. Eszközigény: számológép. Munkaforma: egyéni és frontális.)

Egy derékszögű háromszögben az 55°-os szög melletti befogó cm pontossággal mérve $24{,}56$ m hosszú. Mekkora a másik befogó?

Nem ismerjük $tg55^\circ$ pontos értékét. Próbáljuk ennek a számnak egyre jobb közelítése mellett kiszámítani, hogy a másik befogó hossza milyen értékek között lehet! Ha $1{,}4 < tg55^\circ < 1{,}5$, mit mondhatunk a kérdéses *b* befogó hosszáról?

($34{,}38 < b < 36{,}84$)

Számoljunk pontosabb közelítő értékkel!

(Ha $1{,}42 < tg55^\circ < 1{,}43$, akkor $34{,}87 < b < 35{,}1208$.)

Folytassuk tovább!

(Ha $1{,}428 < tg55^\circ < 1{,}429$, akkor $35{,}07168 < b < 35{,}09624$.)

Hány számjegyét tudjuk biztosan a *b* befogó hosszának?

(Hármat: 3, 5, 0)

Tegyük fel, hogy ezt a befogót is centiméter pontossággal kell megadnunk. Vajon, milyen mértékben közelítsük $tg55^\circ$-ot, hogy a célunkat elérjük?

($1{,}4281 < tg55^\circ < 1{,}4282$ esetében $35{,}074136 < b < 35{,}076592$.)

Ebből milyen tapasztalatot vonhatunk le?

(A befogó hosszának 4 értékes jegyét ismertük meg. A $tg55^\circ$ további közelítése már e 4 értékes jegyet nem változtatja meg.)

Ha $1{,}42814 < tg55^\circ < 1{,}42815$, akkor $35{,}075118 < b < 35{,}075364$. A kerekítés szabályai szerint centiméter pontossággal a b befogó hossza 35,08 m, hiszen kiderült, hogy a befogó hosszának ötödik értékes jegye 5, ami azt jelenti, hogy a negyedik jegyet felfelé kell kerekítenünk.

Ha Pitagorasz tételének alkalmazásával számítjuk ki az átfogót, s ezt is centiméter pontossággal kell megadnunk, mekkora értéket kapunk?

($\sqrt{24{,}56^2 + 35{,}08^2} = 42{,}82$. Hiszen 7 értékes jegyre 42,822891 m adódik, s a kerekítés szabályai szerint ez cm pontossággal 42,82 m.)

Felvetődhet a kérdés, hogy ha az átfogót szögfüggvény alkalmazásával számoljuk ki az adott befogó hosszának felhasználásával, vajon a $\cos 55^\circ$ milyen mértékű közelítése esetén jutunk ugyanerre az eredményre. Pontos érték: $c = \dfrac{24{,}56}{\cos 55^\circ}$.

Ha $0{,}5735 < \cos 55^\circ < 0{,}5736$, akkor $42{,}817294 < c < 42{,}82476$.

Ha $0{,}57357 < \cos 55^\circ < 0{,}57358$, akkor $42{,}818787 < c < 42{,}819534$.

2. A kör kerülete

(Munkaforma: egyéni és frontális.)

Tanulói munkafüzet: A kör kerülete

Hogyan számítanánk ki a 3 cm oldalhosszú négyzet köré írt kör kerületét? Tételezzük fel, hogy a 3 cm pontos érték.
Hogyan jelölnétek a kerület pontos értékét?

($K = \pi \cdot \sqrt{18}$)

Tudjuk, hogy $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Ha a kalkulátorral kiíratjátok $\sqrt{18}$ közelítő értékét, kiderül, hogy $4{,}24 < \sqrt{18} < 4{,}25$. Számítsátok ki, hogy ilyen közelítéssel számolva, mit állíthatunk a kör kerületéről!

(Mivel $4{,}24 \cdot 3{,}14 = 13{,}3136$ és $4{,}25 \cdot 3{,}15 = 13{,}3875$, így

$13{,}3136 < K < 13{,}3875$.)

Tehát abban biztosak lehetünk, hogy a kérdéses kerület 13,3136 és 13,3875 közötti szám.
Számoljuk ki jobb közelítéssel is! Mindkét irracionális szám esetében vegyünk figyelembe 3 tizedes jegyet! Mit állíthatunk így a kerület pontos értékéről?

(Mivel $4{,}242 \cdot 3{,}141 = 13{,}324122$ és $4{,}243 \cdot 3{,}142 = 13{,}331506$, ezért

$13{,}324122 < K < 13{,}331506$.)

Pontosítsunk tovább!

(Mivel $4{,}2426 \cdot 3{,}1415 = 13{,}328128$ és $4{,}2427 \cdot 3{,}1416 = 13{,}328866$, így

$13{,}328128 < K < 13{,}328866$.)

Foglaljuk táblázatba az eredményeinket!

$\sqrt{18}$ **közelítő értéke:**	π **közelítő értéke:**			**K értékes jegyei:**
4,24, ill. 4,25	3,14, ill. 3,15	$13{,}3136 < K$	$K < 13{,}3875$	13,3
4, 242, ill. 4,243	3,141, ill. 3,142	$13{,}324122 < K$	$K < 13{,}331506$	13,3
4,2426, ill. 4,2427	3,1415, ill. 3,1416	$13{,}328128 < K$	$K < 13{,}328866$	13,328

Milyen tapasztalatot szűrhetünk le?

(Az első esetben mindkét tényezőnek két értékes jegy volt, a szorzatnak 3 értékes jegye. Amikor 3-3 értékes jegye volt a tényezőknek, a szorzatnak ismét 3 értékes jegye lett. Az utolsó esetben 4-4 értékes jegye volt a tényezőknek, a szorzatnak 5 értékes jegye.)

Az első két számítás után kiderült, hogy a kerület pontos értékének első két jegye 1 és 3, a tizedes vessző utáni első számjegye pedig 3, azaz az első három jegye értékes jegy. A harmadik számításból már öt értékes jegyet kaptunk.

Vajon hány értékes jegye lesz a kerületnek, ha az egyik tényező 2 értékes jegyű, a másiknak 4 értékes jegyű közelítő értékével számolunk? Nézzétek meg!

(Ekkor is 3 értékes jegye lesz a kerületnek: $4{,}24 \cdot 3{,}1415 = 13{,}31996$ és $4{,}25 \cdot 3{,}1416 = 13{,}3518$, illetve $4{,}2426 \cdot 3{,}14 = 13{,}321764$ és $4{,}2427 \cdot 3{,}15 = 13{,}364505$)

Hogyan foglalhatnánk össze eddigi tapasztalatainkat?

3. Idézetek dolgozatokból

(Munkaforma: egyéni.)

Gyakran íratok tanulókkal dolgozatot, és sokszor nagyon tanulságos hibákat ejtenek a tanulók dolgozatírás során. Íme két idézet egy-egy dolgozatból. Hallgassátok meg, s mondjatok véleményt róla!

Tanulói munkafüzet: Idézetek dolgozatokból

1. feladat:
A dombra egyenes út (ösvény) visz föl, amelynek hossza 152 m. Az ösvény emelkedési szöge 42°. Milyen magas a domb?

A tanuló megoldása:

Jelöljük *h*-val a domb magasságát. Ekkor $\sin 42^\circ = \frac{h}{152}$, ebből

$h = 152 \cdot \sin 42^\circ = 101{,}70785$. Tehát a domb 101,70785 m magas.

Mi a véleményetek a tanuló munkájáról? A kiszámítás módja helyes? Végeredménye jó?

(Az ösvény hossza méter pontossággal adott. Egy domb magassága is legfeljebb méter pontossággal adható meg, tehát a helyes eredmény: 102 m magas a domb.)

2. feladat:
Egy körhenger alakú fazék alapkörének sugara 1,2 dm, magassága 3,6 dm. Határozza meg a fazék térfogatát dm^3 pontossággal!

A tanuló megoldása:
Az *r* sugarú, *m* magasságú henger térfogata: $V = r^2 \cdot \pi \cdot m$. Így a fazék térfogata:
$V = 1{,}2^2 \pi \cdot 3{,}6 \approx 16{,}27776$. A fazék térfogata kb. 16,3 dm^3.

Mi a véleményetek?

(A „tanuló” 3,14 közelítéssel számolt. Ennél jobb közelítés esetén is a kapott szám három értékes jegye 1, 6, 2.

Ha $\pi = 3{,}14$, akkor $V = 1{,}2^2 \pi \cdot 3{,}6 = 1{,}2^2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}6 = 16{,}27776\ \left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Ha $\pi = 3{,}141$, akkor $V = 1{,}2^2 \cdot 3{,}141 \cdot 3{,}6 = 16{,}282944\ \left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Ha $\pi = 3{,}1415927$, akkor $V = 1{,}2^2 \cdot 3{,}1415927 \cdot 3{,}6 \approx 16{,}286016\ \left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Tehát a π további számjegyei nem befolyásolják az első három jegyet. A negyedik jegy is értékes jeggyé válik (8), ha a π értékes jegyeinek száma legalább 3.

Mivel a 2 után 5-nél nagyobb számjegy következik, a megoldás helyes, dm^3 pontossággal ennyi a térfogat.)

Mire kell vigyáznunk a valósághű feladatok megoldása során?

Összefoglalva: Valósághű feladatok esetén a végeredményt mindig olyan pontossággal adjuk meg, ami megfelel a mérés pontosságának. (Tehát pl. egy hegy magasságát méter pontossággal, egy asztal magasságát legfeljebb cm pontossággal.)

A számolás közben felhasznált számokkal legalább 1-gyel több értékes jeggyel számoljunk, mint amilyen pontossággal az adatok voltak megadva. A részeredményekkel is ilyen pontossággal számoljunk tovább, és csak a végeredményt kerekítsük megfelelő pontosságúra.

Tanulói munkafüzet:
III. KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSOK

Szerintetek mennyi lehetett Magyarország lakossága a ti születési évetekben?

Az 1990-ben mért adatok szerint akkor a népesség száma: 10 375 323 fő volt.

Hogyan értelmezzük ezt az adatot?
Mi lehet az első kérdés egy ilyen adat láttán?

Ez az adat egy meghatározott napra (pl. január 1-én éjfélre) vonatkozó adat. 1990-es év folyamán a népesség száma nagy valószínűséggel milyen értékek között lehetett?

Sok esetben nem ismerjük a pontos értéket. Ekkor közelítő értékkel számolunk. Pl. a π leggyakrabban használt közelítő értéke 3,14, pedig használhatnánk a 3,142-t vagy a 3,1416 közelítő értéket is, sőt, ha akarnánk, felírhatnánk tíz, húsz, 600 tizedesre is, ha szükségünk lenne rá, hiszen ezek mind a π-nek közelítő értékei, hiszen π irracionális szám. (Mit is jelent ez az utóbbi megállapítás?)

1. Számolás közelítő értékekkel

Egy derékszögű háromszögben az 55°-os szög melletti befogó cm pontossággal mérve, $24{,}56\ \mathrm{m}$ hosszú. Mekkora a másik befogó?

Nem ismerjük tg55° pontos értékét. Próbáljuk ennek a számnak egyre jobb közelítése mellett kiszámítani, hogy a másik befogó hossza milyen értékek között lehet!
Ha $1{,}4 < \mathrm{tg}55° < 1{,}5$, mit mondhatunk a kérdéses *b* befogó hosszáról?

Számoljunk pontosabb közelítő értékkel!

2. A kör kerülete

Hogyan számítanánk ki a 3 cm oldalhosszú négyzet köré írt kör kerületét? Tételezzük fel, hogy a 3 cm pontos érték.

Hogyan jelölnétek a kerület pontos értékét?
Tudjuk, hogy $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Ha a kalkulátorral kiíratjátok $\sqrt{18}$ közelítő értékét, kiderül, hogy $4{,}24 < \sqrt{18} < 4{,}25$. Számítsátok ki, hogy ilyen közelítéssel számolva, mit állíthatunk a kör kerületéről!

Számoljuk ki jobb közelítéssel is!

3. Idézetek dolgozatokból

Részletek egy tanuló dolgozatából:

1. feladat:
A dombra egyenes út (ösvény) visz föl, amelynek hossza 152 m. Az ösvény emelkedési szöge 42°. Milyen magas a domb?

A tanuló megoldása:

Jelöljük h-val a domb magasságát. Ekkor $\sin 42^\circ = \frac{h}{152}$, ebből

$h = 152 \cdot \sin 42^\circ = 101{,}70785$. Tehát a domb 101,70785 m magas.

Mi a véleményetek a tanuló munkájáról?

2. feladat:
Egy körhenger alakú fazék alapkörének sugara 1,2 dm, magassága 3,6 dm. Határozza meg a fazék térfogatát dm^3 pontossággal!

A tanuló megoldása:
Az r sugarú, m magasságú henger térfogata: $V = r^2 \cdot \pi \cdot m$. Így a fazék térfogata:
$V = 1{,}2^2 \pi \cdot 3{,}6 \approx 16{,}27776$. A fazék térfogata kb. 16,3 dm^3.

Mi a véleményetek erről a megoldásról?
Mire kell vigyáznunk a valósághű feladatok megoldása során?