Matematika C
10. osztály

5. modul
Kis karácsony…

Készítette: Kovács Károlyné és Lénárt István

A modul célja	Szépirodalmi alkotásokban felismerni a matematikában használatos szellemi tevékenységeket, illetve fogalmakat.
Időkeret	1 foglalkozás
Ajánlott korosztály	15–16 évesek (10. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Irodalom, népköltészet Ajánlott megelőző tevékenységek: Tranzitív tulajdonság ismerete
A képességfejlesztés fókuszai	Szövegértés, probléma megoldás

AJÁNLÁS

Ez a modul ajándék a tanulók számára. Látszólag semmi matematika. Csapatok közötti vetélkedő. Népdalok felidézése. Irodalmi művekből részletek olvasása. Kutatás „matematikus” szemmel. Versek értelmezése „matematikus” szemmel. A teremőr bizonyítása. Hamlet bizonyítása. Bolyai János írása. De ki volt az a Bolyai János? Mi köze van a párhuzamosokhoz? Semmi matematika!

TÁMOGATÓ RENDSZER

Mandics György–M. Veress Zsuzsanna: *Bolyai János jegyzeteiből* (Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1979)
http://www.bolyaitestamentum.hu*
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai*

* 2007. augusztusában elérhető a honlap

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Kis karácsony…			
	Ráhangolódás: Csapatok szerveződése	Együttműködési képesség	
1.	A verseny Hét feladat. „Számos” népdalok felidézése. Irodalmi művek, amelyekben valamilyen számnak jelentősége van. Megadott irodalmi művekben előforduló, matematikában használt fogalmak, illetve szellemi tevékenység keresése. Vers értelmezése – matematikus szemmel Bolyai János egyik írása Beszélgetés Bolyai Jánosról, Eukleidészről, párhuzamosságról.	Kreativitás, eredetiség, problémaérzékenység, együttműködési képesség, szövegértés, szövegértelmezés	Melléklet a tanároknak: A csapatok feladatai és a megoldások Tanulói munkafüzet: Shakespeare: Vízkereszt, vagy amit akartok József Attila: A számokról Johann Wolfgang Goethe Bolyai János: Geometriák Internet-hozzáférés

I. KIS KARÁCSONY…

Ráhangolódás (1-2 perc)

A mai foglalkozás egy kicsit rendhagyó lesz. Azt hinné az ember, hogy az irodalmi, vagy a népköltészeti alkotások igazán távol állnak a matematikától. Olvasgatunk – semmi matematika. Aztán egyszer csak – lám, lám, ez ismerős! Olvasás közben rábukkanunk olyan részletekre, olyan gondolatokra, amelyek ismerősek lehetnek matematikából. Fedezzétek fel ti is!
Alakítsunk ki 3-4 fős csoportokat! Úgy, ahogyan focizás előtt szokás! Meghívással. Nem árt, ha lesz a csoportban olyan tanuló, aki szereti az irodalmat, meg olyan is, aki szereti a népköltészetet. Mondjuk *P, Q, R* és *S* alakítson ki csoportot! Sorban, egymás után nevezzétek meg azt a társatokat, akit beválasztotok a csapatba!

Ha kialakultak a csapatok, kezdhetjük a versenyt. Egyszerre minden csapat ugyanazt a megoldandó feladatot kapja. A feladaton meghatározott ideig lehet dolgozni. Mindig előre megmondom, hogy mennyi idő áll rendelkezésetekre.

A tanulók munkafüzetében csak a feladatokban szereplő versek, idézetek találhatók meg. Az 1. és 2. feladat szövegét illetve az idézetekhez tartozó kérdéseket célszerű kimásolni, és a másolatokat a tanulók kezébe adni.

1. A verseny

Melléklet a tanároknak: A csapatok feladatai és a megoldások

Az első feladat. Ráfordítható idő: 4 perc. Óra indul.
Letelt az idő. Számoljátok össze, hány népdalt sikerült összeírni! Olvassátok fel sorban! A többiek figyeljenek, hogy elfogadható-e mindegyik. Minden csapat egy népdalt köteles elénekelni. Hogy melyiket, azt egy másik csapat dönti el. Legyen mondjuk a sorrend ez: *P* csapatét *Q*, *Q*-ét *R*, és így tovább választja ki.

Az értékelés lehet a következő: minden elfogadott népdal 1 pont, ha a kiválasztott népdalt elénekelték + 5 pont.

Második feladat. Ráfordítható idő: 4 perc.

Ez már nehezebb feladat. Elképzelhető, hogy a foglalkozás előtt megbeszéljük a tanulókkal, hogy hozzák be a foglalkozásra kedvenc verseskötetüket, regényüket vagy irodalmi szöveggyűjteményüket. Csak olyan művet fogadjunk el, amelyet a csapat tagjain kívül legalább egy ember ismer. Ha nem közismert a megnevezett mű, kérjük, hogy röviden ismertessék, kiemelve a megjelölt szám szerepét a műben.

Az értékelés lehet a következő: művenként 2 pont.

Harmadik feladat. Ráfordítható idő: 5 perc.

Tanulói munkafüzet: Shakespeare: Vízkereszt, vagy amit akartok

Ne várjuk el, hogy a tanulók a tulajdonság nevét is ismerik. Fogadjuk el teljes megoldásnak, ha megtalálják a megfelelő részletet, s egy matematikai fogalmon mutatják be a tulajdonságot.

Az értékelés lehet a következő: 5 pont, ha megjelölik a kérdéses részletet; +3 pont, ha megnevezik és/vagy matematikai példán bemutatják a tulajdonságot.

Negyedik feladat. Ráfordítható idő: 4 perc.

Tanulói munkafüzet: József Attila: A számokról

Könnyen felismerhető, hogy a vers elsősorban nem a számokról szól, inkább a karácsonyról. A „száraz" kérdés nem megoldhatatlan egy 10.-es tanuló számára, gondoljunk a nem véges tizedestört alakú racionális számokra.

Értékelés: 3 pont egy helyes válasz +2 pont az igazolás.

Ötödik feladat. Ráfordítható idő: 4 perc.

Ha ismerik Shakespeare: Hamlet c. művét, nem nehéz a feladat. Kérdés, hogy tanulták-e már. Ha nem, akkor valamelyik színházba járó tanulóban bízhatunk.

Értékelés: legalább 5 pont, az előbb említettektől függően.

Hatodik feladat: Ráfordítható idő: 6 perc

Tanulói munkafüzet: Johann Wolfgang Goethe

Írassuk is le a tanulók az értelmezéseiket. A csapatok összehasonlításkor olvassák föl. Legyenek a csapatok egymás bírálói.

Az értékelés lehet a következő: 5-5 pont

Hetedik feladat: Ráfordítható idő: 5 perc

Tanulói munkafüzet: Bolyai János: Geometriák

Három kérdés, amely lehetőség nyújt beszélgetésre Bolyai Jánosról, axiómarendszerekről, euklideszi geometriáról, hiperbolikus geometriáról. A tanulók ismeretében döntse el a tanár, hogy mennyire mélyed el a felvetett témakörökben. A tanári mellékletben egy cikkből közöltem részleteket, s itt megadtam a teljes anyag elérhetőségének címét is.

Itt hívom fel a figyelmet a Kriterion Könyvkiadó (Bukarest, 1979) kiadásában megjelent (s talán még antikváriumban fellelhető) Mandics György–M. Veress Zsuzsanna: *Bolyai János jegyzeteiből* című könyvére. Ebből a kötetből való az idézett írás is.

A verseny itt átalakulhatna beszélgetéssé. Ezzel is jelezni szeretném, hogy ez nem „vérre menő" verseny, csupán figyelmet felkeltő szórakozás.

I. MELLÉKLET A TANÁROKNAK

A csapatok feladatai és a megoldások:

1. Idézzetek és írjatok föl minél több olyan népdalt, amelynek a szövegében szám szerepel! Határozatlan névelő nem számít!
Ha egy másik csoport kéri, a megadott népdalnak legalább egy strófáját el is kell tudnotok énekelni.

2. Idézzetek fel olyan irodalmi alkotást (vers, novella, regény, dráma), amelyben valamilyen szám kiemelt jelentőséget kap!

3. Shakespeare: Vízkereszt, vagy amit akartok vígjátékában Sebastian és ikerhúga, Viola hajótörést szenved, melynek során Viola megmenekül, de a parton nem találja bátyját. Viola megtudja, hogy Orsino herceg az uralkodó abban az országban, ahol partot ért. Orsino szerelmes egy gróf gyönyörű lányába, Oliviába, aki bátyja elvesztése miatti bánatában nem enged egyetlen férfit sem a közelébe. Viola szeretne bejutni Olivia udvarába, de ez nem sikerül. Ekkor Viola más tervet eszel ki, férfiruhába öltözve, mint apród szolgálja Orsinot. Amikor azután felveszi férfiöltözetét, hajszálra olyan, mint a bátyja, aminek következtében furcsa tévedések erednek abból, hogy felcserélik őket egymással, mert, mint kitalálható, Sebastian is megmenekült a hajótörés során. Viola Cesario álnéven lesz Orsino szolgája, aki nagyon megkedveli az ifjút. Viola is őt, olyannyira, hogy szerelmes lesz a hercegbe. Orsino a szolgáját, Cesariot (Violát) küldi Oliviához, hogy lágyítsa meg a szép hölgy szívét irányába. Olivia első látásra beleszeret a finom arcú és gyöngéd szavú apródba, Violába.
Itt kapcsolódunk be a vígjátékba:

Viola: Csodálatos és páratlan hölgy, harmatozzon rád illatot az ég.
András: Jól kurizál a fiú. „Harmatozzon rád illatot!" Ez aztán szép.
Viola: Az én küldetésem néma, úrnőm; nincs szava másnak, egyedül csak a te nyájas és kegyes fülednek.
András: Illat! Nyájas! Kegyes! Ezt mind a hármat megjegyzem magamnak.
Olivia: Csukjátok be a kertajtót, és hagyjatok magunkra, hadd hallgassam meg.
(*Tóbiás, András és Mária el.*)
Olivia: Nyújtsd a karod, uram.
Viola: Parancsolj velem, úrnőm.
Olivia: Mi a neved?
Viola: Szépséges grófkisasszony,
Cesariónak hívják a te szolgád.
Olivia: Az én szolgám? Rút a világ, mióta
Az illem hízelgéssé aljasult.
Te Orsino herceg szolgája vagy.
Viola: S ő a tiéd; szolgád szolgája hát.
A te szolgád is egyben, édes úrnőm.
Olivia: Ő nem érdekel. Volna lelke inkább
Üres lap, mintsem vélem teleírva.
Viola: Pedig miatta jöttem, hogy a lelked
Felé hajlítsam.
Olivia: Hagyd el ezt, hiszen
Megkértelek, többé ne emlegesd.
De talán van más kívánságod is?
Csak add elő, s én inkább hallgatom,
Mint szférák zenéjét.

Az idézett részletben egy, a matematikában általatok is ismert tulajdonságot használ a szerző. Mi ez a tulajdonság, és a részletben hol fogalmazódik meg?

Megoldás:
Matematikából ismert a tranzitív tulajdonság. Például a „kisebb” reláció tranzitív, mert tetszőleges *x, y* és *z* számok esetén, ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$ is fennáll.

Olivia: Az én szolgám? Rút a világ, mióta
Az illem hízelgéssé aljasult.
Te Orsino herceg szolgája vagy.
Viola: S ő a tiéd; szolgád szolgája hát.
A te szolgád is egyben, édes úrnőm.

4. József Attila: A számokról

Tanultátok-e a számokat?

Bizony számok az emberek is,
mintha sok 1-es volna az irkában.
Hanem ezek maguk számolódnak
és csudálkozik módfölött az irka,
hogy mindegyik csak magára gondol,
különb akar lenni a többinél
s oktalanul külön hatványozódik,
pedig csinálhatja a végtelenségig,
az 1 ilyenformán mindig 1 marad
és nem szoroz az 1 és nem is oszt.

Vegyetek erőt magatokon
és legelőször is
a legegyszerűbb dologhoz lássatok –
adódjatok össze,
hogy roppant módon felnövekedvén,
az istent is, aki végtelenség
valahogyan megközelítsétek.

Találjatok ki olyan pozitív számokból álló, az 1-gyel induló végtelen soktagú összeget, amelyre nem igaz, hogy „roppant módon” felnövekedik, és megközelíti az „istent”!

Megoldás:
Jó példák pl. a következők:
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$ mértani sor, amelynek az összege 2.
Indokolhatjuk a következőképpen: Számegyenesen a $[0;1]$ intervallumhoz csatlakoztatunk egy 0,5 hosszú szakaszt, majd ahhoz egy 0,25 hosszút, stb. az eljárás során minden lépésben az utoljára csatlakoztatott intervallum hossza megegyezik a már összegzéssel kapott intervallum végpontjától a (2;0) pontig tartó szakasz hosszának felével. Így az összegzéssel kapott intervallum hossza mindig kisebb 2-nél.
Vagy:

$$0{,}1+0{,}01+0{,}001+...+10^{-n}+...=0{,}\dot{1}.$$

5. Mit bizonyít Hamlet a színészekkel?

Megoldás:
Hamlet a színészekkel (az előadásukkal) bizonyítja be, önmaga és Horatio számára, hogy a király bűnös.
Második felvonás 2. szín

Hamlet: …A látott szellem ördög is lehet,
Mert az is ölthet oly tetszős hüvelyt;
S tán gyöngeségem, mélakórom által
– Mert ily kedélyre nagy hatalma van –
A kárhozatba dönt. Nincs rá bizonyság
Ennél különb; de tőr lesz e darab,
Hol király, ha bűnös, fennakad.

6. Johann Wolfgang Goethe:

Te félted a szívbeli békédet?
Én inkább várom az orkánt!
Hol nem viharozhat a kétség,
Ott nincs boldog bizonyosság.
(Fordította: Mészöly Dezső)

Hogyan értelmeznétek a fenti verset „matematikus” szemmel olvasva?

7. Bolyai János: Geometriák

Adatott nekünk e sík-terű Föld,
hol egyenesen nő a fű, a búza
– egyenesen-e? –
hol egyenesen emeljük gerincünk
– egyenesen-e? –
hol egyenesek gondolataink
– egyenesek-e? –
Adatott nekünk e domború Föld,
hol egyetlen fűszálhoz sem vonható párhuzamos
– ha egyenes,
hol egyetlen gerinchez sem vonható párhuzamos
– ha egyenes,
hol egyetlen gondolathoz sem vonható párhuzamos
–ha egyenes.
Én mit adhatok?
Egy létező (nemlétező) teret (esetleg),
hol fűhöz, gerinchez, gondolathoz
végtelen sok párhuzamost vonhattok –
de majd dideregtek.

(1833. június 21-én, egy Bécsből Vásárhely felé tartó postakocsin)

Ki volt Bolyai János? Melyik híressé vált matematikai munkájára utal a vers? Milyen kapcsolat van Eukleidész és Bolyai János között?

Megoldás:
Bolyai János 1802. december 15-én született Kolozsvárott. Apja, Bolyai Farkas a marosvásárhelyi evangélikus katolikus kollégium tanára és a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja. Bolyai János marosvásárhelyi tanulmányait 15 éves korában Bécsben folytatja, ahol kiváló eredménnyel elvégzi a bécsi Hadmérnöki Akadémiát és alhadnaggyá avatják. 24 éves korára már kapitány. Először Aradra helyezték, majd Lembergbe. Ezidőtájt adhatta át apjának az Appendix latin nyelvű kéziratát. 1831 tavaszán a marosvásárhelyi kollégium nyomdájában napvilágot látnak az Appendix első példányai. Ekkor küldi el Farkas Gaussnak a mű egy példányát Göttingába. A válasz ismert, íme Gauss levelének egy részlete:

„Most valamit fiad munkájáról. Ha avval kezdem, hogy nem szabad megdicsérnem, bizonyára egy pillanatra meghökkensz; de ha megdicsérném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném: mert a mű egész tartalma, az út, amelyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30-35 év óta folytatott meditációimmal. Ez valóban rendkívül meglepett engem. Szándékom volt, hogy saját munkámból, melyből: egyébiránt mostanáig csak keveset vetettem papirosra, életemben semmit se bocsássak nyilvánosságra. A legtöbb embernek nincs is meg a helyes érzéke az iránt, amin ez a dolog múlik, és én csak kevés olyan emberre akadtam, aki azt, amit vele közöltem, különös érdeklődéssel fogadta volna. Erre csak az képesít, hogy élénken érezzük, hogy mi az, ami tulajdonképpen hiányzik, és ami ezt illeti, a legtöbb ember nincsen vele tisztában. Ellenben az volt a szándékom, hogy idővel mindent úgy írjak meg, hogy legalább majdan velem el ne pusztuljon. Nagyon meglepett tehát, hogy e fáradságtól már most megkímélhetem magam, és nagyon örvendek, hogy éppen régi jó barátom fia az, ki engem olyan csodálatos módon megelőzött.”

Axiómarendszerekről

A görögök minden későbbi civilizációra olyan rendkívüli hatást gyakoroltak, hogy nehéz felmérni valódi eredményeiket. Mindabból, amit elértek, oly sok olvadt be az európai gondolkodásba, hogy az ember hajlamos tevékenységük bizonyos vonásait maguktól értetődőnek tekinteni, jóllehet ezek valójában forradalmi újítások voltak.

A görögök arra az alapvető dologra jöttek rá, hogy az elmélkedés önmagában sohasem vezethet olyan ismerethez, amely több bizonyos objektumok puszta definíciójánál. Ezen túllépni csak akkor lehet, ha feltételezzük, hogy bizonyos állítások igazak. Például az az állítás, hogy bármely két pont között egyenest húzhatunk, nem bizonyítható, mégis kimondhatjuk, mivel kézenfekvő tény. Mindazonáltal inkább **feltevés** marad, mint bizonyított tény.

Az ilyen általános jellegű feltevéseket **posztulátumok**nak nevezzük. Ha elvetünk egy posztulátumot, akkor elvetjük az összes belőle levonható következtetést is. Ha azonban egy posztulátumot, vagy bizonyos, nem túl nagyszámú posztulátumot elfogadunk, akkor van alapunk, amire építhetünk. Ettől kezdve megszabadultunk kétségeinktől. Ezután már nincs értelme a kérdésnek: „Biztos vagy benne, hogy igazad van?” Igen, biztos vagyok, ha ilyen és ilyen posztulátumokat elfogadtam.

Az tehát, hogy „két pont között egy és csak egy egyenes húzható”, olyan kijelentés, amelyet nem gondolkodásunk, hanem **geometriai látásmódunk** természete követel meg. Logikailag ugyanis nem lehetetlen, hogy két ponton át egynél több egyenes is húzható legyen.

Természetesen - mivel a posztulátumok nem bizonyíthatók - valahogyan ingatag alapnak látszanak. Ezért megkíséreljük számukat minimálisra csökkenteni, és a lehető legkézenfekvőbbé tenni őket. Vagyis egyszerű fogalmak között egyszerű kapcsolatokat állapítunk meg. Egy négyzet szimmetriája nem egyszerű fogalom. Azt mondtuk, hogy „ha a négyzetet a középpontján átmenő és síkjára merőleges tengely körül 90°-kal elforgatjuk, akkor önmagával fedésbe jut"; ez olyan bonyolult fogalmakat tartalmaz, amelyek nem alkothatják a geometria alapját. Sokkal egyszerűbb fogalmakból kell kiindulnunk. Nem megfelelő ilyen szempontból a „téglalap területe" sem. Hallgatólagosan ez is számos olyan bizonyítatlan állítást tételez fel, amelyek nem engedhetők meg, ha a geometriát alapelvekből kiindulva, módszeresen akarjuk felépíteni. Nem elég, hogy az alapposztulátumok kézenfekvőek, bizonyos feltételeket is ki kell elégíteniük. Először is:

- nem lehetnek egymásnak ellentmondóak;
- a lehető legkevesebb posztulátumot kell feltételeznünk;
- egymástól függetleneknek kell lenniük;
- rendszerük teljes legyen, azaz a segítségükkell kialakított fogalomrendszer minden kérdésére adjon választ;
- a segítségükkel kialakítható fogalomrendszernek jól le kell írnia a bennünket körülvevő világot.

A görög módszer valamennyi azóta létrejött egzakt tudomány mintaképe lett. Minden, amit „tudományos módszer"-nek nevezünk, a görög mintát követi. Bizonyos alapvető, mindent átfogó feltevésekből indulunk ki, s ezeket, mint nyilvánvalókat, igazaknak tekintjük, vagy pedig azért fogadjuk el őket, mert bizonyos mérések igazolni látszanak helyességüket. Ezek azok a posztulátumok, amelyekből kiindulunk. Ezután a posztulátumok kombinálásával bizonyos logikai következtetéseket vonunk le, amelyeket „lemmák"-nak és „tételek"-nek nevezünk. Segítségükkel az eredmények egyre szélesebb köréhez jutunk el. Eukleidész Elemek című munkája nyilván nem az első volt az e témáról írott művek között. A Proklosz-féle összefoglalásból tudjuk, Arisztotelész idejében is volt egy Elemeknek nevezett tankönyv. Ezt Theudiosz írta. Eukleidész munkájának kiválósága és teljessége azonban minden előző tankönyvet háttérbe szorított, s így lett az iskolai geometriaoktatásban Eukleidész munkájából a tankönyv, amely eredeti formájában a legújabb időkig megmaradt. Eukleidész saját eredményeiről némi fogalmat alkothatunk, ha összehasonlítjuk az Arisztotelész műveiben található geometriai idézeteket Eukleidész könyvének megfelelő szakaszaival. Arisztotelész ugyanis nagy valószínűséggel az Eukleidész-féle szöveg közvetlen elődjéből, Theudiosz tankönyvéből idézett. Azonban sohasem lehetünk teljesen biztosak abban, hogy egy Eukleidésznél szereplő szakasz valóban tőle származik-e vagy sem. Eukleidész szövegét sokszor másolták le és adták ki újból, s eközben gyakorta iktattak bele közbeszúrásokat.

A legmegbízhatóbb forrásokra támaszkodva a következőkben felsoroljuk Eukleidész alapvető axiómáit és posztulátumait.

Axiómák vagy „közismert fogalmak”:

1. Egyugyanazon dologgal egyenlő dolgok egymással is egyenlők.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, akkor az összegek egyenlők.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, akkor a maradékok egyenlők.
4. Az egymásra illeszkedő dolgok egymással egyenlők.
5. Az egész nagyobb, mint a része.

Posztulátumok:

Legyen megengedett:
1. Bármely pontból bármely pontba egyenes vonalat húzni.
2. Véges egyenes vonalat folytonosan egyenes vonallá hosszabbítani.
3. Bármely középponttal és bármely távolsággal kört rajzolni.
4. Bármely két derékszög egyenlő egymással.
5. Ha egy egyenes úgy metsz két másik egyenest, hogy az egyazon oldalon fekvő belső szögek összege két derékszögnél kisebb, akkor, ha a két egyenest végtelenül meghosszabbítjuk, azok metszeni fogják egymást, mégpedig azon az oldalon, ahol a szögek összege két derékszögnél kisebb.'

Eukleidész rendszere csodálatosan felépített még akkor is, ha találhatók benne hiányosságok. A definíciókat meg lehet támadni azon az alapon, hogy segítségükkel nem kapnánk meg a pont, az egyenes vagy a felület igazi fogalmát. Minden definícióra igaz azonban ez. Sohasem definíciók alapján ismerünk meg egy dolgot. Mielőtt eljutnánk a valódi megértéshez, tapasztalatokra kell szert tennünk az alapfogalmakkal kapcsolatosan, míg dolgozunk velük és vizsgáljuk őket. Ugyanakkor a görögök úgy érezték, hogy érdemes egy rövid mondatba összesűríteni egy fogalom lényegét, bár nem hitték, hogy ez át tudja a fogalmat adni az avatatlannak. A definíciókat ebben a megvilágításban kell szemlélnünk. Nem kétséges, hogy logikai nézőpontból kifogásolható egy ilyen kijelentés: „a pont az, aminek nincs kiterjedése”, mivel a „kiterjedés” jóval komplikáltabb fogalom, mint a pont. Ha viszont csak az a célunk, hogy a „pont” szó kimondásakor mindnyájan ugyanarra a dologra gondoljunk, akkor nem rossz ez a megközelítés.

Az axiomatikus módszerről, az abszolút, az euklideszi, és a hiperbolikus geometria kapcsolatáról

A geometria bármely axiomatikus – vagy többé-kevésbé axiomatikus – felépítése során kimondott axiómákat az alábbi csoportokra oszthatjuk:

– illeszkedési axiómák;

– egybevágósági axiómák;

– folytonossági (mérési) axiómák;

– párhuzamossági axióma.

Az első három axiómacsoportra, az ún. maradék axiómarendszerre épül a – Bolyai János szóhasználatával élve – **abszolút geometria**, amely semmilyen formában nem tartalmazza a párhuzamossági axiómát. Attól függően, hogy a felmerülő lehetőségek közül melyiket

választjuk párhuzamossági axiómaként, az **euklideszi** vagy a Bolyai–Lobacsevszkij-féle ún. **hiperbolikus geometriát** építhetjük tovább.
A továbbiakban, amikor különböző kijelentéseket (axiómákat, definíciókat, tételeket) fogalmazunk meg, vagy fogalmakat vezetünk be, jó lenne határozottan kiemelnünk, hogy egy kijelentés az abszolút geometria körébe tartozik-e, vagy csak az euklideszi, illetve a hiperbolikus geometriában érvényes. Ezért az abszolút geometriai kijelentéseinket sárga keretbe, az euklideszi geometriában érvényeseket zöldbe, a hiperbolikus geometriában érvényeseket halványpiros keretbe helyezzük. Íme a három kategória három – vizsgálataink szempontjából kulcsfontosságú – kijelentése:

A maradék axiómarendszerrel bizonyítható, hogy a sík egy adott egyenesére merőleges egyenesek nem metszik egymást, így vannak egy síkban fekvő, egymást nem metsző egyenesek. Nevezzünk párhuzamosnak két egyenest, ha egy síkban vannak és nem metszők.
Ha adott egy egyenes, és egy rá nem illeszkedő pont, akkor a pont és egyenes síkjában az adott ponton át az adott egyenessel legalább egy párhuzamos húzható.

abszolút geometria

Egy adott egyeneshez és a rá nem illeszkedő ponthoz a pont és egyenes síkjának legfeljebb egy olyan egyenese tartozik, amely az adott egyenest nem metszi.

euklideszi geometria

Egy adott egyeneshez és a rá nem illeszkedő ponthoz a pont és egyenes síkjának legalább két olyan egyenese tartozik, amely az adott egyenest nem metszi.

hiperbolikus geometria

A két utóbbi kijelentés az euklideszi, illetve a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómája, melyek egymás tagadásai. Az abszolút geometria axiómarendszerén belüli eszközökkel ugyanis nem dönthető el, hogy hány ilyen, adott egyenessel párhuzamos egyenes illeszthető a sík egy adott pontjára. Bolyai János zsenialitása kellett ahhoz, hogy erre a megállapításra jussunk. Így a kérdést egy újabb axióma bevezetése oldhatta csak fel, amely azonban kétfelé ágaztatta az addig egységes geometriai rendszert.
A párhuzamosság kérdésére adhatunk olyan választ is, miszerint nincsenek egy síkban fekvő, egymást nem metsző egyenesek, ez azonban ellentmond a maradék axiómarendszernek. Arra a kijelentésre, hogy bármely két egy síkban fekvő egyenes metsző, felépíthető az ún. **elliptikus geometria**. Ehhez azonban módosítanunk kell a maradék axiómarendszerünket. Az elliptikus geometriában pl. az egyenes zárt vonal, így nem értelmezhető a félegyenes, a szakasz, a tengelyes tükrözés stb. fogalma.

A teljes cikk www.bolyaitestamentum.hu* (Bolyai-geometria oktatása) vagy a www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai cím[1] alatt található.

[1] 2007. augusztusában elérhető a honlap

Tanulói munkafüzet:

I. KIS KARÁCSONY…

Shakespeare: Vízkereszt, vagy amit akartok

Shakespeare: Vízkereszt, vagy amit akartok vígjátékában Sebastian és ikerhúga, Viola hajótörést szenved, melynek során Viola megmenekül, de a parton nem találja bátyját. Viola megtudja, hogy Orsino herceg az uralkodó abban az országban, ahol partot ért. Orsino szerelmes egy gróf gyönyörű lányába, Oliviába, aki bátyja elvesztése miatti bánatában nem enged egyetlen férfit sem a közelébe. Viola szeretne bejutni Olivia udvarába, de ez nem sikerül. Ekkor Viola más tervet eszel ki, férfiruhába öltözve, mint apród szolgálja Orsinot. Amikor azután felveszi férfiöltözetét, hajszálra olyan, mint a bátyja, aminek következtében furcsa tévedések erednek abból, hogy felcserélik őket egymással, mert, mint kitalálható, Sebastian is megmenekült a hajótörés során. Viola Cesario álnéven lesz Orsino szolgája, aki nagyon megkedveli az ifjút. Viola is őt, olyannyira, hogy szerelmes lesz a hercegbe. Orsino a szolgáját, Cesariot (Violát) küldi Oliviához, hogy lágyítsa meg a szép hölgy szívét irányába. Olivia első látásra beleszeret a finom arcú és gyöngéd szavú apródba, Violába.

Itt kapcsolódunk be a vígjátékba:

Viola: Csodálatos és páratlan hölgy, harmatozzon rád illatot az ég.
András: Jól kurizál a fiú. „Harmatozzon rád illatot!” Ez aztán szép.
Viola: Az én küldetésem néma, úrnőm; nincs szava másnak, egyedül csak a te nyájas és kegyes fülednek.
András: Illat! Nyájas! Kegyes! Ezt mind a hármat megjegyzem magamnak.
Olivia: Csukjátok be a kertajtót, és hagyjatok magunkra, hadd hallgassam meg.
(*Tóbiás, András és Mária el.*)
Olivia: Nyújtsd a karod, uram.
Viola: Parancsolj velem, úrnőm.
Olivia: Mi a neved?
Viola: Szépséges grófkisasszony,
Cesariónak hívják a te szolgád.
Olivia: Az én szolgám? Rút a világ, mióta
Az illem hízelgéssé aljasult.
Te Orsino herceg szolgája vagy.
Viola: S ő a tiéd; szolgád szolgája hát.
A te szolgád is egyben, édes úrnőm.
Olivia: Ő nem érdekel. Volna lelke inkább
Üres lap, mintsem vélem teleírva.
Viola: Pedig miatta jöttem, hogy a lelked
Felé hajlítsam.
Olivia: Hagyd el ezt, hiszen
Megkértelek, többé ne emlegesd.
De talán van más kívánságod is?
Csak add elő, s én inkább hallgatom,
Mint szférák zenéjét.

József Attila: A számokról

Tanultátok-e a számokat?

Bizony számok az emberek is,
mintha sok 1-es volna az irkában.
Hanem ezek maguk számolódnak
és csudálkozik módfölött az irka,
hogy mindegyik csak magára gondol,
különb akar lenni a többinél
s oktalanul külön hatványozódik,
pedig csinálhatja a végtelenségig,
az 1 ilyenformán mindig 1 marad
és nem szoroz az 1 és nem is oszt.

Vegyetek erőt magatokon
és legelőször is
a legegyszerűbb dologhoz lássatok –
adódjatok össze,
hogy roppant módon felnövekedvén,
az istent is, aki végtelenség
valahogyan megközelítsétek.

Johann Wolfgang Goethe:

Te félted a szívbeli békédet?
Én inkább várom az orkánt!
Hol nem viharozhat a kétség,
Ott nincs boldog bizonyosság.

(Fordította: Mészöly Dezső)

Bolyai János: Geometriák

Adatott nekünk e sík-terű Föld,
hol egyenesen nő a fű, a búza
– egyenesen-e? –
hol egyenesen emeljük gerincünk
– egyenesen-e? –
hol egyenesek gondolataink
– egyenesek-e? –
Adatott nekünk e domború Föld,
hol egyetlen fűszálhoz sem vonható párhuzamos
– ha egyenes,
hol egyetlen gerinchez sem vonható párhuzamos
– ha egyenes,
hol egyetlen gondolathoz sem vonható párhuzamos
–ha egyenes.
Én mit adhatok?
Egy létező (nemlétező) teret (esetleg),
hol fűhöz, gerinchez, gondolathoz
végtelen sok párhuzamost vonhattok –
de majd dideregtek.

(1833. június 21-én, egy Bécsből Vásárhely felé tartó postakocsin)