

Matematika C

10. osztály

4. modul:
A lehető legjobbat kérem!

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	Matematikai alapismeretek alkalmazása gyakorlati életben.
Időkeret	5 foglalkozás
Ajánlott korosztály	15–16 évesek (10. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Mindennapi élet Szűkebb környezetben: Térgeometria (Testek különböző nézete, térfogata, felszíne, élváza. Szélsőérték-problémák) Ajánlott megelőző tevékenységek: tanórán a másodfokú függvények ábrázolása, számtani és mértani közép, és a köztük fennálló reláció ismerete
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás Mennyiségi következtetés Becslés, mérés Szöveges feladat megoldása, probléma megoldás, metakogníció Rendszerezés Statisztika

AJÁNLÁS

A modul feldolgozása során a tanulók különböző szerepet játszanak el. Először játékosok, keresik a legjobb stratégiát. Mondhatni készülnek a következő szerepkörre. Ugyanis ezután tervező mérnökök, akiknek – egy képzeletbeli család életvitelét megismerve – egy adott telekre, adott alapterületű házat kell a család számára tervezniük. Majd építésvezető szerepkörében költségvetést kell készíteniük. Ehhez természetesen meg kell ismerniük a házépítés egyes fázisait, a szükséges anyagokat, fel kell mérniük a piac kínálatát, ki kell választani a legmegfelelőbb anyagot, a cementtől a nyílászárókig. Természetesen eközben lehetséges, hogy változtatásokat kell végrehajtani a kezdetben megálmodott tervrajzon! Lehet, hogy kompromisszumokat kell kötni. De a ház eljut a szerkezet kész állapotig. Az már a tanulókon múlik, hogy a megismert módon folytatják-e az „építkezést” otthon. Az utolsó foglalkozáson kertépítés és kutyaház tervezés ürügyn „klasszikus” geometriai szélsőérték problémákat is megoldhatnak.

TÁMOGATÓ RENDSZER

<http://www.epitoipar.lap.hu>*

* 2007. augusztusában elérhető a honlap

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Ki a jobb?			
1.	Játék az ösvényen. Nyerő stratégia kialakítása.	Kombinatívitas, következtetés, rendszerezés, gondolkodási sebesség, memóriaterjedelem, tanulási sebesség, metakogníció	Eszközök: Négyzethálós papír és páronként 2 bábu Tanulói munkafüzet: 1. játék
2.	Újabb stratégiai játék, a nyerő stratégia önálló felismerése.	Kombinatívitas, következtetés, rendszerezés, gondolkodási sebesség, memóriaterjedelem, tanulási sebesség, metakogníció	Eszközök: Korongok (vagy gyufaszálak), páronként legalább 50 darab Tanulói munkafüzet: 2. játék
3.	Harmadik játék. A nyerő stratégia felismerése, általánosítása.	Kombinatívitas, következtetés, rendszerezés, gondolkodási sebesség, memóriaterjedelem, tanulási sebesség, metakogníció	Eszközök: Korongok (vagy gyufaszálak), páronként legalább 50 darab Tanulói munkafüzet: 3. játék

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
II. Ideális lakás?			
1.	Tervezőmérnöki szerep. Egy család számára megadott méretű ház tervezése a feladat. A család megismerése.	Rendszerezés, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, kreativitás, eredetiség, problémaérzékenység, igényesség, ábrázolás, reprezentáció	Eszközök: Négyzethálós papír Tanulói munkafüzet: Információk a család életviteléről
2.	A család szokásainak, igényeinek megfelelő lakás tervezése (1. terv készítése)	Problémaérzékenység, igényesség, ábrázolás, reprezentáció	Eszközök: Vonalzó, négyzethálós papír
3.	Látványterv megrajzolása	Térlátás, térbeli viszonyok felismerése, kreativitás, eredetiség, igényesség, ábrázolás, reprezentáció	Eszközök: Vonalzó, rajzlap
III. Mi mennyi?			
1.	A megtervezett ház építéséhez szükséges anyagok számbavétele.	Számolási képesség, mennyiségi következtetés, műveletvégzési sebesség, érvelés, térlátás	Eszközök: Számológép, négyzethálós papír Melléklet a tanároknak: Árjegyzék Tanulói munkafüzet: Árjegyzék
2.	Az építkezés egyes fázisának megismerése. Anyagszükséglet kiszámítása. A szükséges anyag kiválasztása a kínálatból.	Számolási képesség, mennyiségi következtetés, műveletvégzési sebesség, érvelés, térlátás	
3.	Árkalkuláció elkészítése	Számolási képesség, mennyiségi következtetés, műveletvégzési sebesség, érvelés, térlátás	

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
IV. Tetőfedés			
1.	Az építkezés folytatása. Tetőtéri munkálatok megtervezése.	Számolási képesség, mennyiségi következtetés, műveletvégzési sebesség, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, igényesség, ábrázolás, reprezentáció	Eszközök: Négyzethálós papír, körző, szögmérő, számológép Tanulói munkafüzet: Árjegyzék
2.	Tetőtér megépítéséhez szükséges anyagmennyiség kiszámítása.	Számolási képesség, mennyiségi következtetés, műveletvégzési sebesség, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, igényesség, ábrázolás, reprezentáció	Tanulói munkafüzet: Árjegyzék
3.	Nyílászárók kiválasztása, legcélszerűbb elhelyezése (tervrajzmódosítás)	Számolási képesség, mennyiségi következtetés, műveletvégzési sebesség, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, igényesség, ábrázolás, reprezentáció	Eszközök: Négyzethálós papír, számológép, A3-as méretű rajzlap, olló, vonalzó Tanulói munkafüzet: Árjegyzék Internet-hozzáférés: www.epitoipar.lap.hu
4.	A saját tervezésű ház makettjének elkészítése.	Számolási képesség, mennyiségi következtetés, műveletvégzési sebesség, térlátás, térbeli viszonyok felismerése, igényesség, ábrázolás, reprezentáció	

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
V. Szélsőséges esetek			
1.	A megtervezett (és szerkezet kész állapotig megépített) ház kertjének kialakítása ürügén geometriai szélsőérték probléma megoldása (függvénygrafikon vázolása, illetve számtani és mértani közép alkalmazása)	Problémaérzékenység, mennyiségi következtetés, gondolkodási sebesség, ötletesség, metakogníció, tanulási sebesség, ábrázolás	Eszközök: Számológép Tanulói munkafüzet: Feladatleírások Melléklet a tanároknak: Feladatleírások és megoldásuk
2.	Kutyaház tervezése (másodfokú függvény szélsőértékének keresésére vezető probléma megoldása)	Problémaérzékenység, mennyiségi következtetés, gondolkodási sebesség, ötletesség, metakogníció, tanulási sebesség, ábrázolás	Eszköz: Számológép Tanulói munkafüzet: Feladatleírások Melléklet a tanároknak: Feladatleírások és megoldásuk

I. KI A JOBB?

Ráhangelődés (kb. 5 perc)

Ismét játszunk egy kicsit. Joggal kérdezhetitek, miért játszunk viszonylag sokszor egy-egy ilyen foglalkozáson? Azon túl persze, hogy játszani jó, egy játék során egy jó stratégia kialakítása sokszor komoly töprengést igényel. Egy társasjátékban mindig nyerni szeretnénk, ahhoz pedig a legtöbb esetben kevés a szerencse. Minden lépést jól végig kell gondolni, sokszor a játék megkezdése előtt. A nyerő lépések sorozatával kialakíthatunk egy nyerő stratégiát, vagy más szóval nyerő algoritmust. Sok esetben az sem mindegy, hogy milyen sorrendben kezdjük a játékot: elsőként vagy másodikként. Néha célszerű átadni a kezdés jogát a partnerünknek, mert úgy látjuk, hogy az adott feltételek mellett nyerő stratégiája a másodikként lépő játékosnak van. Nézzük, hogyan néz ki mindez a gyakorlatban!

1. Játék az ösvényen. Nyerő stratégia kialakítása

(Javasolt idő: 20 perc. Eszközigeny: négyzethálós papír, 2 bábu páronként. Munkaforma: páros.)

Tanulói munkafüzet: 1. játék

Ezt a játékot ketten játsszák. Rajzoljanak a párok a négyzethálós lapra egy ösvényt 20 egymáshoz csatlakozó négyzetből! Az ösvény két végén két különböző színű bábu áll. A játékosok felváltva előre vagy hátra mozgatják bábuikat (legfeljebb négy mezővel), de nem ugorhatják át ellenfelük bábuját, és természetesen nem léphetnek le az ösvényről.

Az győz, aki az utolsót lépi, azaz ellenfelét a játéktábla egyik végébe szorítja.

Gyűjtsétek a tapasztalatokat!

Hagyjuk, hogy a tanulók több partit is lejátsszanak! Esetleg jegyeztessük le velük az egyes lépéssorozatokat. Elemezzék ki! Melyik lépésben dőlt el, hogy az egyik fél már biztos nyerő?

Mire jutottatok? Fel tud valaki rajzolni a táblára egy olyan helyzetet, amelyik után a 2. játékos lép, de az 1. játékosnak már biztosan nyerő állása van?

Ilyen nyerőállás az, ha 5 egység, vagy ennek többszöröse a két bábu közötti távolság, hiszen a 2. játékos bármilyen megengedett lépésére az 1. játékos tud annyit lépni, hogy ismét a közöttük lévő távolság 5 többszöröse legyen, s így előbb-utóbb a 2. játékos mellé lép, s ezzel elkezdheti őt „visszaszorítani”.

Tegye fel a kezét, aki úgy érzi, van egy jó stratégiája!

Játszol velem egy nyilvános partit? Melyik játékos akarsz lenni? Első vagy második?

Ha a tanuló második játékos akar lenni, valószínűleg nem érti még a stratégiát. A kezdő játékos ebben az esetben mindig győzhet, hiszen a módszer a következő: Mivel a bábuk közti távolság 18, s ez 5-tel osztva 3 maradékot ad, 3 lépést tesz az 1. játékos. Ezután, ha k mezővel mozgatja el a bábuját a 2. játékos, akkor az 1. játékos $5 - k$ mezővel lép, így újból eléri, hogy a közöttük lévő távolság 5-tel osztható legyen.

Egy-két „nyílt” tanár-diák játék után játsszanak le a tanulók is egymással néhány partit, hogy végül minden tanuló számára világos legyen a stratégia!

Most egy kicsit változtassunk a játékon. Maradjon a 20 mezőből álló ösvény, de a játékosok a bábuikat legfeljebb 5 mezővel mozgathatják el. A cél ugyanaz.

Lehet, hogy tapasztalatszerzés nélkül is rájön egy-két tanuló, hogy ebben az esetben a 2. játékosnak van nyerő stratégiája, hiszen kezdő állásban a bábuk közti távolság osztható a megengedett maximális lépésszámnál 1-gyel nagyobb számmal.

Ha az ösvény hossza 52, és legfeljebb 5-öt léphetnek a játékosok, akkor ki szeretne 2. játékos lenni?

A többiek mind elsőként lépnének? És első lépésre hányat lépnél? Mutasd fel a számot!

Aki 2-t mutatott, biztos benne, hogy nyerni fog? Magyarázd el, hogy miért!

Ez el is hagyható, ha előzőleg már meggyőződünk róla, hogy minden tanuló számára világos a nyerő stratégia.

2. Második játék. A nyerő stratégia önálló felismerése

(Javasolt idő: 10 perc; Eszközigény: korongok (vagy gyufaszálak) páronként legalább 50 darab; Munkaforma: páros)

Tanulói munkafüzet: 2. játék

Minden pár kap egy doboz korongot. Számoljatok le 30 darab korongot, és ezeket rakjátok szét 5 halomba! Egy-egy halomban bármennyi korong lehet. Legalább ketten játszanak, és felváltva lépnek, és mindegyik lépésben a soron következő játékos tetszése szerint két kisebb halomra oszt egy általa választott, legalább két korongból álló halmot. Az veszít, aki már nem tud lépni, azaz ellenfele lépése után minden halom egyelemű.

Játsszátok le többször a játékot, és próbáljátok kialakítani a nyerő stratégiát!

Könnyebb rájönni a nyerő algoritmusra, mint az előbbi játéknál, így lehet, hogy a tanulók önállóan is felfedezik.

Mit tapasztaltatok? Ki nyert? Változtassátok a korongok és a halmok számát is!

Mire jöttetek rá?

Ha 63 korongot rakunk szét 7 halomba, melyik játékos szeretnél lenni: első vagy második? Miért?

Mi a célunk? Hány halmot szeretnénk kialakítani? Minden egyes lépésben mi történik a halmok számával? Első lépésben 8, másodikban 9, harmadikban 10, negyedikben 11. Hányadik lépésben érhető el a 63 halom? Ki nyer? És amikor 30 korongot 5 halomba raktatok ki nyert? Most már meg tudjuk magyarázni?

Ha önállóan nem jönnek rá, hogy a korongszám és a halomszám különbségének paritásán múlik, hogy ki a nyerő (ha páratlan, akkor az első, ha páros, akkor a második játékos nyer, bárhogy is szedi szét a halmokat), akkor ilyen vagy ehhez hasonló kérdésekkel vezessük rá a tanulókat.

3. Újabb játék az első játék nyerő stratégiájához hasonló nyerő stratégiával

(Javasolt idő: 10 perc. Eszközigény: korongok (vagy gyufaszálak) páronként legalább 50 darab. Munkaforma: páros.)

Tanulói munkafüzet: 3. játék

Végül egy harmadik játék. Ez is párban játszható. A játék elején valamennyi korongot (pl. 41 darabot) halomba rakunk. Minden lépésben a soron következő játékos legalább 1, de legfeljebb 4 tárgyat vesz el a halomból tetszése szerint.

Az veszít, aki kénytelen a halomból az utolsó elemet elvenni.

Játsszátok le többször is a játékot, s váltogassátok a kezdő játékos szerepkörét!

Ez a játék már nehezebb, érdemes kevesebb koronggal kezdeni, és azon megtapasztalni, hogy hogyan lehet nyerni.

A nyerő játékos azt szeretné, hogy a végén az ellenfelének 1 korong maradjon. Ezt a jelen esetben (41 korong) második játékosként elérheti, ha a kezdő játékos legfeljebb 4 korong elvételét kiegészíti 5-re a saját elvett korongjainak számával. Így, a második játékos minden lépése után 5-tel osztva 1 maradékot adó lesz a halomban a korongszám, tehát az utolsó korongot kénytelen a kezdő játékos elvenni.

Rájött valaki a nyerő stratégiára?

Ha nem: Ha nyerni szeretnénk, akkor mi is a célunk? Ha a vesztes számára a végén 1 maradt, akkor a megelőző két lépésben mennyi legyen a korongok száma a halomba, hogy bármit húz az ellenfelünk, a mi következő lépésünkkel elérjük, hogy 1 maradjon a halomban? És az ezt megelőző két lépés előtt mennyi legyen?

Vajon hogyan változik a stratégia, ha legfeljebb 5 korong vehető el?

Azt állítom, hogy most a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

Ha a kezdő játékos 4 korongot elvesz, a második játékos kénytelen egy 6-os blokkot megkezdni, s a kezdő játékos 6-ra egészíti ki az elvett korongok számát. S mivel a 37 korong 6-tal osztva 1 maradékot ad, a második játékos kénytelen az utolsó korongot elvenni.

Most már általános esetben is meg tudnátok fogalmazni, hogy mikor melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Ha n korongot leteszünk az asztalra, és legalább 1, de legfeljebb k korong vehető el belőle egy alkalommal, akkor milyen esetben legyünk kezdő játékosok, és milyen esetben engedjük át a kezdés jogát a partnerünknek?

Tanulói munkafüzet:

I. KI A JOBB?

1. játék:

Ezt a játékot ketten játsszák. Rajzoljanak a párok a négyzethálós lapra egy ösvényt 20 egymáshoz csatlakozó négyzetből! Az ösvény két végén két különböző színű bábu áll. A játékosok felváltva előre vagy hátra mozgatják bábuikat (legfeljebb négy mezővel), de nem ugorhatják át ellenfelük bábuját, és természetesen nem léphetnek le az ösvényről.

Az győz, aki az utolsót lépi, azaz ellenfelét a játéktábla egyik végébe szorítja.

2. játék:

Minden pár kap egy doboz korongot. Számoljatok le 30 darab korongot, és ezeket rakjátok szét 5 halomba! A halmokban bármennyi korong lehet. Ketten felváltva lépnek, és mindegyik lépésben a soron következő játékos tetszése szerint két kisebb halomra oszt egy általa választott, legalább két korongból álló halmot. Az veszít, aki már nem tud lépni, azaz ellenfele lépése után minden halom egyelemű.

3. játék:

Ebben a játékban is minden pár kap egy doboz korongot. A játék elején valamennyi korongot (pl. 41 darabot) halomba rakunk. Minden lépésben a soron következő játékos legalább 1, de legfeljebb 4 tárgyat vesz el a halomból tetszése szerint.

Az veszít, aki kénytelen a halomból az utolsó elemet elvenni.

II. IDEÁLIS LAKÁS?

Ráhangelődés (kb. 5 perc)

Álmodozzunk! Tétélezzük fel, hogy mindannyian végzett tervezőmérnökök vagytok! Felkeres benneteket egy család, és megbíz benneteket egy ház tervrajzának elkészítésével. Vásárolt a család egy 600 m²-es telket. A telek méretei: 20 m × 30 m. Az utcafronton 20 m széles a telek. A telekre a víz, a villany, a gáz be van vezetve, s csatornázva is van. Az önkormányzat előírása szerint 5 m előkertet kell a ház és az utca között hagyni. A két oldalszomszéd kerítésétől a házfal 3 m-nél közelebb nem állhat. A telek 30 m hosszú oldala kelet-nyugati fekvésű, az utca a telektől nyugatra van.

Készítsétek el négyzethálós lapon a telek helyszínrajzát! Válasszuk 1 m-nek 2 kis négyzet oldalhosszát!

1. Információk a családról. A ház tervrajzának elkészítése. Látványterv megrajzolása.

(Javasolt idő: 40 perc. Eszközigény: négyzethálós papír, vonalzó, rajzlap. Munkaforma: egyéni.)

A gondos tervezőmérnök először tájékozódik a család életviteléről, szokásairól, meghallgatja a család minden tagját, hogy milyen elképzeléseik vannak a lakásról. A következők derültek ki:

Tanulói munkafüzet: Információk a család életviteléről

A család 120 m²-es egyszintes lakást szeretne a házban, garázzsal. A lakásba majd négyen költöznek: két szülő és 2 gyerek (a fiú 10 éves, a lány 16 éves középiskolás). Az apa programozó-matematikus. A munkahelyén általában 9 órától 5-ig dolgozik, de gyakran visz haza munkát, és esténként is dolgozik a számítógépen. Az anya banki dolgozó, 8 órakor kezdődik a munkaideje, s általában ő is 5 órakor végez. A gyerekek otthon ebédelnek, az anya minden este megfőzi a másnapi ebédjüket. Vacsora után az anya szeret tv-t nézni, olvasni vagy zenét hallgatni. A gyerekek általában 5-6 óra fele érnek haza, és akkor tanulnak (a fiúnak minden délután edzése van, a lány zeneiskolába jár – csellózni tanul –, és német különórái is vannak). Vacsora után a nagylány még általában tanul tovább. Utána zenét hallgat vagy olvas. Rossz alvó, 11 óra előtt nem szokott elaludni, s reggel 6-kor kel. A fiú szeret internetezni, ha az apja engedi, és általában 9 óra körül álmosodik el, és ½ 10-kor már alszik is.

A szülők reggel szoktak zuhanyozni, a gyerekek este fürödnek.

Szeretik a természetet, hétvégén gyakran kirándulnak. A családnak van egy kutyája, a gyerekek két kismacskát is szeretnének.

A családnak kiterjedt baráti köre van. Mind a szülők, mind a gyerekek hétvégén szeretnék gyakran elhívni barátaikat.

Hát ennyit tudunk róluk. Álljatok neki, s próbáljatok olyan lakást tervezni számukra, ahol mindenki jól érzi magát! Javaslom, hogy először vázlatokat készítsétek. Ajtókról, ablakokról se felejtkezsetek el! Ha a munkafüzetekben előre lapoztok, táblázatokban megtaláljátok a készen kapható ablakok, ajtók méreteit. Ezt vegyétek figyelembe a tervezéskor is, mert az egyedi méretre gyártott nyílászárók sokkal többbe kerülnek. Ha már kialakult a lakás beosztása, utána tervezzétek meg a helyiségek méreteit! A külső falak kb. 36 cm vastagok, a válaszfalak vastagsága általában 10 cm.

Minél több négyzethálós papír álljon a tanulók rendelkezésére! Bár jó, ha minden tanuló önállóan dolgozik, de ne akadályozzuk meg a tanulók közötti konzultációt, ötletcserét sem! Fontos, hogy jó hangulatban, felszabadultan dolgozzanak a gyerekek. A tanár is kapcsolódjon be a munkába! Egy-egy lakásbeosztást látva kérdezzen rá, hogy ezt miért így alakították ki!

Természetesen minden tervrajz egyedi, de a családról megadott információk alapján a következő elvárásoknak minden tervrajznak meg kellene felelni:

- Ne legyen a konyha elzárva a nappalítól, hogy az anya lehetőleg főzés közben is tudja tartani a családdal a kapcsolatot.
- Az apa esténként is dolgozik, célszerű dolgozószobát is kialakítani.
- A gyerekek különböző neműek, kamaszok, más az érdeklődési körük, különböző időben térnek nyugovóra, mindenképpen két külön bejáratú szobát, egy-egy kuckót célszerű tervezni. Mivel a barátait szeretnék gyakran meghívni, ezért, ha van rá lehetőség, szobáik előtt lehetne egy előtér (gyerek nappali), ahol nyugodtan fogadhatják barátait.
- Ha a lakás nappalija nem elég nagy, célszerű egy gardrób szobát is „kiszorítani”, így a szekrényosorok, pakolóhelyek nem foglalják a helyet a nappaliban.)

Gondoljatok arra is, hogy a konyhát be is kell tudni rendezni (gáztűzhely, hűtő, vízcsap stb.)! A vizesblokkok ne legyenek távol egymástól!

Ha kész a vázlat, próbáljatok egy szép tervrajzot készíteni, a hossz méreteket is tüntessétek föl, és ne felejtkezzetek el az ajtók, ablakok szélességéről és magasságáról sem! Tüntessétek fel a falak vastagságát is! Vigyázat, a rajz méretarányos legyen!

Ha ez is kész, készítsétek el a ház külső látványtervét is! Ehhez találtok itt rajzlapokat. Hogyan helyezkedik el a ház a telken? A kert milyen jellegű lesz? Ha nem lapos tetejű az épület, tüntessétek fel a terven a tető lejtésének szögét, vagy a legmagasabb pontjának a földemtől való távolságát is!

Célunk az, hogy a tanulók méretarányos, szép kivitelezésű tervrajzot készítsenek. Ösztönözzük őket a gondos munkára! Később majd anyagszükségletet is fognak számolni, s ehhez szükség lesz a pontos adatokra.

Lássátok el aláírással a tervrajzot, és a látványtervet is! Állítsuk ki ide a kész munkákat!

Beszéljük meg, hogy milyen szempontoknak kellett eleget tenni a háznak!

Az együtt kialakított szempontrendszert érdemes le is írni.

Szeretném, ha mindenki végignézné a tervrajzokat, látványterveket, és mindenki eldöntené, hogy szerinte melyik a legcélszerűbben megtervezett ház, illetve azt, hogy melyiket tartjátok a legszebb háznak! Lehet, hogy ez a kettő egybe esik, annál jobb.

Ez kritikus pontja a foglalkozásnak. Vajon vannak-e már olyan érettek a csoport tagjai, hogy részrehajlás nélkül tudnak dönteni? Fel tudják-e ismerni – az elkészítő személyétől függetlenül – a valódi értéket, vagy pedig elsősorban az emberi szimpátia alakítja ki a véleményüket? Ezekre a kérdésekre a választ csak a csoportfoglalkozást vezető tanár tudja majd megadni.

A következő foglalkozáson azt is kiszámítjuk, hogy a tervezett házatoknak mennyi az anyagszükséglete, és azt is, hogy mennyibe kerülne. Természetesen a szükséges anyagok különböző minőségűek, és az árak is különbözők, tehát elkerülhetetlen, hogy további döntéseket hozzatok.

A tervrajzokat gyűjtsük be, és tegyük el a következő foglalkozásra.

Tanulói munkafüzet:

II. IDEÁLIS LAKÁS?

1. Információk a családról. A ház tervrajzának elkészítése. Látványterv megrajzolása.

Információk a család életviteléről:

A család 120 m²-es egyszintes lakást szeretne a házban, garázzsal. A lakásba majd négyen költöznek: két szülő és 2 gyerek (a fiú 10 éves, a lány 16 éves középiskolás). Az apa, programozó-matematikus. A munkahelyén általában 9 órától 5-ig dolgozik, de gyakran visz haza munkát, és esténként is dolgozik a számítógépen. Az anya banki dolgozó, 8 órakor kezdődik a munkaideje, s általában ő is 5 órakor végez. A gyerekek otthon ebédelnek, az anya minden este megfőzi a másnapi ebédjüket. Vacsora után az anya szeret tv-t nézni, olvasni vagy zenét hallgatni. A gyerekek általában 5-6 óra fele érnek haza, és akkor tanulnak (a fiúnak minden délután edzése van, a lány zeneiskolába jár – csellózni tanul –, és német különórái is vannak). Vacsora után a nagylány még általában tanul tovább. Utána zenét hallgat, vagy olvas. Rossz alvó, 11 óra előtt nem szokott elaludni, s reggel 6-kor kel. A fiú szeret internetezni, ha az apja engedi, és általában 9 óra körül álmosodik el, és $\frac{1}{2}$ 10-kor már alszik is.

A szülők reggel szoktak zuhanyozni, a gyerekek este fürödnek.

Szeretik a természetet, hétvégén gyakran kirándulnak. A családnak van egy kutyája, a gyerekek két kismacskát is szeretnének.

A családnak kiterjedt baráti köre van. Mind a szülők, mind a gyerekek hétvégén szeretnék gyakran elhívni barátaikat.

III. MI MENNYI?

Ráhangelődés (kb. 5 perc)

Elkezdjük a ház építését. Szeretnénk kiszámítani, hogy milyen anyagból kb. mennyire lesz szükségünk. Ezután tájékozódnunk kell, hogy mi, hol, mennyibe kerül. A szállítási költséget is figyelembe kell vennünk, mert lehet, hogy egyik helyen olcsóbb ugyanaz az anyag, de távolabbról kell szállítani.

Milyen anyagokra van szükség egy szerkezetkész ház felépüléséhez? Természetesen, mivel mi nem vagyunk építésvezetők, nem várható, hogy a teljes anyagszükségletet fel tudjuk sorolni, de azért próbáljuk a legfontosabbakat összegyűjteni!

A teljesség igénye nélkül:

Beton az alaphoz, az aljzathoz, földemhez, koszorúhoz, áthidalókhoz a nyílászárók fölé.

Tégla a falakhoz, a kéményhez.

Habarcs a falazáshoz.

Fagerendák a tetőszerkezethez.

Cseréplécek a cserepek alá.

Cserép.

Vakolat, külső és belső.

Nyílászárók

1. A legfontosabb építőanyagok mennyiségének és árának kiszámítása

(Javasolt idő: 40 perc. Eszközigeny: négyzethálós papír, számológép. Munkaforma: egyéni.)

Kezdjük a betonnal. Építsünk sávalapot, ami azt jelenti, hogy a ház tartófalai alatt kb. 50 cm széles és 80 cm mélységű „árkot” ásunk, és ezt betonnal töltik meg. Ha majd megkötött a beton, akkor erre húzzák fel a ház külső falait.

Tehát először számítsátok ki, hogy a házatok külső sávalapjához mennyi beton kell!

(Egy 10 m × 12 m-es ház alapjához kb. 17 m³ beton szükséges.)

Jegyezzétek fel a számítással kapott mennyiséget!

Ezt a betont a helyszínre kell szállítani. Az alaphoz jó szilárdságú beton szükséges. Ilyen az úgynevezett C16-16KK típusú. Tegyük fel, hogy az interneten két, az építkezéstől nem túl messze lévő céget találtatok. A munkafüzetekben megtaláljátok az árjegyzékeiket. Számítsátok ki, hogy melyiktől érdemes megrendelni a betont!

Tanulói munkafüzet: Árjegyzék

Melléklet a tanároknak: Árjegyzék

Biztosan megkérdezik a tanulók, hogy mi a különbség a mixer és a billenős tehergépkocsi között. A mixer a forgódobbal ellátott kocsi, amelyik szállítás közben is forgatja a betont. Ezzel szállítva, az építkezésnél azonnal egy csövön nyomhatják az alapba a betont. A billenős tehergépkocsi nem forgatja menet közben a betont, s az építkezés helyszínén a betont kiönti, és a munkások talicskával hordják a betont a kérdéses helyre.

Hova kell még majd beton? Az aljzathoz, a téglafal fölé a koszorúhoz és a födémhez. Mi az egyik, és mi a másik, és a harmadik?

Aljzat: Ha már felhúzták a falakat, akkor a ház egyes helyiségeinek burkolata alá kb. 10 cm-es betont öntenek.

Koszorú: A ház külső fala, és a belső tartófalak fölé kb. 20 cm magas vasbeton réteget készítenek. Ez egyrészt meggátolja, hogy a külső falak kifelé dőljenek, másrészt szétosztja a terhet a falon.

Födém: A koszorú fölött helyezkedik el, ez alkotja a földszint „plafonját”, illetve a padlástér „padlóját”.

Milyen fajta födémeket lehet készíttetni? Monolit födémeket vagy gerendás födémeket. Az utóbbi esetben előregyártott födémgerendákat raknak le, egymástól kb. 1 m távolságra, és közéjük béléstesteket (betonból készült téglatest alakú, belül üreges idomokat) helyeznek el.

A monolit födémhez el kell készíttetni a zsaluzást (a födémeket szorosan elhelyezett deszkákkal fedik be), és a födémeket „be kell vasaltatni” (kb. ujjnyi vastag vasrudakat rögzítenek a zsaludeszkák fölé), majd ráöntetni, beledolgoztatni a betont. Egyébként ezt nevezik vasbetonnak. A vas elég drága, és a zsaluzás sem olcsó mulatság. Bizonyos esetekben (nagy terhelés, autó ki-behajítás) esetén erre a megoldásra lehet szükség, mi azonban most válasszuk a gerendás födémeket.

Nézzétek meg a munkafüzetben a födémgerendák, béléstestek árjegyzékét, s próbáljátok kiszámítani, mennyibe kerülne az anyagár ehhez a fajta födémhez! Vigyázat! Legfeljebb 8 m hosszú gerenda kapható. A gerenda két végének falra kell támaszkodnia. Arra a falra, amelyre gerenda támaszkodik, vasbeton koszorút kell készíttetni. A ház külső falára azért kell építtetni a koszorút, hogy a falak ne dőljenek kifelé, míg a ház belsejében lévő falra, ha gerenda támaszkodik rá, azért kell a koszorú, hogy megosztódjon a teher. (Ezt nevezik tartófalnak.)

Nézzétek meg a tervrajzotokat, hogy milyen módon tudnátok a födémgerendákat lerakatni! A gerendák egymással párhuzamosak legyenek! Két szomszédos gerenda távolságát a béléstestek szélessége szabja meg.

Ennek megtervezéséhez valószínűleg több segítségre van szüksége a tanulóknak. Vonalzóval halványan rajzolják rá a gyerekek a tervrajzra a gerendák helyét. Figyeljenek arra, hogy a gerenda szélessége 12 cm, a béléstesté 60 cm. Itt döbbenhetnek rá először a tanulók, hogy a tervezésnél nem engedhették teljesen szabadjára fantáziájukat, hiszen az építési anyagok méretei (anyagárakról nem is beszélve) határt szabnak. Lehet, hogy néhányuknak módosítani kell a tervrajzát.

A belső tartófalak alá is szükség van sávalapra (a falak alatt húzódó, téglatest alakú, betonból készült „fal”). Tehát most, a gerendák elhelyezésekor látjuk, hogy melyik belső falak lesznek tartófalak, s ezek alá szükséges sávalapot építeni. Számítsátok ki az ehhez szükséges beton mennyiségét, és adjátok hozzá a már kiszámított betonmennyiséghez!

Mint látjátok az árjegyzékben, kapható ún. koszorútégla is. Ez a hőszigetelést segíti elő. A beton rossz hővezető, ezért kívülről ilyen koszorútéglat célszerű rakatni a koszorúra. Nézzük meg, mennyit kell venni, és ez mennyibe kerülne!

Az aljzat a terv szerint legyen 10 cm, a koszorú 20 cm vastag. Számítsátok ki, hogy ezekhez mennyi betonra van szükség!

(Az aljzathoz 12 m^3 , a koszorúhoz, $10 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ -es ház esetében, csak a külső falakhoz kb. $3,4 \text{ m}^3$.)

Ne felejtsetek el, hogy a belső tartófalakra is kell koszorú! Mivel az aljzat és a koszorúk nem egyszerre készülnek, sajnos a szállítás költségét mindkét esetben hozzá kell adni. Nézzétek meg, hogy ilyen mennyiségek esetében melyik helyről érdemes szállítani!

Mennyi anyag szükséges a téglafalakhoz? A külső fal vastagsága általában 36 cm – 40 cm , a belső fal (ha nem tartófal) vékonyabb (10 cm). Ezeket a vékonyabb falakat nevezik válaszfalnak.

Nézzétek meg, hogy a külső falon mekkora ablakokat, ajtókat terveztek! Az ajtók és az ablakok fölé áthidalót kell rakni, hogy a nyílászárókat ne nyomja a fal. Figyeljete rá, hogy az áthidalók hossza nagyobb legyen, mint a nyílászáró szélessége! Az áthidalók a falra támaszkodnak. Ezek figyelembe vételével számítsátok ki, hogy hány négyzetméter tartófalat kell felhúzni! A belső tartófalakon lévő ajtókról se felejtkeztek el!

Számítsátok ki a válaszfalak területét is! Azért elegendő csak a falak területét kiszámítani, mert a szükséges téglamennyiséget, árát négyzetméterre adják meg a gyárak. Ha kiszámítottátok a kétféle mennyiséget, nézzétek meg a munkafüzetben, hogy mennyibe kerülne a falakhoz szükséges téglamennyiséget! Kétféle téglából választhattok (tartófalak esetében). Számítsátok ki, hogy melyikből mennyibe kerülne a falakhoz szükséges anyagmennyisége!

Az áthidalókat is számoljátok össze! Találtok a munkafüzetben ezekről is egy árjegyzéket.

A tetőszerkezethez szükséges gerendák, cseréplécek és cserepek anyagszükségletét, árát a következő foglalkozáson tudjuk kiszámítani. Akinek változtatni kellett a tervrajzán, javaslom, hogy a következő foglalkozásra készítse el az újabb tervrajzát!

Természetesen előfordulhat, hogy egy foglalkozáson nem jutnak el idáig a tanulók. Feltétlenül írják le egy füzetbe vagy a tervrajz hátuljára a már kiszámolt anyagmennyiséget, és az addig kiszámolt anyagköltséget is, hogy a következő foglalkozáson tovább tudják folytatni a munkát!

III. MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. A legfontosabb építőanyagok mennyiségének és árának kiszámítása

Beton:

1. sz. cég:

Tegyük fel, hogy a telephely az építkezéstől 12 km-re van.

ÁRJEGYZÉK: Érvényes: 2005 03.01.-től visszavonásig
MSZ 4719 illetve MSZ N206 szerint. Az árak 1m³ betonra vonatkoznak.

Áraink az általános forgalmi adót nem tartalmazzák!

minőség:	Ft/m ³	minőség:	Ft/m ³	minőség:	Ft/m ³
....		
C12-32 FN	9800	C 12-24 FN	10 000	C 12-16 FN	10 300
C12-32 KK	10 800	C 12-24 KK	11 000	C 12-16 KK	11 300
C12-32 K	11 300	C 12-24 K	11 500	C 12-16 K	11 800
C16-32 FN	10 800	C 16-24 FN	11 000	C 16-16 FN	11 300
C16-32 KK	12 100	C 16-24 KK	12 400	C 16-16 KK	12 800
C16-32 K	12 600	C 16-24 K	12 800	C 16-16 K	13 100
C 20-32 FN	12 100	C 20-24 FN	12 300	C 20-16 FN	12 600
C 20-32 KK	13 200	C 20-24 KK	13 600	C 20-16 KK	14 000
C 20-32 K	13 700	C 20-24 K	13 900	C 20-16 K	14 200
.....		

távolság (km)	transzportbeton szállítási díjak (Ft/m ³)	
	billenős tgc	mixer
0–5	1 000	1 800
6–10	1 300	2 100
11–15	1 600	2 400
16–20	1 900	2 700
21–25	2 200	3 000
26–30	2 500	3 300
31–35	2 800	3 600
36–40	3 100	3 900
41–45	3 400	4 200
46–50	3 700	4 500
További 5 km-ként	300	300
minimálisan számlázott szállítási díj:	3 m³	4 m³

2. sz. cég:

Tegyük fel, hogy a telephely az építkezéstől 22 km-re van.

ÁRJEGYZÉK: Érvényes: 2005 04.01.-től visszavonásig

MSZ 471984 illetve MÉASZ ME-04. 19. 1995 szerint

Az árak 1m³betonra vonatkoznak.

Áraink az általános forgalmi adót nem tartalmazzák!

minőség:	Ft/m ³	minőség:	Ft/m ³	minőség:	Ft/m ³
		C 12-32 FN	8580	C 25-16 FN	10 986
		C 12-32 KK	9306	C 25-16 KK	12 204
C 6-24 FN	7 064			C 25-16 KK 42,5	11 619
C 6-24 KK	8 195	C 16-16 FN	9851	C 25-16 KK VZ4	12 751
C 6-24 K	8 603	C 16-16 KK	10 704	C 25-16 KK VZ4 F50 42,5	12 990
		C 16-16 K	11 435	C 25-16 K 42,5	13 909
C 6-32 FN	6 993	C 16-16 F	12 513	C 25-16 KK PUMP	12 165
C 6-32 KK	8 120	C 16-16 KK VZ2	11 300	C 25-16 KK PUMP 42,5	11 681
		C 16-16 KK PUMP	10 830		
		C 16-24 FN	9759		

FUWARDÍJAK		mixer gk. (Ft/m ³)	billenős gk. (t/m ³)
0–5 km		2200	1800
5–10 km		2600	2100
10–15 km		2900	2500
15–20 km		3300	2900
20–25 km		3700	3300
minimálisan számlázott mennyiség/forduló		4 m³	3 m³

17 m³ esetén:

1. sz. cég:

1 m³ beton ára: 12 800 Ft

17 m³ beton ára: 217 600 Ft

Fuwardíj:

Mixerrel: 40 800 Ft

Billenős gk.-val: 27 200 Ft

Összesen: (mixerrel): 258 400 Ft

(billenőssel): 245 000 Ft

2. sz. cég:

1 m³ beton ára: 11 300 Ft

17 m³ beton ára: 192 100 Ft

Mixerrel: 62 900 Ft

Billenős gk.-val: 56 100 Ft

(mixerrel): 255 000 Ft

(billenőssel): 248 000 Ft

A további árjegyzékek a Tanulói munkafüzetben szerepelnek:

Előregyártott könnyű födémgerenda:



Előregyártott födém-béléstest:



Koszorútégla:



Előregyártott áthidaló:



Falazó anyagok (tégla):

Tanulói munkafüzet:**III. MI MENNYI?**

Elkezdjük a ház építését. Milyen anyagokra van szükség egy szerkezetkész ház felépítéséhez?

A teljesség igénye nélkül:

Beton az alaphoz, az aljzathoz, földemhez, koszorúhoz, áthidalókhöz a nyílászárók fölé.

Tégla a falakhoz, a kéményhez.

Habarcs a falazáshoz.

Fagerendák a tetőszerkezethez.

Cseréplécek a cserepek alá.

Cserép.

Vakolat, külső és belső.

Nyílászárók

1. A legfontosabb építőanyagok mennyiségének és árának kiszámítása

Kezdjük a betonnal. Építsünk sávalapot, ami azt jelenti, hogy a ház tartófalai alatt kb. 50 cm széles és 80 cm mélységű „árkot” ásunk, és ezt betonnal töltik meg. Ha majd megkötött a beton, akkor erre húzzák fel a ház külső falait.

Tehát, először számítsátok ki, hogy a házatok külső sávalapjához mennyi beton kell!

Jegyezzétek fel a számítással kapott mennyiséget!

Ezt a betont a helyszínre kell szállítatni. Az alaphoz jó szilárdságú beton szükséges. Ilyen az úgynevezett C16-16KK típusú. Tegyük fel, hogy az interneten két, az építkezéstől nem túl messze lévő céget találtatok.

Beton:**1. sz. cég:**

Tegyük fel, hogy a telephely az építkezéstől 12 km-re van.

ÁRJEGYZÉK: Érvényes: 2005 03.01.-től visszavonásig
MSZ 4719 illetve MSZ N206 szerint. Az árak 1m³ betonra vonatkoznak.

Áraink az általános forgalmi adót nem tartalmazzák!

Minőség:	Ft/m ³	Minőség:	Ft/m ³	Minőség:	Ft/m ³
....		
C12-32 FN	9800	C 12-24 FN	10 000	C 12-16 FN	10 300
C12-32 KK	10 800	C 12-24 KK	11 000	C 12-16 KK	11 300
C12-32 K	11 300	C 12-24 K	11 500	C 12-16 K	11 800
C16-32 FN	10 800	C 16-24 FN	11 000	C 16-16 FN	11 300
C16-32 KK	12 100	C 16-24 KK	12 400	C 16-16 KK	12 800
C16-32 K	12 600	C 16-24 K	12 800	C 16-16 K	13 100
C 20-32 FN	12 100	C 20-24 FN	12 300	C 20-16 FN	12 600
C 20-32 KK	13 200	C 20-24 KK	13 600	C 20-16 KK	14 000
C 20-32 K	13 700	C 20-24 K	13 900	C 20-16 K	14 200
....		

Távolság (km)	Transzportbeton szállítási díjak (Ft/m ³)	
	Billenős tgc	Mixer
0–5	1 000	1 800
6–10	1 300	2 100
11–15	1 600	2 400
16–20	1 900	2 700
21–25	2 200	3 000
26–30	2 500	3 300
31–35	2 800	3 600
36–40	3 100	3 900
41–45	3 400	4 200
46–50	3 700	4 500
További 5 km-ként	300	300
Minimálisan számlázott szállítási díj:	3 m ³	4 m ³

2. sz. cég:

Tegyük fel, hogy a telephely az építkezéstől 22 km-re van.

ÁRJEGYZÉK: Érvényes: 2005 04.01.-től visszavonásig

MSZ 471984 illetve MÉASZ ME-04. 19. 1995 szerint

Az árak 1m^3 betonra vonatkoznak.

Áraink az általános forgalmi adót nem tartalmazzák!

Minőség:	Ft/m ³	Minőség:	Ft/m ³	Minőség:	Ft/m ³
		C 12-32 FN	8580	C 25-16 FN	10 986
		C 12-32 KK	9306	C 25-16 KK	12 204
C 6-24 FN	7 064			C 25-16 KK 42,5	11 619
C 6-24 KK	8 195	C 16-16 FN	9851	C 25-16 KK VZ4	12 751
C 6-24 K	8 603	C 16-16 KK	10 704	C 25-16 KK VZ4 F50 42,5	12 990
		C 16-16 K	11 435	C 25-16 K 42,5	13 909
C 6-32 FN	6 993	C 16-16 F	12 513	C 25-16 KK PUMP	12 165
C 6-32 KK	8 120	C 16-16 KK VZ2	11 300	C 25-16 KK PUMP 42,5	11 681
		C 16-16 KK PUMP	10 830		
		C 16-24 FN	9759		

FUVARDÍJAK		Mixer gk. (Ft/m ³)	Billenős gk. (t/m ³)
0–5 km		2200	1800
5–10 km		2600	2100
10–15 km		2900	2500
15–20 km		3300	2900
20–25 km		3700	3300
Minimálisan számlázott mennyiség/forduló		4 m ³	3 m ³

Hova kell még majd beton? Az aljzathoz, a téglafal fölé a koszorúhoz és a födémhez.

Aljzat: Ha már felhúzták a falakat, akkor a ház egyes helyiségeinek burkolata alá kb. 10 cm-es betont öntenek.

Koszorú: A ház külső fala, és a belső tartófalak fölé kb. 20 cm magas vasbeton réteget készítenek. Ez egyrészt meggátolja, hogy a külső falak kifelé dőljenek, másrészt szétosztja a terhet a falon.

Födém: A koszorú fölött helyezkedik el, ez alkotja a földszint „plafonját”, illetve a padlástér „padlóját”.

Milyen fajta födémeket lehet készíttetni? Monolit födémeket vagy gerendás födémeket. Az utóbbi esetben előregyártott födémgerendákat raknak le, egymástól kb. 1 m távolságra, és közéjük béléstesteket (betonból készült téglatest alakú, belül üreges idomokat) helyeznek el.

A monolit födémhez el kell készíttetni a zsaluzást (a födémét szorosan elhelyezett deszkákkal fedik be), és a födémét „be kell vasaltatni” (kb. ujjnyi vastag vasrudakat rögzítenek a zsaludeszkák fölé), majd ráönteni, beledolgoztatni a betont. Ezt nevezik vasbetonnak.

A gerendás födémhez szükséges anyagok: födémgerendák, béléstestek.

Legfeljebb 8 m hosszú gerenda kapható. A gerenda két végének falra kell támaszkodnia. Arra a falra, amelyre gerenda támaszkodik, vasbeton koszorút kell készíttetni. A ház külső falára azért kell építtetni a koszorút, hogy a falak ne dőljenek kifelé, míg a ház belsejében lévő falra, ha gerenda támaszkodik rá, azért kell a koszorú, hogy megosztódjon a teher. (Ezt nevezik tartófalnak.) Két szomszédos gerenda távolságát a béléstestek szélessége szabja meg.

Előregyártott könnyűfödém-gerenda:



Megnevezés	Méret (cm)		Max. fesztáv (cm)	Súly (kg/db)	Ár (Ft/db)	
	hosszúság	sz/m			Nettó	Bruttó
Gerenda	100	12/15	76	13	1400	1680
Gerenda	120	12/15	96	16	1600	1920
Gerenda	140	12/15	116	18	1800	2160
Gerenda	160	12/15	136	21	2100	2520
Gerenda	180	12/15	156	23	2300	2760
Gerenda	200	12/15	176	26	2400	2880
Gerenda	220	12/15	196	28	2500	3000
Gerenda	240	12/15	216	31	2700	3240
Gerenda	260	12/15	236	33	3000	3600
Gerenda	280	12/15	256	36	3200	3840
Gerenda	300	12/15	276	39	3800	4560
Gerenda	320	12/15	296	42	4100	4920
Gerenda	340	12/15	316	45	4400	5280
Gerenda	360	12/15	336	48	4700	5640
Gerenda	380	12/15	356	51	5000	6000
Gerenda	400	12/15	376	54	5600	6720
Gerenda	420	12/15	396	57	5900	7080
Gerenda	440	12/15	416	60	6400	7680
Gerenda	460	12/15	436	65	6800	8160
Gerenda	480	12/15	456	69	7700	9240
Gerenda	500	12/15	476	72	8000	9600
Gerenda	520	12/15	496	76	8500	10 200
Gerenda	540	12/15	516	80	9000	10 800
Gerenda	560	12/15	536	83	9500	11 400
Gerenda	580	12/15	556	88	9900	11 880
Gerenda	600	12/15	576	92	11 000	13 200
Gerenda	620	12/15	596	95	11 400	13 680
Gerenda	640	12/15	616	101	12 000	14 400
Gerenda	660	12/15	636	107	12 700	15 240
Gerenda	680	12/15	656	114	13 400	16 080
Gerenda	700	12/19	676	120	15 800	18 960
Gerenda	720	12/19	696	125	16 600	19 920
Gerenda	740	12/19	716	130	17 400	20 880
Gerenda	760	12/19	736	132	18 000	21 600
Gerenda	780	12/19	756	135	19 000	22 800
Gerenda	800	12/19	776	138	20 000	24 000

Előregyártott földem-béléstest:

Rövidítés	Méret(cm) sz/h/m	Db/fm	Súly (kg/db)	Db/raklap	Tengelytáv	Anyag	Nettó		Bruttó	
							Ft/db	Ft/fm	Ft/db	Ft/fm
EBF 19	60/25/19	4 db/fm	21	F 50	60	beton	220	880	264	1056
EBKF 19	60/25/19	4 db/fm	16	F 50	60	liapor	330	1320	396	1584

A belső tartófalak alá is szükség van sávalapra (a falak alatt húzódó, téglatest alakú, betonból készült „fal”). Tehát most, a gerendák elhelyezésekor látjuk, hogy melyik belső falak lesznek tartófalak, s ezek alá szükséges sávalapot építeni. Számítsátok ki az ehhez szükséges beton mennyiségét, és adjátok hozzá a már kiszámított betonmennyiséghez!

Az aljzat a terv szerint legyen 10 cm, a koszorú 20 cm vastag. Számítsátok ki, hogy ezekhez mennyi betonra van szükség!

Ne felejtsetek el, hogy a belső tartófalakra is kell koszorú! Mivel az aljzat és a koszorúk nem egyszerre készülnek, sajnos a szállítás költségét mindkét esetben hozzá kell adni.

Szükség van ún. koszorútéglára is. Ez a hőszigetelést segíti elő. A beton rossz hővezető, ezért kívülről ilyen koszorútéglát célszerű rakatni a koszorúra. Nézzük meg, mennyit kell venni, és ez mennyibe kerülne!

Koszorútégla:

Rövidítés	Méret(cm) sz/h/m	Db/fm	Súly kg/db	Db/raklap fbh raklap	Anyag	Nettó		Bruttó	
						Ft/db	Ft/fm	Ft/db	Ft/fm
ÜB 7	7/50/22	2	11	120	beton	130	260	156	312
KÜB 7	7/50/22	2	10	120	liapor	220	440	264	528

A ház falának építése: A külső fal vastagsága általában 36 cm–40 cm, a belső fal (ha nem tartófal) vékonyabb (10 cm). Ezeket a vékonyabb falakat nevezik válaszfalnak.

Nézzétek meg, hogy a külső falon mekkora ablakokat, ajtókat terveztek! Az ajtók és az ablakok fölé áthidalót kell rakni, hogy a nyílászárókat ne nyomja a fal. Figyeljete rá, hogy az áthidalók hossza nagyobb legyen, mint a nyílászáró szélessége! Az áthidalók a falra támaszkodnak. Ezek figyelembe vételével számítsátok ki, hogy hány négyzetméter tartófalat kell felhúzni! A belső tartófalakon lévő ajtókról se felejtkeztek el!

Számítsátok ki a válaszfalak területét is! Azért elegendő csak a falak területét kiszámítani, mert a szükséges téglamennyiségét, árát négyzetméterre adják meg a gyárak. Ha kiszámítottátok a kétféle mennyiséget, nézzétek meg a munkafüzetben, hogy mennyibe kerülne a falakhoz szükséges téglamennyiség! Kétféle téglából választhatok (tartófalak esetében)! Számítsátok ki, hogy melyikből mennyibe kerülne a falakhoz szükséges anyag mennyisége!

Előregyártott áthidaló:

Megnevezés	Méret (cm)		Max. fesztáv (cm)	Súly (kg/db)	Ár (Ft/db)	
	hosszúság	sz/m			Nettó	Bruttó
AH 100	100	12/6,5	75	15	1400	1680
AH 125	125	12/6,5	100	18	1700	2040
AH 150	150	12/6,5	125	22	1900	2280
AH 175	175	12/6,5	150	25	2400	2880
AH 200	200	12/6,5	175	29	2800	3360
AH 225	225	12/6,5	200	33	3100	3720
AH 250	250	12/6,5	225	36	3500	4200
AH 275	275	12/6,5	250	40	3900	4680
AH 300	300	12/6,5	275	44	4900	5880

Falazó anyagok (tégla):**Teherhordó (tartó-) falhoz:**

Ytong	9 db/m ²	637 Ft/db
Porotherm	16 db/m ²	350 Ft/db

Válaszfalhoz:

Ytong	9 db/m ²	300 Ft/db
-------	---------------------	-----------

IV. TETŐFEDÉS

Ráhangolódás

Nézzük, hogyan folytassuk a házépítést! A tetőtér következik, ugye? El kell döntenünk, hogy a padlástérben milyen magas legyen a fal. Meghagyjuk-e egy későbbi tetőtér beépítésnek a lehetőségét? Milyen legyen a tető? Nyeregtető, sáttető?

Rajzoljuk le a táblára a két leggyakoribb, legismertebb tetőfajta! Beszéljük le a tanulókat egyéb, különlegesebb tetőről! Hangsúlyozzuk ismét, hogy nem vagyunk építésvezetők.

Hosszúkas ház esetén célszerűbb a nyeregtető.

1. A tetőtér megépítéséhez szükséges anyagok mennyiségének és árának kiszámítása

(Javasolt idő: 30 perc. Eszközigény: négyzethálós papír, számológép, szögmérő. Munkaforma: egyéni.)

Tanulói munkafüzet: Árjegyzék

Ha a tetőteret később be szeretnénk építeni, akkor legalább 130-150 cm magas falat kell építeni. Erre a falra is kell koszorút tenni, hogy ne nyomják szét a szarufák (a tetőszerkezet fából készült tartógerendái) a falat. Tehát ennek a költségével is kell számolnunk. A ház hossztengegyével párhuzamosan tervezzünk egy főgerendát (taréjszelemen). Erre, és a koszorúra támaszkodnak majd a szarufák (gerendák).

Milyen legyen a tető lejtésszöge? Rajzoljátok le méretarányosan a ház homlokzatát! Szögmérővel mérjétek fel valamekkora szöget! Ilyen szögben hajlana a tető síkja a vízszinteshez. Nézzétek meg, hogy tetszik-e így a ház! Ha igen, mérjétek meg, hogy mekkora lenne a padlástér legnagyobb magassága!

Egy szobának az elfogadható belmagassága mennyi szerintetek? (230 cm-nél alacsonyabb szoba már nagyon nyomasztó.) Mérjétek le, hogy az oldalfaltól milyen távolságra érne el a belmagasság ezt a magasságot! Számítsátok ki, hogy hány négyzetméter lenne a tetőtérnek a jól használható alapterülete! (Nevezzük jól használhatónak azt a részt, ahol a belmagasság legalább 230 cm.)

Ha már tanulták a tanulók a szögfüggvényeket, akkor természetesen mérés helyett azzal számoltassuk őket! Kb. 30° -os lejtésszöggel megoldható a tetőtér megfelelő belmagassága. Rajzoltassuk le a tetőteret felülnézetben és oldalnézetben is! A tanulók térszemléletének fejlesztésére is alkalmas a feladat.

Akkor kezdetünk számolni! Számoljátok ki a tetőt alkotó téglalapok oldalait! A szarufák 25–30 cm-rel nyúlnak túl a koszorún. A szarufákra, ha cseréppel fedik a tetőt, először fóliát tesznek, majd erre cserépléceket szögelnek fel, s ezekre illesztik a cserepeket. A cseréplécek távolságát a cserepek hossza határozza meg. Általában 30 cm ez a távolság. A szarufák távolsága 80 cm vagy 100 cm. Hány szarufára van szükségünk? Milyen hosszúak a szarufák? Hány m^2 fóliára lesz szükségünk? A cseréplécekről se felejtkeztek el!

A munkafüzetben a most szükséges anyagok árairól is találtok listát. Számoljátok ki, mi mennyibe kerülne!

Összegezzük az eddigi költségeket az alap megépítésétől kezdve! Készítsetek táblázatot! Írjátok be, hogy milyen anyagból mennyit kell venni, és az mennyibe került!

Ellenőrizték, hogy összeszámoltatok-e mindent!

Kiderítettük, hogy a padlástérben is kell koszorú, tehát az ehhez szükséges anyagmennyiséget is írjátok be, és az árát is számoljátok ki!

2. A nyílászárók kiválasztása. A ház makettjének elkészítése.

(Javasolt idő: 15 perc. Eszközigény: négyzethálós papír, számológép, A3-as méretű rajzlap, olló, vonalzó. Munkaforma: egyéni.)

Tanulói munkafüzet: Árjegyzék

Ahhoz, hogy a házunk szerkezetkész állapotú legyen, a nyílászárókat kell még elhelyeztetnünk. Nézzétek meg a munkafüzetben a kínálatot! Ismét gondoljátok végig, hogy a nap melyik szakában hol fog a lakásba besütni a nap! Jó helyre terveztétek-e az ablakokat? Megfelelő-e az ablakok padlótól való távolsága? Célszerűen be lehet-e majd rendezni a helyiségeket?

A konyhában van-e elegendő hely munkafelület kialakítására, elfér-e a hűtő, mosogatógép? A tároló szekrényekhez van-e elegendő falfelület? Az utolsó simítások elvégzése a terven.

Ha megfelelőnek találjátok a nyílászárók elhelyezését, válasszatok a kínálatból!

Adjuk össze az eddigi költségeket! Szedjük össze, hogy melyek azok a nagyobb költségek, amelyeket nem számoltunk!

A legfontosabbak: az építésvezető, a szakmunkások és a segédmunkások munkabére; a szállítási költségek, a talajmozgatás, a vasbetonhoz szükséges vasak, a zsaluzás, a tervrajzok elkészítésének költsége.

Szerintetek, milyen munkálatokkal folytatódik az építkezés?

Víz-, gáz, villany-, fűtészerezés, külső, belső vakolás, lábazat, ablakpárkányok, padozat előkészítése, hideg vagy meleg burkolat, csempézés, meszelés (festés) vagy tapétázás.

Az építkezéshez szükséges anyagok kiválasztásához sok segítséget nyújt az internet. (Pl. a www.epitoipar.lap.hu cím alatt lehet tájékozódni.*) Akit érdekel, folytassa a „ház építését”! A szükséges információkat keressétek meg az Interneten!

Beszéljük meg, hogyan lehetne elkészíteni a ház makettjét! Milyen arányú legyen a kicsinyítés? Jó lenne, ha egy A3-as rajzlapra elférne a ház palástja. A tetőt egy másik lapon rajzoljuk majd meg.

Terveztétek meg a rajzlapon a palást legcélszerűbb elhelyezkedését, és a méreteket! Nos, milyen arányú kicsinyítés a legmegfelelőbb? Készítsetek négyzethálós lapon egy vázlatot! Számoljátok ki a szükséges hosszúságokat, és írjátok rá a vázlatra! Ezután nekiláthatunk! Ne felejtkeztek el az összeragasztáshoz szükséges fülek megrajzolásáról sem!

A következő foglalkozáson majd befejezzük a makettet. A lapokat ne ragasszatok össze ott-hon, nehogy a szállítás közben megrongálódjon a makett! Az alsó lapra írjátok rá, hogy a szerkezetkész ház anyagára mennyi volt!

* 2007. augusztusában a honlap elérhető

Tanulói munkafüzet:**IV. TETŐFEDÉS****1. A tetőtér megépítéséhez szükséges anyagok mennyiségének és árának ki-
számítása**

Ha a tetőteret később be szeretnénk építeni, akkor legalább 130-150 cm magas falat kell építeni. Erre a falra is kell koszorút tenni, hogy ne nyomják szét a szarufák (a tetőszerkezet fából készült tartógerendái) a falat. Tehát ennek a költségével is kell számolnunk. A ház hosszten-gelyével párhuzamosan tervezzünk egy főgerendát (taréjszelemen). Erre, és a koszorúra tá-maszkodnak majd a szarufák (gerendák).

Milyen legyen a tető lejtésszöge? Egy szobának az elfogadható belmagassága 230 cm.

A szarufák 25 cm-30 cm-rel nyúlnak túl a koszorún. A szarufákra, ha cseréppel fedik a tetőt, először fóliát tesznek, majd erre cserépléceket szögelnak fel, s ezekre illesztik a cserepeket. A cseréplécek távolságát a cserepek hossza határozza meg. Általában 30 cm ez a távolság. A szarufák távolsága 80 cm vagy 100 cm.

Fűrészáru:

4–5–6 m méret: 5×10, 5×12, 5×15, 5×20, 10×10, 15×15, 10×12, 12×12, 7,5×15, 10×15	41 500 + áfa/m³
7–8 m méret: 5×15, 7,5×15, 10×15, 12×15, 15×15	47 500 + áfa/m³
további választható luc 5×25, 7,5×18, 7,5×20, 10×18, 10×20, 15×20, 18×20, 20×20, fűrészáru méretek: 20×25, 25×25	
A fent felsorolt keresztmetszetek esetén fafajától (borovi fenyő), ill. hosszúságtól függően a listaárra 5-25%, 8-12 m hosszúságú anyagok megrendelése esetén méterenként 3500 + Áfa/m ³ felárat számítunk fel!	
tetőléc, luc	
normál léc 3–6 m 58 + áfa/fm 2,5 × 5 cm	rövid léc 1–2,5m 40 + áfa/fm-től (normál, bramac)
Bramac léc 3–6 m 68 + áfa/fm 3 × 5 cm	staflí 5×5 cm 4–6 m 120 + áfa/fm
tetőfóliák	
cserépfólia	50 m ² / tekercs 1,3 m × 38,5 m 96 + áfa/ m ²
hőtükros fólia	65 m ² / tekercs 1,3 m × 50 m 116 + áfa/ m ²
Bramac fólia – akciós !	75 m ² / tekercs 1,5 m × 50 m 135 + áfa/ m²
Dörken Dragofol – akciós !	75 m ² / tekercs 1,5 m × 50 m 168 + áfa/ m²
Solflex Tél fólia	50 m ² / tekercs 1 m × 50 m 146 + áfa/ m ²
Solflex Nyár fólia	50 m ² / tekercs 1 m × 50 m 200 + áfa/ m ²
Takarófólia	100 m ² / tekercs 4 m × 25 m 38 + áfa/ m ²

Cserép:

Nehéz cseréphez szükséges tetőléc mérete:

Szarufaköz (cm)	Léckeresztmetszet (mm)
80 cm-ig	24/48
80–100 cm között	30/50

A kínálat:

Alpesi Protector tetőcserép: 10 db/ m² 230 Ft/db.
Hódfarkú tetőcserép 35,7×17,5 cm 34-36 db/ m² 80 Ft/db.

2. A nyílászárók kiválasztása. A ház makettjének elkészítése.

Ahhoz, hogy a házunk szerkezetkész állapotú legyen, a nyílászárókat kell még elhelyeztetnünk. Gondoljátok végig, hogy a nap melyik szakában hol fog a lakásba besütni a nap! Jó helyre terveztétek-e az ablakokat? Megfelelő-e az ablakok padlótól való távolsága? Célszerűen be lehet-e majd rendezni a helyiségeket?

Nyílászárók:

Középen felnyíló bukó-nyíló ablak		
Szélesség (cm)	Magasság (cm)	Alapkezelt nyílászáró
120	120	52 500
150		59 600
180		66 700
120	150	57 700
150		65 400
180		73 000
120	180	63 000
150		71 200
180		79 400

Oldalt nyíló ablak		Listaár
Szélesség (cm)	Magasság (cm)	Alapkezelt nyílászáró
60	60	19 300
	90	23 000
	120	27 300
90	150	31 500
	60	23 500
	90	28 000
120	120	32 700
	150	37 300
	120	31 800
150	150	36 900
	120	42 600
	150	48 300

Fix ablakok		Listaár
Szélesség (cm)	Magasság (cm)	Alapkezelt nyílászáró
60	60	9500
90		11 900
120		14 300
150		17 000
60	90	11 900
90		14 900
120		17 900
150		20 700
180	120	23 500
60		14 300
90		24 400
120		21 300
150	150	24 400
180		27 900
60		17 000
90		20 700
120	180	24 400
150		28 400
180		32 300
60		19 400
90	180	23 500
120		27 900
150		32 300
180		36 600

Középen felnyíló erkélyajtó		Listaár
Szélesség (cm)	Magasság (cm)	Alapkezelt nyílászáró
150	210	90 900
180		91 700
150	240	91 700
180		99 700

Bukó-nyíló erkélyajtó		Listaár
Szélesség (cm)	Magasság (cm)	Alapkezelt nyílászáró
90	210	55 300
100		57 600
90	240	60 300
100		62 600

Középen felnyíló bukó-nyíló erkélyajtó		Listaár
Szélesség (cm)	Magasság (cm)	Alapkezelt nyílászáró
150	210	96 900
180		97 700
150	240	97 700
180		105 700

Bejárati ajtó	Listaár
Szélesség (cm) × magasság(cm)	Alapkezelt nyílászáró
100 × 210	136 800
	141 100
	144 300
	153 600
	156 900
	135 800
	140 500

Beltéri ajtó (Falvastagság 80 vagy 100 mm.)				
	Szélesség (mm)			
Felület	610	735	860	985
	Listaár			
Bükk	72 300	73 600	75 000	90 000
Tölgy	72 000	73 400	74 800	78 800
Fehérré lakkozott	63 000	64 000	65 000	68 000
Üvegezhető	78 000	80 000	81 200	86 000

V. SZÉLSŐSÉGES ESETEK

1. Geometriai szélsőérték-feladatok megoldása

(Javasolt idő: 35 perc. Eszközigény: számológép. Munkaforma: egyéni, majd frontális.)

Tanulói munkafüzet: Feladatléírások

Melléklet a tanároknak: Feladatléírások és megoldásuk

A kerttel még nem is foglalkoztunk. Tegyük fel, hogy egy 2 m sugarú, kör alakú ágyást alakítottunk ki, s azt egy szimmetrikus trapéz alakú szegéllyel szeretnénk körbevenni úgy, hogy a kertből a lehető legkisebb területű részt foglaljuk el. Hogyan válasszuk meg a trapéz oldalait?

Készítsetek vázlatot! Miért úgy tervezted, hogy a szegély érintője az ágyásnak?

Hagyjuk a tanulókat önállóan gondolkodni, sejtéseket megfogalmazni! A következőkben egy lehetséges rávezető kérdéssort adtam meg. Lehet, hogy ezekre nem lesz szükség, mert lesznek tanulók, akik önállóan is megoldják a problémát.

Mi az, amit tudunk a trapézról? És a szákról? Minél kevesebb betű használatával szeretnénk jelölni a trapéz oldalait. Minimum hány betű használatával oldhatjuk ezt meg? Hány változóval tudtátok a trapéz területét felírni? Keressetek kapcsolatot az alapok hossza között!

Rajzoljatok a kör köré két húrtrapézt is! Az egyiknek legyen a megfelelő alapja kétszer akkora, mint a másiké! Mit tapasztaltatok, a másik alap hányszorosára változott? Próbáljatok a magasság, a szár és az alapok között kapcsolatot találni!

A derékszögű háromszög oldalai között milyen kapcsolat áll fenn? Hozzatok létre olyan derékszögű háromszöget, melynek oldalai között szerepel a trapéz szára és magassága! Mi derült ki?

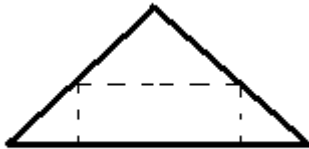
Meggyőződünk róla, hogy egy adott kör köré írt húrtrapézok alapjai fordítottan arányosak egymással.

A trapéz területét eddig két változóval tudtuk leírni. Most kiderült, hogy a két változó nem független egymástól. Alakítsátok a területképletet egyváltozósra! A kapott területfüggvénynek mi az értelmezési tartománya? Sejtést szeretnénk kialakítani, ezért minél több helyen számítsátok ki a függvény értékét. Mit tapasztaltatok?

Azt sejtjük tehát, hogy a trapéz területe 16 m^2 -nél nem lehet kevesebb. Hogyan bizonyítsuk?

Itt most az $x + \frac{1}{x} \geq 4$ egyenlőtlenség (ahol $x > 0$) megoldásának keresésére vezettük vissza a problémát. Ha a tanulók tanulták már a számtani és mértani közeget, akkor a megoldást annak felhasználásával is célszerű megbeszélni. Lásd a mellékletet tanároknak.

A családnak, aki építtette a házat, van egy kutyája is. A nagylány nekiállt tervezni egy kutya-házat, mégpedig alpesi típusút, azaz olyan házat, amelynek a teteje a földig ér. Arra gondolt, hogy a kutyaház keresztmetszete egyenlőszárú háromszög lesz, és annak a bejárata egy téglalap alakú nyílás. A ház alapját 120 cm-re, a magasságát 60 cm-re tervezte. Íme a kutyaház homlokzatának vázlata:



Milyen méretű legyen a bejárat, hogy az a lehető legnagyobb területű nyílás legyen?

Az egyváltozós területképlet felírásáig valószínűleg minden tanuló önállóan eljut. Persze lehet, hogy egyéni segítségadásra szükség lesz.

A területet megadó egyváltozós függvény legnagyobb függvényértékét keressük. Most is próbáljunk sejtést kialakítani. Számoljátok ki a függvény értékét minél több helyen! Ezek felhasználásával vázoljátok a függvény grafikonját!

Már néhány függvényérték kiszámítása is azt mutatja, hogy a koordinátatengelyek beosztását ügyesen kell megválasztani. Az értelmezési tartomány a 120-nál kisebb pozitív számok halmaza, függvényértékre pedig kaptatok már 500-at, sőt 1800-at is. Ha a koordinátatengelyeken különböző hosszúságúnak választjuk az egységet, az nem fogja befolyásolni a függvény szélsőértékének helyét. Jelöljön egy rácsegység az x tengelyen 10 cm-t, az y tengelyen pedig 100 cm^2 -t. Legalább 10 helyen számítsátok ki a függvényértéket! Válasszatok olyan x értékeket, ahol könnyű kiszámítani a függvényértéket! A tízzel osztható helyeken fejen is kiszámíthatók a függvényértékek! Mi a sejtés? Hol a legnagyobb a függvény értéke?

Próbáljuk algebrai úton igazolni a sejtéseket!

Ha a területképlet első alakját nézzük, az egy szorzat, melynek mindkét tényezője változik, ha a másodikat, az egy különbség, melynek mindkét tagja változik. Jó lenne a kifejezést úgy átalakítani, hogy csak egy tagban jelenjen meg a változó! Másodfokú kifejezés esetében erre ismertek már egy eljárást. Valóban, a teljes négyzetté kiegészítést. Nagyon „zavarja” az eljárás alkalmazását az x^2 -es tag együtthatója. Emeljük ki mindkét tagból a $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -et! A kapott szorzat másik tényezője már könnyen teljes négyzetté alakítható. Milyen kifejezést kaptatok?

$$T = -\frac{1}{2} \cdot [(x - 60)^2 - 3600]$$

Ebből az alakból már megmutatható, hogy igaz a sejtésünk. Még könnyebb az igazolás, ha elvégezzük a $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -del a beszorzást.

$$T = -\frac{1}{2} \cdot [(x - 60)^2 - 3600] = -\frac{1}{2}(x - 60)^2 + 1800$$

A kapott kéttagú kifejezés első tagja negatív vagy 0 lesz minden olyan x -re, amely az értelmezési tartománynak eleme. Minden esetben az így kapott számhoz kell 1800-at adnunk, s ezzel meg is kapjuk a terület értékét. Ez nyilván akkor a legnagyobb, ha az 1800-at nullához adjuk hozzá. Ez pedig bekövetkezik, mégpedig akkor, ha az x helyére 60-at írunk. Tehát valóban, a téglalap alakú nyílás területe akkor lesz a legnagyobb, ha 60 cm széles és 30 cm magas téglalapot vágunk ki. Ezen a nyíláson nem biztos, hogy beférne egy közepes termetű kutya.

Ha a kutyaház bejáratát kör alakú nyílásra vágta volna ki a nagylány, akkor mekkora lett volna a legnagyobb területű nyílás?

Ismét hagyjuk kísérletezni a tanulókat. Elképzelhető, hogy lesz olyan tanuló, aki megrajzolja a háromszög belső szögeinek szögfelezőit, s felismeri, hogy ezek metszéspontja a keresett kör középpontja, és át is fogalmazza a feladatot: Arra vagyunk kíváncsiak, hogy e pont milyen távol van a háromszög oldalaitól. Ebben az esetben kérdezzünk rá: A kialakult kis háromszögek milyen nevezetes szakaszának a hossza a kérdéses távolság? Ennek segítségével a kis háromszög milyen adatát tudnánk kiszámolni? Azaz próbáljuk a tanuló gondolatait a háromszögek területének a kiszámítása felé terelni.

Próbáljátok a keresett kört megszerkeszteni! Nézzük, ki hogyan hajtotta végre a szerkesztést! Miért szerkeszthető meg így?

Három kis háromszög alakult ki a rajzon. A háromszögek milyen adatait ismerjük?

Melyik adatuk számítható ki könnyen?

Milyen adatokra vagyunk még kíváncsiak? Valóban, az ismert hosszúságú oldalhoz tartozó magasság hosszát szeretnénk meghatározni.

A háromszög magasságának felhasználásával a háromszög milyen további adata számítható ki?

Ha már ismerik a tanulók a hegyesszögek szögfüggvényeit, valószínűleg eszükbe jut, hogy a befogók ismeretében a derékszögű háromszög szögei is meghatározhatók.

A nagy háromszög területe a három kis háromszög területösszegével egyenlő. Nézzétek meg, ez a felismerés hogyan segíti a probléma megoldását! Mennyi adódott a sugárra?

Milyen magas kutya fért volna be az előző, és milyen a mostani esetben?

Mekkora a nyílás területe?

Így nagyobb területű nyíláshoz jutott volna a kutya.

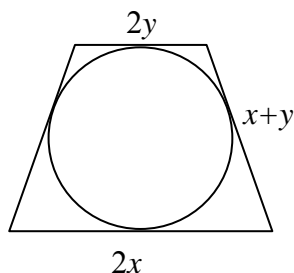
V. MELLÉKLET A TANÁROKNAK

1. Geometriai szélsőérték-feladatok megoldása

1. A kertben egy 2 m sugarú, kör alakú ágyást alakítottunk ki, s azt egy téglalaptól különböző szimmetrikus trapéz alakú szegéllyel szeretnénk körbevenni úgy, hogy a kertből a lehető legkisebb területű részt foglaljuk el. Hogyan válasszuk meg a trapéz oldalait?

Megoldás:

A trapéz olyan húrtrapéz legyen, amely érintőnégyyszög, hiszen ha a trapéz oldalai nem érintői a körnek, akkor nagyobb területet foglal el a kertből.



A trapéz tengelyesen szimmetrikus, így a beírt kör az alapokat azok felezőpontjában érinti. Jelöljük x -szel az egyik, és y -nal a másik alap felének hosszát. A kör külső pontjából húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt a szárak hossza $x + y$. A szár végpontjából húzott magasság egy olyan derékszögű háromszöget hoz létre, amelynek befogói $2r$ és $y - x$ hosszúak, az átfogója pedig $x + y$. A pitagoraszai összefüggés szerint:

$$(x + y)^2 = 4r^2 + (y - x)^2$$

Ebből $xy = r^2$ adódik. Mivel $r = 2$, így $xy = 4$.

A trapéz területe: $T = \frac{a+c}{2} \cdot m = (x + y) \cdot 2r$.

Mivel $r = 2$, ezért $T = 4 \cdot (x + y)$.

A kétváltozós területfüggvényt egyváltozósra alakíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy

$$xy = 4, \text{ azaz } y = \frac{4}{x}.$$

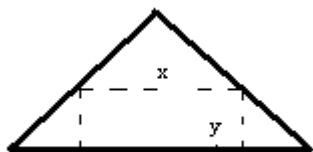
Keressük tehát annak a függvénynek a minimumát, amely: $T(x) = 4 \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right)$, ahol $0 < x$.

Vizsgáljuk az $x + \frac{4}{x}$ kifejezést! A két pozitív tag szorzata állandó, azaz állandó a mértani közepük. Tudjuk, hogy két pozitív szám mértani közepe legfeljebb akkora, mint a két szám számtani közepe. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő egymással. Így:

$$x + \frac{4}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{4}{x}}, \text{ azaz } x + \frac{4}{x} \geq 4. \text{ A kifejezés legkisebb értékére tehát 4 adódott.}$$

Meg kell még vizsgálnunk, hogy ezt az értéket fel veszi-e a függvény. Mivel a számtani és mértani közép között pontosan akkor áll fenn az egyenlőség, ha $x = \frac{4}{x}$, azaz $x^2 = 4$, és ennek egyetlen pozitív megoldása a 2, így a terület akkor minimális, ha a szimmetrikus trapéz minden oldala 4 m (tehát négyzet), és ekkor a területe 16 m^2 .

2. A családnak, aki építette a házat, van egy kutyája is. A nagylány nekiállt tervezni egy kutyaházat, mégpedig alpesi típusút, azaz olyan házat, amelynek a teteje a földig ér. Arra gondolt, hogy a kutyaház keresztmetszete egyenlőszárú háromszög lesz, és annak a bejárata egy téglalap alakú nyílás. A ház alapját 120 cm-re, a magasságát 60 cm-re tervezte. Íme a kutyaház homlokzatának vázlata:



Milyen méretű legyen a bejárat, hogy az a lehető legnagyobb területű nyílás legyen?

Megoldás:

Jelöljük a háromszögbe beírt téglalap oldalait x -szel és y -nal. Az egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága felezi az alapot, és két egyenlőszárú derékszögű háromszögre vágja a háromszöget. A téglalap y hosszú oldala egy olyan egyenlőszárú háromszög befogója, amelynek a másik befogója $60 - \frac{x}{2}$. Mivel a két befogó egyenlő hosszú, így $y = 60 - \frac{x}{2}$.

A nyílás területe: $T = xy = \left(60 - \frac{x}{2}\right) \cdot x = -\frac{x^2}{2} + 60x$, ahol $0 < x < 120$.

Vázoljuk a másodfokú függvény grafikonját! Ha az értelmezési tartománynak eleme lenne a 0 és a 120 is, akkor a függvénynek éppen ezek a számok lennének a zérushelyei. Mivel a négyzetes tag együtthatója (főegyüttható) negatív szám, a függvény képe egy lefele nyíló parabola két zérushelye közötti része. A parabola tengelyes szimmetriája miatt a függvény maximum helye $x = 60$, a maximuma pedig 1800.

Tehát a legnagyobb területű téglalap alakú nyílás szélessége 60 cm, magassága 30 cm.

3. Ha a kutyaházra kör alakú nyílást vágott volna ki a nagylány, akkor mekkora lett volna a legnagyobb területű nyílás?

Megoldás:

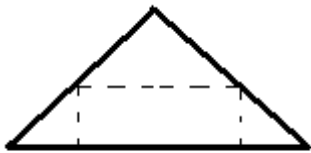
Nyilván akkor legnagyobb a kör alakú nyílás területe, ha legnagyobb a sugara. Keressük tehát a háromszög beírt körének sugarát. A háromszög oldalainak hossza: 120 cm, $60\sqrt{2}$ cm és $60\sqrt{2}$ cm. A kör középpontját összekötve a háromszög csúcaival három olyan háromszögre bontottuk a nagy háromszöget, amelyeknek ismert egy-egy oldala, és ugyanolyan hosszú az ismert oldalhoz tartozó magasságuk. A három kis háromszög területének összege a nagy háromszög területével megegyező. A nagy háromszög területe: 3600 cm^2 . Ha a beírt kör sugarát r jelöli, akkor $3600 = \frac{120r}{2} + \frac{60\sqrt{2} \cdot r}{2} + \frac{60\sqrt{2} \cdot r}{2}$. Innen $r = \frac{60}{1 + \sqrt{2}} \approx 24,85 \text{ cm}$.

A nyílás területe: $\approx 1940,4 \text{ cm}^2$. (Ráadásul a kör alakú ajtón egy 50 cm magas kutya is befér!)

Tanulói munkafüzet:**V. SZÉLSŐSÉGES ESETEK****1. Geometriai szélsőérték-feladatok megoldása**

1. A kertben egy 2 m sugarú, kör alakú ágyást alakítottunk ki, s azt egy szimmetrikus trapéz alakú szegéllyel szeretnénk körbevenni úgy, hogy a kertből a lehető legkisebb területű részt foglaljuk el. Hogyan válasszuk meg a trapéz oldalait?

2. A családnak, aki építette a házat, van egy kutyája is. A nagylány nekiállt tervezni egy kutyaházat, mégpedig alpesi típusút, azaz olyan házat, amelynek a teteje a földig ér. Arra gondolt, hogy a kutyaház keresztmetszete egyenlőszárú háromszög lesz, és annak a bejárata egy téglalap alakú nyílás. A ház alapját 120 cm-re, a magasságát 60 cm-re tervezte. Íme a kutyaház homlokzatának vázlata:



Milyen méretű legyen a bejárat, hogy az a lehető legnagyobb területű nyílás legyen?

3. Ha a kutyaházra kör alakú nyílást vágott volna ki a nagylány, akkor mekkora lett volna a legnagyobb területű nyílás?