Matematika C
10. osztály

10. modul
Bolyai-geometria
(Hiperbolikus geometria)

Készítette: Lénárt István

A modul célja	A Bolyai-geometria legelemibb fogalmainak ismertetése összehasonlítva a síkgeometria és a gömbi geometria megfelelő fogalmaival
Időkeret	4 foglalkozás
Ajánlott korosztály	15–16 évesek (10. osztály)
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: egyetemes és magyar tudománytörténet, a modern természet- és társadalomtudományok szemléletmódja Szűkebb környezetben: síkgeometria, gömbi geometria, földrajz, fizika Ajánlott megelőző tevékenységek: tanórán a síkgeometria és a gömbi geometria alapfogalmainak elsajátítása (a modul nagyon röviden összefoglalja ezekről a területekről is a szükséges tudnivalókat)
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás Mennyiségi következtetés, Becslés, mérés Szöveges feladat megoldása, probléma megoldás, metakogníció Rendszerezés, kombinativitás

AJÁNLÁS

A Bolyai-geometria nagyon sok ember számára misztikus csodavilág, amelybe a nem-megszállott nem-matematikus sohasem teheti be a lábát. Számos pedagógus is idegenkedve, bizalmatlanul közelít ehhez a témakörhöz. Ez a modul arra tesz kísérletet, hogy az alapfogalmakat elérhető, emberi közelségbe hozza.
Az anyag lényegében annak az egyórás előadásnak tapasztalataira épül, amelyet több év óta tartok a témáról kiállításokon, iskolai rendezvényeken, a legkülönfélébb korú és előképzettségű közönség számára. Semmiképpen sem szeretném a téma iránt érdeklődő pedagógus kezét és fantáziáját megkötni, azt sugallni, hogy az itt leírt út az egyedül járható út. Annyit állítok csupán, hogy ezt az utat sokszor kipróbáltam, és célravezetőnek találtam.

Nevetséges lenne azt állítani, hogy négy foglalkozás alatt az anyag mélységéről és szépségéről átfogó képet adhatunk diákjainknak. Amit elérhetünk, annyi, hogy a Bolyai-geometria nem lesz félelmetes, a józan észnek ellentmondó tudományterület, amely csak kisebbrendűségi érzéseket szülhet, és szellemi képességeink határaira figyelmeztet. Ellenkezőleg, a tanulók úgy érezhetik, hogy megtudtak valamit egy szokatlan, de számukra sem ésszerűtlen elméletről, és bármikor tovább haladhatnak, ha kedvük és idejük engedi. Olyan üzenet ez, amit azoknak is érdemes magukkal vinni az iskolai matematikából, akiknek pályája nem kapcsolódik szorosan ehhez a tudományhoz.

Elsődleges célom a gyakorló pedagógus meggyőzése arról, hogy tanítható, tanulható és élvezhető témáról van szó – az emberi gondolkozás és ezen belül a magyar tudomány történetének egyik legbátrabb és legértékesebb alkotásáról, amely megváltoztatta a világról, és benne saját szerepünkről és feladatunkról, alkotott képünket.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Makara Ágnes, Lénárt István: *Segédanyag az összehasonlító geometria tanításához* (SuliNova adatbank, háttértanulmány)
Kálmán Attila: *Nem-euklideszi geometriák elemei* (Tankönyvkiadó, 1989.)
http://www.bolyaitestamentum.hu/?m=18#lenart* (rövid, képeskönyv-szerű összefoglalás)
Horváth Jenő: *Sztereografikus projekció és alkalmazásai* (ELTE Ábrázoló és Projektív Geometriai Tanszék. Budapest, 1980.)
Vigassy Lajos: *Projektív geometria*. Középiskolai szakköri füzetek. (Tankönyvkiadó, 1970.)
Szőkefalvi-Nagy Béla: *Komplex függvénytan* (Egyetemi jegyzet)

ÉRTÉKELÉS

Ebben a modulban a rutinfeladatok sorozatának megoldása legtöbbször érdektelen, néhány esetben pedig vagy rendkívül nehéz, vagy az ismertetett módszerekkel és eszközökkel megoldhatatlan. Nem is ez a célunk.

A gondolkozás bátorságát, a sémáktól való elszakadás képességét jutalmazzuk. Dicséretes és örvendetes, ha az újfajta geometriák tanulmányozása ötletet ad a tanulóknak az euklideszi síkgeometria mélyebb megértéséhez, és ilyen kérdéseket vetnek fel:

Milyen különleges tulajdonságai vannak a sík egyenesének a többi, síkbeli vonalhoz képest?

Milyen tételek következnek abból, hogy a síkon pontosan egy párhuzamos egyenest húzhatunk adott egyeneshez adott, külső ponton át?

Jutalmazzuk azoknak a csoportoknak a tagjait, akár kollektíven is, ahol érdekes, színvonalas, valódi vita alakul ki egy-egy problémával kapcsolatban. Nagyon pozitív, ha valaki egy, első pillantásra képtelennek gondolt ötletet fölvet, és – akár gúnyos megjegyzések ellenére is – megpróbálja továbbvinni. Ez a viselkedés még akkor is értékelendő, ha a szóban forgó ötlet végül nem bizonyul helyesnek, de az indoklás, az érvek logikus és bátor gondolkozásra vallanak. A Tanulói munkafüzet feladatainak megoldása során is elsősorban ezt a viselkedést értékeljük.

* 2007. augusztusában elérhető a honlap

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
I. Sík és gömb			
1	A síkgeometria és a gömbi geometria pontjai és egyenesei	Térbeli tájékozódó képesség, térszemlélet, problémamegoldás, együttműködési készség, vitakultúra	Eszközök: Lénárt-gömb, a gömbhöz használatos üres félgömbfóliák és filctollak, alma, kés Melléklet a tanároknak: A modul lényegének összefoglalása a tanárok számára
II. Bolyai-geometria pontjai és egyenesei			
1	A Bolyai-geometria félgömbmodellje, pontok és egyenesek a félgömbmodellen	Térbeli tájékozódó képesség, térszemlélet, problémamegoldás, absztrakciós készség, önbizalom, empátia, kreativitás, képzelőerő, fantázia, eredetiség, együttműködési készség, vitakultúra	Eszközök: Lénárt-gömb, a gömbhöz használatos üres félgömbfóliák és filctollak, alma, kés, megrajzolt félgömbfóliák, írásvetítő
III. Szabályos háromszög belső szögeinek összege			
1.	Szabályos háromszög szögösszege a három geometriában. Melyik geometriát használjuk?	Térbeli tájékozódó képesség, térszemlélet, problémamegoldás, absztrakciós készség, önbizalom, empátia, kreativitás, képzelőerő, fantázia, eredetiség, együttműködési készség, vitakultúra	Eszközök: Lénárt-gömb, megrajzolt félgömbfóliák, a gömbhöz használatos üres félgömbfóliák és filctollak, írásvetítő

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
IV. Párhuzamok a három geometria között			
1.	Feladatsor	Térbeli tájékozódó képesség, térszemlélet, problémamegoldás, absztrakciós készség, önbizalom, empátia, kreativitás, képzelőerő, fantázia, eredetiség, együttműködési készség, vitakultúra	Eszközök: Lénárt-gömb, megrajzolt félgömbfóliák, a gömbhöz használatos üres félgömbfóliák és filctollak, írásvetítő Tanulói munkafüzet: Feladatok

Megjegyzések:

1. A munkaforma: alapvetően három-négy fős, kiscsoportos munka. Mivel a kiscsoportos formát gyakran szakítjuk meg frontális munkával, ezért, ha mód van rá, próbáljuk úgy rendezni az asztalokat és a székeket, hogy a tanulók minél kevesebb forgolódással képesek legyenek váltani a ránk figyelés és a csoportmunkára történő összpontosítás között.

2. Az alábbi, forgatókönyv-szerű leírásban a tanulók válaszai a továbblépés módját próbálják kijelölni. (Ez az oka annak, hogy az itt közölt válaszok többnyire nem gyerekbeszéd-stílust követnek!) Természetesen, a tanulók sokféle más megfogalmazást, sőt más gondolatmeneteket is felvethetnek, amelyeket közösen megbeszélhetünk, mielőtt tovább haladnánk.

I. SÍK ÉS GÖMB

Ráhangolódás (kb. 5 perc)

Készítsük elő a készleteket még óra előtt, ugyanis érdemes csak azokat a fóliákat betenni, amelyekre az óra során szükség lehet!
Óra elején azonnal szerveződjenek a tanulók csoportokba, osszuk ki a Lénárt-gömb-készleteket – csoportonként egyet. Hagyjuk őket ismerkedni a készlettel pár percet, közben kérjük meg őket, hogy rendezzék el az asztalukon a kapott tárgyakat annak megfelelően, hogy rajzeszköz vagy fólia kerül a kezükbe. Osszuk ki a rajzeszközhöz használandó filctollakat!

Melléklet a tanároknak: A modul lényegének összefoglalása a tanárok számára

1. Egyenes és vonalzó

(Javasolt idő: 20 perc. Eszközök: alma, kés, Lénárt-gömb, a gömbhöz használatos filctollak, fóliák. Munkaforma: kiscsoportos és frontális.)

Tekintsünk két különböző pontot a síkon! Melyik síkbeli vonal jelöli ki a legrövidebb utat a két pont között?
(A síkbeli egyenes vonal egy darabja, a szakasz jelöli ki a legrövidebb utat két pont között.)
Milyen eszközzel rajzolhatunk ilyen vonalat?
(Síkvonalzóval.)

Hogyan hosszabbíthatjuk meg ezt a vonalat?
(Kicsit elmozdítjuk a vonalzót, úgy, hogy egyik része kövesse a már megrajzolt vonalat, másik részén folytathatjuk az egyenes vonal megrajzolását.)

Ha egyik irányban ezt vég nélkül folytatjuk, megrajzolhatjuk így a teljes egyenest?
(Nem, csak egy félegyenest. A teljes egyenes megrajzolásához a másik irányban is ugyanígy kell eljárnunk.)

A munka a Lénárt-gömbön folytatódik.

Vegyük ezen a gömbön a gömbfelület két különböző pontját. Melyik gömbi vonal jelöli ki a legrövidebb utat a két pont között? Más szóval, milyen a gömbi egyenes vonal? Például: merre repül a repülőgép, ha a legrövidebb úton ér el Magyarország egyik városából Japán egyik városába?
Mit gondoltok, a síkbeli egyenes vonal a gömbön is használható lesz?

(Nem használható a gömbön a síkvonalzó, mert a síkvonalzó élét nem lehet belesimítani a gömbfelületbe. A síkvonalzónak legfeljebb egyetlen közös pontja lehet a gömbfelülettel.)

Rajzoljatok szabad kézzel két gömbi pont között a legrövidebb gömbi utat, a repülőutat kijelölő vonalat! Magyarul légvonalnak nevezzük, az angol nyelv úgy mondja: „amerre a varjú repül”.
Milyen vonal ez? Egyenes vagy görbe?

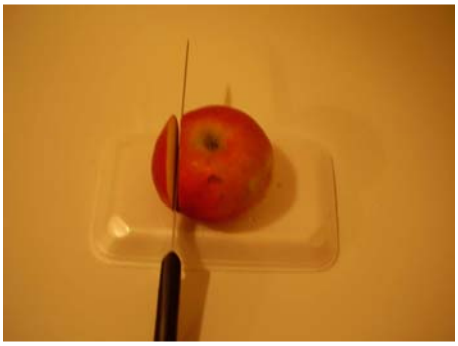
Várhatóan a tanulók bizonytalanok lesznek. Hagyjuk őket vitatkozni!

Itt egy alma, játsszuk azt, hogy ez az alma éppen olyan tökéletes gömb, mint ez a műanyag gömb. Megmutatom nektek, hogyan lehet ezzel a késsel gömbi egyenest varázsolni a gömbfelületre.

Vágjuk ketté az almát két egyforma darabra! Mutassuk fel a tanulóknak!

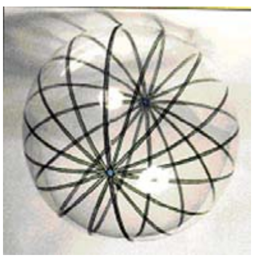
A vágás menti vonal egy gömbi egyenes vonal, és ez (mutatja a másik fél almán) ez is gömbi egyenes vonal.
Most másként vágom szét az almát.
A tanár illessze össze a két fél almát, vagy másik almát vegyen elő, és vágja szét feltűnően „igazságtalanul": a két almadarab egyike szembetűnően nagyobb a másiknál. Kérdésfelvetés közben mutassa a vágásnyomot az almadarabok peremén!

Ez a vonal gömbi egyenes vonal?



Várhatóan a tanulók bizonytalanok lesznek. Tisztázzuk, hogy csak az a vágás eredményezett gömbi egyenest, amelyik a gömböt két egyforma darabra szelte szét a kés által kijelölt sík mentén.
Vegyük elő azt a fóliagömböt, (két félgömbfóliából összeállított gömböt), amelyre előzőleg néhány teljes gömbi főkört rajzoltunk!

Ez a vonal azért gömbi egyenes, mert igazságosan vágja szét a gömböt – ez is – ez is.



A földrajzi koordináta-rendszer vonalai közül melyek gömbi egyenesek?
(A hosszúsági körök.)

A szélességi körök közül egyik sem?
Az Egyenlítő gömbi egyenes.

A gömbi egyenes egyúttal gömbi kör is?
Hagyjuk a tanulókat vitatkozni. Várhatóan így érvelnek: Igen, mert körbemegy, mint a kör, de egyenes is, mert a legrövidebb utat mutatja.

Ha körnek tekintjük, mi különbözteti meg a többi gömbi körtől?
(Ez a lehetséges legnagyobb gömbi kör.)

Ezért magyarul gömbi főkörnek is nevezzük. Más nyelvekben a nagykör nevet is használják (great circle, Groβkreis stb.)

Ha a síkbeli egyenes rajzolásához érdemes volt szerkeszteni és gyártani egy síkbeli-egyenesrajzoló-szerszámot(síkvonalzó), akkor a gömbi egyenes rajzolásához is jól jönne egy gömbi-egyenesrajzoló-szerszám, vagyis gömbi vonalzó.
A tanár elővesz a gömbi vonalzót a készletből.
Ez a koronaszerű alakzat a gömbi vonalzó.
Nagyon egyszerűen használhatjuk: ez a két skálázott éle rajzol gömbi egyenest. Rátesszük a gömbre, és már rajzolhatjuk is a gömbi egyenest vagy más néven gömbi főkört.

Mely élek alkalmasak tehát gömbi egyenes vagy más néven gömbi főkör rajzolására?
Az a két él, amelyeken skálabeosztást látunk. Az ábrán piros és kék szín jelöli ezeket az éleket.

Ha ez a skálázott él jó gömbi egyenes, akkor ez a skálázatlan él itt a füle mögött jó egyenes?
(Nem, mert nem igazságosan osztja szét a gömböt.)

Ellenőrizzétek a gömbi vonalzóval azt a vonalat, amelyet szabad kézzel rajzoltatok a két pont között!
Nézzétek most meg a hamis éleket, amelyekkel nem lehet főkörröket rajzolni! Mit gondoltok, a hamis élek közül melyik legkevésbé hamis? Melyik jár legközelebb az igazi főkörhöz?
(Az a két él, amelyik a támasztóbütyköt tartalmazó ívet határolja, mert ezek fele olyan távol vannak az igazi főkörtől, mint a másik két ív.)
Az ábrán bal oldalon, a piros és kék vonalakat összekötő ív, rajta a háromszögre emlékeztető támasztóbütyökkel. A másik két hamis ív: a piros vonaltól balra eső, illetve a kék vonal fölött elhelyezkedő ív.

2. A szög, a szögmérő és a körző

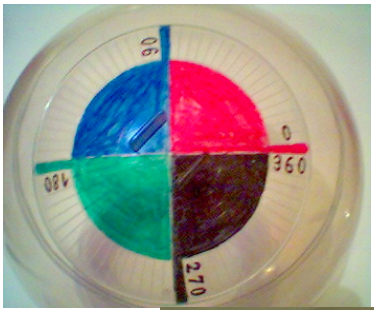
(Javasolt idő: 20 perc.Eszközök: Lénárt-gömb,fóliák. Munkaforma: kiscsoportos és frontális.)

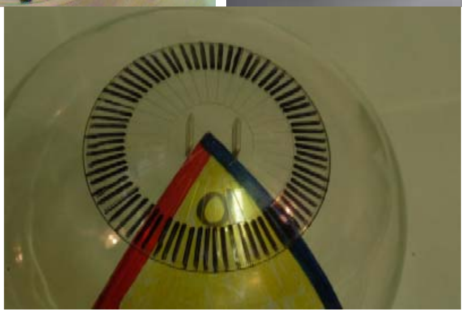
Vannak-e még egyszerű síkbeli szerkesztőeszközök, amiknek nem láttuk még gömbi megfelelőit?

(Toll, körző, szögmérő.)

Toll már van: filctoll. Szögmérő viszont jó lenne, mert ezt a síkbeli szögmérőt (akár papírból, akár műanyagból készült) sehogyan sem lehet beleerőszakolni a gömbbe.
Itt van ez a süvegszerű eszköz, négy skálabeosztással. Ezzel már ilyen egyszerűen lehet gömbi szöget mérni.

Mutassuk be a szög mérését a gömbön.





Rajzoljatok a gömbre derékszöget!
Rajzoljatok 60°-os szöget!

Figyeljük a tanulók munkáját, segítsünk nekik az illesztésben, ha szükséges!

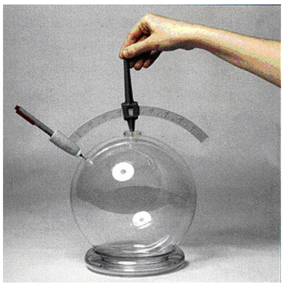
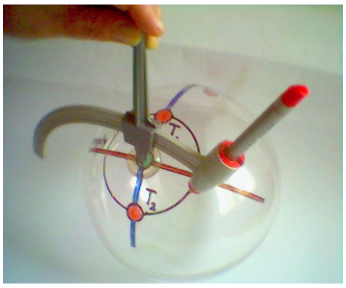
Szögmérőnk már van. Milyen fontos alapeszköz hiányozhat még?

(Körző.)

A földrajzi koordináta-rendszer vonalai közül ezeket meg ezeket könnyen megrajzolhatjuk a vonalzóval; de a szélességi köröket hogyan rajzoljuk meg? Itt a vonalzó nem segít!

A tanár mutatja először a hosszúsági köröket és az Egyenlítőt, mint példákat a főkörökre, majd a többi szélességi kört, mint ellenpéldákat.

Mi kellene? Körző, de milyen körző? Gömbölyű körző, gömbi körző, gömbző kellene! Íme!
Bemutatja a gömbi körzőt és használatát, központkeresővel, körrajzolással.
Megjegyzés: a „gömbző” elnevezés Hollai Mártától származik.

Rajzoljatok igazi, élő gömbi kört! Ehhez először jelöljétek ki a középpontot! Nyissátok ki a körzőtöket tetszőleges sugarúra, mondjuk közel 60 foknyira! Rajzoljátok meg a kört! Hol van a kör közepe?
Hagyjuk a tanulókat vitatkozni! Több tanulsága is van a feladatnak. Egyrészt a kör közepe a gömbi felületen van (nem a gömbön belül vagy kívül), másrészt ennek a körnek pontosan két középpontja van (hiszen a gömbi pontok valójában pontpárok).

Valójában a gömbön éppolyan jó geometriát lehet felépíteni pontokkal, egyenesekkel, körökkel, távolságméréssel és szögméréssel, mint a síkon.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

A modul lényegének összefoglalása a tanár számára

Az euklideszi síkgeometria, amelyben nevelkedtünk, és amely kialakította geometriai szemléletünket, bizonyos alapfogalmakból indult ki, mint a pont, egyenes, távolság, szög, terület stb. Egy gondolatkört akkor vagyunk hajlandók geometriának tekinteni, ha ezeket a fogalmakat értelmezni tudja.

A gömb esetén viszonylag könnyen beláthatjuk, hogy ilyen fogalmakat a gömbfelület geometriájában is bevezethetünk, bár a gömbön ezek a fogalmak számos, a síkbelitől eltérő tulajdonsággal rendelkeznek.

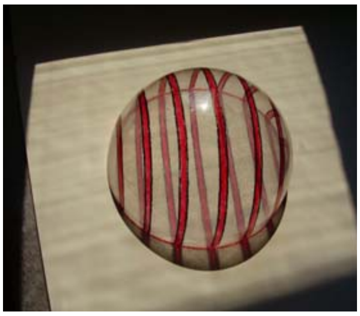
Sok-sok évszázadon át úgy gondolták a matematikusok, hogy ezen a két geometrián kívül nincs más olyan geometriai rendszer, amely a síkon és gömbfelületen megismert geometriák legfontosabb fogalmait értelmezni tudná, de különbözne ettől a két geometriától.

A tizenkilencedik század elején, körülbelül akkor, amikor Petőfi született, három tudós, a német Karl Friedrich Gauss, az orosz Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij és a magyar Bolyai János egymástól függetlenül megmutatta, hogy létezhet ilyen, az addig ismertektől eltérő geometriai rendszer.

Ezt a harmadik geometriai rendszert többféle módon szemléltethetjük. Egyik lehetséges mód a következő:
Ahogyan a síkgeometriát a végtelen síkfelületen, a gömbi geometriát a véges gömbfelületen ábrázolhatjuk, a Bolyai-geometriát ebben a modulban a nyílt félgömb felületén mutatjuk be. Ez olyan félgömbfelületet jelent, amelyből a határoló egyenlítőt összes pontjával együtt elhagytuk.
A Bolyai-geometria pontjainak a nyílt félgömbfelület pontjait tekintjük – tehát a határoló egyenlítő pontjai már nem tartoznak ehhez a geometriai világhoz.
Döntő fontosságú kérdés, hogy mit tekintünk ebben a geometriában egyenes vonalnak, ugyanúgy, ahogyan a síkon a jól ismert síkbeli egyenest, a gömbön pedig a gömbi egyenest, vagy más néven gömbi főkört (mint a földrajzi koordináta-rendszer hosszúsági köreit és egyenlítőjét).

Azért is iktatjuk be a gömbi geometriát a síkgeometria és a Bolyai-geometria közé, mert már a gömbre való átlépéskor meg kell barátkoznunk szokatlan, új tulajdonságokkal – szemléletet kell váltanunk. Már a gömbi egyenesnél is vitatkozhattunk arról, hogy egyenessel vagy körrel van-e dolgunk.

A Bolyai-geometria egyenes vonalai ebben a félgömb-modellben a félgömb alapsíkjára merőleges félkörök lesznek. Ha egy félbevágott hagymát tökéletes félgömbnek tekintünk, akkor azt mondhatjuk, hogy a szokásos módon végzett hagymaszeletelés közben csupa Bolyai-egyenest vágunk ki a fél hagymából:



Nagyon furcsa, euklideszi szemléletünk számára nem könnyen elfogadható tény, hogy a Bolyai-geometria mindezeket a félköröket tökéletesen egyformáknak tekinti, ugyanúgy, mint a síkgeometria a sík valamennyi egyenesét, a gömbi geometria pedig a gömb valamennyi főkörét. A félgömbön az egyik félkört nagyobbnak, a másikat kisebbnek vagy sokkal kisebbnek látjuk, de a Bolyai-geometria erről a megkülönböztetésről nem vesz tudomást.

Ha bármelyik Bolyai-egyenesen kijelölünk egy pontot, akkor ez a pont két Bolyai-félegyenesre bontja szét a Bolyai-egyenest. Ez a két félegyenes is megkülönböztethetetlen ebben a geometriában, még akkor is, ha a kijelölt pont látszatra sokkal közelebb van a félkör egyik végpontjához (ami már nem is tartozik a mi geometriánkhoz), mint a másik végpontjához (ez sem tartozik a mi geometriánkhoz). A Bolyai-geometria a két egyenes-darabot egyformán félegyeneseknek tekinti.

Belátható, hogy ezekkel az alapfogalmakkal felépíthetünk egy geometriai rendszert, amelyik éppen olyan logikus, mint a síkgeometria vagy a gömbi geometria. Ebben a geometriában is értelmezni tudjuk a távolság, szög vagy akár a terület fogalmát is.

Számomra az a legcsodálatosabb, hogy a távolság és szög értelmezése után ebben a geometriában is igaz marad az egyenlő szárú háromszögek tétele:

> Ha egy háromszög két oldala egyenlő hosszú, akkor a velük szemben fekvő két szög is egyenlő egymással, – és megfordítva, ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor a velük szemben fekvő két oldal hossza is egyenlő egymással.

Azzal az eszközkészlettel, amellyel a gömbi geometriai kísérleteket végeztük, a Bolyai-geometria alapszerkesztéseinek és méréseinek nagy részét is elvégezhetjük, bár nehézkesebb, kevésbé szemléletes módon, mint a gömbi geometria esetében. Például a fenti állítást az egyenlő szárú háromszögekről közvetlenül, méréssel ellenőrizhetjük. Ezzel az eszközzel szemléletesen azt is beláthatjuk, hogy ez a geometria más, mint az előző kettő.

A síkgeometriában adott egyeneshez nem az egyenesen fekvő ponton át egyetlen párhuzamos egyenest húzhatunk, gömbön egyet sem, a Bolyai-geometriában viszont végtelen sokat.

Síkon a háromszög szögösszege mindig 180°, gömbön mindig több ennél, a Bolyai-geometriában mindig kevesebb.

Ennyit kíván ez a modul bemutatni, szemléltetni.

II. BOLYAI-GEOMETRIA PONTJAI ÉS EGYENESEI

Készítsük elő a készleteket még óra előtt, érdemes újra csak azokat a fóliákat betenni, amelyekre az óra során szükség lehet!
Óra elején azonnal szerveződjenek a tanulók csoportokba, osszuk ki a Lénárt-gömbkészleteket – csoportonként egyet! Hagyjuk őket ismerkedni az új fóliákkal pár percet, közben kérjük meg őket, hogy rendezzék el az asztalukon a kapott tárgyakat annak megfelelően, hogy rajzeszköz vagy fólia kerül a kezükbe. Osszuk ki a rajzeszközhöz használandó filctollakat!

1. A Bolyai-geometria színpada

(Javasolt idő: 15 perc. Eszközök: Lénárt-gömb, fóliák. Munkaforma: frontális és kiscsoportos.)

A gömbön, mint említettük, éppolyan jó geometriát lehet felépíteni, pontokkal, egyenesekkel, körökkel, mint a síkon. Kétezer éven át a legnagyobb tudósok, a legokosabb matematikusok is azt mondták: vagy síkgeometria, vagy gömbi geometria – más nincs, nem lehet!
Kétezer év után, körülbelül, amikor Petőfi Sándor született, három tudós, egymástól függetlenül, rájött arra, hogy igenis létezik harmadik geometria. Ez a három tudós: Karl Friedrich Gauss német, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz, és – nagyon büszkék lehetünk – Bolyai János magyar matematikusok voltak. Milyen ez a harmadik geometria (persze csak az alapjai), hogyan néz ki, hogyan viszonyul a másik kettőhöz?

Ha focimeccset akarunk játszani, kell egy pálya, ahol játszhatunk. Ha sakkozni akarunk, sakktáblára van szükségünk, ahol a bábukat tologatjuk. Ha síkgeometriát játszunk, akkor legyen a játszóterünk ez a füzetlap, úgy, hogy se vége, se hossza, vagyis: a végtelen síklap.
Gömbi geometriánál a játszótér, a színpad a véges gömb felülete: **csak a felülete**! Se egérmódra berágni magunkat, se űrhajó módjára kirepülni nem szabad!

Mi legyen a harmadik geometria színpada? Sokféle lehetőség van, ezek közül egyet nézzünk meg közelebbről!
A színpad ennek a félgömbfóliának a felülete lesz. Vegyetek elő egy félgömbfóliát, és a széle mentén húzzatok körbe-körbe egy piros vonalat a gömbvonalzóval! Vigyázzatok, hogy a filctoll kicsit a perem fölött haladjon, mert különben a fólia éle rongálja a filctoll hegyét!
Most illesszétek rá ezt a félgömbfóliát a kemény gömbre!

A tanulók között lesz, aki úgy illeszti rá, hogy a két félgömb összeillesztése egybeesik a piros vonallal, de van, aki ragaszkodik a „szabálytalan” elhelyezéshez. Hagyjuk őket a saját elgondolásuk szerint illeszteni a félgömbfóliát!

Oda megyünk a felületen, ahová csak akarunk. Egyetlen tiltott terület van: a félgömbnek ez a határvonala, amit pirossal jelöltünk. Képzeljetek el egy országot, ahol bárhová mehetünk, de a határvonalra nem tehetjük a lábunkat: ez a Bolyai-színpad. A határvonal már nem tartozik a Bolyai-világhoz: a határvonal pontjai Bolyai számára már nem léteznek.

Felmerülhet a kérdés a tanulók részéről, hogy miért éppen ezt, miért éppen ilyen modellt választunk.

Nem biztos, hogy a tanulók felvetik ezt a kérdést. Ha nem vetik fel, akkor a tanárnak érdemes feltennie ezt a kérdést.

Ezt a választást nem kell megindokolni. Sokféle más modellje is létezik ennek a geometriának. Ez a modell akkor jó modell, akkor választottunk jól, ha segítségével megértitek a Bolyai-geometria alapfogalmait.

2. A pont

(Javasolt idő: 15 perc. Eszközök: Lénárt-gömb és fóliák. Munkaforma: kiscsoportos és frontális.)

Rajzoljatok öt olyan pontot, amelyek Bolyai-pontok, és rajzoljatok öt másik pontot, amelyeket mi látunk, de amelyek a Bolyai-geometria számára nem léteznek!

A tanulók pontokat rajzolnak. Az öt Bolyai-pontnak a nyílt félgömbfóliára kell esnie. A másik öt pont eshet a piros határvonalra is, és a kemény gömb üresen maradt félgömbjére is. Különösen érdekesek a továbbiak szempontjából a határpontok!

Én is rajzoltam néhány Bolyai-pontot. Miért nem rajzoltam a határvonalra Bolyai-pontot jelképező kék pöttyöt?

(Mert ott nincs is pont! Bolyai-pont nincs is a határvonalon!)

Rajzoljatok két, bármilyen girbegurba utat, amelyeknek minden pontja Bolyai-pont, és amelyeknek metszéspontja is a Bolyai-pontokhoz tartozik!

Most rajzoljatok két olyan, bármilyen girbegurba utat, amelyeknek minden pontja Bolyai-pont, de nincs közös Bolyai-pontjuk!

A tanulók először két görbét rajzolnak a félgömbfóliára, amelyeknek van közös, nem a határvonalra eső metszéspontja. Ezután két olyan görbét rajzolnak, amelyek szintén a félgömbfóliára esnek, de a nyílt félgömbfólián nincs közös pontjuk, azaz, a közös pont vagy a határvonalra esik, vagy valahol máshová a kemény gömb üresen maradt felületén.

Itt vannak ezek a Bolyai-világbeli utak. Először egy könnyű kérdés: ha Rómeó az *a* úton sétál, és Júlia a *b* úton sétál, vajon találkoznak-e a Bolyai-világban?

(Igen, találkoznak.)

Most nagyon nehéz kérdés: ha Rómeó az *a*-n sétál, és Júlia a *c*-n sétál, találkoznak-e a Bolyai-világban?
A tanár két olyan görbe vonalat mutat, amelyek éppen a határvonalon futnak össze.

A tanulók lehet, hogy továbbra is bizonytalanok, várjuk meg a válaszaikat, hagyjuk, hogy egymást győzködjék.

Nem találkoznak, hiszen ez a találkozási pont Bolyai világában nem létezik. Mi látjuk, de Bolyai nem látja! Bolyai azt mondja: Szegény Rómeó, szegény Júlia, sohasem találkoztok az én világomban!

3. Az egyenes

(Javasolt idő: 15 perc. Eszközök: alma, kés, Lénárt-gömb, fóliák. Munkaforma: kiscsoportos és frontális.)

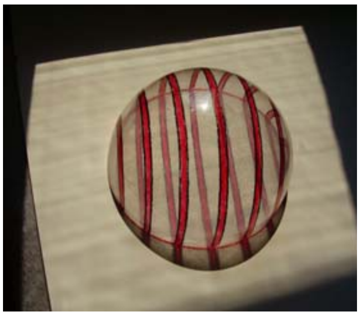
Síkon tudjuk, mi az egyenes, gömbön tudjuk, mi a gömbi egyenes.
Mutatjuk a síkvonalzót és a gömbvonalzót.
Mi lesz a Bolyai-egyenes?
Itt derül ki, mennyire más ez a geometria, mint a síkgeometria vagy a gömbi geometria.

Játsszuk azt, hogy ez a fél alma a Bolyai-világ, ugyanolyan tökéletes félgömb, mint ezek a félgömbök. Megmutatom, hogyan lehet a fél almára ezzel a konyhakéssel Bolyai-egyenest varázsolni! Ehhez csak egyet kell tisztázni: mi az, hogy merőleges?
Ennek a késnek a pengéje ilyen helyzetben merőleges az asztallapra.
Mutatjuk a diákoknak.
Ez is merőleges, ez is.
Merőlegesen tartva a késpengét az asztalra, mozgatjuk a kést fel és alá.
Ez nem az, ez se, meg ez se.
Forgatjuk a késpengét nem merőleges helyzetekben.

Bolyai-egyenest úgy kapunk, ha a fél almát úgy vágjuk el, hogy a kés pengéje mindig merőleges legyen az asztallapra. Ez itt tökéletes Bolyai-egyenes – ez is – ez is.

Mikor otthon a pörkölthöz egy fél hagymát szeletelünk a vágódeszkán, csupa Bolyai-egyenest vágunk ki a fél hagymából!

Ezeken a félgömbfóliákon csupa Bolyai-egyenest láthatunk:



A tanár egy félgömbre rajzolt koncentrikus körsort mutat, amelynek a középpontja NEM a félgömb póluspontján van – „ferdén” áll a körsor.

Legyen ez a félgömb a Bolyai-világ, a piros határvonal a világ vége, amely már nem tartozik a Bolyai-világhoz, a fekete vonalak pedig vonalak a Bolyai-világban, a Bolyai-geometriában. Melyik fekete vonal lesz Bolyai-egyenes?

Hagyjuk a diákok fantáziát szabadon kibontakozni! Lehetséges válaszok:

Mindegyik. (Helytelen!)

Egyik se. (Helyes!)

Csak a körök középpontja. (Kiváló, mert ez a pont valóban tekinthető „elfajult” Bolyai-egyenesdarabnak!)

No és itt?

Feltesz egy északi félgömbre illő földrajzi koordináta-rendszert, az elhagyott határvonal az Egyenlítő.

Most ezeket a vonalakat nem földrajzi koordináta-rendszernek, hanem a Bolyai-geometria vonalainak tekintjük.

Tanulók vitája várható:
(Csak a hosszúsági körök! A szélességiek közül egyik sem! – Helyes, mert az Egyenlítő nem tartozik a modellhez.)

Néha azt is felvetik a tanulók, hogy csak a teljes Bolyai-egyenesek számítanak-e? Ha igen, akkor csak a két, egymásra merőleges, a póluspontban találkozó vonal ad jó megoldást. Ha elfogadunk olyan vonalakat is, amelyek Bolyai-egyenesek darabjai, akkor bármelyik hosszúsági kör bármelyik szakasza jó megoldás.

Tanár: Most a legnehezebb! Itt melyik vonal lesz Bolyai-egyenes?
Tegyük fel a – mondjuk – nyugati félgömbre illő koordináta-rendszert, az elhagyott határvonal a geometriai Greenwich- és Dátumválasztó főköre)

Tanulók vitája várható.
(Mindegyik szélességi kör Bolyai-egyenes, és egyetlenegy hosszúsági kör: az, amelyik átmegy a póluspondon.)

Miért éppen ez a vonal lesz a Bolyai-egyenes?

Erre megint azt kell válaszolnom, mint az előbb: ez a választás akkor jó választás, ha a segítségével felépíthetünk egy értelmes geometriai világot, amelyben a távolságot, szöget, területet és a többi olyan fontos fogalmat, amit a sík és gömb geometriájában megismertünk, megfelelő módon ábrázolni, értelmezni lehet. A következő órán ilyen szerkesztéssel foglalkozunk.

III. SZABÁLYOS HÁROMSZÖG BELSŐ SZÖGEINEK ÖSSZEGE

Készítsük elő a készleteket még óra előtt, érdemes újra csak azokat a fóliákat betenni, amelyekre az óra során szükség lehet!
Óra elején azonnal szerveződjenek a tanulók csoportokba, osszuk ki a Lénárt-gömb-készleteket – csoportonként egyet. Hagyjuk őket ismerkedni az új fóliákkal pár percet, közben kérjük meg őket, hogy rendezzék el az asztalukon a kapott tárgyakat annak megfelelően, hogy rajzeszköz vagy fólia kerül a kezükbe. Osszuk ki a rajzeszközhöz használandó filctollakat!

1. Szabályos háromszögek síkban

(Javasolt idő: 5 perc. Munkaforma: kiscsoportos és frontális.)

Láttuk, hogy a Bolyai-geometria félgömbmodelljén hogyan néznek ki a pontok és az egyenesek. Ez valóban egy új, más világ.
Nézzük meg most egyetlen tulajdonságát!

Rajzoljatok kisebb és nagyobb síkbeli szabályos háromszögeket! Hogyan változnak itt a szögek a kis háromszögektől a nagyobbak felé haladva?

(Sehogy, mindegyik szög 60°, akár kicsi a háromszög, akár nagy.)

Mekkora a belső szögek összege?
(Mindig 180°.)

2. Szabályos háromszögek gömbön

(Javasolt idő: 20 perc; Eszközök: Lénárt-gömb; Munkaforma: kiscsoportos és frontális)

Nézzük meg ugyanezt a gömbön! Már tudjuk, hogyan lehet gömbi szögmérővel szöget mérni. Rajzoljatok gömbi vonalzóval és szögmérővel kisebb és nagyobb gömbi szabályos háromszögeket!

A tanulók ugyanolyan szerkesztési lépéseket alkalmazhatnak, mint a síkon: Felrajzolnak egy gömbi szakaszt, körzőnyílásba veszik, és a szakasz két végpontjából felmérik a két körívet. A két körív két pontban metszi egymást. Ezek közül bármelyik kijelöli a szabályos gömbháromszög harmadik csúcsát. Világosan látható is, és gömbi szögmérővel ellenőrizhető is, hogy nagyobb szabályos háromszögben a belső szögek is nagyobbak.

(Nagyobb szabályos háromszögben a belső szögek is nagyobbak!)

Nézzétek ezt az ábrát!
A tanár akár félgömbfólián, akár képen bemutatja.

Nehéz kérdés: Mekkora lehet egy nagyon pici szabályos gömbháromszög egyik szöge?

A tanulók vitatkoznak – gyakran mondják, hogy a pici háromszögben a szög is akármilyen kicsi lehet.

Mivel ez a pici háromszög nagyon hasonlít a síkháromszöghöz, ezért egy-egy szöge nagyon közel esik 60°-hoz, a szögösszeg tehát itt is 180°-tól indul. Ahogyan haladunk e felé a kövér háromszög felé, látjuk, hogy a szögösszeg is egyre nő – a kövérnél pedig háromszor 180°, vagyis 540° lesz! Gömbön a háromszög szögösszege tehát több mint 180°.

3. Szabályos Bolyai-háromszögek

(Javasolt idő: 20 perc. Eszközök: Lénárt-gömb és fóliák. Munkaforma: kiscsoportos és frontális.)

És Bolyainál mi a helyzet a háromszögek szögösszegével?
(Bemutatja a félgömbfóliára rajzolt szabályos háromszög-családot.)

Ezek a háromszögek mind Bolyai-háromszögek, mert minden oldaluk Bolyai-egyenes.
Mutatja, hogy a félkörök merőlegesek az egyenlítő síkjára.

Itt a szögmérés nehezebb, mint a síkon vagy gömbön, de a szögeknél itt is hihetünk a szemünknek: ha kisebbnek látjuk a szöget, a mértéke is kisebb lesz; ha nagyobbnak látjuk, a mértéke is nagyobb lesz. Mit gondoltok, itt hogyan változnak a szögek, ha a kisebb háromszögtől a nagyobbak felé haladunk?

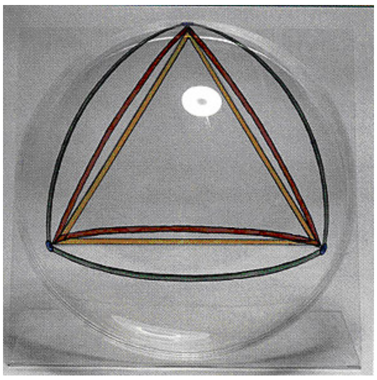
Ha úgy gondoljuk, hogy a szögmérés módját részletesebben el kívánjuk magyarázni a tanulóknak, akkor a http://www.bolyaitestamentum.hu/bolyai_geometria_okt/nem_euklideszi_geometriak5.doc[†] weblapon a félgömbfelület Bolyai-egyenesei által bezárt szög mérésének nagyon rövid leírását találjuk.

Ezeknél a háromszögeknél, ahogyan a gömbháromszögeknél is, a kis háromszög nagyon hasonlít a síkháromszöghöz, tehát itt is 180º-tól indulunk, de ahogy a nagyobb háromszögek felé haladunk, mit látunk?
(Egyre kisebbek a szögek!)

Mit gondoltok, hová tartanak a „világvégén”?
(Nullához!)
Itt tehát a szögösszeg nulla lesz. Ezek szerint: Bolyai-világban a háromszög szögösszege kisebb 180°-nál.

Egyetlen kérdés marad: melyik „világ” az igazi? Ha valaki azt kérdi: melyiket válasszam én magam (a magam világában) a három geometria közül, – mit felelhetünk neki?

Megkérjük, hogy jelöljön ki három pontot az általa választott felületen, és kösse össze olyan vonalakkal, amiket ő egyeneseknek gondol. Mérje meg a háromszög szögeit, és adja össze a három adatot! Ha a szögösszeg 180°, akkor az illetőnek síkgeometriára van szüksége; ha több, akkor a gömbi geometria a jó; ha pedig kevesebb, akkor Bolyaihoz kell fordulnia. Természetesen, könnyen megeshet, hogy az egyik fizikai jelenséget az egyik geometria, másikat viszont valamelyik másik geometria írja le helyesen.



[†] 2007. augusztusában elérhető a honlap

IV. PÁRHUZAMOK A HÁROM GEOMETRIA KÖZÖTT

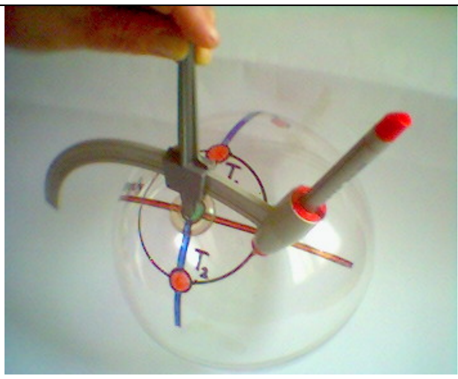
Készítsük elő a készleteket még óra előtt, érdemes újra csak azokat a fóliákat betenni, amelyekre az óra során szükség lehet!
Óra elején azonnal szerveződjenek a tanulók csoportokba, osszuk ki a Lénárt-gömb-készleteket – csoportonként egyet. Hagyjuk őket ismerkedni az új fóliákkal pár percet, közben kérjük meg őket, hogy rendezzék el az asztalukon a kapott tárgyakat annak megfelelően, hogy rajzeszköz vagy fólia kerül a kezükbe. Osszuk ki a rajzeszközhöz használandó filceket!
A tanulók 4-5 fős csoportokban dolgozzák fel az anyagot, járjunk körbe, figyeljük munkájukat, megfelelő irányító kérdésekkel segítsünk nekik!
Hagyjunk időt minden feladatcsoport eredményeinek egyeztetésére, megbeszélésére!

Melléklet a tanulóknak: Feladatok

1. Egyenesek és szakaszok

(Javasolt idő: 10 perc. Eszközök: Lénárt-gömb. Munkaforma: csoportos, majd frontális.)

1. A képen látható vonalak közül melyek
   - teljes gömbi egyenesek, vagyis főkörök,
   - gömbi szakaszok, vagyis két gömbi pontot összekötő legrövidebb gömbi egyenes-darabok,
   - teljes gömbi körök?

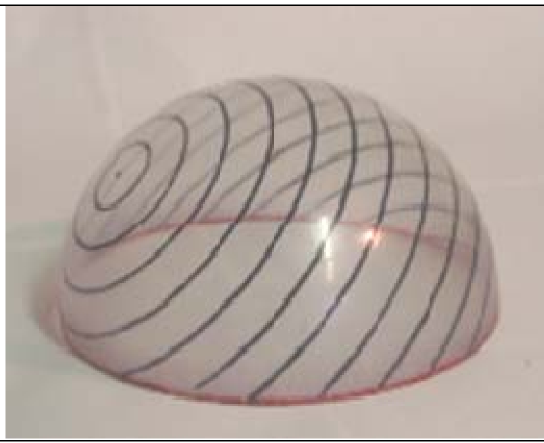


Megoldás:
Teljes főkör nincs az ábrán. Gömbi szakasz: a piros, illetve a kék főkörív bármelyik két, az ábrán jelölt pontját összekötő főkörív. Teljes gömbi kör: a fekete kör.

2. A képen látható vonalak közül melyek
   - teljes gömbi egyenesek, vagyis főkörök,
   - gömbi szakaszok, vagyis két gömbi pontot összekötő legrövidebb gömbi egyenes-darabok,
   - teljes gömbi körök?

Megoldás:
Teljes főkörök: Egyenlítő, Greenwich-Dátumválasztó, és a mindkettőre merőleges harmadik főkör (körülbelül Kalkuttán és New Orleans-on halad keresztül). Gömbi szakasz: bármelyik hosszúsági kör bármelyik két, az ábrán jelölt pontját összekötő rövidebbik főköríve (tehát nagyon sok!). Teljes gömbi körök: valamennyi szélességi kör, beleértve az Egyenlítőt is, és a másik két főkör is.
Egy gömbi ponton átmenő összes főkör gömbi sugársort alkot, mint például az Északi-sarkon átmenő összes hosszúsági kör. Látjuk, hogy ezek a főkörök átmennek a Déli-sarkon is. Két átellenes pont a póluspontok. Bármely pont lehet póluspont, minden pólushoz tartozik egy egyenlítő is.

3. A piros határvonal pontjai a félgömb alján már nem tartoznak a félgömb-modellünkhöz. A fekete vonalak közül melyek
   - teljes Bolyai-egyenesek,
   - Bolyai-egyenes-darabok, vagyis Bolyai-szakaszok?

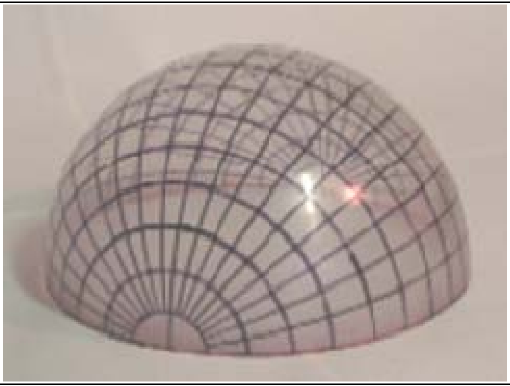


Megoldás:
Sem teljes Bolyai-egyenes, sem Bolyai-szakasz nincs az ábrán (legfeljebb az egyetlen fekete pontot tekinthetjük elfajult Bolyai-szakasznak).

4. A piros határvonal pontjai a félgömb alján már nem tartoznak a félgömb-modellünkhöz. A fekete vonalak közül melyek
   - teljes Bolyai-egyenesek,
   - Bolyai-egyenes-darabok, vagyis Bolyai-szakaszok?

Megoldás:
Teljes Bolyai-egyenes a póluspontban találkozó két (gömbi szemmel nézve) merőleges fél-főkörív. Bolyai-szakasz bármelyik (gömbi szemmel nézve) hosszúsági kör bármelyik két, az ábrán jelölt FEKETE (a piros határpont nem!) pontját összekötő főkörív.

5. A piros határvonal pontjai a félgömb alján már nem tartoznak a félgömb-modellünkhöz. A fekete vonalak közül melyek
   - teljes Bolyai-egyenesek,
   - Bolyai-egyenes-darabok, vagyis Bolyai-szakaszok?

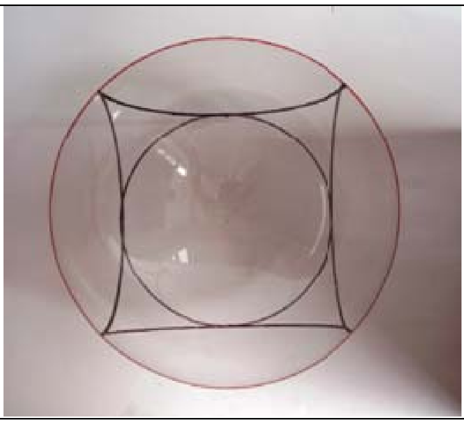


Megoldás:
Teljes Bolyai-egyenesek: (gömbi szemmel nézve) valamennyi szélességi kör, és az egyetlen olyan hosszúsági kör, amelyik átmegy a póluspontón. Bolyai-szakasz bármelyik, a most felsorolt bármelyik körön kijelölt két FEKETE (a piros határpont nem!) pontját összekötő körív.

2. Egyenesek és körök

(Javasolt idő: 5 perc. Eszközök: Lénárt-gömb. Munkaforma: csoportos, majd frontális.)

1. A piros határvonal pontjai már nem tartoznak a félgömb-modellünkhöz. A félgömböt most felülnézetben látjuk. A fekete vonalak közül melyek
   - teljes Bolyai-egyenesek,
   - Bolyai-körök?



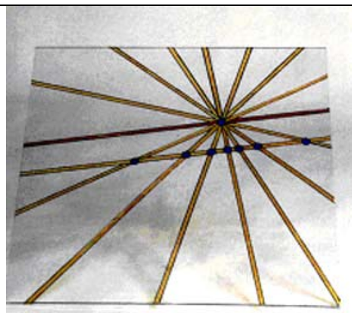
Megoldás:
Teljes Bolyai-egyenes a négy félkör, Bolyai-kör pedig a középső kör. (A négy félkör által a félgömbön kijelölt alakzatot csehsüvegnek nevezik az építészetben.)

2. A piros határvonal pontjai már nem tartoznak a félgömb-modellünkhöz. A félgömböt most felülnézetben látjuk. A fekete vonalak közül melyek
   - teljes Bolyai-egyenesek,
   - Bolyai-körök?

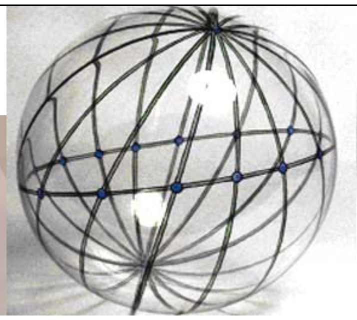
Megoldás:
Teljes Bolyai-egyenes a póluspontton áthaladó két merőleges. A négy, körnek látszó vonal nem lehet teljes kör, mert egy pontjuk hiányzik („lyukasak”). Ez az a pont, amely a piros határvonalra esne. (Később látjuk, hogy ezeknek a vonalaknak paraciklus a neve.)

3. Közös pontok

(Javasolt idő: 15 perc. Eszközök: Lénárt-gömb. Munkaforma: csoportos, majd frontális.)

1. A kisebb képen a sík egyik pontján átmenő egyeneseket, más néven síkbeli sugársort látunk. A nagyobb képen a sugársoron kívül még egy, külső egyenes is szerepel. Kérdés: A sugársor egyenesei közül hány egyenes nem metszi a külső egyenest?	 

Megoldás:
Egyetlenegy.

2. A kisebb képen a gömb két átellenes pontján átmenő gömbi egyeneseket, más néven gömbi sugársort látunk. A nagyobb képen a sugársoron kívül még egy, külső gömbi egyenes is szerepel. Kérdés: A gömbi sugársor egyenesei közül hány gömbi egyenes nem metszi a külső gömbi egyenest?	 

Megoldás:
Egy se.

3. A kisebb képen a félgömb egyik pontján átmenő hiperbolikus (Bolyai-féle) egyeneseket, más néven hiperbolikus sugársort látunk. A nagyobb képen a sugársoron kívül még egy, külső hiperbolikus egyenes is szerepel. Kérdés: A hiperbolikus sugársor egyenesei közül hány nem metszi a külső hiperbolikus egyenest?	 

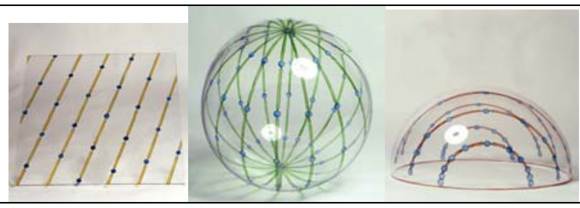
Megoldás:
Végtelen sok: mindazok a Bolyai-egyenesek, amelyek a narancs-színű tartományban haladnak. A narancs-színű tartományt az átlátszótól elválasztó két Bolyai-egyenest is ide sorolhatjuk, mert a kék pöttyös egyenessel nincs közös pontjuk (ami lenne, az éppen a piros határvonalra esne).

4. Párhuzamos-e egy egyenes önmagával – akár síkon, akár gömbön, akár félgömbön?

Megoldás:
Attól függ, mit értünk párhuzamosságon! Ha azt mondjuk: „Két egyenes akkor párhuzamos egymással, ha nincs közös pontjuk”, akkor egy egyenes nem lehet önmagával párhuzamos, hiszen végtelen sok közös pontja van önmagával. Ha azt mondjuk: „Két egyenes akkor párhuzamos, ha távolságuk állandó”, akkor egy egyenes síkon is, gömbön is, félgömbön is párhuzamos önmagával, hiszen sajátmagától mért távolsága mindenütt ugyanannyi: nulla.
Érdemes megjegyezni, hogy, ha a második definíciót fogadjuk el, akkor nemcsak a gömbön, de a félgömbön sincsenek egymástól különböző párhuzamos egyenesek. A félgömb párhuzamos egyeneseinek távolsága ugyanis állandóan csökken, de sohasem érik el egymást. Az a pont, amelyik gömbi szemmel nézve a két egyenes közös pontjának tűnik, már nem tartozik a félgömbmodellünkhöz.
Éppen ez volt az egyik olyan tulajdonság, amit a matematikusok sok évszázadon át ellentétesnek éreztek „az egyenes természetével”. Ezért utasították el egy harmadik geometria létezésének gondolatát a sík és gömb geometriáján kívül.

4. Félegyenesek és sokszögek

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: Lénárt-gömb; Munkaforma: csoportos, majd frontális)

1. Síkon, gömbön, félgömbön – melyiken találhatunk félegyenest?	

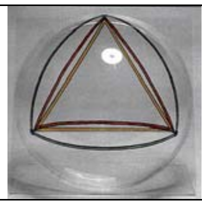
Megoldás:
Síkon és félgömbön van félegyenes, mert egy-egy pontból induló egyenes vonal sohasem térhet vissza önmagába („eltűnik a végtelenben”, amit a síkon nem láthatunk, a félgömbön pedig az elhagyott határvonal egy pontja jelképezi). A félgömb félegyenesei gömbi szemmel nézve nagyon különbözhetnek egymástól, hiszen a piros vonalhoz rajzolhatunk nagyon közeli pontokat is, és attól nagyon távoli pontokat is. Bolyai-értelemben azonban minden félegyenes egyforma hosszú: végtelen hosszú, mivel a végesben fekvő fekete ponttól a végtelent jelképező piros határpontba távozik. Gömbön félegyenes nincs, mert a gömbi egyenes visszatér a kiindulóponthoz.

2. Milyen határok között változhat a háromszög belső szögeinek összege – síkon, gömbön, félgömbön?	

Megoldás:
Síkon a háromszög belső szögeinek összege 180º-tól 180º-ig változhat, vagyis állandó. Gömbön a háromszög belső szögeinek összege 180º-tól 540º-ig, félgömbön 180º-tól 0º-ig változhat.

3. Milyen határok között változhat a négyszög belső szögeinek összege – síkon, gömbön, félgömbön?	

Megoldás:
Síkon a négyszög belső szögeinek összege 2·180º-tól 2·180º-ig változhat, vagyis állandó. Gömbön a négyszög belső szögeinek összege 2·180º-tól 4·180º-ig, félgömbön 2·180º-tól 0º-ig változhat.
(Könnyű tovább általánosítani: *n*-szögnél síkon az *n*-szög belső szögeinek összege
(n – 2)·180º-tól (n – 2)·180º-ig változhat, vagyis állandó; gömbön az *n*-szög belső szögeinek összege (n – 2)·180º-tól n·180º-ig, félgömbön (n – 2)·180º-tól 0º-ig változhat.)

4. Melyik geometria használható a három közül?	

Megoldás:
Tekintsünk egy felületet. Jelöljük ki három pontját, és a pontokat kössük össze olyan vonalakkal, amelyeket egyenesnek nevezünk. A kapott háromszögnek mérjük meg belső szögeit, és adjuk össze a három szöget. Ha a szögösszeg éppen 180º, akkor síkgeometriára van szükségünk. Ha 180º-nál több, akkor gömbi geometriát kell használnunk. Ha pedig 180º-nál kevesebb, akkor Bolyait, Lobacsevszkijt vagy Gausst kell megkérdeznünk. Természetesen előfordulhat, hogy egyik fizikai jelenséget az egyik geometria, másikat viszont másik geometria írja le helyesen.

Ezen a három geometrián kívül még nagyon sokféle, más geometria is felépíthető.