

Módszertani megjegyzés: Ez a modul elsősorban a térszemlélet fejlesztését szolgálja, feladataiban és módszereiben eltér a szokványos feldolgozástól. A geometria felépítését a bennünket körülvevő tárgyak modelljein, a testeken kezdjük: megismerjük tulajdonságaikat és ebből kiindulva jutunk el absztrakcióval a síkidomok tanulmányozásáig. Ezért a geometria kompetencia alapú feldolgozása a testek vizsgálatával kezdődik, amely nagy szolgálatot tehet a mindennapok feladatainak megoldásában a legtöbb munkaterületen. Ebben a modulban átismétljük a korábban tanult ismereteket a testekről, testhálókkal és testek megépítésével foglalkozunk. Segédeszközként nagyon hasznos a Polydron testépítő készlet: csoportmunkában dolgozhatunk vele, és a tanulók saját tapasztalatokat szereznek a testek hálójával és felépítésével kapcsolatban. A feladatokból ajánlott a tanulócsoporthoz szintjétől függően válogatni.

Világunk és mi magunk is **térben** létezünk. Tárgyak vesznek körül bennünket. Ezeknek a tárgyaknak alakjuk van. Több tárgynak hasonló vagy egyforma alakja van. Ha minden egyéb szemponttól elvonatkoztatunk és csak a tárgyak alakját tekintjük, **testekről** beszélünk.

A testeket **felületek** határolják.

Általános iskolában már megismerkedtünk a kockával, téglatesttel, hasábbal, hengerrel, gúlával, kúppal és gömbbel.

Ismételjük át, és egészítsük ki ismereteinket!

I. A testek ábrázolása, jellemzése

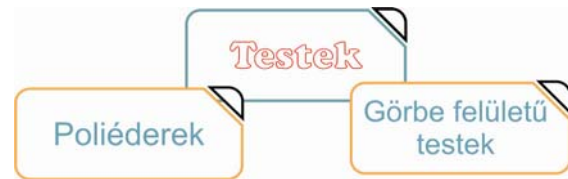
Módszertani megjegyzés: A következő, elméleti jellegű rendszerező részeket érdemes frontálisan, bemutató segítségével átvenni.

A testek csoportosítása

A testeket különböző szempontok szerint csoportosíthatjuk.

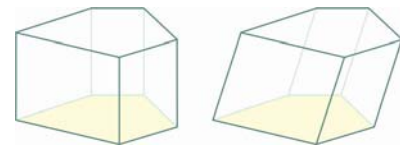
Felületüket tekintve lehetnek:

görbe felületűek és síklapokkal határolt testek,
idegen szóval: poliéderek.

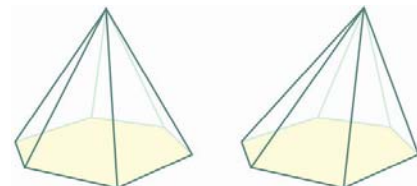


- **Poliéderek:** véges sok sokszög által határolt testek

- hasábok (egyenes és ferde),



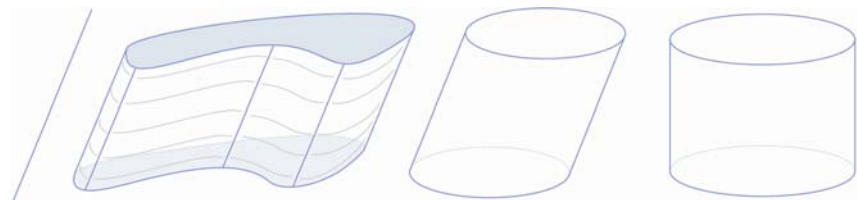
- gúlának (egyenes, ferde, csonka),



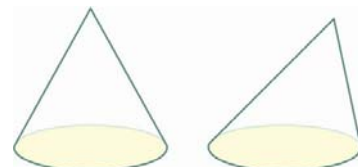
- egyebek

- **Görbe felületű testek:** a határoló felületek között van görbe felület is

- hengerek (egyenes és ferde),

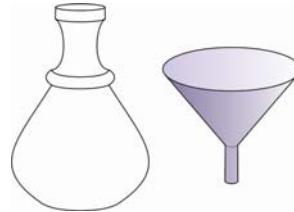


- kúpok (egyenes, ferde, csonka),





- gömbök,



- egyebek.

A testeket csoportosíthatjuk aszerint, hogy **konvexek**, vagy **konkávak**.

Konvex testeknek nevezzük azokat a testeket, amelyeknek bármely két pontját összekötő szakaszt a test teljes egészében tartalmazza. A **konkáv testek** a nem konvexek, azaz a testnek van legalább két olyan pontja, amelyeket összekötő szakaszt a test nem tartalmazza teljes egészében.

A poliéderek felületét határoló lapok a test éleiben érintkeznek.

Az **élek** csúcsokban futnak össze. Egy csúcsból több él is kiindulhat.

Ha a test felületét az élek (nem feltétlenül minden él) mentén szétvágjuk, és a síkban kiterítjük, a test hálóját kapjuk.

Ha a poliéder **hálóját** kivágjuk, és az éleknek megfelelő szakaszok mentén megfelelően összehajtogatjuk, megkapjuk belőle a testet határoló felületet.

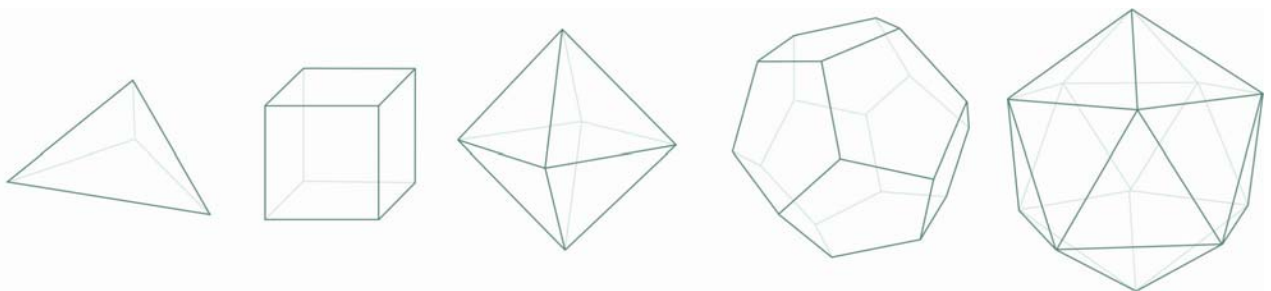
Módszertani megjegyzés: A hálók kirakása, rajzolása, átgondolása a térszemlélet fejlesztésének fontos momentuma, ezért az anyagban kiemelt súllyal szerepel. Érdeemes 2 órát is rászánni.

A testeket **élvázukkal** is szemléltethetjük. Ebben az esetben jobban látható, hogy milyen síkidomok határolják a testet, hány éle van a testnek, és hány él fut össze az egyes csúcsokban. Az élváz alapján könnyebb megszerkeszteni a testek hálóját is.

Módszertani megjegyzés: A testek egy csoportja lehet szabályos. A szabályos testekkel kapcsolatban indíthatunk projekteket, amelyek célja a kutatás: melyek a szabályos testek, mennyi van, milyenek, esetleg készíthetünk papírmódelleket. Amennyiben rendelkezésünkre áll Polydron készlet, ajánlott abból összeépíteni a szabályos testeket.

Szabályos testeknek nevezzük azokat a konvex poliédereket, amelyeknek élei, élszögei és lapszögei is egyenlők. Bizonyítható (már Eukleidész is megtette Elemek című könyvében, kb. Kr.e. 300-ban), hogy összesen csak öt szabályos test van: szabályos tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder. Nevüket oldallapjaik számáról kapták. A szabályos testeket platonikus testeknek is nevezzük.

A szabályos testek adatai



	Lapok	Csúcsok száma	Élek száma	Határoló lap éleinek száma
Szabályos tetraéder	4	4	6	3
Hexaéder (Kocka)	6	8	12	4
Oktaéder	8	6	12	3
Dodekaéder	12	20	30	5
Ikozaéder	20	12	30	3

A testek térfogata, felszíne (ismétlés)

Módszertani megjegyzés: Általános iskolában a térfogatot és a felszínt tanulták a gyerekek (kivéve a gömböt). Ez az ismétlés főleg a rendszerezést szolgálja, majd a 10. évfolyamon foglalkozunk a térfogat- és felszínszámítással kapcsolatos feladatokkal. Egy későbbi, 9. évfolyamos modulban, a geometriai számítások keretein belül találunk néhány alapfeladatot, így itt nem szükséges a számításokkal foglalkozni. A bemutató az áttekintésben is segítségünkre van.

Testek térfogata: annak a térrésznek a mértéke, amelyet a test felülete határol.

Testek felszíne: a testet határoló felület területe. Síklapokkal határolt testek esetén a határoló lapok területeinek összege, görbe felületekkel határolt testek esetében a felszín fogalma bonyolultabb (határérték-számítás segítségével történik).

A leggyakrabban előforduló testek térfogatát a következő képletek segítségével számítjuk ki:

- A kocka térfogata: $V = a^3$, felszíne $A = 6a^2$ (a a kocka éle).
- A téglatest térfogata $V = abc$, felszíne $A = 2(ab + bc + ac)$ (a , b és c a téglatest élei).
- A gömb térfogata $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, felszíne $A = 4r^2\pi$ (r a gömb sugara).
- A henger térfogata $V = r^2\pi \cdot M$, ahol r az alapkör sugara, M a testmagasság,
- Az egyenes körhenger felszíne $A = 2r\pi(r + M)$.
- A hasáb térfogata: $V = T \cdot M$ (T : alapterület, M : testmagasság),
felszíne: $A = 2 \cdot T + P$ (T : alapterület, P : palást területe).
- A gúla térfogata $V = \frac{T \cdot M}{3}$, a kúpé $V = \frac{r^2\pi \cdot M}{3}$.

Feladatok

 1. Poliéderek-e és konvexek-e a következő testek:

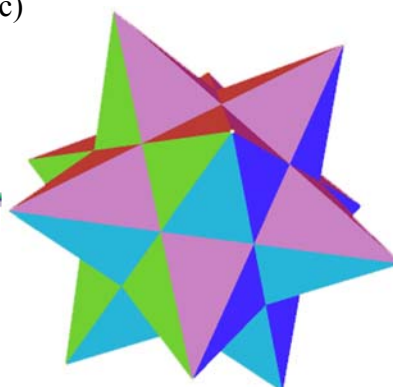
a)




b)




c)




Megoldás: mind poliéder, mert csak sokszögek határolják; a) és b) konvex, c) nem.

-  2. Rajzold le a következő testeket kiterítve (vagyis a testek hálóját): négyzet alapú egyenes gúla, henger, kúp, négyzetes oszlop.


Módszertani megjegyzés: Rendezzünk versenyt! Rakjunk ki hat egybevágó négyzetből minél több kocka-hálót! Rajzolják le egy lapra, és a végén egyeztessük a lehetséges hálókat. A lap megfordításával keletkező háló nem számít másiknak. 11-féle lehetőség van.

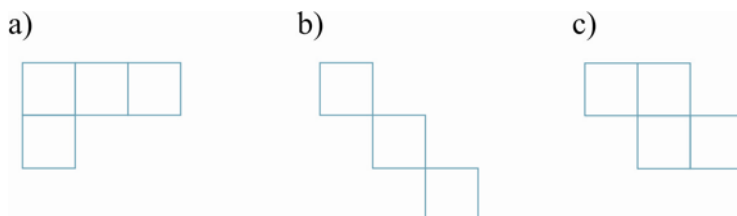
-  3. Egy téglatest egy csúcsba összefutó éleinek hossza 2 cm, 3 cm és 4 cm. Rajzold meg a hálóját a füzetedben!

-  4. Rajzold le a következő testeket a füzetedbe, és színezd pirossal az alapéleket, zölddel az oldaléleket! Rajzold be a testmagasságokat is!

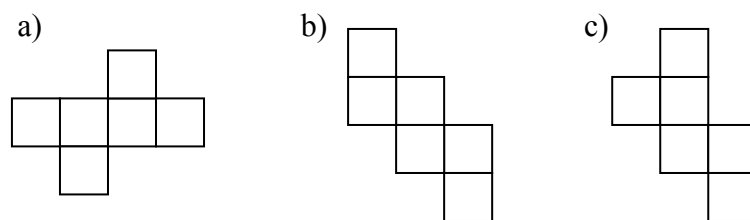
a) négyzet alapú egyenes gúla;


b) négyzetes oszlop.

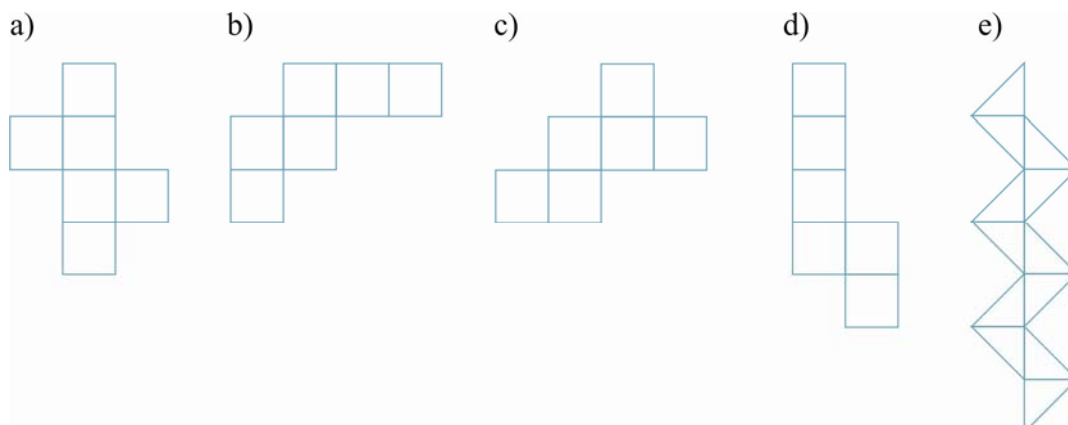
-  5. Másold át a füzetedbe, és egészítsd ki az ábrákat úgy, hogy egy kocka hálóját kapjuk!



Megoldás: például



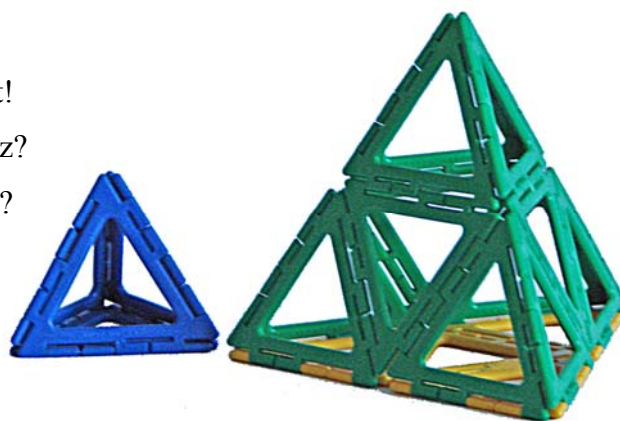
 6. Lehet-e kockát hajtogatni az alábbi síkidomokból? Másold át papírra, vágd ki és próbálkozz!



Megoldás: igen: a), c), e); nem: b), d).

 7. Polydrónból építsd meg az ábrán látható testeket!

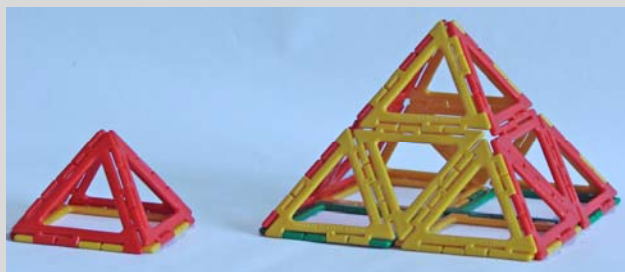
- Hányszor annyi építőelem kell a nagyobbhoz?
- Hányszor akkora az élek hosszának összege?
- Hányszor fér bele a kicsi a nagy belsejébe?



Megoldás: a) 4, illetve 16, vagyis 4-szer annyi;

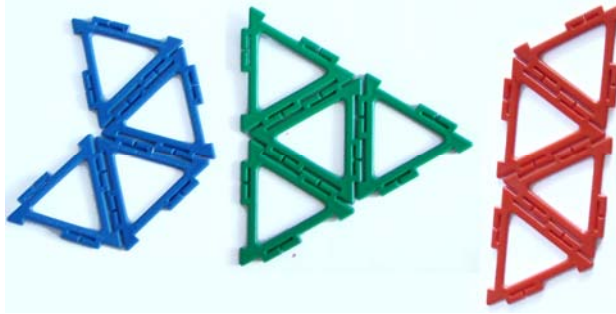
b) kétszer; c) nyolcszor.

Módszertani megjegyzés: A fenti feladatot elvégezhetjük kockával és négyzet alapú, egyenes gúlával is.



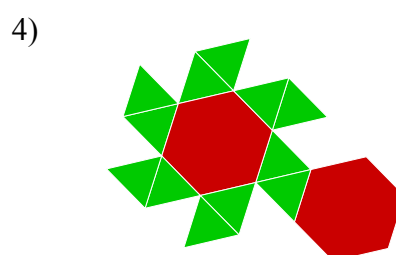
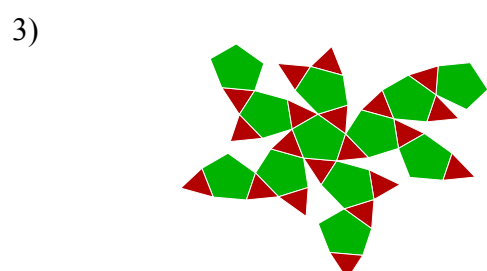
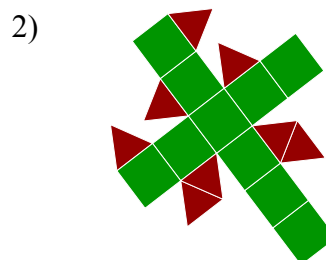
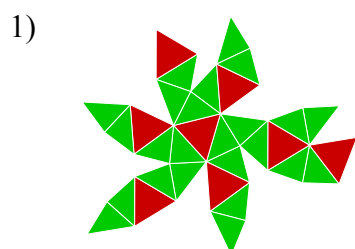
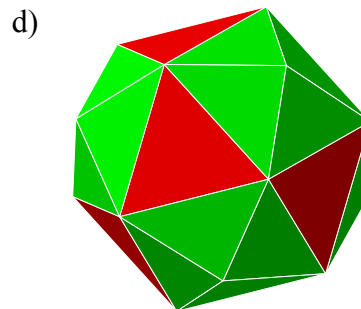
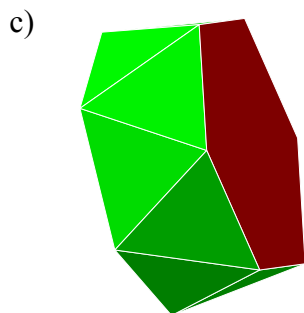
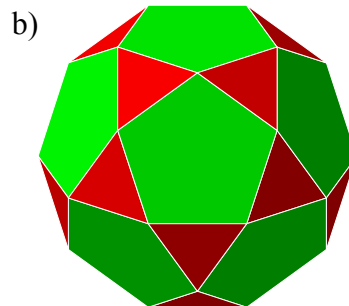
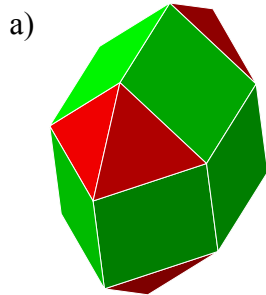
8. Állítsd össze Polydronból vagy papírból a négy darab szabályos háromszögből álló összes lehetséges síkidomot! Hajtogatással ellenőrizz! Melyik lehet közülük egy szabályos tetraéder hálója?

Megoldás:



A középsőből lehet tetraédert hajtogatni..

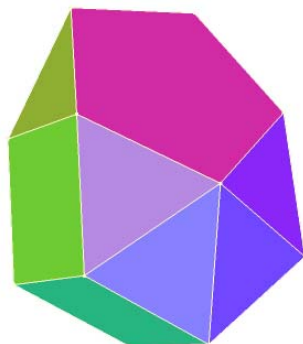
9. Társítsd a testeket a nekik megfelelő testhálóhoz:



Megoldás: a) – 2), b) – 3), c) – 4), d) – 1).

 **10.** Párosítsd a testeket a „szétszedett” (és átszínezett) párjukkal!

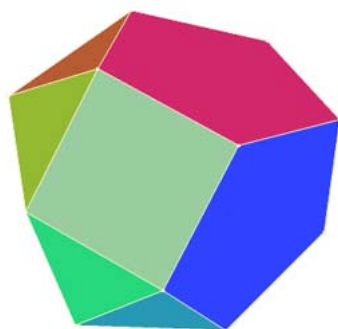
a)



1)



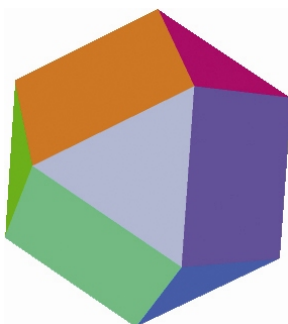
b)



2)




c)



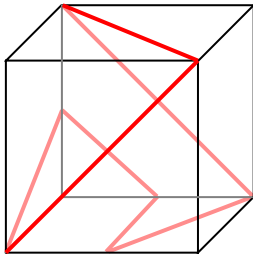
3)



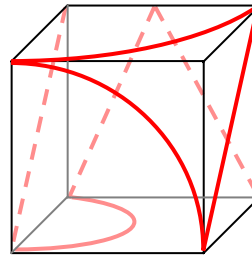
Megoldás: a) – 1), b) – 3), c) – 2).

-  **11.** Készítsd el a kocka hálóját, és rajzold bele, hogy a test felszínére rajzolt vonal hogyan jelenik meg a hálón!

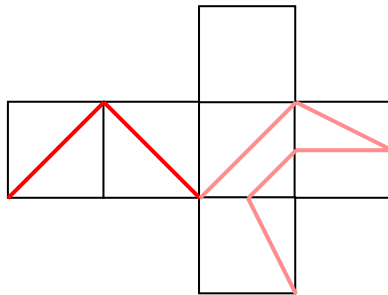
a)



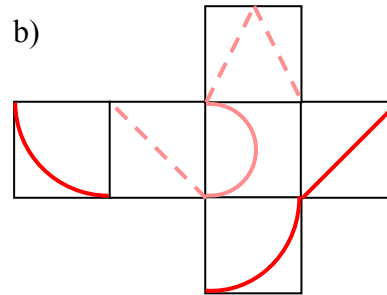
b)




Megoldás: a)



b)




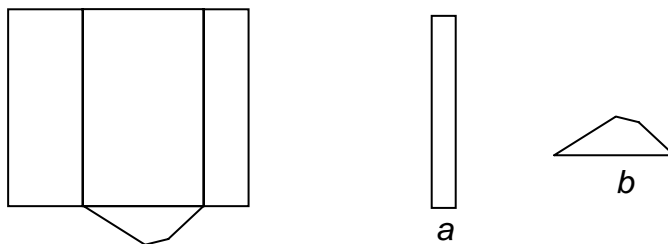
Módszertani megjegyzés: A megoldás során segítséget jelent, ha a kockán megnevezzük a csúcsokat, és azokat azonosítjuk a hálón.

-  **12.** Építsd meg Polydron készlettel a következő testeket, és becsüld meg a térfogatukat és felszínüket: téglatest, négyzet alapú gúla, szabályos tetraéder. A szükséges adatokat (például testmagasság) méréssel határozd meg!

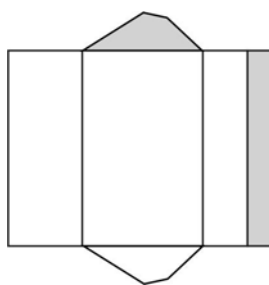
II. Feladatgyűjtemény


Módszertani megjegyzés: Az alábbi feladatokból több szerepelt kompetencia felméréseken, ezért érdemes rászánni az időt és átvenni a feladatokat.

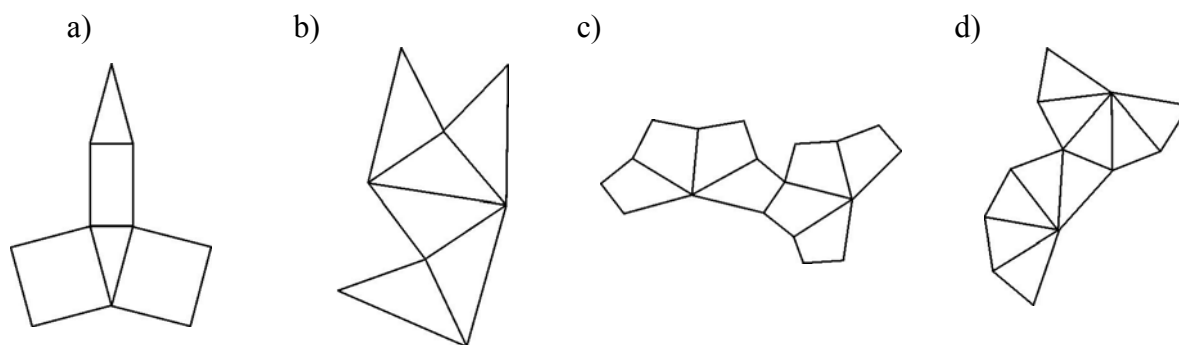
-  **13.** Hová rajzolhatjuk az (a) és (b) határoló lapokat, hogy a hálóból egyenes hasábot lehessen készíteni?



Egy lehetséges megoldás:



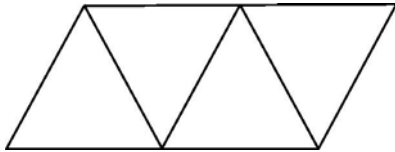
-  **14.** Hány éle van annak a testnek, amelynek hálója az alábbi ábrán látható!



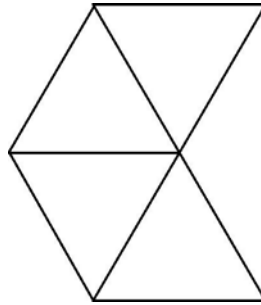
Megoldás: a) 9; b) 9; c) 16; d) 15.

 15. Melyik lehet, és melyik nem lehet egy test hálója?

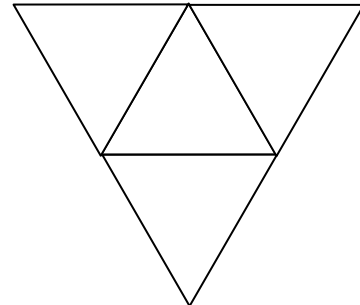
a)



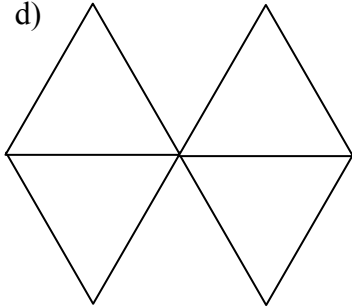
b)




c)

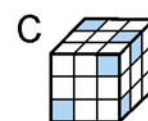
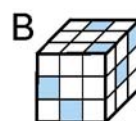
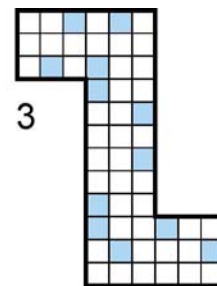
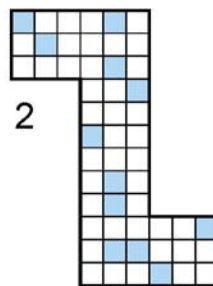
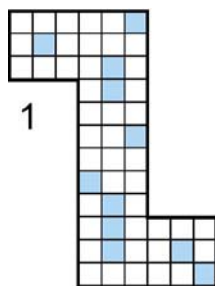


d)



Megoldás: lehet: a), c); nem lehet: b). A d) nem is háló (nem „sokszög”).

 16. Az ábrán három kocka (A, B, C) és a hálók láthatók (1, 2, 3).



a) Melyik háló melyik kockához tartozhat?

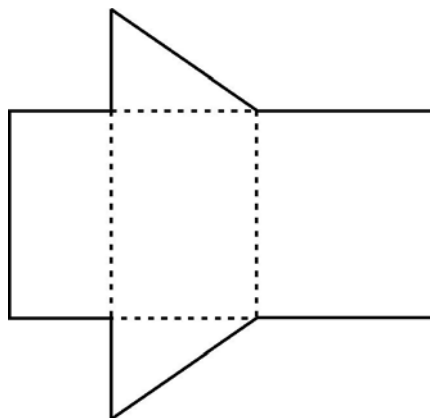
b) A C jelű kocka felszínének hány százaléka van befestve?

Megoldás: a) A – 2, B – 1, C – 3; b) 22%.

17. Melyik test hálója ez? Rajzold le másféleképpen is a test hálóját!

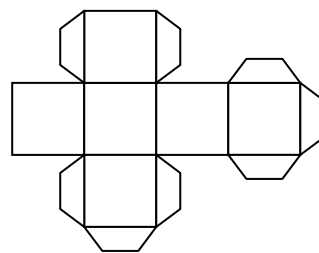
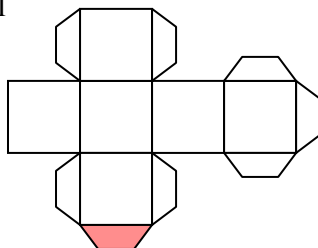
- a) Téglalap alapú gúla.
- b) Téglalap alapú hasáb.
- c) Derékszögű háromszög alapú hasáb.
- d) Derékszögű háromszög alapú gúla.

Megoldás: c)

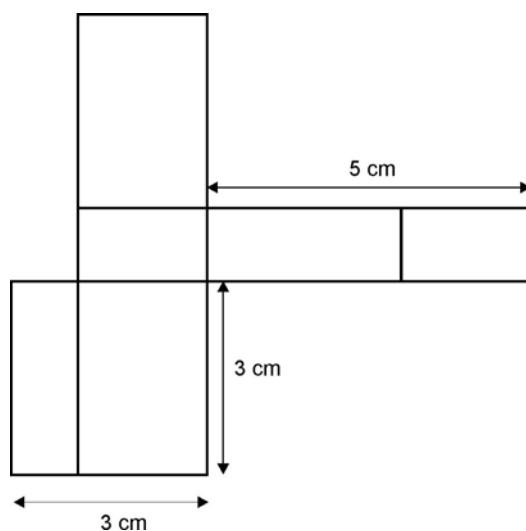


18. A következő szabásrajzon az egyik ragasztó fülecske fölösleges. Melyik?

Megoldás: több is van, például

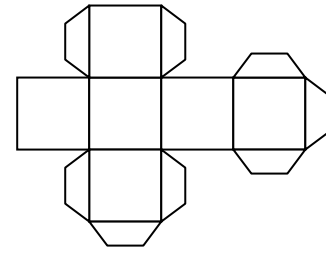


19. Az alábbi rajz egy téglatest hálóját ábrázolja. Mekkora a téglatest élei?

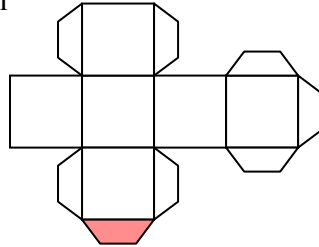


Megoldás: 2 cm, 1 cm, 3 cm.

19. A következő szabásrajzon az egyik ragasztó fülecske fölösleges. Melyik?



Megoldás: több is van, például

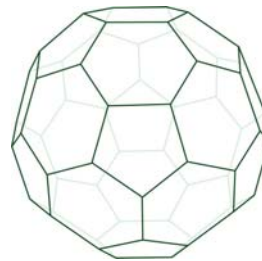


20. Milyen síkidomok határolják a következő testeket? Add meg azt is, hogy mennyi számuk!

a)



b)

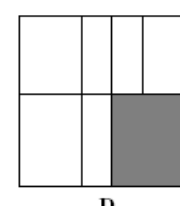
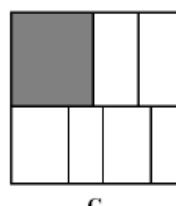
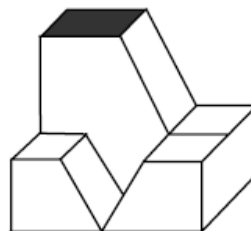
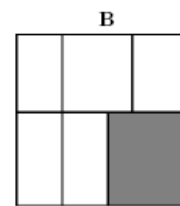
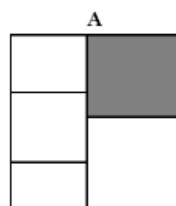


Megoldás:


a) 8 háromszög, 4 négyzet, 4 ötszög; b) 20 szabályos hatszög, 12 szabályos ötszög.

21. Az alábbi ábrán egy térbeli alakzat és annak lehetséges felülnézeti képei láthatók.

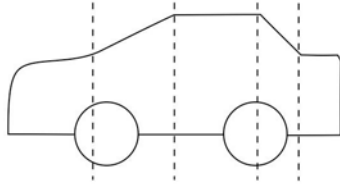
Válaszd ki a tényleges felülnézeti képet!



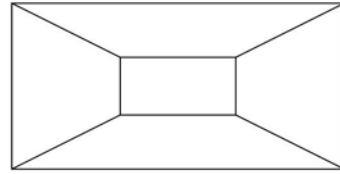
Megoldás: D.

-  22. Az alábbi ábra bal oldalán négy tárgy képe található, a jobb oldalán pedig felülnézeti képeik láthatók. Párosítsd össze a tárgyakat felülnézeti képeikkel! Írd a megfelelő számot a megfelelő betű mellé!

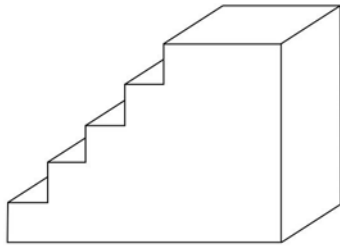
A



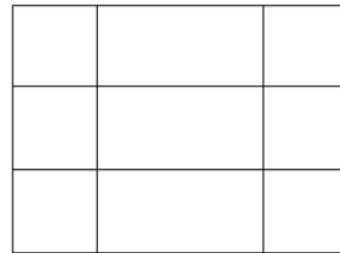
1



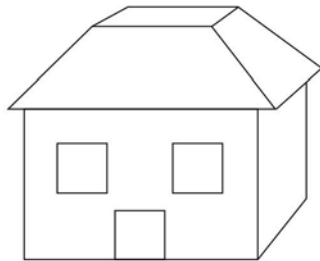
B



2



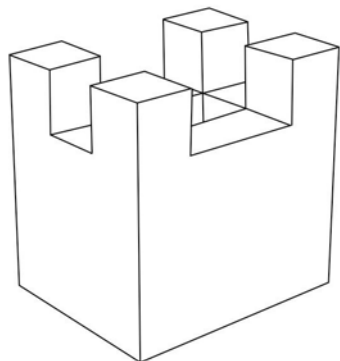
C



3




D

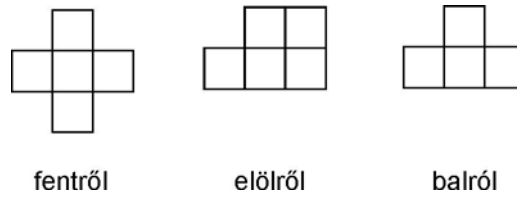


4



Megoldás: , A – 3, B – 4, C – 1, D – 2.


-  **23.** Miklós építőkockákból egy alakzatot rakott össze az asztalon, majd lerajzolta, hogy milyenek látja ezt az alakzatot fentről, előlről és balról nézve.



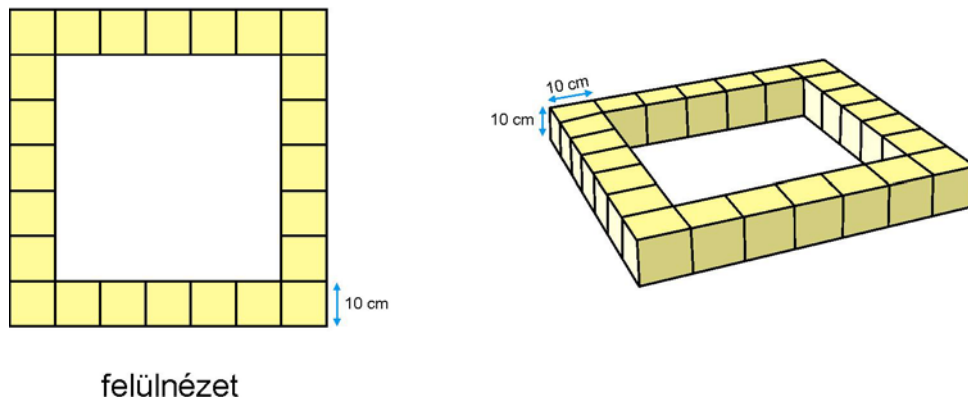
Öccse kiegészítette ezt az alakzatot a lehető legkisebb téglatestté úgy, hogy az alakzathoz további építőkockákat rakott. Hány építőkockából áll ez a téglatest?

- a) 12 építőkockából, b) 14 építőkockából,
c) 18 építőkockából, d) 27 építőkockából.

Megoldás: c)

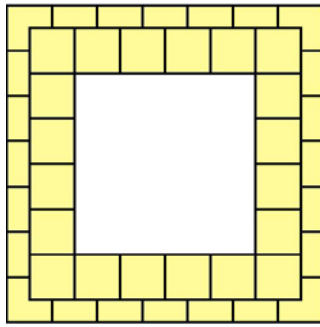
-  **24.** Technikaórán azt a feladatot kapták a diákok, hogy készítsenek piramist $10 \times 10 \times 10$ cm-es kockák összeragasztásával.

1. ábra

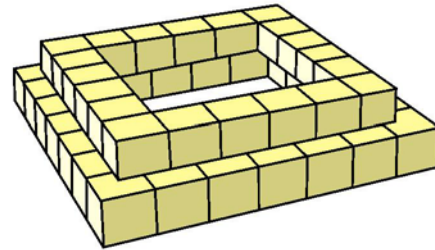


A piramis alapja 24 kockából áll, ahogyan ennek a felülnézeti rajza az 1. ábrán látható.

2. ábra



felülnézet



A 2. ábra az első és a második szint egymáshoz viszonyított elhelyezkedését mutatja. Minden szint az alatta lévő szintből egy 5 cm széles keretet hagy lefedetlenül.

a) Hány kockára van szükség az egyes szintek elkészítéséhez? Egészítsd ki az alábbi táblázatot!


1. szint	2. szint	3. szint	4. szint	5. szint	6. szint	7. szint
24 kocka						

b) A hetedik szintet figyelmen kívül hagyva milyen szabály szerint változik a szomszédos szintekhez szükséges kockák száma?

Megoldás: a)

1. szint	2. szint	3. szint	4. szint	5. szint	6. szint	7. szint
24 kocka	20	16	12	8	4	1

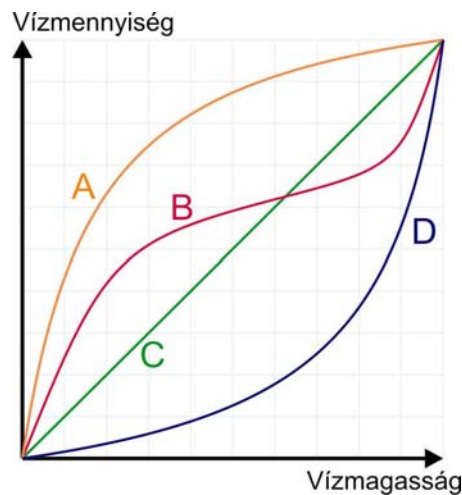
b) 4-gyel csökken.

 25. Az ábrán négy üvegedény látható.




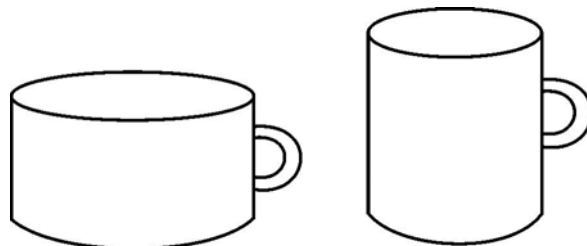
(Az 1-es pohár hengernek, a 2-es öblös részének alsó része félgömbnek tekinthető. A 3-as jelű kancsó szabálytalan alakú, a 4-es pohár felső része pedig kúp formájú.)

Határozd meg, hogy az egyes üvegedényekben melyik grafikon szerint változik a víz magassága az edénybe öntött víz mennyiségének függvényében!



Megoldás: 1 – C, 2 – A, 3 – B, 4 – D.

 26. Ica henger alakú bögréje kétszer akkora átmérőjű, de fele olyan magas, mint Annamari bögréje. Melyikbe fér több tea? Válaszodat matematikai érvekkel támaszd alá!



Megoldás:

A henger térfogata $r^2 \pi \cdot m$. Ha r duplázódik, a térfogat négyszeresére változik, míg a magasság felezésével felére csökken. Így az alacsonyabb bögrébe kétszer annyi fér.