A következő órákon olyan egyenletekkel foglalkozunk, amelyek nevezőjében ismeretlen található. **Ha a tört nevezőjében ismeretlen van, akkor „kikötést” kell tennünk: az ismeretlen értéke nem lehet olyan szám, amelyre a nevező 0.**

Módszertani megjegyzés:

A kikötés az osztás műveletéhez kötődik. A jobb megértés miatt célszerű egy-két példát mutatni arra, hogy milyen kikötést kell tennünk törtes kifejezések, például $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{1-2x}$, $1+\frac{2x}{3x-6}$ esetén. Ennek gyakorlására és a csoportalakításra szolgál a 12.1 kártyakészlet.

Készítsünk annyi kártyát, ahány tanuló van (a kártyák kiválasztásakor figyeljünk arra, hogy azok tegyék lehetővé a csoportbeosztást). Minden tanuló húzzon egy kártyát a készletből. A kártyákon olyan kifejezések szerepelnek, amelyeknél a nevezőben ismeretlent találunk. A feladat annak megkeresése, hogy milyen értéket nem vehet fel az ismeretlen, azaz „kikötés” keresése (ezzel tudatosítjuk, hogy a nevező helyettesítési értéke nem lehet nulla. Azok kerülnek egy csoportba, akik azonos eredményt kapnak. A csoportalakítás után az egyes csoportok képviselői felírnak egy-egy kifejezést a táblára, elmagyarázzák a megoldást, a többiek pedig a füzetükbe írják a tábláról.

$\frac{2x}{x-4}$	$\frac{3}{8-2x}$	$\frac{12x}{3x-12}$	$1-\frac{5}{4-x}$
$\frac{-3}{x+3}$	$2+\frac{4x}{6+2x}$	$\frac{x}{3x+9}$	$\frac{2x}{9x+27}$
$\frac{-3+x}{2x-5}$	$\frac{2x}{5-2x}$	$2x+\frac{3}{4x-10}$	$3-\frac{3}{15-6x}$
$\frac{4+x}{3x-2}$	$1+\frac{5}{6x-4}$	$4x+\frac{3x}{4-6x}$	$\frac{2x}{9x-6}$
$\frac{5x}{5x+2}$	$21+\frac{x}{4+10x}$	$\frac{6x}{15x+6}$	$-3-\frac{4-x}{2+5x}$
$2x+\frac{14x}{20-25x}$	$\frac{4x}{16-20x}$	$\frac{3x}{4-5x}$	$1+\frac{2}{5x-4}$
$\frac{40x}{24+3x}$	$\frac{40}{5x+40}$	$\frac{x-8}{x+8}$	$2x+\frac{2x-16}{2x+16}$
$\frac{40x}{24-3x}$	$x-\frac{40}{5x-40}$	$\frac{x+8}{x-8}$	$2x+\frac{2x}{2x-16}$
$\frac{3+5x}{40+16x}-\frac{5}{2}x$	$2x-\frac{35}{10x+25}$	$\frac{2x}{10+4x}$	$\frac{-3+x}{2x+5}$

Az 1. és 2. mintapéldákat frontálisan dolgozzuk fel, tanári magyarázat keretében.

Mintapélda$_1$

Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{5}{x-3}=\frac{9-x}{x-3}+2$.

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza az egész számok halmaza. Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 3-tól különböző valós számok halmaza:

$x-3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 3$. Ezt a kikötést a megoldás végén figyelembe kell venni.

$5=9-x+2(x-3)$. Szorozzunk a közös nevezővel, $(x-3)-$mal:

$5=9-x+2x-6$. Összevonás és rendezés után:

$5=3+x$,

$2=x$.

Ellenőrzés:

$2\neq 3$, megfelel a kikötésnek, mivel egész szám.

A bal oldal értéke: $\frac{5}{2-3}=-5$, a jobb oldal értéke: $\frac{9-2}{2-3}+2=-5$. A kettő megegyezik, ezért $x=2$ valóban megoldás.

Tehát az egyenlet megoldása: $x=2$.

Minden egyenlethez hozzátartozik egy **alaphalmaz**, ebben a halmazban keressük a megoldásokat. Ha a feladat szövege nem adja meg előre az alaphalmazt, akkor az általunk ismert legbővebb számhalmazt tekintjük annak.

A kikötésekkel szűkített alaphalmazt az egyenlet **értelmezési tartományának** nevezzük.

A mintapéldában az alaphalmaz az egész számok halmaza. A kikötés ezt leszűkíti: az értelmezési tartományból kiveszi a 3-at, hisz ekkor a nevező nullává válna.

Az egyenletek megoldásakor tehát az értelmezési tartománynak azokat a számait (elemeit) keressük meg, amelyek kielégítik az egyenletet. Ezek a számok az **egyenlet megoldásai,** vagy másként az **egyenlet gyökei.** Ezek a számok alkotják az **egyenlet megoldáshalmazát**.

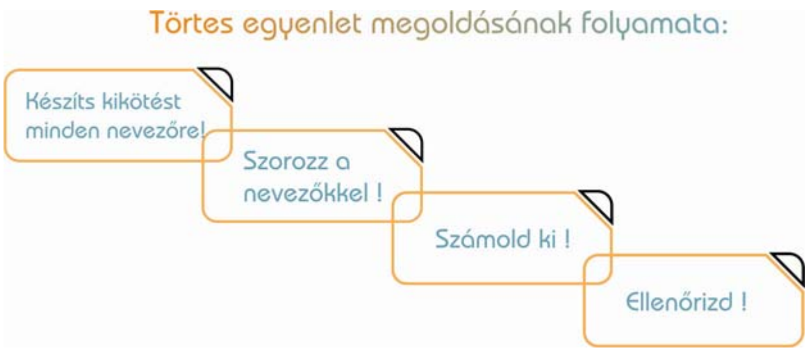
Amennyiben nincs olyan szám, amelyik igazzá teszi az egyenletet, akkor az egyenletnek nincsen megoldása, azaz a megoldáshalmaz az üres halmaz.

A törtes egyenletek megoldása során is úgy kell átalakítanunk az egyenletet, hogy egyre egyszerűbb egyenlethez jussunk, és végül az egyenlet egyik oldalán csak az ismeretlen álljon, a másik oldalon pedig egy szám. Itt is érvényes a mérlegelv.

Amire különösen figyelni kell:

– Az **ismeretlent tartalmazó kifejezéseket is** hozzáadhatjuk az egyenlet mindkét oldalához, illetve kivonhatjuk belőle.

– Az egyenlet mindkét oldalát szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal, az ismeretlent tartalmazó, **nem nulla** kifejezéssel. Mielőtt szorzunk vagy osztunk az ismeretlent tartalmazó kifejezéssel, meg kell vizsgálnunk, hogy mely értékekre lehet a kifejezés nulla. Ezeket az értékeket ki kell zárni a lehetséges megoldások közül. Ha erre nem figyelünk, hamis gyököt kaphatunk.



Mintapélda$_2$

Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{x-2}{x-4} = \frac{2}{x-4}$.

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az egyenlet *értelmezési tartománya* a 4-től különböző egész számok halmaza.

Szorozzuk be az egyenletet a közös nevezővel, $(x-4)-$ gyel!

$$x-2=2$$
$$x=4$$

A 4 nem eleme az egyenlet értelmezési tartományának, így az egyenletnek nincs megoldása.

Módszertani megjegyzés: A következő feladat a feladatmegoldás menetének megértését segíti. A csoportok válasszanak szóvivőt a tagok közül. A következő feladatot *feladatelemzéssel* oldjuk meg: a tanár eldöntendő kérdéseket tesz fel. Előtte egyezzen meg az osztály, hogy milyen jellel mutatják a szóvivők az igent, és milyennel a nem választ. A csoportok megbeszélik a választ, és a tanár jelére a szóvivők egyszerre jelzik a csoport válaszát. A munkafüzet nem használható, hiszen a megoldás benne van.

Mintapélda$_3$

x egy háromszög oldalát jelöli, amire érvényes a következő egyenlőség: $\frac{12}{x} = \frac{4}{x-4}$.

Mekkora a háromszögnek ez az oldala?

Módszertani megjegyzés:

Lépésenként haladva a javasolt igen – nem kérdések:

- Kell-e kikötés a feladatban?
- Egy kikötés kell.
- Az x lehet negatív szám is.
- Lehet, hogy x értéke a végén 4-nek adódik.
- x olyan pozitív szám, ami nem lehet 4. (Ezt írjuk is fel a táblára.)
- Elég x-szel beszorozni az egyenlet mindkét oldalát. (Megbeszéljük, hogy $(x-4)$-gyel is szorozni kell – a csoportok elvégzik a szorzást.)
- A bal oldali tört számlálója 12 x-szel, a jobb oldali tört számlálója, 4 pedig $(x-4)$-gyel szorzódik.
- Nem oszthatunk 4-gyel. (A csoportok oldják meg az egyszerűbb egyenletet.)
- A megoldás 6. (Ez a válasz addig még nem igaz, amíg nem ellenőrizték azt, hogy tényleg kielégíti-e az egyenletet. Most még a 6 csak lehetséges megoldás).
- Elég csak az egyik oldalra visszahelyettesíteni a 6-ot, x helyére. (Nyilván mindkét oldalon meg kell tenni.) A végére kialakul, hogy az $x = 6$ az egyenlet megoldása.
- Az ellenőrzés a megoldás utolsó lépése. (Ez sem igaz, mert választ is le kell írni.)

Megoldás:

Mivel x távolságot jelöl, ezért csak nemnegatív szám lehet. A tört nevezője nem lehet nulla (egyik sem), ezért $x \neq 0$ és $x \neq 4$.

$\frac{12}{x} = \frac{4}{x-4} \quad / \cdot x \cdot (x-4)$. Hozzuk a két törtet közös nevezőre, és szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát a két tört közös nevezőjével:

$12(x-4) = 4x,$

$12x - 48 = 4x \quad / \; -4x + 48,$

$8x = 4,$

$x = 6.$

A 6 pozitív szám, és teljesül az $x \neq 0$ és $x \neq 4$ kikötés. Visszahelyettesítéssel ellenőrizzük az eredményt: $\frac{12}{6} = 2$; $\frac{4}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$, vagyis a 6 valóban megoldás.

Tehát a háromszög oldala: $x = 6$ egység.

Feladatok

1. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $3 - \frac{x+1}{2} = x$; b) $2x - \frac{2x-1}{4} = 2$; c) $3 + \frac{5x-7}{5} = 5x$;

d) $10x + \frac{5-2x}{2} = -3$.

Megoldás: a) $\frac{5}{3}$; b) $1\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $-\frac{11}{18}$.

2. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\frac{1}{2-x} = 3$; b) $\frac{3}{2x+3} = -5$; c) $\frac{2x}{x-2} = 0$; d) $\frac{3+x}{3-x} = 0$;

e) $\frac{2+x}{2x} = \frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{x+1} = -\frac{2}{3}$; g) $\frac{9}{x} = \frac{3}{4}$; h) $-\frac{7}{5} = \frac{7-7x}{5+5x}$.

Megoldás: a) $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; b) nincs megoldás: $-1\frac{4}{5} = -\frac{9}{5}$ negatív szám, c) 0; d) nincs megoldás: $x = -3$ negatív szám; e) nincs megoldás: $4 \neq 0$; f)nincs megoldás: $-2\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, g) 12; h) nincs megoldás: $-35 \neq 35$.

3. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\frac{1-9x}{3x+1}=4$; b) $0=\frac{3+2x}{5x-1}$; c) $\frac{4x+6}{5x-10}=8$; d) $8=\frac{6x+2}{3-x}$.

Megoldás: a) $-\frac{1}{7}$; b) $-1\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$; c) $2\frac{7}{18}=\frac{43}{18}$; d) $1\frac{4}{7}=\frac{11}{7}$.

Mintapélda$_4$

Oldd meg a következő egyenletet: $\frac{2}{x+4}=\frac{-3}{5-x}$.

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza a valós számok halmaza. Mivel a törtek nevezője nem lehet 0, két kikötést kell tennünk:

$x+4\neq 0 \Rightarrow x\neq -4$ és $5-x\neq 0 \Rightarrow x\neq 5$.

Így az értelmezési tartomány: a valós számok, elhagyva közülük a –4 –et és az 5 -öt.

$\frac{2}{x+4}=\frac{-3}{5-x} \quad / \cdot(x+4)(5-x)$.

Határozzuk meg a közös nevezőt, majd szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel.

$2\cdot(5-x)=-3\cdot(x+4)$,

Zárójelfelbontás, rendezés után:

$10-2x=-3x-12 \quad / +2x+12$,

$22=-x \quad / \cdot(-1)$,

$-22=x$.

Kikötések ellenőrzése: $-22\neq -4$ és $-22\neq 5$.

Visszahelyettesítés: $\frac{2}{-22+4}=\frac{2}{-18}=-\frac{1}{9}$ és $\frac{-3}{5-(-22)}=\frac{-3}{27}=-\frac{1}{9}$, vagyis -22 kielégíti az egyenletet.

Tehát az egyenlet megoldása –22.

Módszertani megjegyzés: Tudatosítsuk növendékeinkben, hogy az ellenőrzésnek több lépése is van: az alaphalmaz ellenőrzése, a kikötések ellenőrzése és a visszahelyettesítés.

4. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$; b) $\frac{1}{4+2x}=\frac{4}{x}$; c) $\frac{3}{x+1}=\frac{9}{3x-3}$;

d) $\frac{12}{18+6x}=\frac{8}{12-4x}$; e) $\frac{4}{2x-6}=\frac{5}{3x-2}$; f) $\frac{-3}{3x+3}=\frac{5}{5x-4}$.

Megoldás: a) 3; b) $-\frac{16}{7}=-2\frac{2}{7}$, c) nincs megoldás; d) 0; e) -11; f) $-\frac{1}{10}$.

5. Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán: $\frac{2}{x}+\frac{7}{2x}=11$.

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya: $x\neq 0$, racionális szám. Hozzuk közös nevezőre az egyenlet bal oldalán álló törteket:

$\frac{4+7}{2x}=11$, ebből $x=\frac{1}{2}$ (ellenőrzés után).

6. Oldd meg az egyenletet a természetes számok halmazán: $3=\frac{3x-5}{x-3}-\frac{5x+6}{3-x}$.

Megoldás:

Az egyenletet a természetes számok halmazán kell megoldani, ezért az eredmény nem lehet negatív szám.

Az egyenletben szereplő törtek nevezője +3 értékre nulla, ezért $x\neq 3$.

Hozzuk a törteket közös nevezőre! Látható, hogy $x-3=-1\cdot(3-x)$.

Legyen a közös nevező: $x-3$, ekkor az egyenlet. $3=\frac{3x-5+5x+6}{x-3}$.

Ebből: $x=-2$. Ez nem megoldás, mert bár kielégíti a felírt egyenletet, de a kapott szám nem természetes szám, tehát nem tartozik bele az eredeti feladat értelmezési tartományába.

7. Oldd meg az egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{2x-3}{x-4}+3=\frac{3x-1}{4-x}$.

Megoldás: 2.

8. Oldd meg az egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{22}{2x-8}=\frac{3x-1}{x-4}+2$.

Megoldás: A 4 nem eleme az egyenlet értelmezési tartományának, így az egyenletnek nincs megoldása.

9. Oldd meg az egyenletet a pozitív számok halmazán: $\frac{3x-2}{2x+1}+6=\frac{7x+3}{2(2x+1)}$.

Megoldás: A $-\frac{5}{23}$ nem eleme az egyenlet alaphalmazának, így az egyenletnek nincs megoldása.