

I. Kifejezések helyettesítési értéke

A gyakorlatban többször előfordulnak olyan problémák, amelyek megoldása ugyanolyan típusú műveletek elvégzését igényli. Ezért sokat segítenek az összefüggéseket, megoldási menetet

leíró képletek. Például minden négyzet területét a $t = a \cdot a$, a háromszög területét a $t = \frac{a \cdot m}{2}$

képlettel számítjuk ki, amelyben t a területet, a a négyzet, illetve a háromszög egyik oldalát jelenti, m pedig a háromszög a oldalához tartozó magasságát.

Ha az a és m betűk helyébe a megfelelő számokat írjuk, a területet könnyen kiszámíthatjuk.

Másként mondva: kiszámítjuk a képlet **helyettesítési értékét**, adott a és m értékekre.


Feladatok

Módszertani megjegyzés: A feladatok megoldását csoportmunkában végezzük, ezért a modul feldolgozásának kezdetén egy kis játékkal 4 fős csoportokba osztjuk a tanulókat a **10.1 kártyakészlet** segítségével.

Minden tanulónak kiosztunk egy kártyát, és a következő utasítást adjuk hozzá: „A kártyán egy-egy műveletet találtok. Azok fognak egy csoportot alkotni, akiknél ugyanaz a végeredmény. Számológép nem használható.” Fejszámolási gyakorlat is egyben. A kártyák a tanári mellékletben megtalálhatók.

12^2	$6 \cdot 24$	$4 \cdot 36$	$9 \cdot 16$
$12 \cdot 9$	$18 \cdot 6$	$27 \cdot 4$	$3 \cdot 36$
$7 \cdot 18$	$2 \cdot 63$	$14 \cdot 9$	$6 \cdot 21$
$4 \cdot 30$	$3 \cdot 40$	$15 \cdot 8$	$5 \cdot 24$
$15 \cdot 14$	$6 \cdot 35$	$10 \cdot 21$	$30 \cdot 7$
$66 \cdot 4$	$8 \cdot 33$	$11 \cdot 24$	$12 \cdot 22$
$48 \cdot 2$	$4 \cdot 24$	$8 \cdot 12$	$16 \cdot 6$
15^2	$5 \cdot 45$	$3 \cdot 75$	$9 \cdot 25$
$4 \cdot 42$	$8 \cdot 21$	$24 \cdot 7$	$12 \cdot 14$

A következő egyszerű feladatokkal ráhangolódunk az egyenletekre és a helyettesítési értékek kiszámítására. Megoldásukhoz diák-kvartett módszert javaslunk.

 1. Számítsuk ki az adott képletek helyettesítési értékét!

a) Mennyi k értéke a $k = 2a + 2b$ képletben, ha $a = 6$; $b = 8$?

b) Mennyi t értéke a $t = 2ab + m(2a + 2b)$ képletben, ha $a = 3$; $b = 4$; $m = 9$?

c) Mennyi t értéke a $t = \frac{a \cdot m}{2}$ képletben, ha $a = 6,3$, $m = 8,5$?

d) Mennyi v értéke a $v = \frac{s}{t}$ képletben, ha $s = 4,5$, $t = 12$?

e) Mennyi T értéke a $T = \frac{L}{e \cdot n}$ képletben, ha $e = 3,5$, $n = 22$; $L = 5,5$?

f) Mennyi v értéke a $v = \frac{100h}{r}$ képletben, ha $h = 52$, $r = 18$?

Megoldás: a) $k = 28$; b) $t = 150$; c) $t \approx 26,8$; d) $v = 0,375$; e) $T \approx 0,071$; f) $v \approx 288,9$.

Módszertani megjegyzés: A modul feldolgozásához elsősorban az ellenőrzés párban módszert ajánljuk. Jellegeből adódóan a műveletvégzés nem csoportmunka, ezért törekedni kell minél több önálló feladatmegoldásra. A részfeladatokat tartalmazó példákat javasolt diák-kvartett módszerrel megoldani.

Az 1. feladatban képleteket látunk, amelyekben az egyenlőség bal oldalán számokat, betűket és műveleteket tartalmazó **kifejezések** állnak. Bonyolultabb kifejezéseket egyszerűbbé is tehetünk, ha azokat bizonyos szabályok alapján átalakítjuk.

A műveleteknek van három olyan tulajdonsága, amelyet régóta használunk. Idézzük fel ezeket! Ezek a felcserélhetőség, idegen szóval **kommutativitás**, a társíthatóság, másként **asszociativitás** és a megoszthatóság, azaz a **disztributivitás**.

Az összeadás és a szorzás kommutatív műveletek. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges sorrendben adhatjuk, illetve szorozhatjuk össze a számokat, betűket. Összeadáskor a tagok, szorzáskor pedig a tényezők sorrendje felcserélhető.

Kommutativitás: $a + b = b + a$,
 $a \cdot b = b \cdot a$.

$a, b \in \mathbf{R}$

Az összeadásnak és a szorzásnak van egy másik tulajdonsága is, a társíthatóság, más szóval asszociativitás. Összeadáskor a tagokat, szorzáskor a tényezőket tetszőlegesen csoportosíthatjuk, zárójeljezhetjük. Ne felejtjük el, hogy a zárójel a műveleti sorrend kijelölésére szolgál.

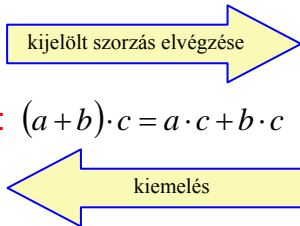
$$\text{Asszociativitás: } (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c,$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$$

$$a, b, c \in \mathbf{R}$$

A harmadik tulajdonság a megoszthatóság, a disztributivitás. Ez azt jelenti, hogy ha egy összeget szorzunk egy tényezővel (számmal, betűvel), akkor a szorzást kétféleképpen is elvégezhetjük. Elvégezzük az összeadást, és az eredményt megszorozzuk a szorzóval, de elvégezhetjük úgy is, hogy az összeg tagjait külön-külön megszorozzuk a szorzóval, és az eredményt összeadjuk. Érdeemes megjegyezni, hogy egyik irányban kiemelésről, másik irányban zárójel-felbontásról szól ez a tulajdonság, és összekapcsolja az összeadást és a szorzást.

$$\text{Disztributivitás: } (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$



A következő feladatokkal felelevenítjük az általános iskolában tanultakat a kifejezésekről, műveletekről.

Feladatok

 2. Végezd el a következő műveleteket!

- a) $2(a+b)$; b) $c(2+a)$; c) $2x(x-3y)$;
 d) $(3a-b)c$; e) $-3x(-2x-5)$; f) $(-3) \cdot d \cdot (5d+4)$.

Megoldás: a) $2a+2b$; b) $2c+ca$; c) $2x^2-6xy$; d) $3ac-bc$; e) $6x^2+15x$; f) $-15d^2-12d$.


 3. Végezd el a kijelölt műveleteket és a lehetséges összevonásokat!

a) $2(2x+6)-14-4x$; b) $6x-3(x+2)$; c) $-2-3(5a-2b)+7a$;
 d) $(3d-4)\cdot(-9)+9$.

Megoldás: a) -2 ; b) $3x-6$; c) $-2-8a+6b$; d) $-27d+45$.

Összevonni csak egynemű tagokat lehet.

Egyneműek azok a tagok, amelyek legfeljebb együtthatóikban különböznek.

 4. Keress egynemű tagokat a következő kifejezések között (x és y változók, a és b együtt-hatók)!

$2x$; $-4x$; az ; $5y$; $-4xy$; $-by$; ax^2 ; $(2a-1)x$; $(3a+b)x$; $x(4a-y)$;

Megoldás: egyneműek: $2x$; $-4x$; $(2a-1)x$; $(3a+b)x$; ugyancsak egyneműek: $5y$, $-by$.

 5. Vond össze a következő kifejezéseket!

a) $12a-(2+5a)+20a-6$; b) $-[(4a-5b+6c)-(2a+3b)]+4a-2c$;
 c) $\frac{3}{2}a-a$; d) $\frac{2}{5}x-\left(-\frac{2}{3}x+2\right)$.

Megoldás: a) $27a-8$; b) $2a+8b-8c$; c) $\frac{1}{2}a$; d) $\frac{16}{15}x-2$.

 6. Végezd el a kijelölt műveleteket, a kijelölt szorzásokat és a lehetséges összevonásokat!

a) $4+4b-5a-2\cdot(2a+3b)$; b) $3b+7a-(-2a)-12\cdot(-a)+5a-2b$;
 c) $8a-[6b-(4a-2b)-4a]-5b$; d) $3(x+y)+5(x-y)$;
 e) $9a-(2b+3a)\cdot(-3)+(-9b+6a-4)\cdot(-5)$;
 f) $-4(5-2x)+5(x-1)-(3x-5)$.

Megoldás:

a) $4-9a-2b$; b) $26a+b$; c) $16a-13b$; d) $8x-2y$; e) $-12a+51b+20$; f) $10x-20$.

 7. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(20-4)\cdot 3$; b) $20-4\cdot 3$; c) $20\cdot 3-4\cdot 3$; d) $20-(4\cdot 3)$;
 e) $7+4\cdot 5-2$; f) $(7+4)\cdot 5-2$; g) $7+4\cdot(5-2)$; h) $7\cdot 5+4\cdot 5-2$;
 i) $(7+4)\cdot(5-2)$; j) $(p-2)\cdot 2$; k) $p-2\cdot 2$; l) $p-(2\cdot 2)$;
 m) $p\cdot 2-2\cdot 2$.


Megoldás:

- a) 48; b) 8; c) 48; d) 8; e) 25; f) 53; g) 19; h) 53;
 i) 33; j) $2p - 4$; k) $p - 4$; l) $p - 4$; m) $2p - 4$.

 **8.** Számítsd ki a következő képletekben m értékét a betűk megadott értéke mellett!


- a) $t = \frac{a \cdot m}{2}$, ha $a = 9$; $t = 54$;
 b) $t = m \cdot \frac{a + c}{2}$, ha $a = 11$; $c = 5$; $t = 48$;
 c) $V = \frac{a \cdot b \cdot m}{3}$, ha $a = 4$; $b = 6$; $V = 56$.

Megoldás: a) $m = 12$; b) $m = 6$, c) $m = 7$.

 **9.** Laci tartozott nekem 2000 forinttal. Vettem tőle 5 CD-t, darabját 1500 forintért. Hogyan számoljam ki, hogy hány forintot kell adnom Lacinak?

- A) $2000 - 5 \cdot 1500$; B) $(2000 - 5) \cdot 1500$; C) $1500 - 5 \cdot 2000$;
 D) $5 \cdot (2000 - 1500)$; E) $5 \cdot 1500 - 2000$.

Megoldás: E).

 **10.** Egy négyzet oldala n cm hosszú, a területe 9 cm^2 . Melyik képlet segítségével számítható ki az oldal?

- A) $n \cdot n = 3$; B) $n \cdot n = 9$; C) $n \cdot n = 18$; D) $4n = 9$; E) $4n = 18$.

Megoldás: B).

 **11.** Egy téglalap kerülete 18 cm, egyik oldala 4 cm. Mekkora a másik oldala?

Megoldás: 5 cm.

 **12.** Adott a téglalap K kerülete és a oldala. Melyik képlettel számíthatjuk ki a b oldalt?

- A) $b = \frac{K - a}{2}$; B) $b = \frac{K}{2} - a$; C) $b = K - \frac{a}{2}$; D) $b = \frac{K}{2} - \frac{a}{2}$.

Megoldás: B).

13. Judit útjának kezdetén autójának kilométerórája 8670 km-t mutatott. A 3 órás út végén a 8922 számon állt az óra. Hogyan számítható ki az óránkénti átlagsebessége? Add meg a képletet!

A) $8922 - \frac{8670}{3}$; B) $8922 - 8670$; C) $3 \cdot (8922 - 8670)$;
 D) $\frac{8922 - 8670}{3}$; E) $\frac{8670}{3}$.

Megoldás: D). $v = \frac{s_2 - s_1}{t}$.

A gyakorlati életben sok probléma megoldása során használunk képleteket. Ezek a képletek bizonyos összefüggéseket fogalmazzak meg a matematika nyelvén. Ha ismerjük a képletben szereplő betűk számértékét, ezeket a képletbe helyettesítve kiszámíthatjuk a keresett értéket.

14. Az adott értékeknek az $5c + 12 - 2c = 24$ képletbe helyettesítésével állapítsuk meg, hogy c melyik értékére áll fenn az egyenlőség?

A) 6; B) 8; C) 9; D) 4; E) 24.

Megoldás: D).

15. A függvény hozzárendelési szabályát megadó képletbe helyettesítéssel állapítsuk meg,

hogyan melyik táblázat felel meg az $y = \frac{3(x+2)}{x-4} - 2x$ függvénynek?


A	
x	y
0	0
1	1,5
2	5,0
3	10,5
4	18,0

B	
x	y
6	0
1	-5
2	-10
3	-21
4	

C	
x	y
0	0
1	0
2	-1
3	-3
4	-6

D	
x	y
0	0
1	1
2	3
3	6
4	10

Megoldás: B).

-  **16.** Jancsi és Juliska egy piacon vattacukrot árulnak, mindketten ugyanannyiért adják az édességet. A piacirodán 5000 tallért kérnek helypénzre mindkettőjüktől. Jancsi eladott 60 vattacukrot, és 13000 tallér tiszta nyereségre tett szert. Hány tallért vihet haza Juliska, aki 100 vattacukrot adott el?

Megoldás:

1 vattacukor ára $\frac{13000 + 5000}{60} = 300$ tallér, így Juliska $100 \cdot 300 - 5000 = 25000$ tallért visz haza.

Mintapélda₁

- a) Határozd meg az éves adó nagyságát, ha Géza havonta 139 200 forintot keres, és az adósávok a következő táblázat alapján alakulnak:

	től – ig határok (egész évi kereset)		fizetendő adó
1. adósáv	0 Ft	1 500 000 Ft	18%
2. adósáv	1 500 000 Ft felett		270 000 Ft + az 1 500 000 Ft-on felüli rész 38 %-a

- b) Írd fel a képletet az adó kiszámításához a 2. adósávba tartozó személyeknél, ha havonta p forintot keresnek ($p > 125\,000$)!

Megoldás:

- a) Az adó kiszámításához előbb kiszámítjuk az egész évi keresetet:

$12 \cdot 139\,200 = 1\,670\,400$. Eszerint Géza a 2. adósávba esik, ezért az 1 500 000 Ft-on felüli részt meghatározzuk, és ennek vesszük a 38%-át (0,38-szorosát):

$1\,670\,400 - 1\,500\,000 = 170\,400$, ennek 38%-a: $170\,400 \cdot 0,38 = 64\,752$.

Ezt a táblázat szerint hozzáadjuk 270 000-hez, és megkapjuk a fizetendő adót:

$270\,000 + 64\,752 = 334\,752 \approx 335\,000$ (az adóhatóság mindig 1000 Ft-ra kerekít).

- b) Ha valaki havonta p forintot keres, akkor egy évben $12p$ forintot. Az 1 500 000 Ft-on felüli rész: az éves keresetből levonunk 1 500 000-et, és ennek vesszük a 0,38-szorosát: $0,38 \cdot (12p - 1\,500\,000)$. Ezután már csak a 270 000-et kell hozzáadni, és a végső képlet így alakul: $0,38 \cdot (12p - 1\,500\,000) + 270\,000$.

Módszertani megjegyzés: Visszahelyettesítéssel célszerű ellenőriztetni, hogy valóban helyes képletet kaptunk-e.

Miután megvan a képlet, bármilyen (125 000 Ft-nál nagyobb) havi kereset esetén alkalmazható, nem kell az a)-beli számolást végig levezetni.