I. Az abszolútérték-függvény

Feldolgozási javaslat: A tanár először elmondja a lenti definíciókat, majd minden csoportban kiosztja a ***8.1 szakértői mozaikot***. A tanulók felosztják egymás között a négy anyagrészt. Elolvassák és értelmezik. Majd mindenki elmagyarázza a csoport többi tagjának a saját részét.

Pozitív szám abszolútértéke maga a szám, negatív szám abszolútértéke a szám ellentettje, ami pozitív szám. |0|=0

$$|a| = \begin{cases} a, & ha\ \ a \geq 0 \\ -a, & ha\ \ a < 0 \end{cases}$$

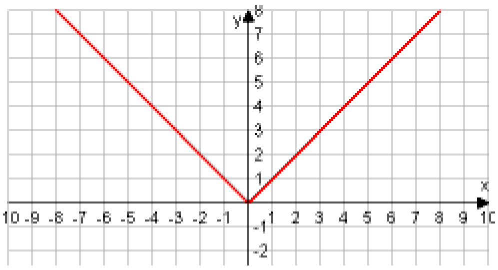
Ez szemléletesen azt mutatja meg, hogy a szám milyen messze van a 0–tól a számegyenesen.

Legyen x tetszőleges valós szám. Ekkor az abszolútérték-függvény:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & ha\ \ x \geq 0 \\ -x, & ha\ \ x < 0 \end{cases}$$

Az abszolútérték-függvény (*f* (*x*) = |*x*|) tulajdonságai

x	–53	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	$-0{,}6\dot{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,36
$f(x)$	53	10,5	5	4	$\frac{3}{2}$	1	$0{,}6\dot{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,36



Ha $x < 0$, akkor növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Azt mondjuk, hogy a függvény ezen a tartományon **szigorúan (monoton) csökkenő.**

Ha $x \geq 0$, akkor növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvény ezen a tartományon **szigorúan (monoton) növekvő**.

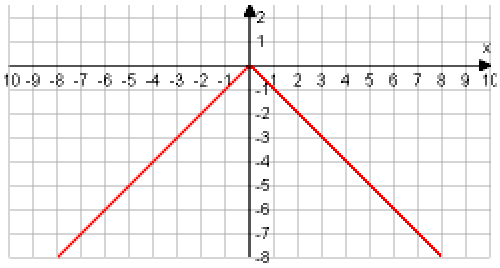
Megjegyzés: Elegendő lehet, ha csökkenőnek és növekvőnek nevezzük a megfelelő függvényrészeket.

Az $f(x)=|x|$ függvény értéke az $x = 0$ helyen 0. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ebben a pontban van közös pontja az x tengellyel.

Az $f(x)=|x|$ függvény értelmezési tartományának $x=0$ helyén veszi fel a **legkisebb** függvényértékét, ekkor $|x|=0$.

A $g(x)=-|x|$ függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen negatív. (Látható, hogy a g függvény negatív x-ek esetén szigorúan monoton növekvő, pozitív x-ekre pedig szigorúan monoton csökkenő.)

Másképp: a függvény az értelmezési tartományának $x = 0$ helyén veszi fel a **legnagyobb** értékét, ekkor a függvény értéke 0.



Megállapításainkat értéktáblázattal is alátámasztjuk:

x	–53	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	$-0,\dot{6}\dot{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,36
$f(x)$	–53	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	$-0,\dot{6}\dot{3}$	0	–1	$-\frac{2}{3}$	–2	–3	–11,36

Feladatok

Az 1., 2. feladatok megoldásánál figyelj arra, hogy a függvény egy adott függvényértéket 0, 1 vagy 2 helyen is felvehet. Számítás előtt próbáld megtippelni az adott függvényértékhez tartozó helyek számát! Számításodat grafikonon ellenőrizheted.

1. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot!

a) $f(x)=3|x|$

x	0	–1	2/3					
$f(x)=3\lvert x\rvert$				6	1	0	–3	3

b) $f(x) = -|x| + 4$

x	–2	0	4					
$f(x) = -\|x\| + 4$				0	–2	6	4	1

c) $f(x) = \frac{1}{2}|x|$

x	–2		0	1		4
$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|$		–4			6	

d) $f(x) = 2|x| - 3$

x		–6		0	1,5
$f(x) = 2\|x\| - 3$	–1		3		

Megoldás:

a) f (x) = 3 |x|

x	0	–1	2/3	2; –2	$\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$	0	—	1; –1
$f(x)$	0	3	2	6	1	0	–3	3

b) f (x) = –|x| + 4

x	–2	0	4	4; –4	6; –6	—	0	3; –3
$f(x)$	2	4	0	0	–2	6	4	1

c) $f(x) = \frac{1}{2}|x|$

x	–2	—	0	1	12; –12	4
$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|$	1	–4	0	$\frac{1}{2}$	6	2

d) $f(x) = 2|x| - 3$

x	1; –1	–6	3; –3	0	1,5
$f(x) = 2\|x\| - 3$	–1	9	3	–3	0

2. Ábrázold közös koordinátarendszerben a következő függvényeket:

a) $f(x) = 2|x|$; $f(x) = 4|x|$; $f(x) = \frac{1}{3}|x|$. Mit tapasztalsz?

b) $f(x) = |x|$; $f(x) = |x| + 2$; $f(x) = |x| - 3$. Mit tapasztalsz?

Megjegyzés: További gyakorló feladatokat is adhat a tanár!

II. A másodfokú függvény: $f(x) = x^2$

A tanár összekeveri és kiosztja a ***8.2 kártyakészletben*** található kártyákat.
Minden csoportnak ad egy betűt is, ezzel tud a csoportra hivatkozni, illetve egy csoporton belül minden gyerek kap egy számot. (Használjuk a Betű- és a Számkészletet!)
Adjunk segítséget, hogy a csoportok tagjai megtalálhassák egymást! (Az egy sorban levő kártyák tulajdonosai lesznek egy csoportban)
A gyerekek a kártyák alapján megkeresik egymást, majd helyet foglalnak 1-1 asztalnál.

Ennek a csoportképzésnek a célja a négyzetre emeléssel kapcsolatos eddigi ismeretek felelevenítése.

$-\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$-\left(\frac{-4}{5}\right)^2$	$\frac{(-4)^2}{-5}$	$\frac{-4^2}{5^2}$
$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\frac{(-4)^2}{5}$	$\frac{4^2}{5^2}$
(–0,5 ; 0,25)	(–8; 64)	(–11; 121)	(–4; 16)
$-(3\cdot5)^2$	$-3\cdot(-5)^2$	$3^2\cdot(-5^2)$	$-(-3\cdot5)^2$
$\left(\frac{1}{3};\frac{1}{9}\right)$	$\left(\frac{2}{7};\frac{4}{49}\right)$	$\left(\frac{5}{6};\frac{25}{36}\right)$	$\left(\frac{12}{11};\frac{144}{121}\right)$
$(3\cdot5)^2$	$3^2\cdot5^2$	$(-3)^2\cdot5^2$	$(-3\cdot5)^2$
(2,5 ; 6,25)	(0,3 ; 0,09)	(7,8 ; 60,84)	(5,2 ; 27,04)
(7; 49)	(3; 9)	(6; 36)	(5; 25)

Önálló munkában töltsék ki a táblázatot, majd a csoportok tagjai beszéljék meg a megoldást.

Töltsük ki a táblázatot! Rendeljük hozzá mindegyik számhoz a négyzetét!

x	–16	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	–0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,3
$f(x)=x^2$													

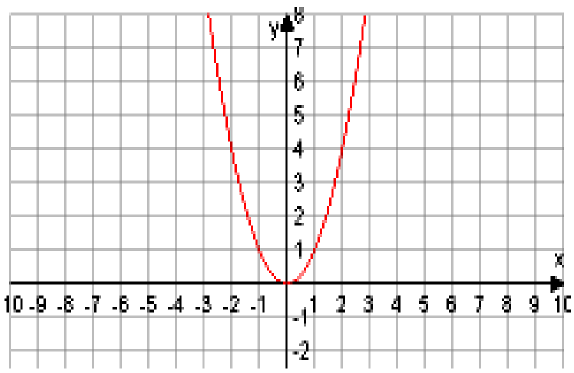
Megoldás:

x	–16	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	–0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,3
$f(x)=x^2$	256	110,25	25	16	$\frac{9}{4}$	1	0,3969	0	1	$\frac{4}{9}$	4	9	127,69

Ha minden valós számhoz hozzá rendeljük a négyzetét, akkor a hozzárendelési szabály $f(x)=x^2$ alakban írható fel.

A másodfokú függvény grafikonja

A táblázat alapján ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $f(x)=x^2$ függvényt, a függvény soha nem vesz fel negatív értékeket:



Ennek a görbének a neve **parabola**. Az ábrán látható, hogy a másodfokú függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. A parabola szimmetriatengelyén lévő pontját **tengelypontnak** nevezzük

Másodfokú hozzárendelési utasítással találkozhatunk az a oldalú négyzet területének ill. az a oldalú kocka felszínének kiszámításakor, de a fizikában is használjuk a szabadesés és az egyenletesen gyorsuló test mozgását leíró út–idő kapcsolatnál.

Ha $x < 0$, akkor növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Ezért a függvény ezen a tartományon szigorúan **csökkenő.**

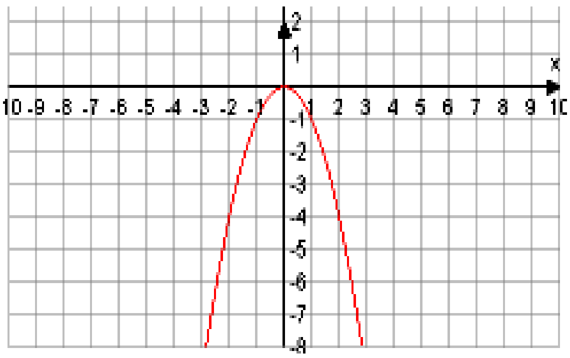
Ha $x \geq 0$, akkor növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvényt ezen a tartományon szigorúan **növekvő**.

Az $f(x) = x^2$ függvény értéke az $x = 0$ helyen 0. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ebben a pontban van közös pontja az x tengellyel.

Az $f(x) = x^2$ függvény értelmezési tartományának $x = 0$ helyén veszi fel a legkisebb függvényértékét, ekkor értéke 0.

Tekintsük a $g(x) = -x^2$ függvényt! Adjunk meg táblázatban néhány értéket :

x	–16	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	–0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,3
$g(x)$	–256	–110,25	–25	–16	$-\frac{9}{4}$	–1	–0,3969	0	–1	$-\frac{4}{9}$	–4	–9	–127,69



A g függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen negatív.
A g függvény az értelmezési tartományának $x = 0$ pontjában veszi fel a legnagyobb értékét.

Azt szokták mondani, hogy a g függvénynek az $x = 0$ helyen szélsőértéke, nevezetesen **maximuma** van. Látható, hogy a g függvény nempozitív x-ek esetén szigorúan növekvő, nemnegatív x-ekre pedig szigorúan monoton csökkenő.

3. Készítsünk táblázatot és ábrázoljuk koordinátarendszerben a következő függvényeket:

a) $f(x) = x^2 + 3$,

b) $f(x) = x^2 - 4$.

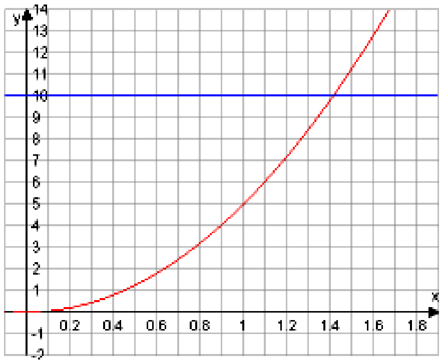
c) $f(x) = 2x^2$.

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

e) $f(x) = -2x^2 - 1$.

4. A fenti függvények közül melyeknek van legkisebb vagy legnagyobb értéke?
Mely értékekre veszik fel a legnagyobb, vagy a legkisebb értéket, és mennyi ez?

5. Egy műugró-bajnok 10 m magasból ugrik a vízbe. Hány másodperce van a gyakorlata végrehajtására, mielőtt beleesne a vízbe? ($s = (g/2) \cdot t^2$, ahol $g = 9{,}81$ m/s^2)



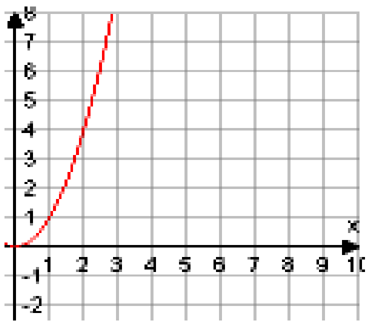
Megoldás:
Itt azokat az x helyeket kell kiszámolni, ahol a függvény felveszi a 10 értéket. A zárójelben megadott képlet alapján ki kell számolni, s = 10 esetén t = ?
Ezeket behelyettesítve kapjuk:

$$10 = \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2$$

$$2{,}04 = t^2 \begin{cases} t_1 = \sqrt{2{,}04} \\ t_2 = -\sqrt{2{,}04} \end{cases}$$ Mivel eltelt időről van szó, így a negatív érték nem megoldás. Tehát a műugrónak kb.1,43 másodperce van, hogy elvégezze a gyakorlatát.

6. Hányszorosára változik a négyzet területe, ha az oldalait másfélszeresére növeljük? Készíts értéktáblázatot és ábrázold grafikonon az oldalak változásának mértékét és a terület változását!

Megoldás:
A négyzet területe: $T = a^2$. Az oldalát 1,5-szörösére növelve a terület $T=(1{,}5a)^2 = 2{,}25a^2$ –re nő, azaz $1{,}5^2 = 2{,}25$-szörösére változik. Általánosságban: $T = (\lambda a)^2 = \lambda^2 a^2$.



λ	0,5	1	1,5	2	2,5
t	0,25	1	2,25	4	6,25

III. A fordított arányosság mint függvény

Egy kertes házban 24 m^2 területű konyhakertet szándékoznak kialakítani. Ez elég lenne, hogy a családot a legkedveltebb, otthon termesztett zöldségekkel ellássa. Azon tanakodnak, hogy hol legyen. Legyen keskeny, hosszú téglalap alakú, hátul a kerítés mellet, vagy esetleg legyen valamilyen más alakú téglalap. Nézzük meg, hogy ha a téglalap oldalát 1; 2; 3; 4; . . . 24 méter hosszúra választjuk, hány méteres lesz a másik oldala?

egyik oldal (x)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12	24
másik oldal (y)	24	16	12	8	6	4,8	4	3	2	1

Láthatjuk, hogy **ahányszorosára** növeljük az egyik oldalt, **annyiad részére** csökken a másik oldal.

Ha az elsőnek választott oldalhoz, amit x-szel jelöltünk, hozzárendeljük a másik oldalt, amit y-nal jelöltünk, akkor a következő függvényt kapjuk:

$$f(x) = \frac{24}{x}$$

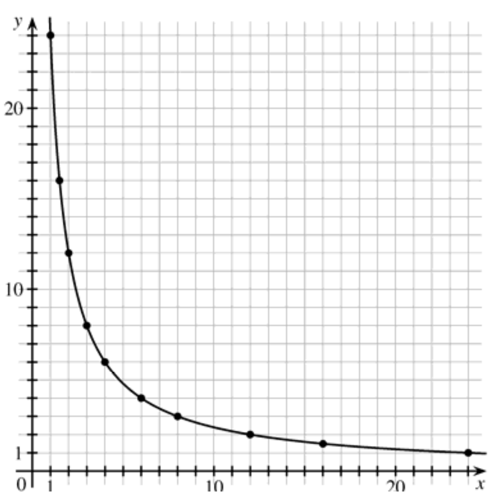
Ezt az összefüggést ismerjük: ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annyiad részére változik a másik mennyiség. Ez az összefüggés a **fordított arányosság**.

Figyeljük meg:

$1 \cdot 24 = 1{,}5 \cdot 16 = 2 \cdot 12 = \ldots.\ 12 \cdot 2 = 24 \cdot 1 = 24.$

A függvény összetartozó értékpárjainak szorzata állandó, ebben az esetben 24.

Ábrázoljuk a függvényt koordinátarendszerben!



A téglalap oldalainak változását csak néhány esetben írtuk le, de például 1 és 24 m közt az oldalak hossza bármely valós számmal kifejezhető, tehát nyugodtan megrajzolhatjuk a grafikonunkat folytonos vonallal, mert bármely $1 \le x \le 24$ értékhez tartozik egy olyan y érték, amellyel $x \cdot y = 24$.

Térjünk el eredeti feladatunktól, amelyben x és y csak pozitív számok lehettek, hiszen egy oldal hosszúságát jelentették.

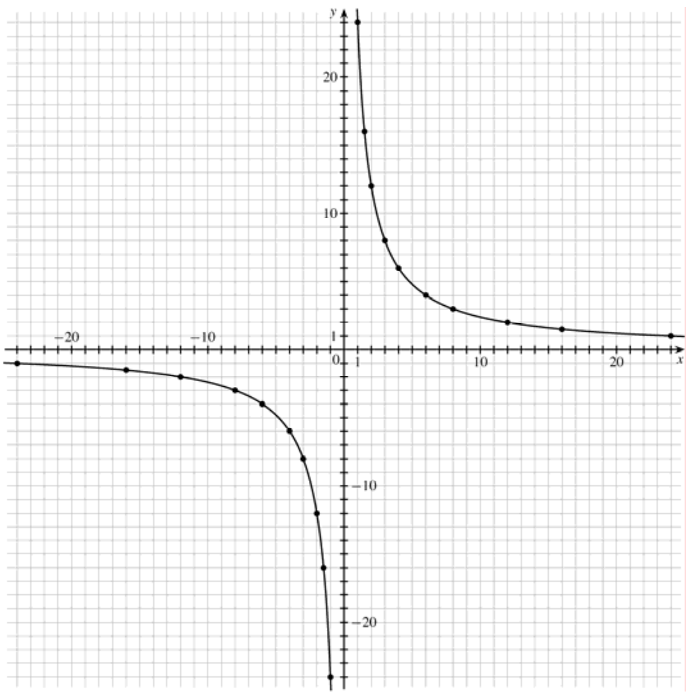
Vizsgáljuk, most az $f(x) = \frac{24}{x}$ függvényt, ahol x bármely valós szám lehet.

Készítsünk táblázatot és nézzük meg, hogy hogyan viselkedik a függvény, ha $x<0$:

.

x	–1	–1,5	–2	–3	–4	–5	–6	–8	–12	–24
$f(x) = \frac{24}{x}$	–24	–16	–12	–8	–6	–4,8	–4	–3	–2	–1

A két táblázat alapján ábrázolhatjuk a függvényt.



Az ábrázolt pontokat összekötve két görbevonalat kapunk. Ez a két részből álló görbe a **hiperbola.**

A függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, ott a függvény képének „szakadása” van, A függvény mind az $x< 0$, mind pedig az $x > 0$ helyeken szigorúan monoton csökkenő. Az értelmezési tartomány nagyobb értékéhez kisebb függvényérték tartozik. Ezt a függvény képén is jól láthatjuk.

Általában is igaz, hogy az $f(x) = \frac{a}{x}$ függvény, amelyben $a \neq 0$ állandó érték, és $x \neq 0$ valós szám, a fordított arányosságot kifejező függvény.

Feladatok

7. Egy 120 km hosszú útszakaszt különböző járműveken különböző idők alatt tesznek meg. A járművek egyenletes sebességgel haladnak. Egy gyors személyautó 1 óra alatt, egy kevésbé gyors 1,2 óra alatt, egy másik 1,5 óra alatt és így tovább a kerékpárosig, aki 6 óra alatt tette meg az utat.
Írjuk be a táblázatba, hogy milyen sebességgel mentek az egyes járművek!

idő (h)	1	1,2	1,5	2	2,4	3	5	6
sebesség (km/h)			80					

Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát!

Megoldás:

$f(x) = \frac{120}{x}$.

idő (h)	1	1,2	1,5	2	2,4	3	5	6
sebesség (km/h)	120	100	80	60	50	40	24	20

8. Milyen függvénykapcsolat van

a) egy adott összegű vásárlásnál a megvásárolt áru darabszáma és egységára közt?

b) állandó sebességgel haladó jármű menetideje és a megtett út között?

c) Egy bizonyos munka elvégzése esetén a munkát végzők száma és a munka elvégzésének ideje közt?

Megoldás: a) és c) fordított arányosság, b) egyenes arányosság

9. Egy osztály buszkirándulásra megy. A busz bérleti díja 50 ezer forint. Ezt az összeget a kiránduláson résztvevő tanulók fizetik ki, egyenlő arányban.

Milyen összefüggés van a tanulók létszáma és az egy főre jutó összeg között?

Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát!

Megoldás: $f(x) = \dfrac{50}{x}$.