I. Egyenes arányosság és a lineáris függvények kapcsolata

Csoportok kialakítása: A tanár minden asztalra kitesz egy hozzárendelési szabályt a ***7.1 kártyakészletből*** (nagy kártyák), és szétosztja az értékpárokat (kis kártyák).
A tanulók megkeresik azt az asztalt, amelyen az értékpárjuknak megfelelő hozzárendelési szabály van. Így 3 fős csoportok alakulnak ki.
Szöveges feladatok feldolgozási javaslata: A tanár kiválasztja, melyik feladatokat szeretné megoldani az órán (javaslat: 1., 2., 3., mintapéldák), és a ***7.3. melléklet ablakját*** . fénymásolva megfelelő számban, beteszi a feladatszövegeket. A feladatokhoz tartozó feladatkártyákat a ***7.3 kártyakészlet***ben találhatja. Minden csoportnak ad egy ezekből álló csomagot és a részfeladatok kidolgozásához négyzetrácsos papírokat.
Első körben az egy csoportban lévő tanulók kiosztják egymás között a feladatkártyákat, elolvassák a feladatok szövegeit, és meghatározzák, melyik táblázat melyik feladathoz tartozik.
Ezután akik ugyanazt a feladatkártyát kapták, közös asztalhoz mennek, és a kártyának megfelelően kidolgozzák külön lapra mind a három szöveges feladatot.
Majd visszamennek a saját csoportjukhoz, beírják a szakértői mozaik megfelelő rubrikájába az eredményüket, s közben elmagyarázzák a többieknek, hogy kapták meg az eredményt.
Végül közösen megállapítják a hozzárendelési utasítást, és beírják a megfelelő helyre.

Mintapélda$_1$

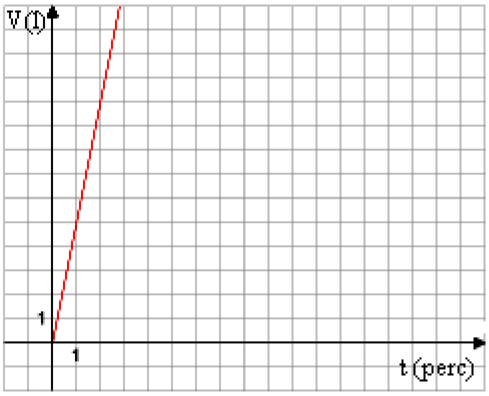
A csapból percenként 5 liter víz folyik a fürdőkádba, melynek befogadó képessége 80 liter. Mennyi idő alatt telik meg az eredetileg üres kád? Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a kádban levő vízmennyiséget az eltelt idő függvényében!

Megoldás:

1. Válasz a kérdésre: 16 perc alatt telik meg a kád, mert $\frac{80}{5}=16$.
2. Értéktáblázat készítése:

t (perc) alatt	1	2	3	4	8	12	16
V (liter) víz folyik ki	5	10	15	20	40	60	80

3. Ábrázolás grafikonnal:



4. Hozzárendelési utasítás meghatározása:
   Jelöljük az eltelt időt *t-vel*: $t \mapsto 5\,t$ vagy $f(\,t\,) = 5\,t$.

Mintapélda$_2$

Egy 20 cm hosszú gyertyát meggyújtunk. A gyertya 4 óra alatt ég el. Fél óra alatt hány centimétert csökken? Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a gyertya hosszának alakulását az eltelt időtől függően!

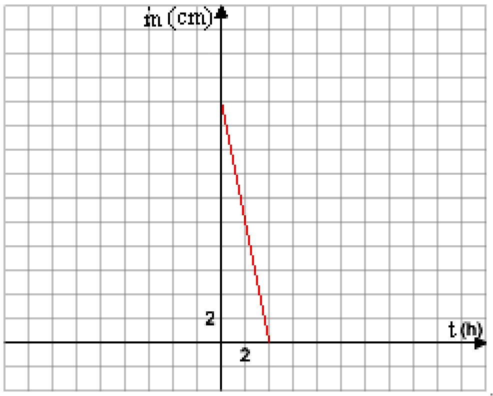
Megoldás:

1. Válasz a kérdésre: A gyertya 1 óra alatt $\frac{20}{4} = 5$ cm-t csökken, fél óra alatt 2,5 cm-rel lesz alacsonyabb.

2. Értéktáblázat készítése:

t(óra) elteltével	0	0,5	1	1,5	2	3	4
m(cm) magas a gyertya	20	17,5	15	12,5	10	5	0

3. Ábrázolás grafikonnal:



4. Hozzárendelési utasítás meghatározása:
   Jelöljük az eltel időt t-vel: $t \mapsto -5\,t + 20$ vagy $f(t) = -5\,t + 20$.

Mintapélda₃

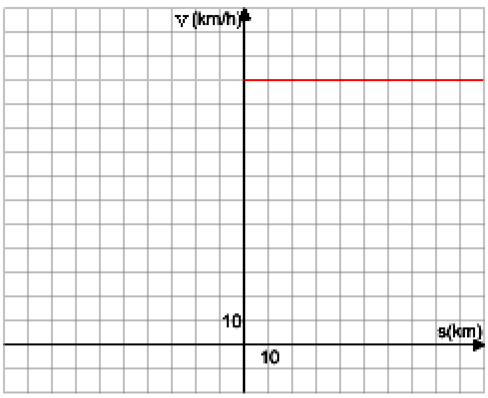
Egy személygépkocsi az autópálya 50 km-es szakaszán 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat? Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a sebességet az út függvényében!

Megoldás:

1. Válasz a kérdésre: Az autó 0,45 óra alatt teszi meg az utat, mert $t = \frac{s}{v} = \frac{50}{110} = 0,\dot{4}\dot{5}$. .
2. Értéktáblázat készítése:

Ekkora utat: s(km)	1	10	20	30	40	45	50
ekkora sebességgel tesz meg: $v\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	110	110	110	110	110	110	110

3. Ábrázolás grafikonnal:



4. Hozzárendelési utasítás meghatározása:
   A megtett utat s-sel jelölve: $s \mapsto 110$, vagyis $f(s) = 110$.

Feladatok

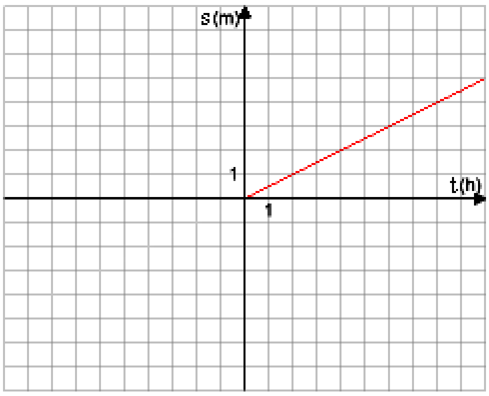
1. Egy csiga hajnalban útnak indul. A 2 m széles járda egyik oldaláról szeretne átjutni a másikra. Óránként fél métert képes megtenni. Mennyi idő múlva ér át a túloldalra? Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a megtett utat az eltelt idő függvényében! Határozd meg a hozzárendelési szabályt!

Megoldás:

Értéktáblázat:

Ennyi idő alatt: t (h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4
Ide jutott: s (m)	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2

Grafikon:



Hozzárendelési szabály: $f(t) = \frac{1}{2}t$.

A csiga 4 óra múlva ér át a túloldalra.

2. Egy autó lakott területhez közeledvén lassítani kezdett. 5 km-re volt a falu szélétől, amikor 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességét elkezdte egyenletesen csökkenteni. A falu határán belül 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a megengedett maximum.

Táblázatban ábrázoltuk az autó sebességének csökkenését a megtett út függvényében:

Megtett út: s (km)	0	1	2	3	4	5
Sebesség: v ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$)	110	98	86	74	62	50

a) Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val kellett csökkenteni a sebességét?

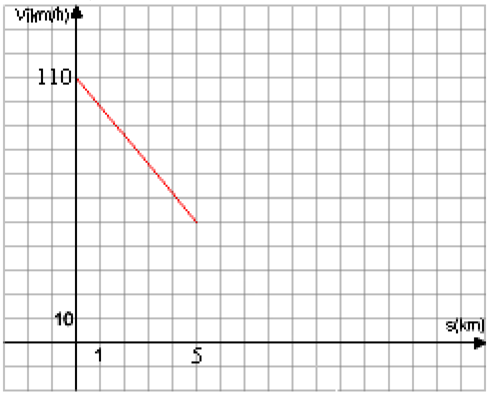
b) Ábrázold grafikonon az autó sebességének csökkenését a megtett út függvényében!

c) Határozd meg a hozzárendelési szabályt!

Megoldás:

a) 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val kellett csökkenteni a sebességét.

b) Grafikon:



c) Hozzárendelési utasítás:

$f(s) = 110 - 12s$, úgy is írhatjuk:
$f(s) = -12s + 110$.

Az autónak kilométerenként 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val kell csökkentenie a sebességét.

3. Egy macska felmászik a 4 m magas fa tetejére, miközben 15 N állandó erővel húzza felfelé magát. (s = 4 m, F = 15 N.) Táblázattal ábrázoltuk az erő és a magasság kapcsolatát:

Ennyi utat tesz meg, s(m)	0	0,5	1	2	3	4
Ekkora erőt fejt ki, F(N)	15	15	15	15	15	15

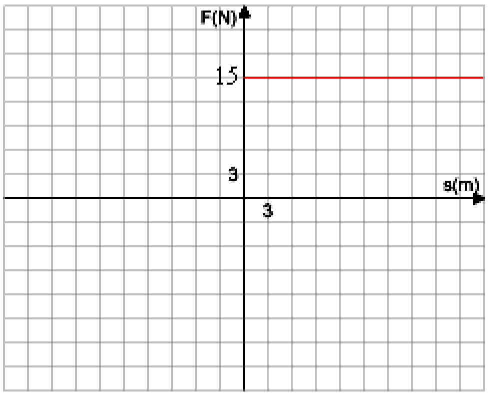
a) Ábrázold grafikonon az erő és a magasság kapcsolatát!

b) Számold ki, mennyi munkát végez a macska, míg feljut a fa tetejére! ($W = F \cdot s$)

c) Határozd meg a hozzárendelési utasítást!

Megoldás:

a) Grafikon:



b)

Ennyi utat tesz meg s(m)	0	0,5	1	2	3	4
Ekkora erőt fejt ki F(N)	15	15	15	15	15	15
Ennyi munkát (W) végez a macska $W = F \cdot s$	0	7,5	15	30	45	60

A macska 60 J munkát végez.

c) Hozzárendelési utasítás: $f(s) = 15$.

4. A jánoshegyi libegő 1040 m hosszú kötélpályán mozog. Az utasokat 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel szállítja. (Azaz 66,7 métert tesz meg egy perc alatt.)

a) Mennyi ideig (percig) tart egy utazás a libegővel?

b) Ábrázold táblázattal ill. grafikonon a megtett út hosszát az idő függvényében!

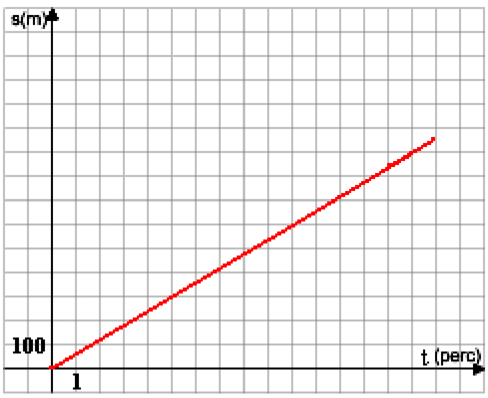
c) Határozd meg a hozzárendelési utasítást!

Megoldás:

Értéktáblázat:

Ennyi idő alatt t (perc)	0	1	5	10	15	15,6
ekkora utat tesz meg s (m)	0	66,7	333,3	666,7	1000	1040

Grafikon:



Hozzárendelési utasítás: $f(t) = 66{,}7t$.

0,26 órán, azaz 15,6 percen keresztül tart az utazás.

5. A jánoshegyi libegő 1040 m hosszú kötélpályán mozog. Az utasokat 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel szállítja.

Táblázattal ábrázoltuk a visszafele vivő út hosszát az eltelt idő függvényében:

Ennyi idő telt el: *t*(perc)	0	1	5	10	15	15,6
Ennyi út van hátra: *s*(m)	1040	973,3	706,7	373,4	40	0

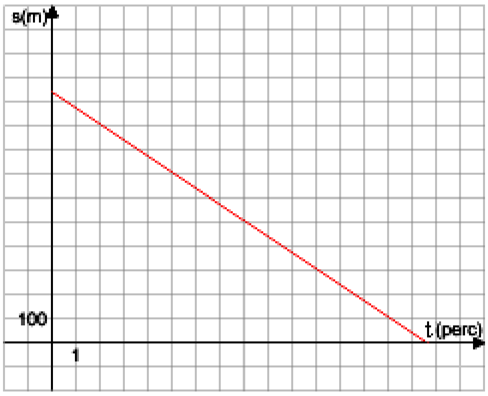
a) Mennyi ideig (percig) tart egy utazás a libegővel?

b) Ábrázold grafikonon a hátralévő út hosszát az eltelt idő függvényében!

c) Határozd meg a hozzárendelési utasítást!

Megoldás:

Grafikon:



Hozzárendelési utasítás: $f(t) = -66{,}7\,t + 1040$.

0,26 órán, azaz 15,6 percen keresztül tart az utazás.

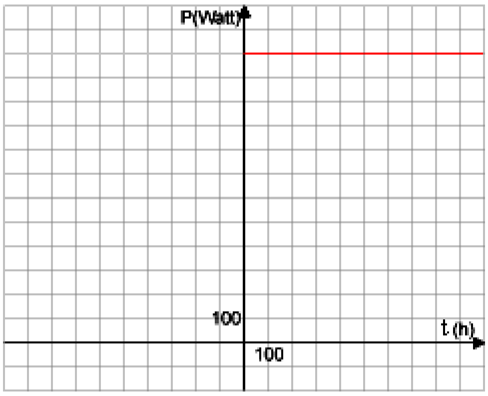
6. Egy gyerek az 1200 Watt teljesítményű hajszárítójával 0,5 órán keresztül szárítja a haját. (P = 1200 Watt.) Táblázattal ábrázoltuk a teljesítményt az idő függvényében:

t (h)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P (Watt)	1200	1200	1200	1200	1200	1200

Ábrázold grafikonon a teljesítményt az idő függvényében!

Határozd meg a hozzárendelési utasítást!

Megoldás:



Grafikon:

Hozzárendelési utasítás: $f(t) = 1200$.

A 7. és a 8. feladat célja a lineáris függvény fogalmának előkészítése.
Feldolgozási javaslat: A tanár minden csoportot elnevez az ábécé nagy betűivel, és minden csoportnak ad egy ilyen kártyát.(***Betűkészlet csoportalakításhoz***) Egy-egy csoporton belül pedig minden tanuló kap egy számot tartalmazó kártyát. (***Számkészlet csoportalakításhoz***) Ezek után fölolvassa a kérdéseket. Minden kérdés elhangzása után 1-1,5 perc gondolkodási időt hagy, hogy csoporton belül a tanulók megbeszélhessék a választ. Majd kártyahúzással kiválasztja a válaszoló személyt.

7. Válaszolj az alábbi kérdésekre az előző mintapéldák elemzésével!

a) Milyen kapcsolat van a Mintapélda$_1$, valamint az 1. és a 4. feladat összetartozó értékpárjai között?

Válasz: a Mintapélda$_1$-ben, az 1. és 4. feladatban az összetartozó értékpárok között egyenes arányosság áll fenn (= ahányszorosára változik az egyik érték, annyiszorosára változik a másik is, azaz az összetartozó értékek hányadosa állandó).

b) Hogyan helyezkednek el a koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárok által meghatározott pontok?

Válasz: egyenesen, félegyenesen, szakaszon helyezkednek el.

8. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis. Válaszodat indokold!

a) Az 1. és 2. feladat táblázatának értékpárjai közötti kapcsolat egyenes arányossággal jellemezhető.

Válasz: hamis, csak az első feladat összetartozó értékpárjai közt van egyenes arányosság.

b) Ezek az értékpárok szétszórva, rendszertelenül helyezkednek el a koordinátarendszerben.

Válasz: hamis, mert egyenes mentén helyezkednek el.

c) Az fejezet minden feladatában az összetartozó értékpárok egyenesen helyezkednek el.

Válasz: igaz.

d) Mindegyik feladatban az összetartozó értékpárok hányadosa állandó.

Válasz: nem igaz, csak a Mintapélda$_1$, az 1. és 4. feladatban.

Az eszközök között ugyanez az oldal megtalálható: ***7.6 fólia***

II. Lineáris függvények

Az előző fejezet mintapéldái közül a Mintapélda$_1$, és a feladatok közül az 1., és 4. feladatban az összetartozó értékpárok között egyenes arányosság áll fenn.

Nézzük meg a Mintapélda$_1$ alapján felírt táblázatot!

t (h)	1	2	3	4	8	12	16
V (liter)	5	10	15	20	40	60	80

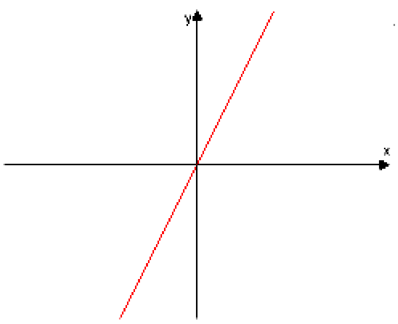
Tudjuk, hogy az egyenes arányosság esetén az összetartozó értékek hányadosa állandó.

$$\frac{5}{1}=5\,; \qquad \frac{10}{2}=5\,; \qquad \frac{20}{4}=\frac{40}{8}=\frac{60}{12}=\frac{80}{16}=\ldots=5.$$

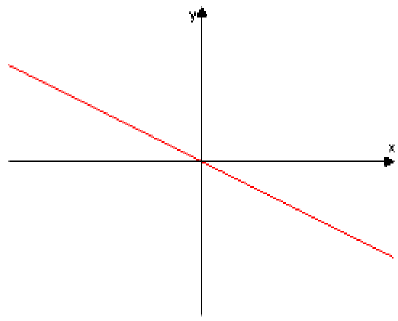
A függvény hozzárendelési szabálya: $f(t) = 5t$.

Ugyanezt tapasztaljuk a többi egyenes arányosságot kifejező függvény esetében is:
Az 1. feladatban az $f(t) = \frac{1}{2}t$, a 4. feladatban az $f(t) = 66{,}7\,t$ függvényeknél is az összetartozó értékek hányadosa állandó.

Tapasztaltuk, hogy az egyenes arányosságot kifejező függvények összetartozó értékpárjai egy, az origón áthaladó egyenesen, vagy annak egy részén helyezkednek el. Ezek a függvények, általánosan megfogalmazva $\boldsymbol{f(x)=mx}$ alakban írhatók fel, amelyben $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{m}$ valós számok. (Az egyenes arányosságot kifejező függvények esetében $x \neq 0$, ugyanis ez esetben az összetartozó értékek hányadosa nem értelmezhető)



$f(x) = mx$, ha $m > 0$



$f(x) = mx$, ha $m < 0$

Azokat a függvényeket, amelyek összetartozó értékpárjai egyenesen, vagy annak egy részén helyezkednek el **lineáris** függvényeknek hívjuk.

Az egyenes arányosságot kifejező függvény lineáris függvény.

Azt is láttuk, hogy a többi feladatban megadott függvények összetartozó értékpárjai is egyenesen helyezkednek el.

Például a Mintapélda$_2$-ben szereplő függvény hozzárendelési szabálya: $f(t) = -5t + 20$.

Képezzük most is az összetartozó értékek hányadosát!

$\frac{17,5}{0,5} = 35$; $\frac{15}{1} = 15$; $\frac{12,5}{1,5} = 8,333$; $\frac{10}{2} = 5$.

Ezek a függvények nem fejeznek ki egyenes arányosságot, de ezek is lineáris függvények. Összetartozó értékpárjainak képe egyenesre, vagy annak egy részére illeszkedik.

Mintapélda$_4$

Ábrázoljuk értéktáblázat nélkül koordináta-rendszerben az $f(x) = x + 2$ függyvényt!

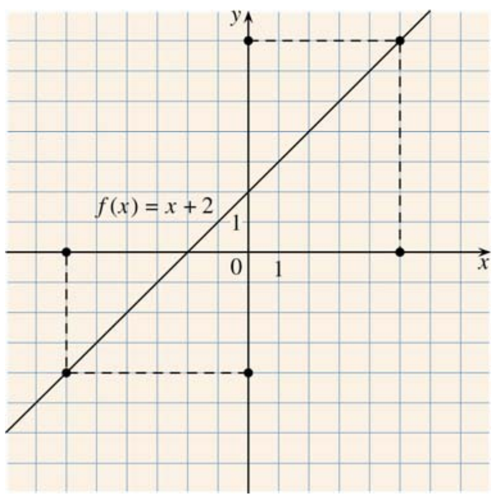
Megoldás: Mivel az egyenest már két pontja meghatározza, elég két értékpárt meghatározni és ábrázolni. A kapott pontokat összekötve megrajzolhatjuk a függvények képét. Számítsuk ki két tetszőleges x értékre a függvény helyettesítési értékét!

$f(x) = x + 2$; legyen $x_1 = -6$; akkor $f(-6) = -6 + 2 = -4$;

$x_2 = 5$; akkor $f(5) = 5 + 2 = 7$.

Az egyenes két pontjának koordinátái: $P(-6; -4)$; $Q(5; 7)$.

Rajzoljuk meg a két ponton átmenő egyenest!



Mintapélda₅

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

Mit tapasztalunk?

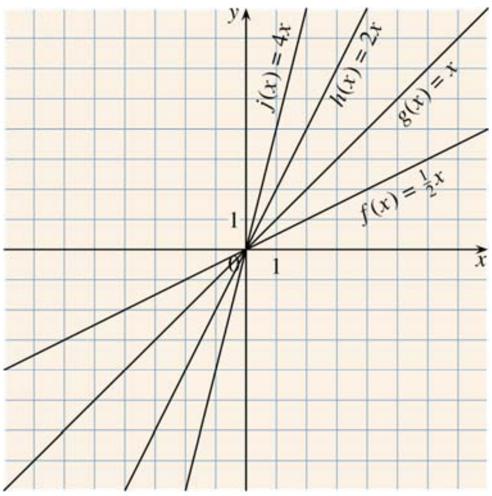
a) $f(x)=\frac{1}{2}x$; $g(x)=x$; $h(x)=2x$; $j(x)=4x$;

b) $f(x)=-\frac{1}{3}x$; $g(x)=-x$; $h(x)=-5x$; $j(x)=-3x$.

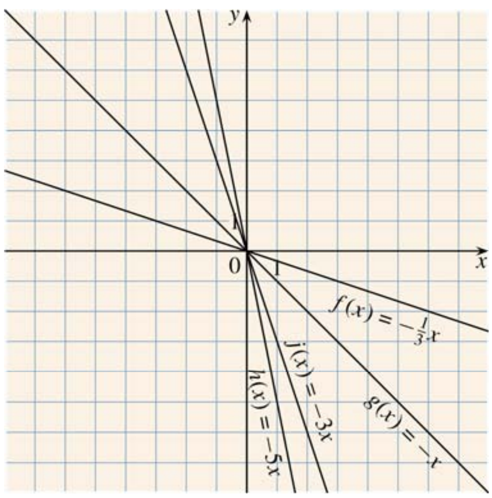
Megoldás:

Mivel ezeknek a függvényeknek a képe az origón áthaladó egyenes, elég egyetlen x értékre kiszámítani a helyettesítési értéket, az egyenes két pontját ismerve már megrajzolható.

a)



b)



Láthatjuk, hogy „meredekségük” az x számszorzójától függ. Ha ez nullánál nagyobb, az egyenes „emelkedő”, ha kisebb, akkor „süllyedő”.

Azt is láthatjuk, hogy a függvények képének „meredeksége” annál nagyobb minél nagyobb x számszorzójának abszolútértéke.

Írjuk fel a függvények hozzárendelési szabályát általános alakban!

$\boldsymbol{f(x)=mx}$, ahol $\boldsymbol{x}$ bármely valós értéket felvehet és $\boldsymbol{m}$, az $\boldsymbol{x}$ együtthatója, tetszőleges valós szám. Általánosan, a függvény „meredeksége” $\boldsymbol{m}$ értékétől függ.

Ha $\boldsymbol{m>0}$, akkor a függvény **növekvő,** növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak.

Ha $\boldsymbol{m<0}$, akkor a függvény **csökkenő**, vagyis növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak.

Ha $\boldsymbol{m=0}$, akkor $\boldsymbol{f(x)=0}$, ami azt jelenti, hogy a függvény értéke minden x értékre 0.

Ennek a függvénynek a képe is egyenes, ez az egyenes az ***x* tengely**.

Mintapélda$_6$

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

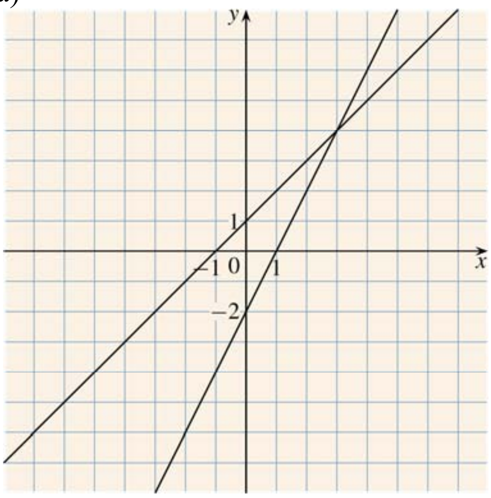
Mely pontjában metszik az egyenesek az y tengelyt?

a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 2$;

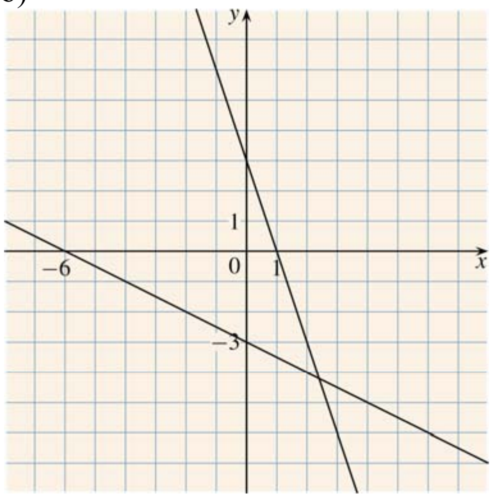
b) $f(x) = -3x + 3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$.

Megoldás: Számítsuk ki a függvény helyettesítési értékét két tetszőleges x értékre. A kapott két értékpár segítségével ábrázoljuk a függvényt!

a)



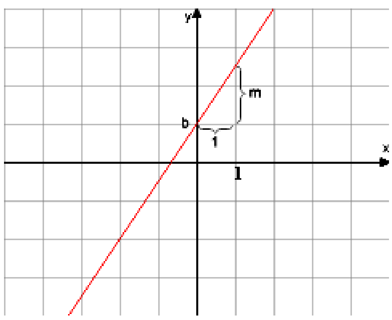
b)



A függvények hozzárendelési szabálya általánosan: ***f (x) = m x + b*,** ahol b a hozzárendelési szabályban szereplő konstans tag. Az egyenes az y tengelyt a b pontjában metszi. Ezért a képletben szereplő b-t **tengelymetszetnek** nevezzük.

Ezek az ismereteink segítenek a függvényábrázolásban is.

A függvényt ***m*** és ***b*** ismeretében számolás nélkül a következőképpen is megszerkeszthetjük:



f(x) = mx+b

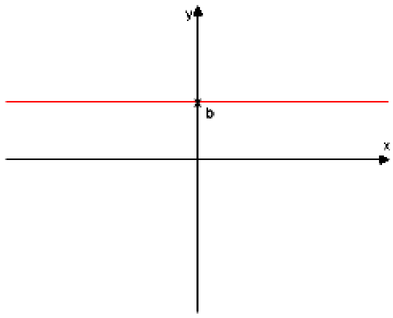
Az m a meredekséget határozza meg, vagyis azt mutatja meg, hogy egy egységnyi jobbra haladás esetén hány egységet megyünk az y tengely mentén felfelé, ha $m > 0$, vagy lefelé, ha $m < 0$.

Tehát megjelöljük az *y* tengelyen a *b* pontot, majd innen kiindulva 1 egységet lépünk jobbra és *m* egységet felfelé vagy lefelé *m* előjelétől függően.

Az $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$ képletben *m* és *b* valós számok. Jelentésük: ***m*** a függvény grafikonjának **meredeksége**, ***b*** pedig **az *y* tengellyel való metszéspontjának 2. koordinátája**.

A lineáris függvények más lehetséges jelölései: $x \mapsto mx + b$, vagy $y = mx + b$.

Ha $\boldsymbol{m = 0}$, akkor az $f(x) = b$ (vagy $x \mapsto b$, vagy $y = b$) hozzárendelést kapjuk, melyet **konstans függvény**nek nevezünk. Ekkor a függvény képe az *x* tengellyel párhuzamos egyenes.

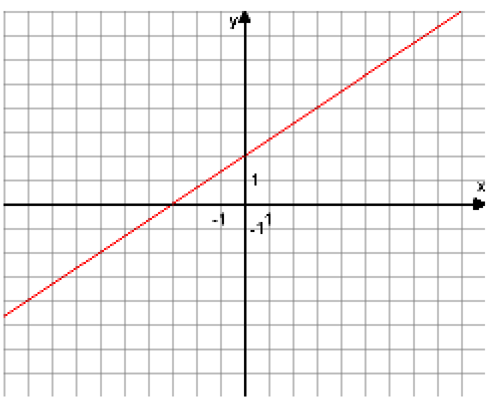


$f(x) = b$

Mintapélda$_7$

A megrajzolt grafikon alapján állapítsuk meg a hozzárendelési szabályt és adjuk meg az értéktáblázat hiányzó adatait! Olvassuk le a grafikonról a már ismert jelöléssel megadott helyeken a függvényértékeket!

$f(x) = ?$



$f(-2) =$

$f(-1) =$

$f(2) =$

x	–5	–3	0	1	4					
$f(x)$						–3	–2,8	0	1	3,4

Megoldás:

1. A lineáris függvény általános hozzárendelési utasítása: $f(x) = mx + b$, ahol m a függvény meredeksége, b pedig az y tengellyel vett metszéspontja.
Mivel a grafikonról leolvasva ez a metszéspont (+2)-nél található, így $b = +2$.
A függvény meredekségét úgy tudjuk leolvasni a grafikonról, hogy az x tengely pozitív irányába (jobbra) haladva a függvény képe hány egységnyit emelkedett az y tengely pozitív irányába.
Ennél a feladatnál ennek leolvasása nehézkes. Látható viszont, hogy 3 egységet haladva „jobbra", a függvény képe 2 egységnyit emelkedett. Akkor 1 egységet haladva ennek harmad-részét, $\frac{2}{3}$ egységet emelkedett. Tehát $m = \frac{2}{3}$.
A hozzárendelési utasítás: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.
2. Függvényértékek kiszámítása, értéktáblázat kitöltése:

$f(-2) = ?$
A hozzárendelési utasításban x helyére behelyettesítjük a –2 -t: $f(-2) = \frac{2}{3}\cdot(-2) + 2 = \frac{2}{3}$.
Hasonlóan : $f(-1) = \frac{4}{3}$; $f(2) = \frac{10}{3}$.

Az értéktáblázat első 5 oszlopának kitöltése, melyekben az x érték adott, és $f(x)$-et keressük, szintén ehhez hasonló. Az eredmények:

x	–5	–3	0	1	4
$f(x)$	$-\frac{4}{3}$	0	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$

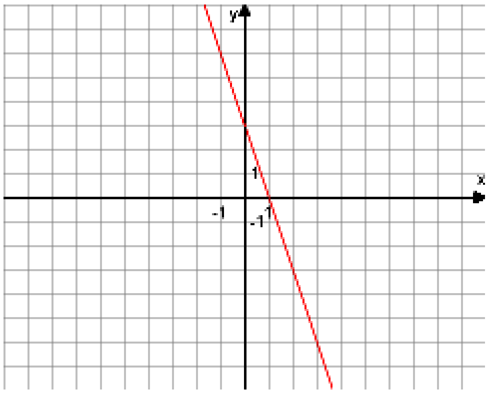
A 6–10. oszlopokban $f(x)$ értéke adott, és x-et keressük:
6. oszlop: $f(x) = -3$
$f(x)$ helyére írjuk a hozzárendelési utasítást: $\frac{2}{3}x + 2 = -3$.
Ezt az egyenletet megoldva kapjuk: $x = -7{,}5$.

A 7–10. oszlopok kitöltése is hasonló. Az eredmények összefoglalva:

x	–7,5	–7,2	–3	–1,5	2,1
$f(x)$	–3	–2,8	0	1	3,4

9. A megrajzolt grafikonok alapján állapítsd meg a hozzárendelési szabályt és add meg az értéktáblázat hiányzó adatait! Számítsd ki a már ismert jelöléssel megadott helyeken a függvényértékeket!

a) $g(x) = ?$



$g(-1) =$

$g(2) =$

$g(3) =$

x	–3	–2	0	1	7					
$g(x)$						–6	–1	0	3	5

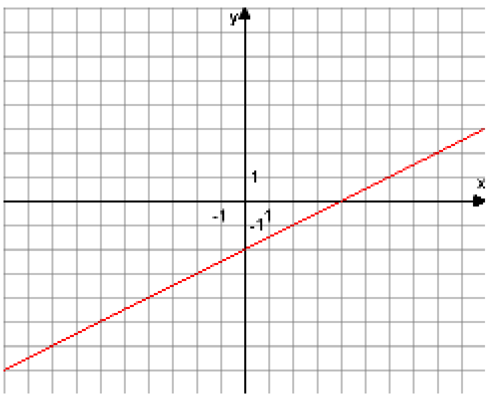
Megoldás:

$g(x) = -3x + 3$

$g(-1) = 6 \quad g(2) = -3 \quad g(3) = -6$

x	–3	–2	0	1	7	3	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$
$g(x)$	12	9	3	0	–18	–6	–1	0	3	5

b) $h(x) = ?$



$h\left(\frac{1}{2}\right) =$

$h(-5) =$

$h(8) =$

x	–2,5	–1	3	5,5	12					
$h(x)$						–3	$-\frac{1}{2}$	0	3,5	6

Megoldás: $h(x) = \frac{1}{2}x - 2$

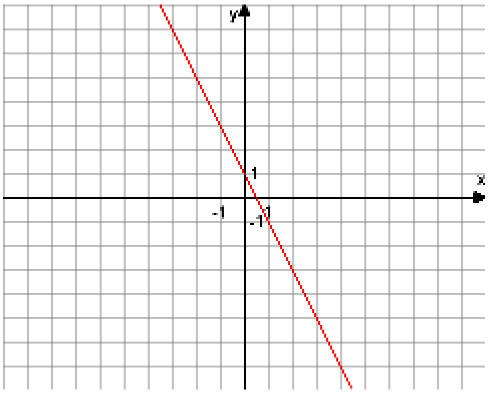
$h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}$

$h(-5) = -\frac{13}{2}$

$h(8) = 2$

x	–2,5	–1	3	5,5	12	–2	3	4	11	16
h(x)	–3,25	$-\frac{5}{2}$	–0,5	0,75	4	–3	$-\frac{1}{2}$	0	3,5	6

c) $l(x) = ?$



$l(0) =$

$l(10{,}6) =$

$l(-5{,}5) =$

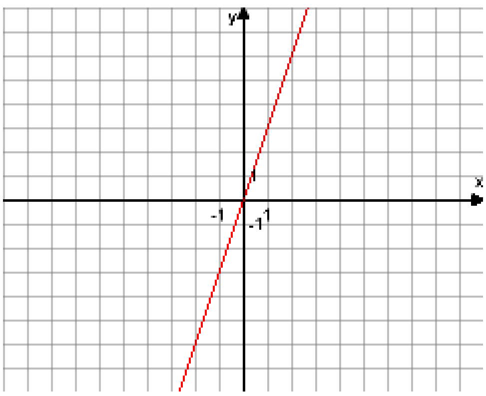
x	$\frac{3}{2}$	4	–1,5	–8	92					
$l(x)$						$-\frac{3}{4}$	–9	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	84

Megoldás: $l(x) = -2x + 1$

$l(0) = 1$
$l(10{,}6) = -20{,}2$
$l(-5{,}5) = 12$

x	$\frac{3}{2}$	4	–1,5	–8	92	$\frac{7}{8}$	5	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	–41,5
$l(x)$	–2	–7	4	17	–183	$-\frac{3}{4}$	–9	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	84

d) $m(x) = ?$

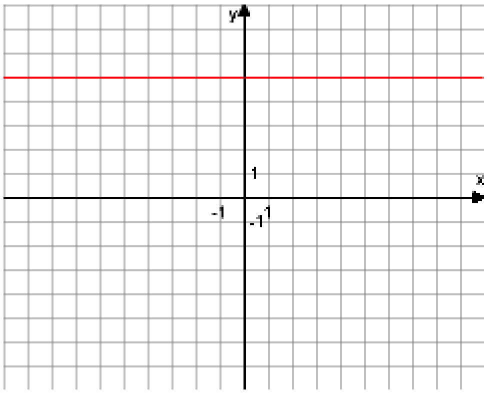


x	$-\frac{1}{3}$	–6	12	$\frac{2}{3}$	$\frac{97}{3}$					
$m(x)$						–8	–2	0	11	24

Megoldás: $m(x) = 3x$

x	$-\frac{1}{3}$	–6	12	$\frac{2}{3}$	$\frac{97}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{11}{3}$	8
$m(x)$	–1	18	36	2	97	–8	–2	0	11	24

e) $n(x) = ?$



x	$-\frac{34}{3}$	–2,75	0	$\frac{11}{2}$	$4{,}6\dot{6}$	2,84
$n(x)$						

Megoldás: $n(x) = 5$

x	$-\frac{34}{3}$	–2,75	0	$\frac{11}{2}$	$4{,}6\dot{6}$	2,84
$n(x)$	5	5	5	5	5	5

<u>Feldolgozási javaslat a 10 – 11.feladatokhoz:</u> A tanulók 2 fős, homogén csoportokat alkotnak. A tanár minden képességszinten kijelöl 3-3 megoldandó példát.

Ajánlás:

Alapszint (10. feladat): d.), g.), j.) illetve b.), e.), i.)

Középszint (11. feladat): c.), g.), k.) illetve a.), e.), i.)

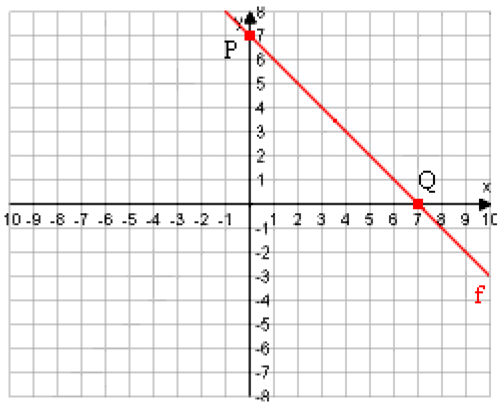
A tanulók kidolgozzák a példáikat a füzetükbe. Ha elkészültek, kicserélik a füzeteiket, és kijavítják a másikét. Saját aláírásukkal jelzik, hogy átnézték. Majd megbeszélik a javítást.
A feladatok megoldásához a 8 – 9. mintapéldák nyújtanak segítséget.

Mintapélda$_8$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $f(x) = -x + 7$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját!

Megoldás:

A Mintapélda$_1$-ben a függvény képét két tetszőleges értékpárjának ábrázolásával tudtuk megrajzolni. Nézzük meg, hogyan célszerű a két tetszőleges pontot kiválasztani!



A legegyszerűbb, ha azt a két pontot választjuk, amely a koordinátatengelyekre illeszkedik. Ezek egyik koordinátája 0.

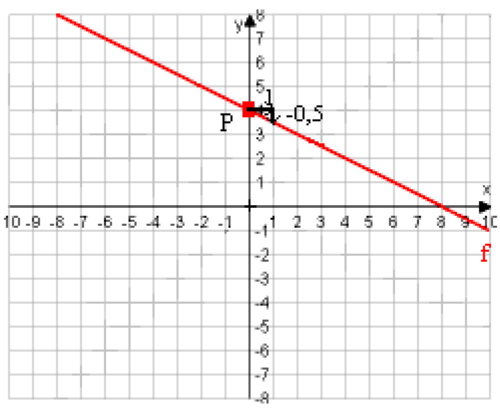
A P pont rajta van az y tengelyen. A P pont második, y koordinátája: $f(0) = 0 + 7 = 7$, ebből következik, hogy a pont koordinátái: $P(0; 7)$.

A Q pont pedig legyen az egyenesnek az a pontja, amely rajta van az x tengelyen, vagyis ahol a függvényérték 0. Itt $-x + 7 = 0$, azaz $x = 7$, ebből következik: $Q(7; 0)$
A P és Q pontokat összekötő egyenes lesz a függvény grafikonja.

Mintapélda$_9$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját!

Megoldás:



A hozzárendelési utasítás általános alakja $f(x)=mx+b$.

Ebben az esetben $b = 4$, $m = -\frac{1}{2}$. A b a koordinátasík azon pontjának 2. koordinátája, ahol a grafikon az y tengelyt metszi. Ez a $P(0; 4)$ pont.

m ismerete segít a függvény képének megrajzolásában: m az egyenes meredeksége, 1 egységnyi jobbra haladásra m egységet lépünk az y tengellyel párhuzamosan, m előjelétől függően lefelé vagy felfelé. Jelen esetben 1 egységnyi jobbra haladás után 0,5 egységet haladunk lefelé a „–" előjel miatt. A kapott pontot a P-vel összekötő egyenes lesz a keresett grafikon.

10. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját!

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x$ c) $f(x) = -3x$ d) $f(x) = -\frac{3}{2}x$

e) $f(x) = x + 2$ f) $f(x) = -x - 4$ g) $f(x) = -x + 4$ h) $f(x) = x - 3$

i) $f(x) = -2$ j) $f(x) = 3$

Megoldási útmutató: ezek a függvény elemi úton ábrázolhatóak. É.T: **R**; É.K: **R.**

11. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját!

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$ b) $f(x) = 3x - 5$ c) $f(x) = -5x + 1$

d) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 1{,}5$ e) $f(x) = \frac{2x+3}{6}$ f) $f(x) = \frac{4x-1}{2}$

g) $f(x) = -\frac{-5x+1}{3}$ h) $f(x) = -\frac{3x-2}{2}$ i) $f(x) = -(3x + 4)$

j) $f(x) = -(-\frac{2}{3}x - 1)$ k) $f(x) = -\frac{x+1}{2} - 7$ l) $f(x) = \frac{2}{3}(1 - x) + 1$

Megoldási útmutató: É.T.: **R**; É.K.: **R.** Az a), b,) c), d) feladatokban megadott függvények elemi úton ábrázolhatók, a g) – l) -ig megadottak pedig a kijelölt műveletek elvégzése után:

Mintapélda$_{10}$

Adjuk meg a lineáris függvény hozzárendelési utasítását, ha az átmegy a P(−3; 5) ponton és az *y* tengelyt a –10 helyen metszi!

Megoldás:

A lineáris függvény hozzárendelési utasításának általános alakja: $f(x) = mx + b$.

Adott: P(−3; 5), valamint $b = -10$.

$f(x)$ az *x* helyen felvett függvényérték. Mivel a *P* pont rajta van a grafikonon, így $x = -3$ és $f(-3) = 5$

Ezeket behelyettesítve az általános egyenletbe, kapjuk:

$5 = -3m - 10$. Ebből: $m = -5$.

A keresett hozzárendelési utasítás: $f(x) = -5x - 10$.

12. Add meg a lineáris függvény hozzárendelési utasítását, ha az

a) átmegy a $P(7; 4)$ ponton, és a meredeksége $\frac{1}{2}$,

b) átmegy a $P(2; 2)$ ponton és az *x* tengelyt a 6 pontban metszi,

c) átmegy a $P(-2; 6)$ ponton, és meredeksége 0,

d) átmegy a $P(100; -1)$ ponton és párhuzamos az *x* tengellyel!

Megoldás:

Minden feladat megoldásának a kulcsa az $f(x) = mx + b$ általános hozzárendelési utasítás felhasználása. Továbbá a megoldásban segít egy vázlat készítése a koordináta-rendszerben.

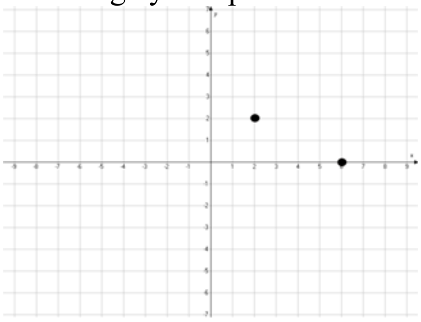
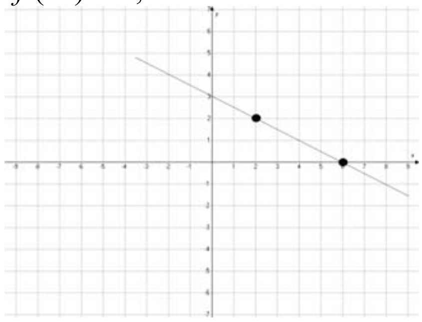
a) Cél: $f(x) = mx + b$, a hozzárendelési utasítás konkrét megadásához szükségünk van *m* és *b* konkrét értékeire. Ehhez tudjuk: $x = 7$; $f(7) = 4$; $m = \frac{1}{2}$.

Ezeket az adatokat behelyettesítve a képletbe, kapjuk: $4 = \frac{1}{2} \cdot 7 + b$.

Ebből átrendezéssel adódik: $b = \frac{1}{2}$.

Tehát az *m* és *b* értékeket visszahelyettesítve az általános hozzárendelési utasításba, a keresett lineáris függvényt az $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ hozzárendelési szabállyal adhatjuk meg.

b) Ha $x = 2$, akkor $f(2) = 2$.
Az x tengelyt a 6 pontban metszi: $f(x) = 0$, akkor $x = 6$.

Készítsünk táblázatot:

x	2	6	4	0	1
$f(x)$	2	0	1	3	2,5

Határozzuk meg a hozzárendelés szabályát:

Ebből 2 egyenletet lehet felírni két ismeretlennel: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

Vagy gondolkodhatunk úgy is:
Ha $x = 2$, akkor $f(2) = 2$.
Az x tengelyt a 6 pontban metszi: $f(x) = 0$, akkor $x = 6$.
Ebből 2 egyenletet lehet felírni két ismeretlennel:

I. $2 = 2m + b$
<u>II. $0 = 6m + b \rightarrow b = -6m$</u>
II.−t visszahelyettesítve I−be kapjuk: $2 = 2m - 6m$
$2 = -4m$
$-\frac{1}{2} = m \rightarrow \mathrm{b} = -6 \cdot (-\frac{1}{2}) = 3$
Megoldás: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

c) A keresett hozzárendelési utasítás: $f(x) = 6$.

d) A keresett hozzárendelési utasítás: $f(x) = -1$.

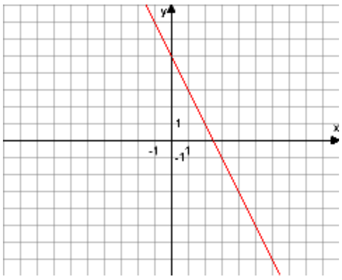
7.4 kártyakészlet: Csak a tanári anyagban szerepel, akkor használjuk, ha van rá elegendő idő!

Keresd meg az összetartozó négyeseket! (Egy összetartozó négyest alkot a függvény hozzárendelési utasítása, a grafikonja, és a rá illeszkedő két pontja.)

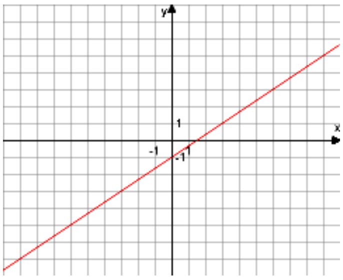
$f(x) = -2x + 5$ $g(x) = \frac{2}{3}x - 1$ $h(x) = \frac{2x-8}{4}$ $i(x) = -\frac{4+7x}{4}$

$P\left(-\frac{1}{2};6\right)$; $Q(3;1)$; $R(3; -\frac{25}{4})$; $S(10;3)$; $T(2;1)$; $U(-\frac{8}{7};1)$; $V(4;0)$; $Z\left(-1;-\frac{5}{3}\right)$

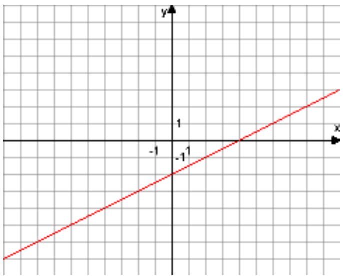
I.



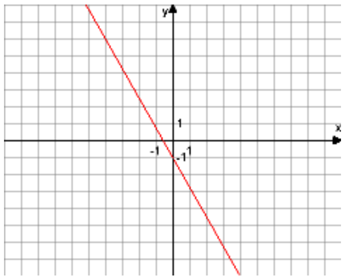
II.



III.



IV.



Ez a kirakós játék újabb gyakorlási lehetőség. Célja, hogy a tanulók játékos formában találkozzanak a középszintű feladatokkal. Kezdetben kijelölhető, hogy melyik gyerek melyik grafikonhoz vagy képlethez gyűjtse össze a többi kártyát. Később ezt is maguk alakítják ki.

<u>Feldolgozási javaslat</u>: A tanulók alkossanak 4 fős csoportokat. A tanár minden csoportban kiosztja a 7.4 kártyakészletben található kártyákat: minden asztal közepére teszi összekeverve, írással lefelé fordítva. A csoport minden tagja találomra húz belőle 4-et.

A tagoknak meg kell találniuk az összetartozó négyeseket úgy, hogy

– a felesleges kártyát csak középre tehetik be
– egymással nem beszélhetnek
– nem nyúlhatnak át a másikhoz a hiányzó kártyáért.

(Egy hozzárendelési utasítás az általa megadott függvény grafikonjával illetve két, a hozzárendelési utasítást kielégítő pont alkot egy összetartozó négyest.)