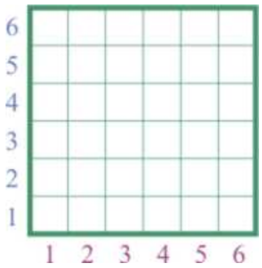
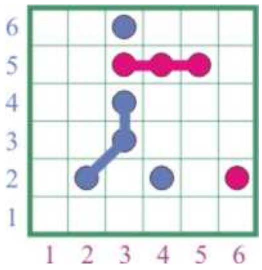
I. Hozzárendelés utasítással és ábrázolással

Bevezető játék: A játékkal feleleveníthetjük, hogyan tájékozódhatunk a síkon.





A játékot párban játsszuk, amelyhez négyzetrácsos papír, dobókocka, piros és kék színes ceruza szükséges.

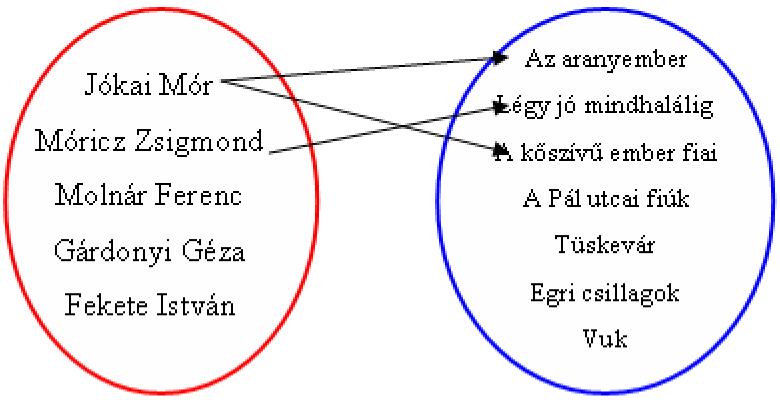
Készítsük el a táblát. Rajzoljunk egy 6×6-os négyzetet. A sorokat és oszlopokat jelöljük meg az ábrán látható módon.

A játék menete:
Az első játékos kétszer dob. Az első dobás mutatja, hogy hányadik oszlop, a második pedig, hogy hányadik sor kereszteződésében levő négyzetbe rajzolhat a játékos piros korongot. Ha már foglalt a négyzet, akkor nem rajzolhat semmit.
A következő játékos ugyanígy jár el, a dobások által meghatározott négyzetbe kék korongot rajzol. Ha sikerül két azonos színű korongot egymás mellé rajzolni, azokat össze lehet kötni. Egy korongot legfeljebb két másikkal lehet összekötni. Az a győztes, aki hosszabb láncot tud készíteni a játék ideje alatt.

A tanulók ismerik a halmaz fogalmát, az általános iskolából pedig a hozzárendelés fogalmát.Elevenítsük fel ezeket az ismereteket egyszerű ábrákkal!

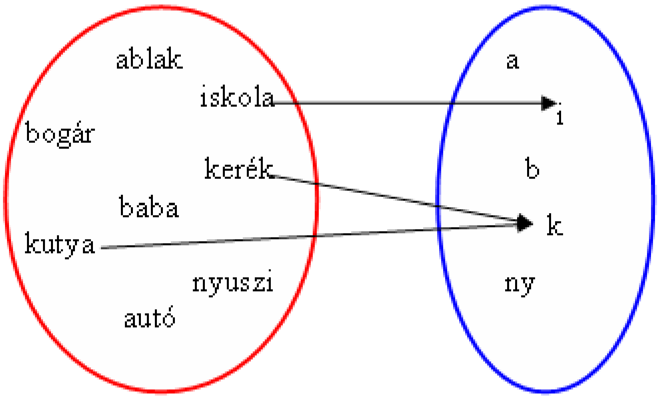
1. Rajzold be a hiányzó nyilakat! Fogalmazd meg a hozzárendelés szabályát!

a)



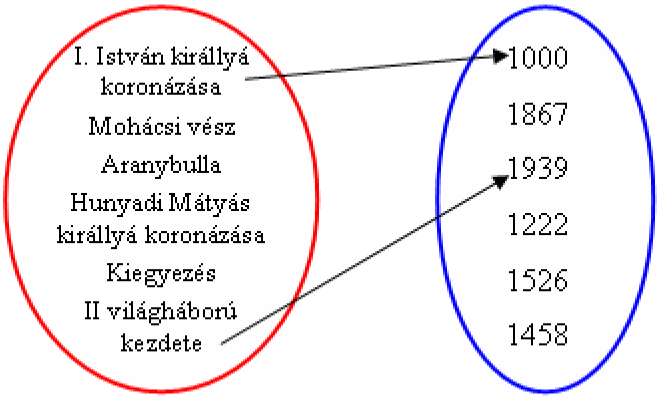
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: szerzőkhöz azok műveit rendeljük.

b)



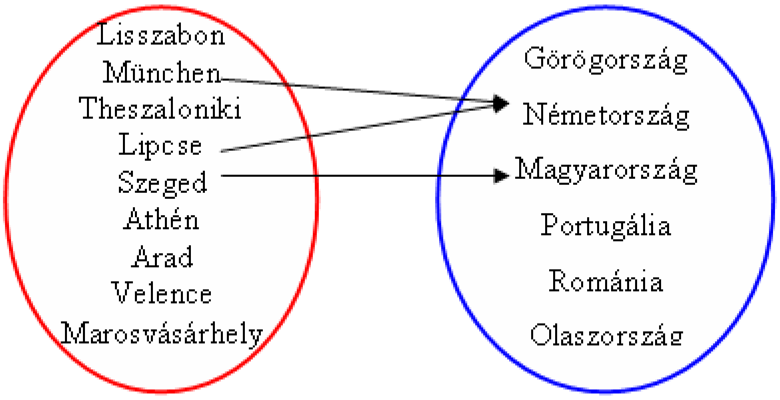
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: szavakhoz azok kezdőbetűit rendeljük.

c)



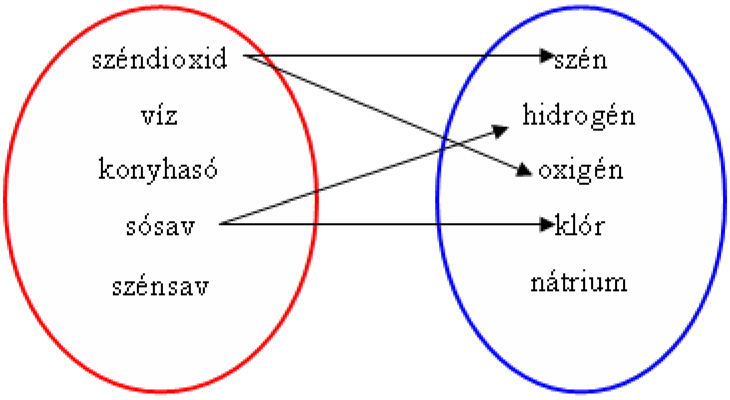
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: történelmi eseményekhez azok évszámát rendeljük.

d)



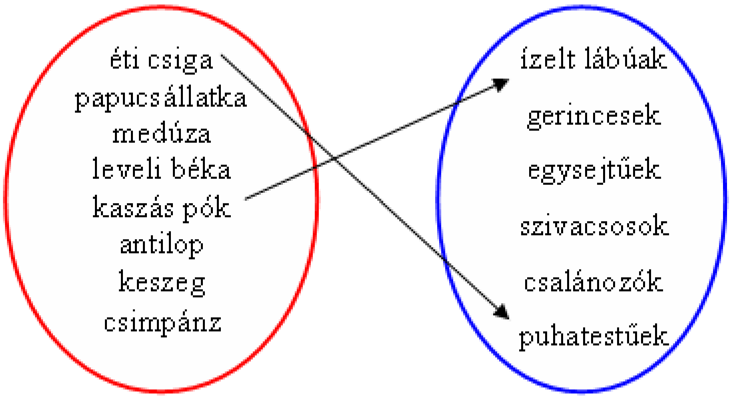
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: városokhoz hozzárendeljük azt az országot, amelyikben a város található.

e)



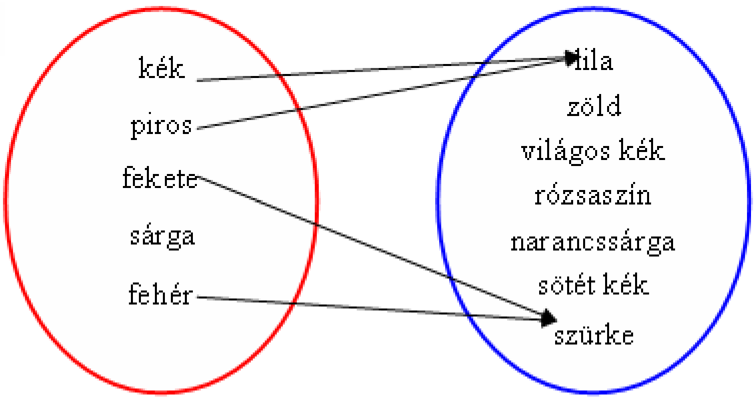
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: vegyületekhez azok alkotó elemeit rendeljük

f)



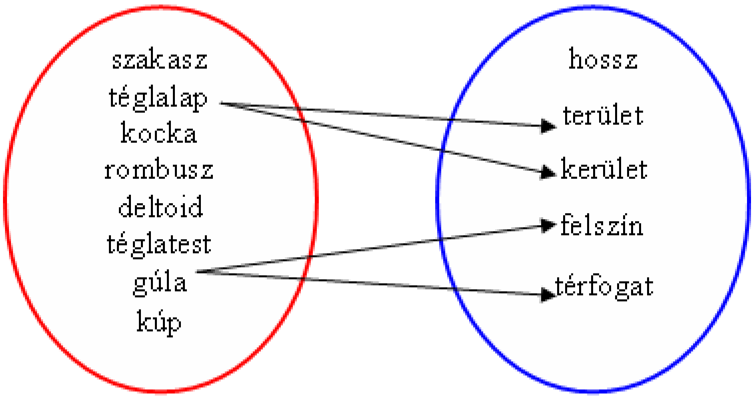
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: állatokhoz hozzárendeljük azt a törzset, amelyikbe tartozik.

g)



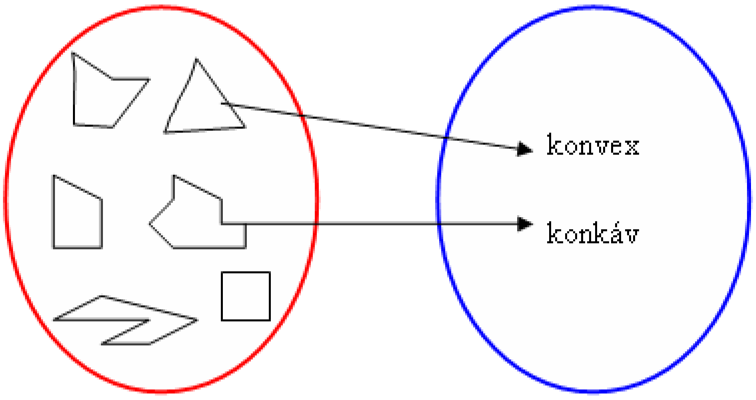
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: két színhez hozzárendeljük azt a színt, amelyet e kettő keverékéből kapunk.

h)



Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy sík vagy térbeli alakzathoz hozzárendeljük annak bizonyos mértékeit.

i)



Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy síkidomhoz hozzárendeljük, hogy konvex vagy konkáv.

Módszertani javaslat: Ismételjük át, hogy hányféle sorrend lehetséges. Hasonló feladat már volt. A hozzárendelési szabályt ne képlettel adjuk meg!

Mintapélda$_1$

Hányféleképpen állhatnak sorba egy bolt pénztáránál a vásárlók, ha 3-an, 4-en, 5-en, 8-an, vannak?

Megoldás:

2 személy esetén 2-féle, 3 esetében $3\cdot 2$-féle, 4 esetében $4\cdot 3\cdot 2$-féle, . . 8 esetében $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$-féleképpen állhatnak sorba a vásárlók.

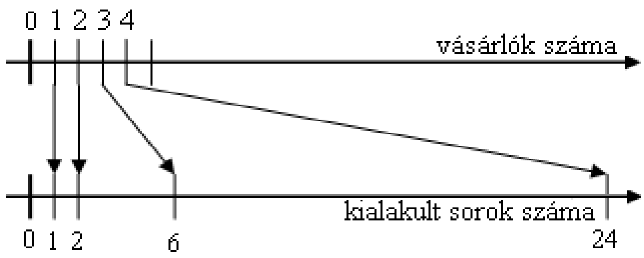
Írjuk be a táblázatba az összetartozó értékpárokat:

Táblázat:

Vásárlók száma	1	2	3	4	5	6	7	8
Kialakult sorok száma	1	2	6	24	120	720	5040	40320

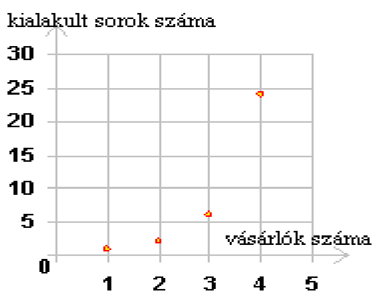
Ábrázoljuk nyíldiagrammal az összetartozó értékpárokat:

Nyíldiagram:

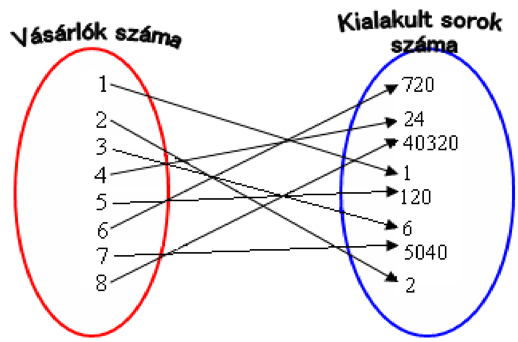


Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat:

Koordináta-rendszer:



Venn-diagram:



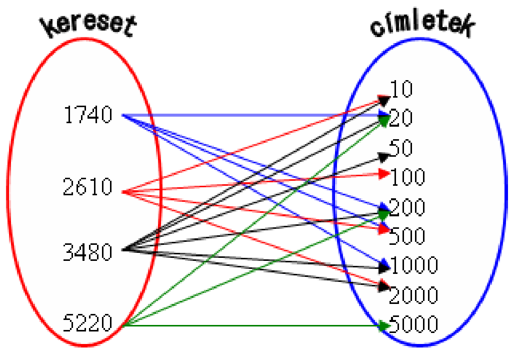
Mintapélda$_2$

Karcsi nyáron 435 Ft-os órabérért dolgozott. Fizetségét mindig a nap végén kapta meg. A munkáltató úgy fizet, hogy mindig a lehető legkevesebb bankjegy kerüljön ki a kezéből. A táblázat azt mutatja, hogy milyen címletekben kapta meg a fizetését Karcsi.

Nap	Kereset	Címletek
1.	3480	$1\cdot 2000+1\cdot 1000+2\cdot 200+1\cdot 50+1\cdot 20+1\cdot 10$
2.	1740	$1\cdot 1000+1\cdot 500+1\cdot 200+2\cdot 20$
3.	2610	$1\cdot 2000+1\cdot 500+1\cdot 100+1\cdot 10$
4.	2610	$1\cdot 2000+1\cdot 500+1\cdot 100+1\cdot 10$
5.	2610	$1\cdot 2000+1\cdot 500+1\cdot 100+1\cdot 10$
6.	5220	$1\cdot 5000+1\cdot 200+1\cdot 20$
7.	0	0
8.	0	0
9.	5220	$1\cdot 5000+1\cdot 200+1\cdot 20$
10.	2610	$1\cdot 2000+1\cdot 500+1\cdot 100+1\cdot 10$

Ábrázoljuk Venn-diagrammal, hogy az összegeket, amelyeket kapott, milyen címletekben fizették ki a számára!

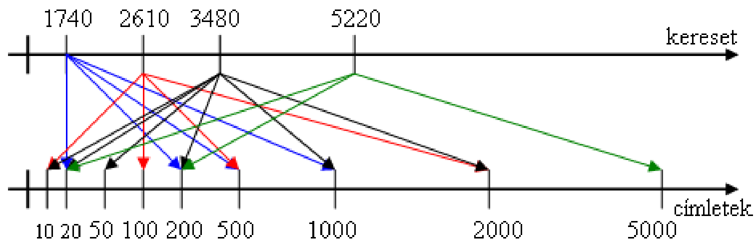
Venn-diagram:



Koordináta-rendszer:
Megjegyzés: Itt a koordináta-rendszerrel történő ábrázolás nagyon erőltetett. A függvények különböző ábrázolásai éppen arra jók, hogy több lehetőség közül a feladattól függően választhatnak.

Ábrázoljuk az összefüggést nyíldiagrammalés táblázattal.

Nyíldiagram:



Táblázat:

Kereset	Címletek								
	5000	2000	1000	500	200	100	50	20	10
1740			x	x	x			x	
2610		x		x		x			x
3480		x	x		x		x	x	x
5220	x				x			x	

Feladatok

2. Julcsi néni egy kis faluban éldegél. A húsvét ünnepe nagy esemény számára, mert ekkor a falu apraja-nagyja, és a rokonai is köré gyűlnek. Hogy ne kelljen az utolsó pillanatban kapkodnia, elhatározta, hogy a következő hónap elsejétől kezdve 1 hónapon keresztül minden nap annyi tojást vesz, amennyi nap eltelt már a hónapból. A hónap 31 napos. Hogyan gyarapszik Julcsi néni tojáskészlete napról napra?

Hozzárendelési szabály:

1. napig összegyűjtött tojások száma: 1

2. napig összegyűjtött tojások száma: 1 +2 = 3

3. napig összegyűjtött tojások száma: 1 + 2 +3 = 6

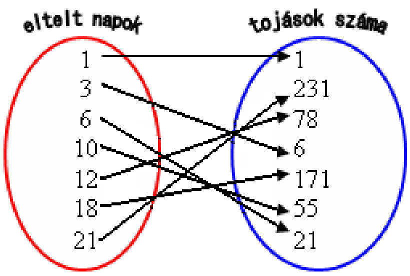
4. napig összegyűjtött tojások száma: 1 + 2 +3 + 4 = 10.

k nap esetén az addig összegyűjtött tojások száma: 1 + 2 + 3 + … + *k*.

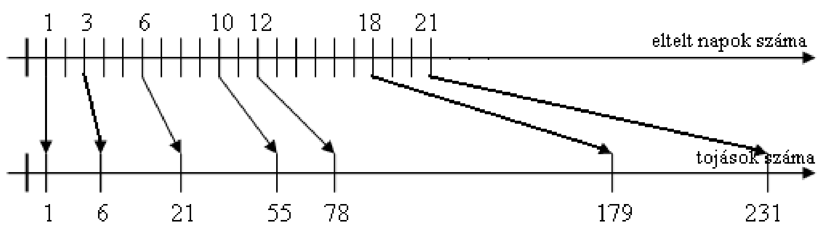
Rendeljük hozzá az eltelt napokhoz a tojások számát! Készítsünk táblázatot és ábrázoljuk a hozzárendelést grafikonon!

Megoldás:

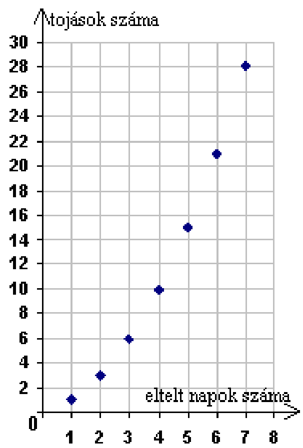
Venn-diagram:



Nyíldiagram:



Koordináta -rendszer:



Táblázat:

eltelt napok	1	3	6	10	12	18	21
tojások száma	1	6	21	55	78	171	231

3. A gyerektáborban füves focipályán játszhatnak a gyerekek. A gondnok mindig a tábor első napjának délelőttjén vágja le a füvet. Egymagának 4 órájába telik ez a tevékenység, ezért igyekszik minél több gyereket bevonni a munkába. Mennyi idő alatt végeznek, ha 1, 2 ,3, …,*k* gyerek segít neki és mindenki azonos teljesítménnyel dolgozik?

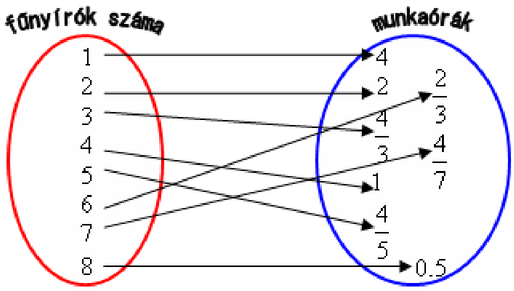
Hozzárendelési szabály: minél többen segítenek, annál hamarabb lesznek készen a fűnyírással. Ha k–1 gyerek segít, azaz k ember végzi a fűnyírást, akkor $\frac{4}{k}$ óra alatt fejezik be a munkát.

Rendeljük a füvet nyírók számához a munkaórák számát! Készítsünk táblázatot és ábrázoljuk a hozzárendelést grafikonon!

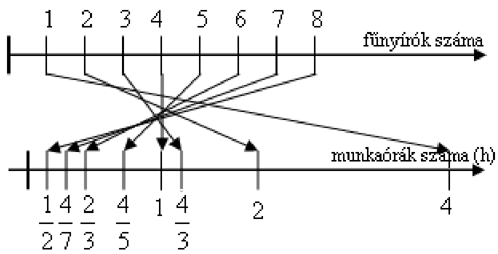
Megjegyzés: 8-nál több főre nem érdemes számolni, hiszen nem férnek el a pályán.

Megoldás:

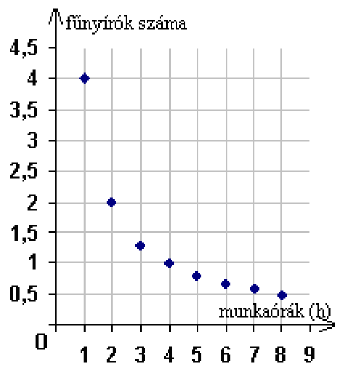
Venn-diagram:



Nyíldiagram:



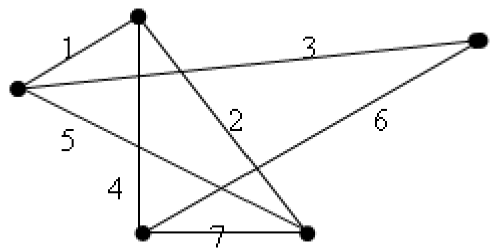
Koordináta-rendszer:



Táblázat:

fűnyírók száma	1	2	3	4	5	6	7	8
munkaórák (h)	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$

4. A következő térkép az 5 várost összekötő vasúti vonalakat ábrázolja:



Útvonal	Útvonal hossza (km)
1	33
2	42
3	74
4	40
5	59
6	68
7	35

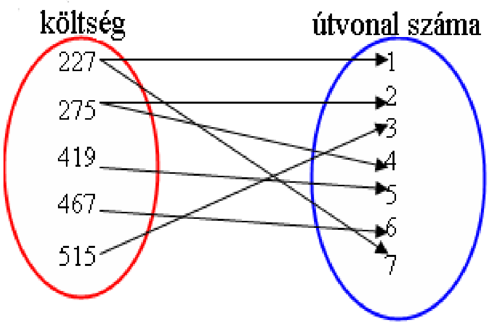
A vasútjegy ára 7 km-ig 35 Ft, utána 7 km-enként 48 Ft-tal nő. Melyek az azonos költségű útvonalak?
A költséghez rendeljük hozzá az útvonalakat.

Készíts táblázatot!
Ábrázold a hozzárendelést többféle módon!

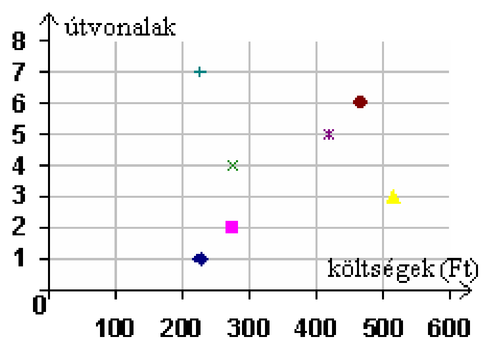
Megoldás:

költség (Ft)	hossz (km)	**sorszám**
227	33; 35	**1; 7**
275	42; 40	**2; 4**
515	74	**3**
419	59	**5**
467	68	**6**

Venn-diagram:



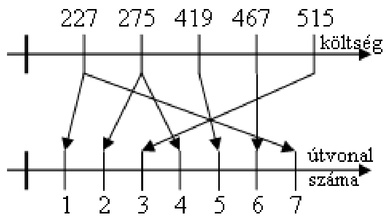
Koordináta-rendszer:



Táblázat:

költség (Ft)	227	275	419	467	515
Útvonal száma	1	2	5	6	3
	7	2			

Nyíldiagram:



A függvény fogalma, megadása

A hozzárendelések között vannak olyanok, amelyek az egyik halmaz minden eleméhez hozzárendelik valamely halmaznak **pontosan egy elemét**. Ezek az **egyértelmű hozzárendelések**.

Az egyértelmű hozzárendeléseket **függvényekn**ek nevezzük.

A függvényt megadhatjuk táblázattal, grafikonnal, különböző nyíldiagrammal, képlettel, vagy egyéb utasítással. Azt a halmazt, amelynek az elemeihez hozzárendeljük a másik halmaz elemeit, **alaphalmaznak**, a másik halmazt, amelybe a hozzárendelt elemek tartoznak, **képhalmaznak** nevezzük**.** A **hozzárendelési szabály** (utasítás) adja meg a függvényt, amely szerint az alaphalmaz elemeihez **egyértelműen** hozzárendeljük a képhalmaz elemeit.

Az alaphalmazt, vagy annak egy részhalmazát **értelmezési tartománynak** (szokásos jelölése: É.T.) hívjuk, elemei a változók. A képhalmazt (vagy annak egy részhalmazát) **értékkészletnek** (É.K.) nevezzük, melynek elemei a függvényértékek.

Azokat a függvényeket, amelyek mindkét irányban egyértelműek, („megfordíthatók”) **kölcsönösen egyértelmű függvényeknek** nevezzük. A kölcsönösen egyértelmű függvényekben az alaphalmaz minden egyes eleméhez a képhalmaznak egyetlen elemét rendeltük hozzá.

Módszertani megjegyzés: Érdemes megbeszélni a tanulókkal a következőket:
Általános iskolában a függvénykapcsolatot „talpas nyíllal” jelöltük. Például azt a függvénykapcsolatot, hogy minden valós számhoz rendeljük hozzá a háromszorosát, így jelöltük: $x \mapsto 3x$.
Ugyanezt a függvényt így is jelölhetjük: $f(x) = 3x$. A középiskolában általában ez utóbbi jelölést használjuk.
Természetesen más betűket is használhatunk: $g(x)$; $k(x)$, stb. x helyett is használhatunk más betűt. Például az időt t-vel, az utat s-sel is szoktuk jelölni.

5. Ha az 1–4. feladatok közül megoldottál egyet, válaszolj a következő kérdésekre az eddigi tapasztalataid alapján!

a) Minek az alapján döntöd el, hogy melyek az összetartozó értékek?

b) Hogyan tudnád 2 csoportba (halmazba) sorolni az értékeket?

c) Hogyan jelenik meg a hozzárendelés egyértelműsége a különböző függvény-ábrázolási módokban?

Beszéljük meg a feladat megoldását közösen, a grafikonok vizsgálata alapján gyűjtsük össze a kérdésre adott válaszokat, majd foglaljuk össze a hallottakat táblázatban.

Megoldás:

a) a hozzárendelési utasítás alapján; b) alaphalmaz, képhalmaz; c) ezt mutatja a táblázat.

Ha megválaszoltuk a feladat kérdéseit közösen, foglaljuk össze tapasztalatainkat! Minden esetre adjunk példát!

A hozzárendelési útmutatóból világosan kiderül, hogy mely halmaz elemeihez rendeljük valamely halmaz elemeit. így pontosan meg tudjuk mondani, melyik halmaz az alaphalmaz, vagyis a függvény értelmezési tartománya, és melyik halmaz a függvény értékkészlete. Táblázatba foglaltuk, hogy az egyes ábrázolási módokban hogyan jelenik meg a hozzárendelés egyértelműsége:

c)

	Egyértelmű	Nem egyértelmű
Venn-diagram	egy nyíl indul ki az alaphalmaz elemeiből	több nyíl is kiindulhat
Nyíldiagram	egy nyíl indul ki az alaphalmaz elemeiből	több nyíl is kiindulhat
Táblázat	az első sorban szereplő értékek alatt egyetlen érték található (a táblázat kétsoros)	az első sorban szereplő értékek alatt több érték is található (a táblázat többsoros)
Koordináta-rendszer	az x értékekhez pontosan egy y érték tartozik	az x értékekhez több y érték is tartozhat

Módszertani megjegyzés: Feldolgozási javaslat a 6., 7., 8. feladatokhoz: A tanulók párosával dolgozzanak. A tanár kijelöl 4–4 feladatot a páros egyik, illetve másik tagjának. A feladatokat önállóan oldják meg, majd ellenőrzik a párjukat.
Ha diagram vagy grafikon adott, akkor amennyiben a grafikon egy függvény képe, adják meg az értelmezési tartományt, értékkészletet és a hozzárendelési utasítást is.
Ha a hozzárendelési utasítás adott, ábrázolják diagrammal vagy koordináta-rendszerben, grafikonnal, függetlenül attól, hogy függvény-e a hozzárendelés, vagy sem.

6. Az 1. feladatból válaszd ki azokat a hozzárendeléseket, amelyeknek a megfordítása is egyértelmű hozzárendelés (megfordítása = az alaphalmaz és a képhalmaz felcserélése)!

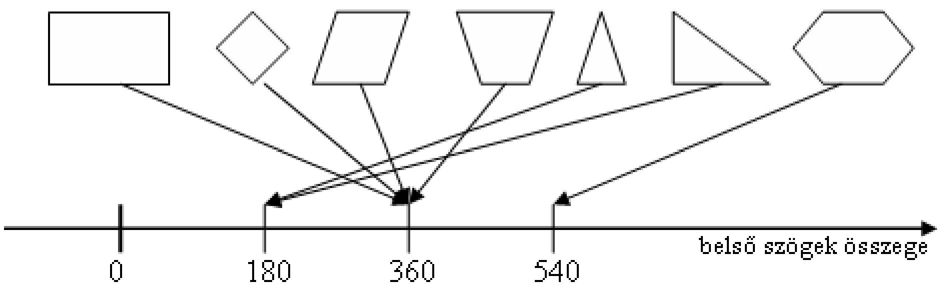
Megoldás:

a) nem függvény, de ebben a feladatban a megfordítása az;
b) függvény, de a megfordítása nem az;
c) függvény, és ebben a példában a megfordítása is az;
d) függvény, de a megfordítása nem;
e) nem függvény, és a megfordítása sem (hanem többváltozós függvény, nem tananyag);
f) függvény, de a megfordítása nem;
g) ez egy kétváltozós függvény, de a megfordítása nem;
h) nem függvény, és a megfordítása sem;
i) függvény, de a megfordítása nem az.

A 7. és 8. feladatokban elsősorban olyan hozzárendelésekkel foglalkozunk, ahol számokhoz rendelünk számokat. (Elfogadott megállapodás, hogy amennyiben nem jelezzük az értelmezési tartományt, akkor értelmezési tartománynak a valós számok halmazát, illetve annak a legbővebb részhalmazát tekintjük, ahol egyáltalán értelmezhető a hozzárendelési utasítás.)

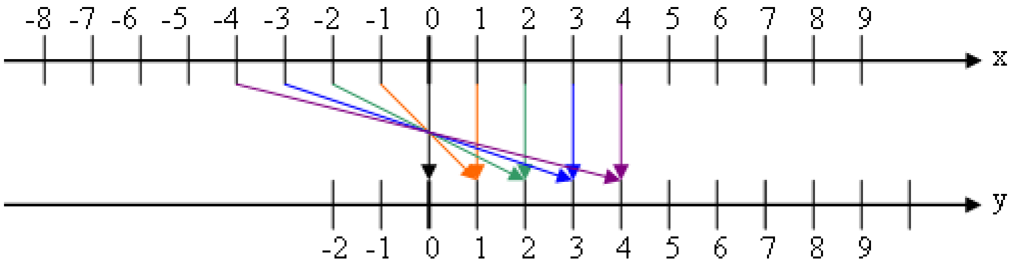
7. A nyíldiagramokkal megadott ábrákból válaszd ki a függvényeket! Függvény esetén add meg az értelmezési tartományt, az értékkészletet, és a hozzárendelési utasítást!

a)



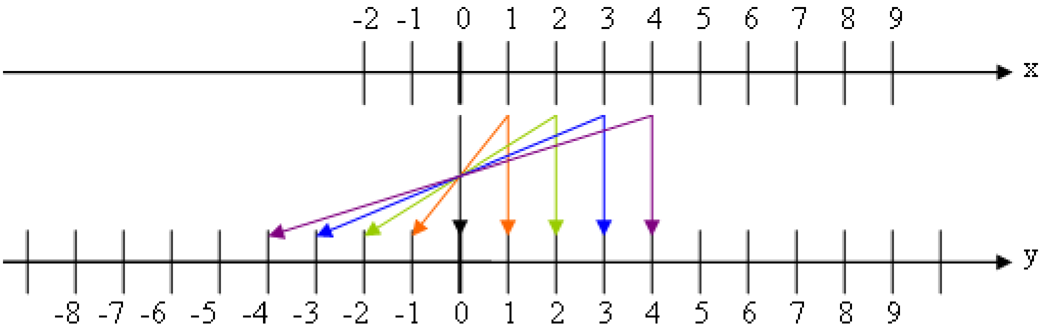
Megoldás:
A hozzárendelési utasítás: Egy síkidomhoz hozzárendeljük belső szögeinek összegét.
Függvény. Az É.T. az adott hét síkidomból álló halmaz, az É.K. három elemű:
180º, 360º, 540º.

b)



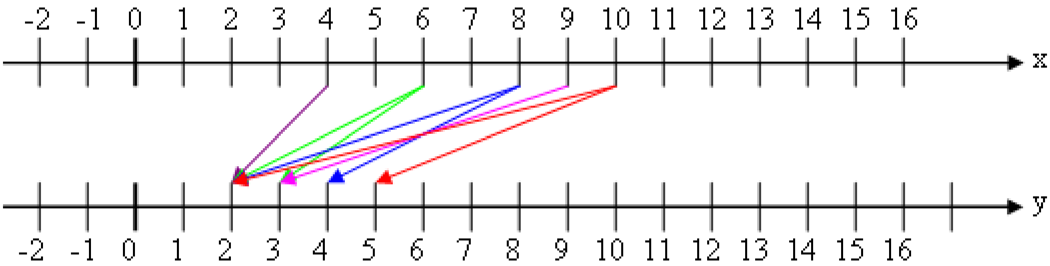
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy számhoz hozzárendeljük az abszolútértékét. Függvény. É.T.: egész számok halmaza, É.K.: nemnegatív egész számok.

c)



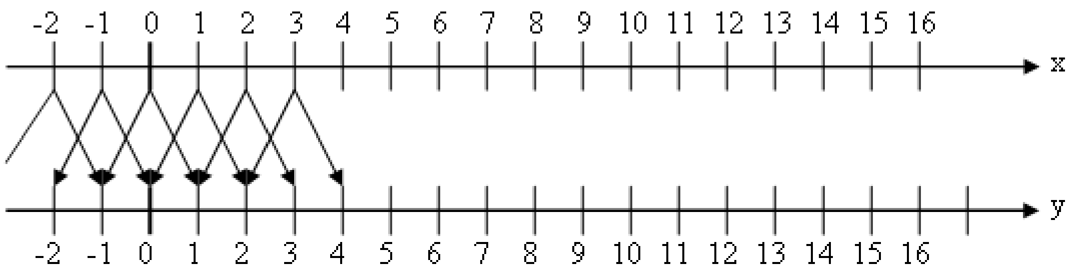
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy nemnegatív számhoz hozzárendeljük azokat a számokat, amelyeknek az adott szám az abszolútértéke. Nem függvény.

d)



Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy számhoz hozzárendeljük a valódi osztóit. Nem függvény.

e)

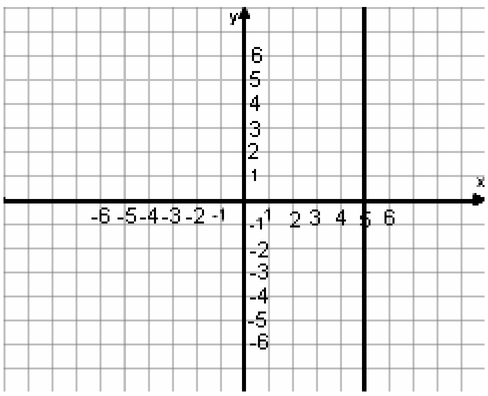


Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy egész számhoz hozzárendeljük a szomszédjait. Nem függvény.

8. Válogasd ki a következő rajzok közül azokat, amelyek függvény grafikonjai lehetnek!

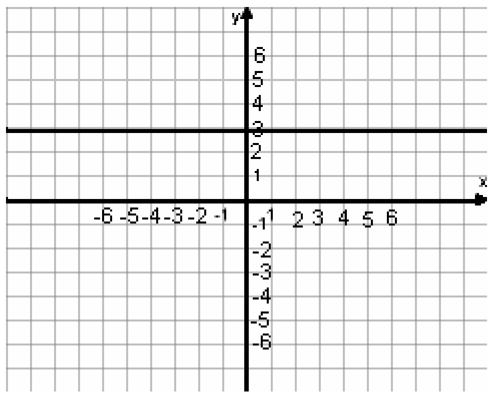
Olvasd le a függvénygrafikonok értelmezési tartományát és értékkészletét!

a)



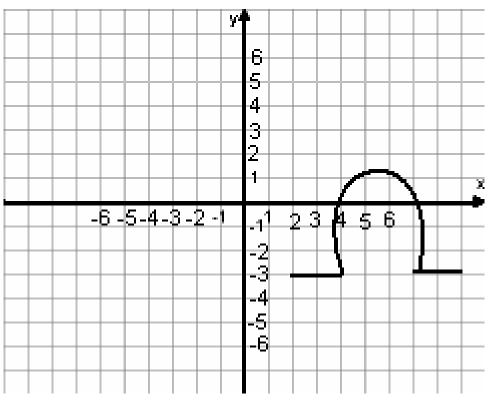
Megoldás: Nem függvény

b)



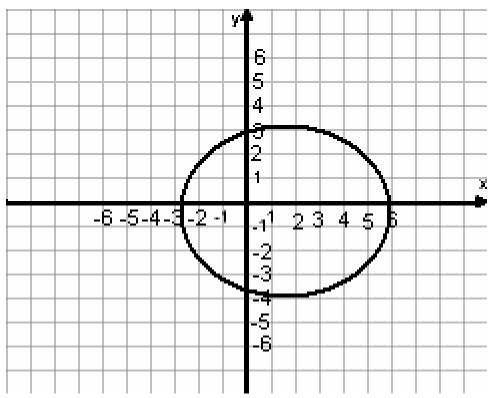
Függvény. É.T.: $x \in \mathbf{R}$; É.K.: $f(x) = 3$

c)



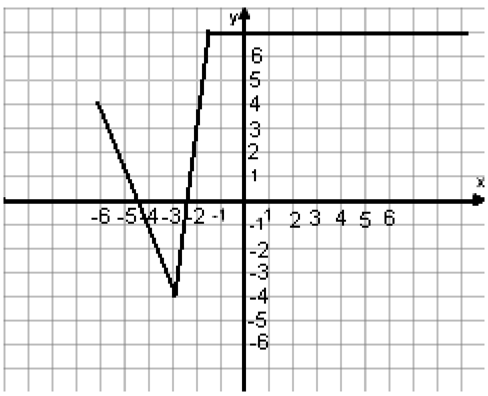
Megoldás: Nem függvény

d)



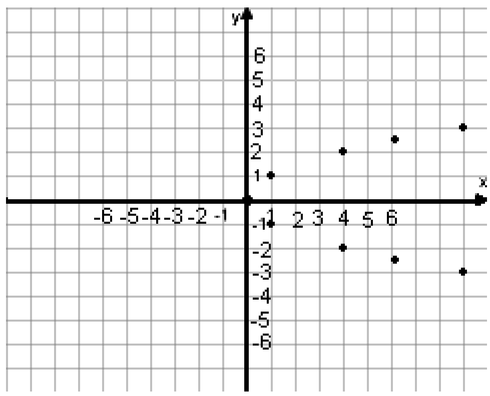
Nem függvény

e)



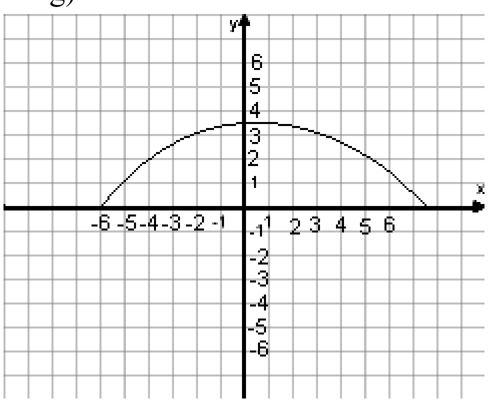
Megoldás: Függvény. É.T.: $x \ge -6$;
É.K.: $-4 \le f(x) \le 7$

f)



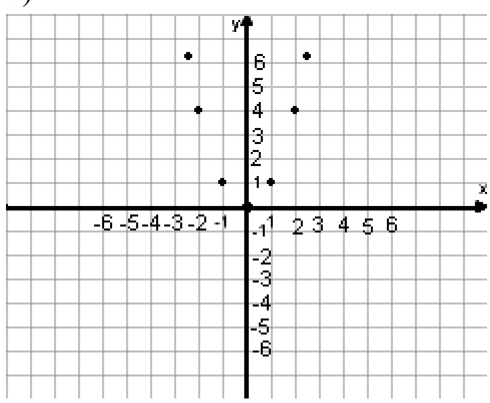
Nem függvény

g)



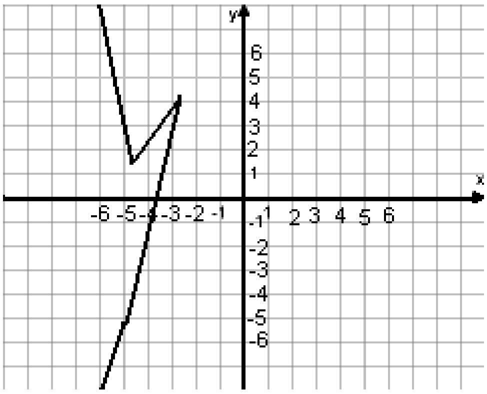
Megoldás:
Függvény. É.T.: $-6 \le x \le 7{,}5$;
É.K.: $0 \le f(x) \le 3{,}5$

h)



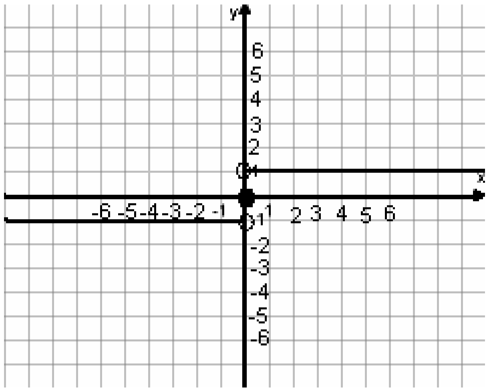
Függvény. É.T.: $x \in \{-2{,}5; -2; -1; 0; 1; 2; 2{,}5\}$;
É.K.: $f(x) \in \{0;\ 1;\ 4;\ 6{,}25\}$

i)



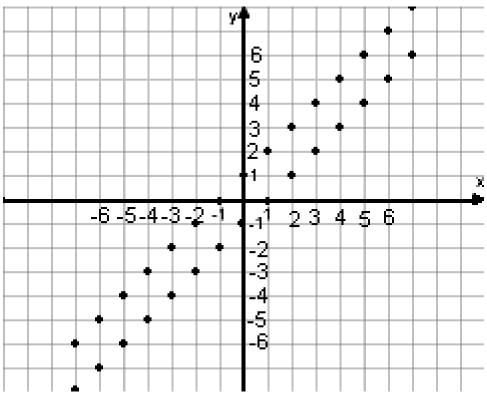
Megoldás: Nem függvény

j)



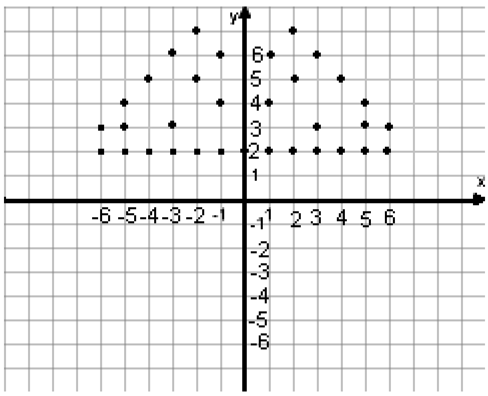
Függvény: É.T.: $x \in \mathbf{R}$; É.K.: $f(x) \in \{-1;0;1\}$

k)



Megoldás: Nem függvény

l)



Nem függvény

II. Függvénytulajdonságok

Módszertani megjegyzés: Ezek a feladatok hétköznapi szituációkon keresztül, szemléletesen mutatják be a függvénytulajdonságokat. A folyamatok és a hozzátartozó grafikonok elemzése játékosan készítik elő a monotonitás, zérushely, szélsőérték fogalmát, amit rendszerezés után a tanár tisztáz.
Feldolgozási javaslat a 3. mintapéldához és a 9 – 13. feladatokhoz: A tanulók kétfős csoportokban dolgoznak, fejenként 2, egymástól eltérő típusú példát oldanak meg.

Mintapélda$_3$

Egy reggel négy gyerek elindult az iskolába. Mozgásukat követheted a négy út−idő grafikonon. Közülük hárman elmesélik, hogy milyen volt az útjuk. Találd ki, hogy melyik grafikon kinek a mozgását ábrázolja!

Feri: Biciklivel járok iskolába. Mindig azonos tempóban szoktam menni. Ma, amikor útközben ránéztem az órámra, úgy láttam, hogy nem fogok beérni, ezért gyorsabban hajtottam a kerékpárt.

Béla: Gyalog járok az iskolába. Már az út egy részét megtettem, amikor eszembe jutott, hogy nem hoztam el Ferinek az ígért könyvet. Visszafordultam érte, és ezek után persze futnom kellett, hogy ne késsek el.

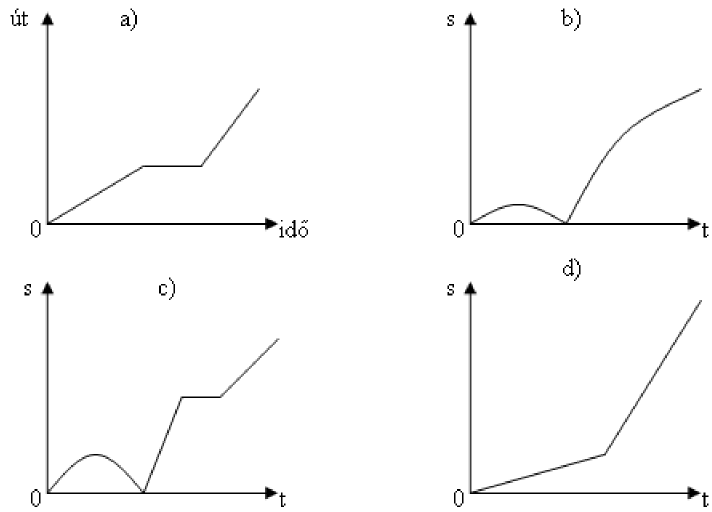
Jóska: Én minden nap robogóval járok, de ma nagyon megjártam. Már félúton voltam, amikor elfogyott a benzin. Elég sokáig kellett várnom, amíg végre egy autóstól kaptam annyi benzint, hogy be tudjak jönni az iskolába.

Zsuzsinak hívják a negyedik gyereket.

A grafikonok az egyes gyerekek mozgását ábrázolják.

Melyik gyerekhez melyik grafikon kapcsolható?

A grafikon alapján írd le, mi történt Zsuzsival útközben!



Megoldás:

Zsuzsi útját a c) ábra írja le. Zsuzsi elindult, de útközben rájött, hogy otthon felejtette az uzsonnáját, így visszafordult érte. A lakásból kijőve azonnal buszra tudott szállni. Az iskolába menet egyszer át kell szállnia. Az első busz gyorsan haladt. A második pont az orra előtt ment el, ezért várnia kellett rá. A következő járatra felszállt. A reggeli csúcsforgalom miatt ez a busz kicsit lassabban haladt. d) Feri; b) Béla; a) Jóska.

9. Az állatolimpián magasugrás műsorszámban indult a bolha, a kenguru, a tücsök és a delfin. Az ugrások magassága és hossza minden versenyző testmagasságához viszonyítva értendők.

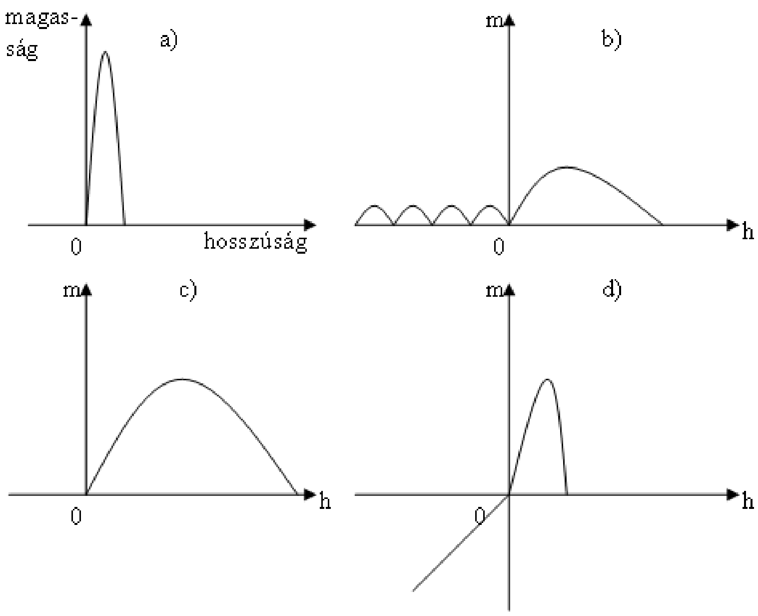
A *bolha* helyből, kis nekirugaszkodással saját testmagasságához képest kiemelkedően magasat ugrott.

A *delfin* a medence aljáról indult, hogy onnét megfelelő lendülettel a víz fölé emelkedjen, és átugorja a lécet.

A *tücsök* izmos hátsó lábainak köszönhetően jól elrugaszkodott, és eredményét tekintve a távolugró bajnok is lehetett volna egyetlen ugrásával.

Találd ki, hogy melyik grafikon melyik állat mozgását ábrázolja!

A grafikon alapján milyen taktikát alkalmazott a *kenguru*? Milyen eredménnyel?



Megoldás: a kenguru a nagy elrugaszkodás érdekében „nekifutásból” ugrott el. Mivel csak ugrálni tud, nekifutás helyett ezt jelzi a b) ábra.

a) bolha; d) delfin; c) tücsök.

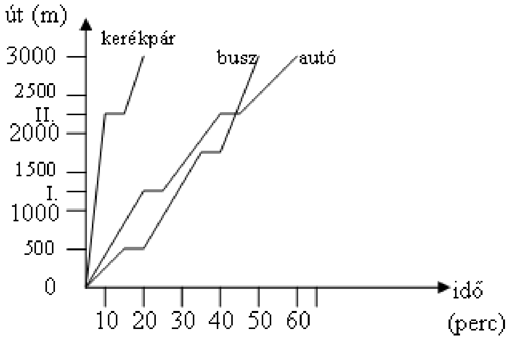
10. Budapesten a főútvonalak felújítása miatt reggel 8 óra körül, amikor a legtöbb ember munkába igyekszik, forgalmi dugó alakul ki. Egyik reggel stábunk kiszemelt egy 3 km-es útszakaszt, és megfigyelte a különböző közlekedési módszerek hatékonyságát. Megkértünk 3 embert, tegye meg ezt az útszakaszt biciklivel, személyautóval, illetve tömegközlekedéssel. A három ember mozgását ábrázoltuk a grafikonon.

A 3 km-es szakaszon két jelzőlámpás útkeresztezés lassítja a haladást. Az autóbusznak két megállója van, és az útszakasz egy részén elkülönített buszsávon közlekedhet. A biciklistának is lehetősége van az útvonal egy szakaszán bicikliúton közlekedni, de nem végig.

Állapítsd meg, hogy melyik járműnek kellett az I-gyel, illetve a II-vel jelölt útkereszteződésnél várakoznia. Hol vannak az autóbusz megállói ezen a szakaszon?

Számítsd ki, mekkora az egyes járművek átlagsebessége ezen a 3 km-es útszakaszon!

(Az átlagsebesség a megtett út és a megtételhez szükséges idő hányadosa.)



Megoldás: Az I-es jelzőlámpánál csak az autónak kellett várakoznia. A II-esnél a kerékpárosnak is. Az autóbusznak 500 m után van az első megállója, a 2. pedig 1750 m-nél.

A kerékpár átlagsebessége: $v=\frac{3}{\frac{1}{3}}=9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Busz: $v=\frac{3}{\frac{5}{6}}=3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Autó: $v=\frac{3}{1}=3\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

11. Egy szakácstanuló-verseny döntőjébe 4 leendő szakács került be. A feladatuk ezúttal süteménysütés. A sütemény elkészítésének fázisai a következők:

1. alapanyagok összekészítése
2. tészta összeállítása és kisütése
3. a krém elkészítése
4. a tészta és a krém összerakása
5. a sütemény díszítése

A tanulók 3 órát kapnak az elkészítésre.

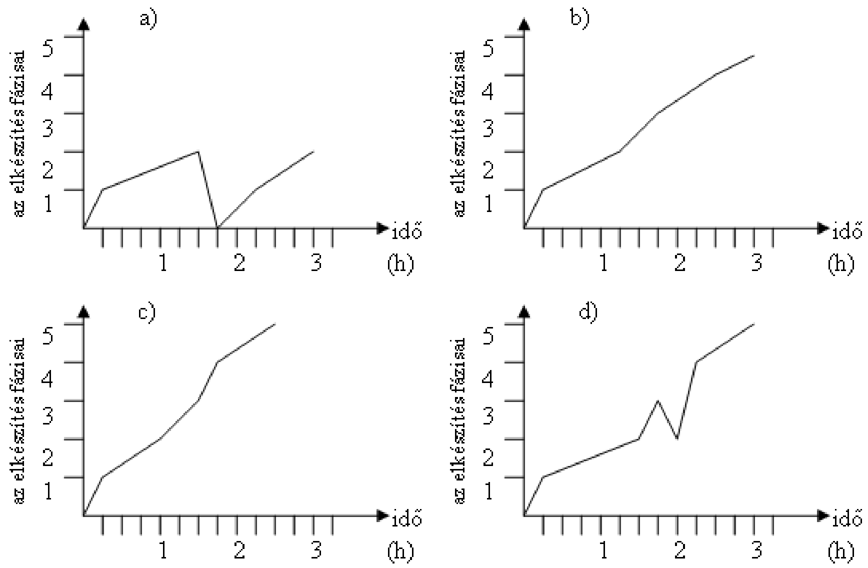
Karcsi: Biztosra ment. A kedvenc, már sokszor kipróbált receptje alapján készítette el a süteményt. Így jóval a határidő letelte előtt, két és fél óra alatt végzett.

Gyurkó: Mindig alapos munkát végez. Nagyon ügyel a részletekre. Így egészen a díszítésig eljutott, de ez utóbbira már nem maradt elég ideje. Csak belekezdett.

Borbála: Szépen haladt a tésztasütéssel, de amikor ránézett az órájára, megijedt, hogy kifut az időből, ezért elkezdett kapkodni. Teljes lángon főzte a krémet, ami persze leégett, így ki kellett dobnia, és újra kellett kezdenie. Eme kis baki ellenére hajszálpontosan sikerült elkészítenie a remekművet.

A negyedik szakácsot *Lajosnak* hívták. Ő hogy haladt a desszertkészítéssel?

A következő ábrák az egyes tanulók munkáját jellemzik.Melyik ábra melyik tanulóhoz tartozik?



Megoldás: Karcsi – c); Gyurkó – b); Borbála – d).

Lajos – a): Túl sokáig sütötte a tésztát, így az odaégett. Elölről kellett mindent kezdenie. Másodszorra az alapanyagot összekészítése is több időt vett igénybe. Így csak a tésztát tudta kisütni.

12. 4 személygépkocsi – Opel, Suzuki, Peugeot és Ford típusúak − közeledik a jelzőlámpás útkereszteződéshez. A jelzőlámpa előtti 800 m-es szakaszon vizsgáltuk az autókat. A jelzőlámpa pirosat mutat, ezért a személygépkocsik kénytelenek megállni. Vagy mégsem? A következő grafikonok alapján megtudhatod.

A grafikonok az egyes gépkocsik mozgását ábrázolják.

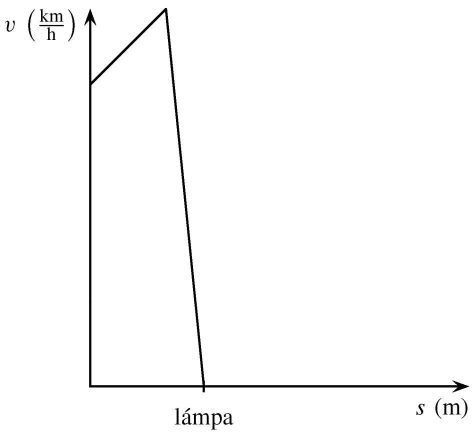
A Suzukinak nem kellett lefékeznie, mert pont akkor ért a kereszteződéshez, amikor a jelzőlámpa zöldre váltott.

A Ford vezetőjét váratlanul érte a pirosra váltás. Azt hitte, még át tud menni a sárga jelzésen, begyorsított, de kénytelen volt vészfékezni.

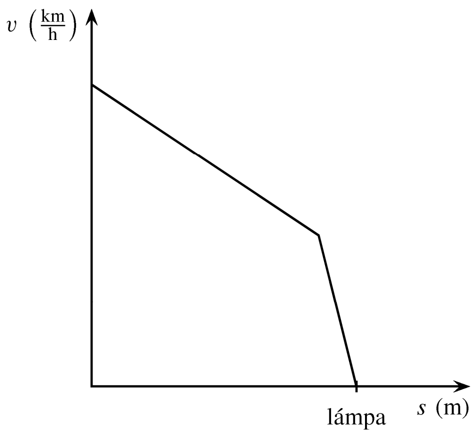
A Peugeot sofőrje idejében kezdett el fékezni. Egyenletesen lassítva megállt.

Hogyan lassult az Opel?

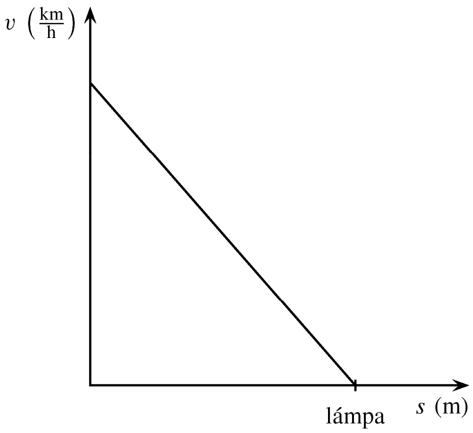
a)



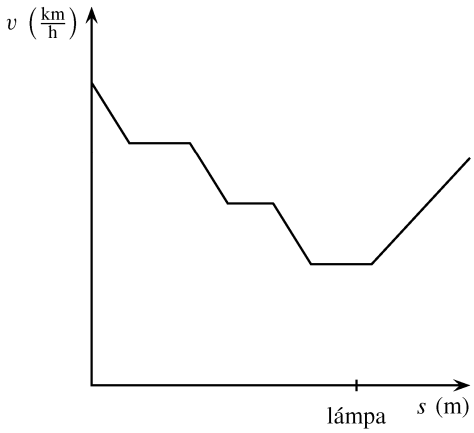
b)



c)



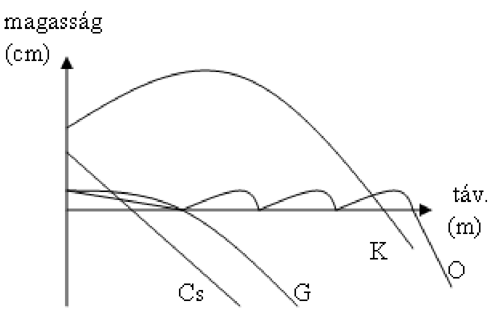
d)



Megoldás: Suzuki – d); Ford – a); Peugeot – c);

Opel – b): Messziről egyenletesen lassítva közeledett. Viszont pl. amikor túlságosan közel került az előtte álló autóhoz, gyorsan le kellett fékeznie.

13. Kitti, Csongor, Oszkár és Gedeon a folyóparton játszanak. Köveket dobálnak a vízbe. A kövek pályáját a következő grafikon írja le:



Ki(k)nek sikerült a követ ugráltatni a vízen (azaz „kacsázni”)? Ki(k)nek nem?

Megoldás: Egyedül Oszkár tudott kacsázni, a többieknek nem sikerült.

Feldolgozási javaslat a 14. feladathoz: A tanár szétosztja a ***6.3. kártyakészletet***, majd elkezdi fölolvasni a 14. feladat kérdéseit. Minden kérdés elhangzása után 1-1,5 perc gondolkodási időt hagy, hogy a csoportok megbeszéljék a választ. Ezek után kártyahúzással (betű-szám) kiválasztja azt a személyt, aki választ ad, amit osztályszinten is megbeszélnek, kiegészítik, kijavítják, ha kell.

14. Válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) A most kiadott feladatokban (9-től 13.-ig) milyen hozzárendelési szabályokat veszel észre?

Megoldás: pl. út–idő; magasság – távolság; sebesség – út; stb.

b) Adj meg néhány függvényt a példák alapján!

Megoldás: pl. a 10. feladatban felhasznált sebesség = út / idő függvény.

c) A grafikon melyik tengelyén olvasod le az értelmezési tartomány elemét és melyik tengelyen a hozzá tartozó helyettesítési értéket?

Megoldás: A helyettesítési értékeket a függőleges tengelyről, a helyeket a vízszintes tengelyről.

d) A 0 helyettesítési értéket zérushelynek nevezzük. Hogy tudod ránézésre megállapítani a függvény grafikonja alapján, hogy hol van a függvénynek a zérushelye?

Megoldás: A függvény grafikonjának ezen a helyen van közös pontja a vízszintes tengellyel.

A tapasztalatok legfontosabb tanulsága, hogy a feladatokban szereplő változó mennyiségek leírása átvezet a gyakorlati tapasztalatokról a halmazelméleti függvényfogalomra.

A függvénytulajdonságok szemléletes megismertetése

Módszertani megjegyzés:
Az előző feladatok alkalmat adtak bizonyos függvénytulajdonságok szemléletes megismerésére. A most következő mintapéldák és feladatok a függvényábrázolás alapján a függvények menetének megértését, értelmezését, a szövegértést gyakoroltatják.
A feladatok nem is említik a tanári anyagban bekeretezett meghatározásokat, a zérushelyet, monotonitást, maximum- és minimumérték fogalmát: ezeket a tanulókkal nem „bemagoltatni", hanem szemléletesen megértetni kell. A tanár a meghatározások közül csak annyit vegyen az órán, amennyit a diákok be tudnak fogadni.

Zérushely:
az az x érték, ahol a függvény helyettesítési értéke 0. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a függvény grafikonja ezen a helyen metszi az x tengelyt.

Monotonitás:
- az f függvény monoton növekvő (illetve szigorúan monoton növekvő),ha értelmezési tartományának minden $x_1 > x_2$ elemére $f(x_1) \geq f(x_2)$ (illetve $f(x_1) > f(x_2)$).
- az f függvény monoton csökkenő (illetve szigorúan monoton csökkenő,ha értelmezési tartományának minden $x_1 > x_2$ elemére $f(x_1) \leq f(x_2)$ (illetve $f(x_1) < f(x_2)$).

Maximum:
A függvénynek az x helyen abszolút maximuma van, ha a függvény az x helyen veszi fel legnagyobb értékét.

(A függvénynek az x helyen *helyi maximuma* van, ha e hely valamilyen környezetében a függvény itt veszi fel a legnagyobb értékét, de ezen a környezeten kívül ennél nagyobb értéket is felvehet.)

x-et maximumhelynek, $f(x)$-et maximumértéknek nevezzük.

Minimum:
A függvénynek az x helyen abszolút minimuma van, ha a függvény az x helyen veszi fel legkisebb értékét.

x-et minimumhelynek, $f(x)$-et minimumértéknek nevezzük.

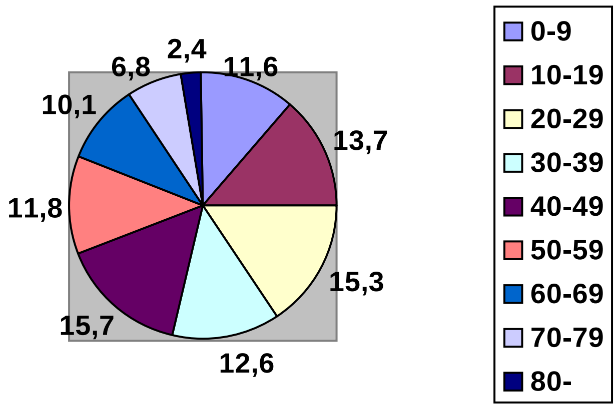
A függvény tulajdonságainak megállapításakor a következő szempontokat vesszük figyelembe:

1. Értelmezési tartomány meghatározása
2.Értékkészlet meghatározása (csak egyszerűbb esetekben)
3. Zérushely(ek) megállapítása
4. Monotonitás
5. Szélsőérték(ek) és azok helyeinek meghatározása

Feldolgozási javaslat: A tanulók párosával dolgoznak. A tanár kijelöl 2 – 2 megoldandó feladatot, például a 4. vagy az 5. mintapéldát és a 15 valamint a 17.a) feladatot.
A tanulók egyénileg megoldják a példáikat a füzetükbe, majd kicserélik egymásét és ellenőrzik. Utána megbeszélik a javítást.

Mintapélda$_4$

A következő diagram a népesség korcsoportok szerinti százalékos megoszlását mutatja 1996-ban. Olvasd le a legkisebb és legnagyobb értékeket! Határozd meg, mely korcsoportban veszik fel ezeket az értékeket!



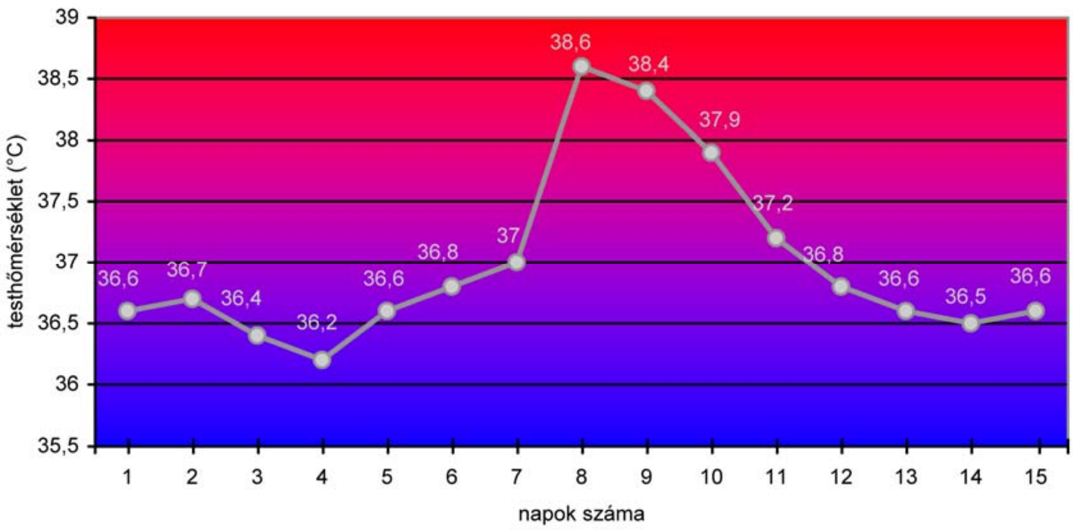
Megoldás:

Legnagyobb érték: 15,7. A 40–49 év közöttiek vannak a legtöbben.

Legkisebb érték: 2,4. A 80 éven felüliek vannak a legkevesebben.

Mintapélda₅

A következő diagram Kati átlagos testhőmérsékletének alakulását mutatja két héten keresztül:



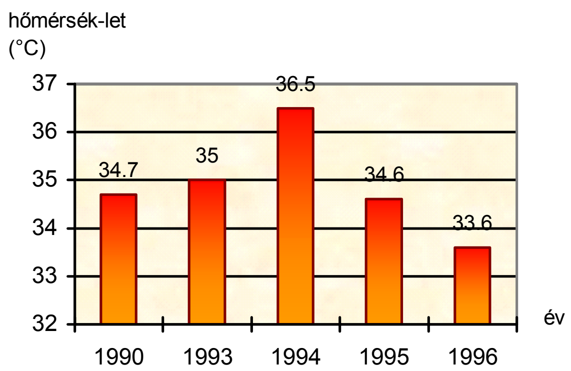
a) Melyik nap volt Katinak a legmagasabb, illetve a legalacsonyabb a testhőmérséklete?

b) A hónap hányadik napjától lázasodott be Kati? (Lázasnak tekintjük, ha hőmérséklete eléri a 37 °C értéket) Hány napig tartott a betegsége? A hónap első hetében mekkora volt Kati átlagos testhőmérséklete?

Megoldás:

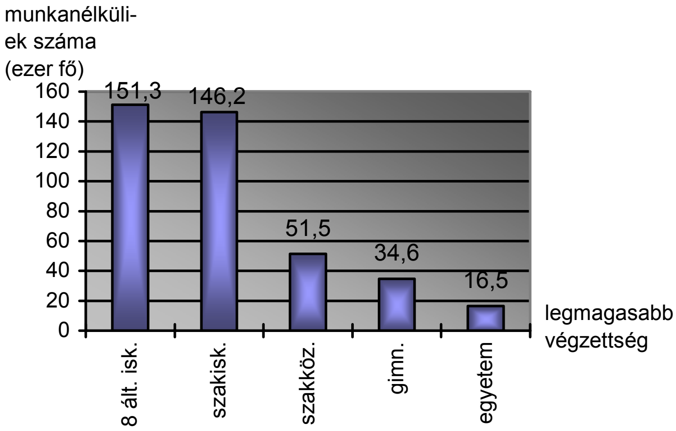
Kati a 8. naptól volt lázas. Betegsége 4 napig tartott. A hónap első hetében Kati átlagos testhőmérséklete 36,6 °C volt. A 4. napon volt Katinak a legalacsonyabb a testhőmérséklete, és a 8. napon a legmagasabb.

15. A grafikon 1990-től 96-ig mutatja a legmagasabb hőmérsékleti értékeket. Olvasd le a grafikonról a legkisebb és legnagyobb értékeket! Határozd meg, hol és mikor veszik fel ezeket az értékeket!



Megoldás:
Legnagyobb értéket, 36,5 °C-ot 1994–ben, a legkisebb értéket 33,6 °C-ot 1996–ben veszi fel.

16. A grafikon a munkanélküliek számát ábrázolja, egy bizonyos évben, (ezer főben) a legmagasabb iskolai végzettség szerint. Milyen végzettségű volt a legtöbb munkanélküli? Hány munkanélküli volt abban az évben?



Megoldás:

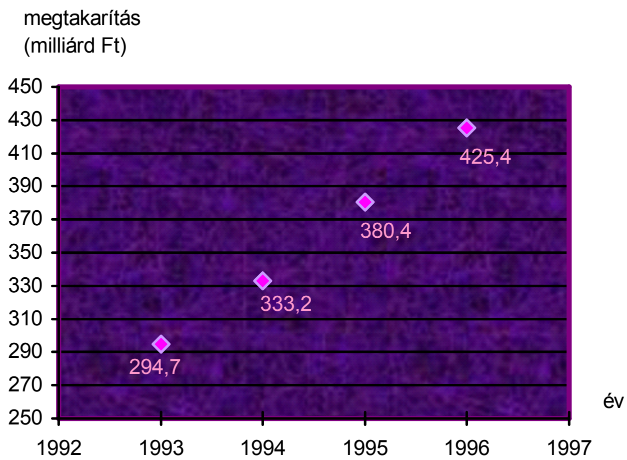
Legnagyobb érték: 151,3 ezer. A 8 általános iskolát végzettek körében legnagyobb a munkanélküliek száma.

Legkisebb érték: 16,5 ezer. Az egyetemet végzettek körében legkevesebb a munkanélküliek száma.

Összesen 390,1 ezer munkanélküli volt.

17. Olvasd le a következő diagramokról a legkisebb és legnagyobb értékeket! Határozd meg, hogy melyik évben veszik fel ezeket az értékeket!

a) A háztartások készpénz-megtakarítása 1993 és 1996 között (milliárd Ft)

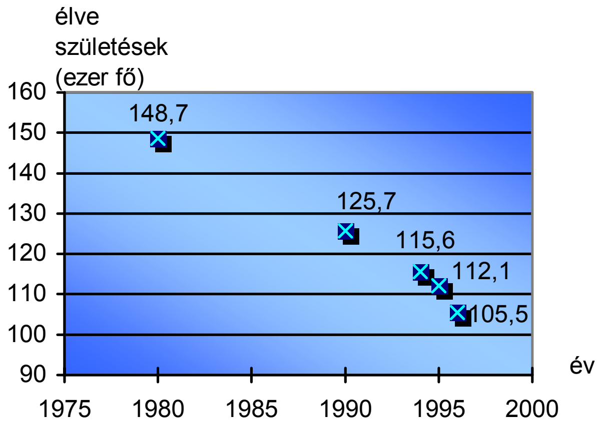


Megoldás:

Legnagyobb érték: 425,4 milliárd Ft. 1996–ban legtöbb a háztartások készpénz-megtakarítása.

Legkisebb érték: 294,7 milliárd Ft. 1993–ban legkevesebb a háztartások készpénz-megtakarítása.

b) Élve születések alakulása 1980 és 1996 között (ezer fő)



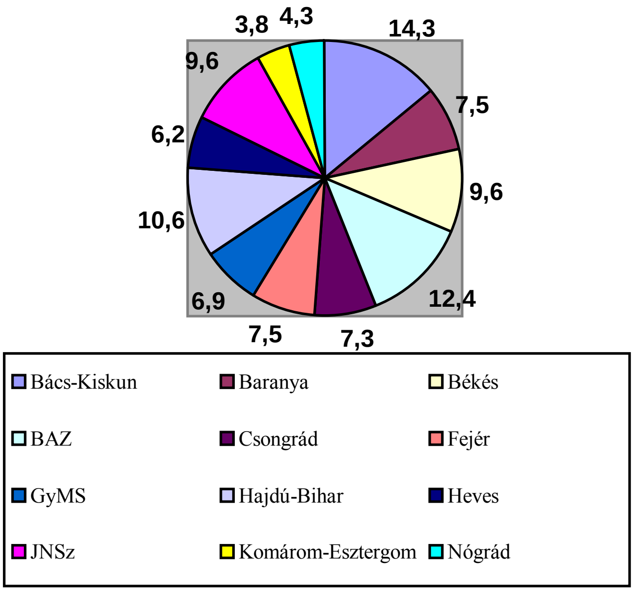
Megoldás:

Legnagyobb érték: 148,7 ezer fő. 1980–ban legnagyobb az élve születések száma.

Legkisebb érték: 105,5 ezer fő. 1996–ban legkisebb az élve születések száma.

18. A következő grafikon Magyarország 12 megyéjének területi eloszlását mutatja %–ban.

Olvasd le, melyik megyének a legkisebb és melyiknek a legnagyobb a területe, és add meg a területét is!

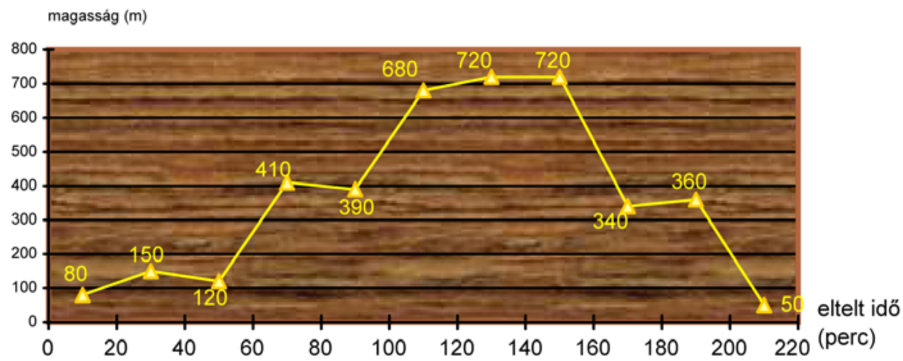


Megoldás:

Legnagyobb érték: 14,3%. Bács-Kiskun megyének a legnagyobb a területe.

Legkisebb érték: 3,8% Nógrád megye területe a legkisebb.

19. Egy turistacsoport elment kirándulni a hegyekbe. Más útvonalon mentek, mint amit a visszatérésre választottak. Útjuk a következőképpen alakult:



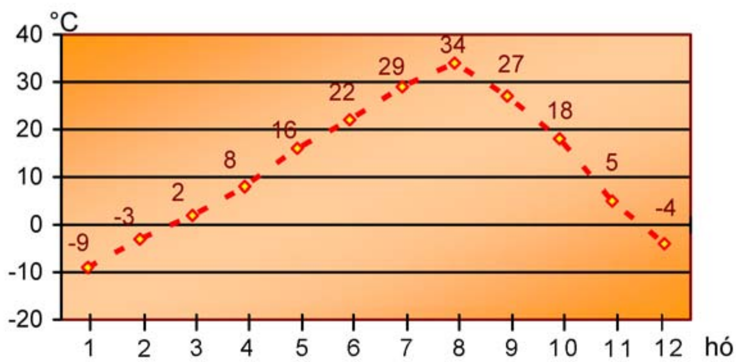
a) Milyen magasra másztak fel? Hol voltak a legalacsonyabban?

b) Mennyi idő alatt mászták meg a hegyet? Felfelé menet milyen magasságban értek ereszkedő szakaszhoz? Mekkora volt ezen a szakaszon a szintkülönbség?

Megoldás:

A turistacsoport 2 óra alatt mászta meg a hegyet. Felfelé menet először 150 m magasságban érkeztek ereszkedő szakaszhoz.. Másodszor pedig 410 m-es magasságban érkeztek ereszkedő szakaszhoz. Az elért legmagasabb pont 720m volt. Ekkor a szintkülönbség az indulási ponthoz képest 640 m volt.

20. Genuvia ország havi átlaghőmérsékletének alakulását mutatja a következő grafikon egy éves viszonylatban:

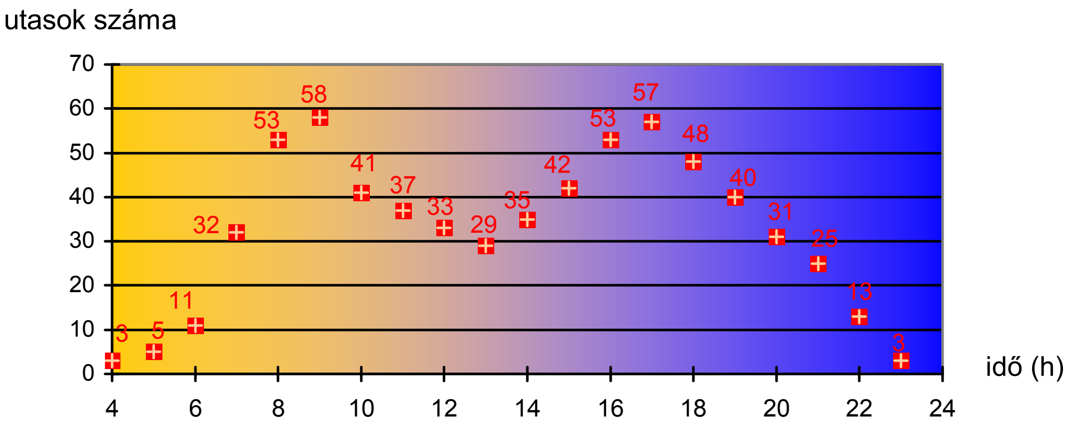


Mennyi az éves átlaghőmérséklet? Mely hónapok átlaghőmérséklete közelíti meg (5 °C-nál nem nagyobb az eltérés) ezt az értéket?

Megoldás: Az éves átlaghőmérséklet 12 °C. Áprilisban illetve májusban közelíti meg ezt a hőmérsékletet.

Megjegyzés: Az összetartozó értékpárokat a pontok jelenítik meg. Az összekötésük a változás jellegére teszi a hangsúlyt, más funkciója nincs.

21. A helyi kisbusszal közlekedő utasok számának átlagos alakulása a nap folyamán:

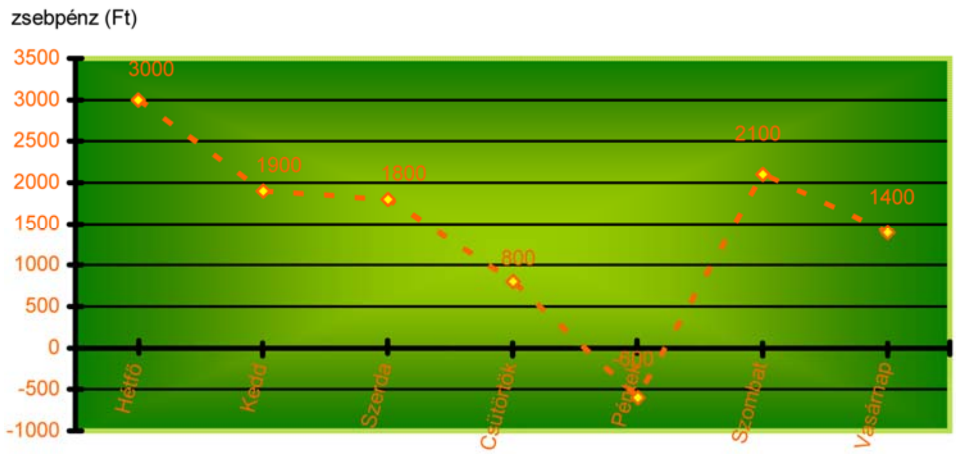


Mikor utaztak a legtöbben illetve legkevesebben az autóbuszon? Hányan utaztak munkakezdés előtt (9 óráig)? Átlagosan hányan utaznak naponta a busszal?

Megoldás:

A legtöbben, 58-an 9–10 óra között utaztak. A legkevesebben, 3-an hajnali 4 és 5 között illetve éjjel 23 és 24 óra között utaztak a busszal. Munkakezdés előtt összesen 114-en utaztak. Átlagosan 649-en utaznak naponta ezzel a járattal. (Ez a függvényértékek összege.)

22. Jancsi heti zsebpénzének alakulása (az értékek a reggeli állapotot mutatják): Mennyit költött csütörtökön Jancsi? Melyik nap költött a legkevesebbet?



Megoldás:

Jancsi csütörtökön 1400 Ft-ot költött, azaz 600 Ft-ot valakitől kölcsön kért. Kedden költött legkevesebbet, mindössze 100 Ft-ot.