

## I. Matematika, szinte számolás nélkül

A ráhangoló szakasz szerepe nagyon fontos a diákok és a tanár egymásra találása érdekében. A diákok egy hosszú nyári szünet után először találkoznak új matematika tanárukkal. Az eddigi ismereteik elhalványultak, nehezen kezdenek hozzá a tanuláshoz. Ez az a pillanat, amikor megnyerhetjük diákjaink matematika iránti szimpátiáját, ha megfelelően közelítünk. Érdekes játékos formával kezdeni, mert játszani mindenki szeret. Látszólag olyan feladatokat oldunk meg, amelyeknek semmi közük sincs a matematikához, de mi tudjuk, hogy fontos kompetenciákat fejlesztünk. Rejtvényfejtéskor a szabálykövetést, csoportos munka során az együttes munkát, egymás segítségét, a szociális kompetenciát, a szövegértést, a kommunikációt, és még sorolhatnánk. A közös játékkal sok mindent megmutathatunk magunkról. A diákok még nem ismerik egymást, keveset tudnak egymásról, még a másik nevét sem ismerik. Segíthetünk ezen.

### Ismerkedjünk!

Több lehetőség közül választhatunk.

1. A csoport kör alakban ül. Mindenki megmondja a saját nevét úgy, hogy előbb sorban elmondja az előtte bemutatkozókét is.  
Pl. 1. Ágota, 2. Ágota, Ákos, 3. Ágota, Ákos, Eszter, ...  
Miután a körben mindenki legalább egyszer sorra került, akkor próbáljuk meg rámutatással felidézni a hallottakat. Ha a csoportnak legalább a fele el tudja mondani a mellette ülő nevét, akkor fejezzük be a játékot. A következő órán ismét kezdhünk a nevek kikérdezésével, de akkor már a saját nevét ne mondja, csak az előtte ülőkét.
2. Ha a csoport tagjai már ismerik egymást, akkor alakítsunk két kört, a körök tagjai álljanak egymással szemben. A szemben állók mondják el egymásnak, hogy mi lenne szívesen, ha növény (virág, állat, kutya, autó) lenne és indokolja is ezt. Ezután egyet balra lép a belső körben álló tanuló és azt mondja el, amit az előtte lévőtől hallott, és ugyanezt teszi a szemben álló tanuló is. Majd ismételjük előlről. Egyet balra lépve a szemben álló mondja el a másiknak, hogy mi lenne szívesen, ha növény (virág, állat) lenne és indokolja is ezt. Egyet balra lépve, a belső körben álló tanuló azt mondja el, amit az előtte lévőtől hallott. Addig lépegetnek, amíg nem találkoznak az első párok a két körben. Ezután próbáljuk meg rámutatással felidézni a hallottakat.

Látszólag ez a feladat nem kapcsolható a matematikához, de fejleszti a memóriát, a kommunikációs készséget, és nem utolsósorban a diákok és a tanár megismerkednek egymással. Dicsérjük meg azt, aki közel hasonlóan tudja elmondani az eredeti történetet. Szavazással eldönthetjük, hogy ki emlékezett a legjobban a hallottakra, ki színezte ki azt a legjobban.

A számítógéppel diákjaink már az általános iskolában megismerkednek. Néhányan bővebb ismereteket is szereztek, ezért ezt használhatjuk óráinkon.

A számítógépekkel kapcsolatban nagyon fontos fogalom az **algoritmus**. A számítógép csak néhány elemi műveletet tud közvetlenül elvégezni, többek között az aritmetika alpműveleteit. Bonyolultabb feladat megoldását úgy tudjuk elvégeztetni a számítógéppel, hogy előírjuk, hogy milyen elemi műveleteket, milyen sorrendben, esetleg ismételve egymás

után kell végrehajtania ahhoz, hogy a kívánt eredményt kapjuk. Az ilyen utasítást algoritmusnak nevezzük.

Informatika órán tapasztaljuk, hogy a diákok szeretnek algoritmust készíteni. Használjuk ki ezt az alkalmat, adjunk példákat! A mindennapi életben számos lehetőség van ennek bemutatására. Sok esetben észre sem vesszük, hogy algoritmust alkalmazunk. Például telefonáláskor, fényképezéskor, mosáskor, főzéskor, lecke írásakor vagy vásárláskor. Mindig műveletek egymásutánját hajtjuk végre.

Először mutassunk példát folyamatok algoritmusának leírására! Beszéljük meg részletesen a lépéseket! Amennyiben lehetőség vagy szükség van rá, egészítsük ki! Ezután keverjük össze a lépéseket, és ezeket a diákok rakják sorba. A következő feladatban már a diákoknak maguknak kell megfelelő lépéssorozatot felírni, és végül a feladatot is magának kell kitalálni a diáknak, melyet társainak is feladhat.

Következő lépésként a feladatokban adjuk meg az algoritmust összekeverve, ezt sorrendbe kell tenni a diákoknak, meg kell keresni az egymás utáni lépéseket.

Az újabb lépés az, hogy a csoportok maguk készítenek előre megadott feladathoz algoritmust. A diákok közösen dolgozhatnak. Akik először elkészülnek, elmondhatják leírásukat. A többiek figyelnek, és az esetleges pontatlanságokat javítják. A helyes megoldások pontot érnek a csoport minden tagjának. Úgy is számolhatjuk a pontokat, hogy azok is kapjanak pontot, akik javítani tudják a megoldást megfelelő indoklással.

Napi teendőink során többnyire olyan feladatokat kell elvégeznünk, amelyek több kisebb lépés egymás utáni elvégzését igénylik. Sok esetben többféle ilyen lépéssorozat is célhoz vezet, előfordul azonban az is, hogy csak egyféle lépéssorozat megfelelő.

**Nézzünk néhány tevékenységet, és bontsuk kis lépésekre! Írjunk fel egy lehetséges lépéssorozatot!**

### Mintapélda<sub>1</sub>

Készítsünk lecsót! Írjuk le az ehhez szükséges lépéssorozatot!

- a) Megveszem a paprikát, hagymát, paradicsomot.
- b) Megmosom a paprikát, paradicsomot, megtisztítom a hagymát.
- c) Összeaprítom a zöldségeket.
- d) Meggyújtom a gáz lángját.
- e) Előveszem a serpenyőt.
- f) Olajat töltök a serpenyőbe.
- g) Ráteszem a serpenyőt az olajjal a láng fölé.
- h) Beleteszem a serpenyőbe először a hagymát, majd a paprikát, végül a paradicsomot.
- i) Kevergetés közben az olajon párolom a zöldségeket.

- j) Megsózom a párolt zöldségeket.
- k) Kóstolással megállapítom, hogy puhák-e a zöldségek.
- l) Kész a lecsó.

## Mintapélda<sub>2</sub>

Vegyünk ki pénzt a bankautomatából, és írjuk le ennek egyes lépéseit!

- a) Odamegyek az automatához.
- b) A kártyát beleteszem az automatába.
- c) A PIN-kódot begépelem a megjelölt helyre.
- d) Ha az automata nem fogadta el a beírt kódot, akkor a c) pontot ismétlem, ha elfogadta, akkor:
- e) A banki műveletet kiválasztom.
- f) A kivenni szánt összeget beírom a megadott helyre.
- g) Ha a kártyán nincs elég pénz, akkor visszamegyek az e) pontra, kevesebb összeg megjelölésével.
- h) Várom, amíg a kártyát visszaadja az automata.
- i) A kiadott kártyát elveszem.
- j) A kiadott pénzt elveszem.
- k) A kiadott bizonylatot elveszem.
- l) Befejeztem a műveletet, távozom az automatától.

Egy feladat megoldásának egymást követő lépéseit leíró szabályainak összességét **algoritmusnak** nevezzük..


## Feladatok

 1. Vizsgáld meg a következő algoritmust! Ki tudod-e egészíteni más lépésekkel?


Tekintsük át a fal fehérre festésének lépéseit algoritmus segítségével!

1. Az alapfelület előkészítése:
  - átkaparás,
  - csiszolás,
  - portalanítás.

2. Első mészfestés (alapmeszelés):
  - Várakozás, amíg az alapmeszelés megszárad.
  - Ha vannak hibás helyek a falon, akkor azokat ki kell javítani.
3. Második mészfestés:
  - Várakozás, amíg a meszelés megszárad.
  - A száradás ellenőrzése.
  - Megszáradt a mész, készen vagyunk.


 2. A fenyőfa-féleségek lakkozása 10 lépésre bontható. Ezeket a lépéseket soroltuk fel. Tedd sorrendbe a fenyőfa-féleségek lakkozásának műveleti sorrendjét!

- a) Portalanítás.
- b) Az első lakkréteg felhordása.
- c) Csiszolás.
- d) 2 óra várakozás.
- e) Száradás.
- f) Ha szükséges, akkor csiszolás, portalanítás.
- g) Beeresztő, impregnáló alapozás.
- h) A felületen maradt anyag felitatása.
- i) A második lakkréteg felhordása.
- j) Várakozás a teljes száradásig.

 3. Tedd a hajmosás műveleti sorrendjébe az alábbi állításokat!


- a) Kinyitom a vízcsapot.
- b) Leöblítem a hajbalzsamot.
- c) Megmosom samponnal a hajam.
- d) Leöblítem a sampont a hajamról.
- e) Megfelelő hőmérsékletű vizet állítok be.
- f) Balzsammal bekenem a hajam.
- g) Megtörlöm a hajam.
- h) Bevizezem a hajam.
- i) Megszárítom a hajam.

 4. Készíts algoritmust telefonod feltöltésére pénzautomatából!

 5. Készíts algoritmust matematika házi feladatod elkészítésére!


Eddig megadtuk, hogy milyen lépések sorozatát kell elkészíteni. Ezután mindenki olyan folyamatok algoritmusát készíti el, amelyet ő szeretne. Miután elkészült, szívesen meghallgatjuk. Természetesen értékeljük a produkciókat.

 6. Készíts algoritmust a hétvégi kirándulás megszervezésére!

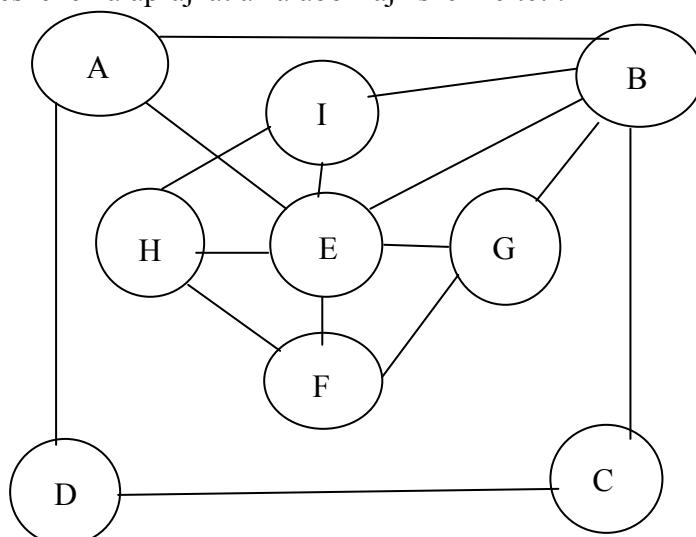
 7. Készíts algoritmust az uszoda helyes használatáról!

## Néhány érdekes matematikai fejtörő

A diákok közül sokan ismernek nevezetes matematikai problémákat, amelyeket szívesen elmondanak társaiknak. A következőkben néhány ilyen feladatot mutatunk be. Abban az esetben, ha a diákok nem ismerik, akkor újként megoldhatják különböző változatokban. Mindig annyit válasszunk, amennyi az osztály képességeinek megfelel nehézségi szintként.

 8. A Tolvajok városában a polgármester elhatározta, hogy megszünteti városa rossz hírnevét, ezért térfelügyelő kamerákat helyezett el. A legkevesebb pénzből szeretne volna megoldani ezt a beruházást. Olyan megfigyelő kamerákat helyezett el, amelyek az adott téren kívül azokat a tereket is ellenőriznék, amelyek utcákkal kapcsolódnak a térhez.

A városka egy részének alaprajzát az alábbi rajz szemlélteti:



- Írd le, hogy melyik térről melyik más tereket láthatod!
- Hány kamerát kell felszerelni, hogy minden teret lássunk? Indokold válaszodat.
- Mennyi az a lehető legkevesebb kamera, amellyel megoldhatjuk a problémát?

d) Hova állítsuk fel a kamerákat?

*Megoldás:*

Keressük ki a számunkra fontos információkat!

A megfigyelő kamerák ellenőrzik a tereket.

Az adott téren kívül azokat a tereket is ellenőrzik, amelyek utcákkal kapcsolódnak a térhez.

- a)
- A térről látható: B, E, D tér is.
  - B térről látható: A, I, E, G, C tér is.
  - C térről látható: B, D tér is.
  - D térről látható: A, C tér is.
  - E térről látható: A, B, F, G, H, I tér is.
  - F térről látható: H, E, G tér is
  - G térről látható: B, E, F tér is.
  - H térről látható: I, E, F tér is.
  - I térről látható: B, E, H tér is.
- b) Meghallgatjuk a különböző véleményeket.
- c) Kettő.
- d) D pontba és E pontba.

A relációs jeleket sokszor rosszul alkalmazzák diákjaink, nehezen találják meg az összefüggéseket az összetartozó érték párok között. A következő feladatok ezeknek a megértését segítik.

 9. Három testvér életkoráról a következőket tudjuk:

- a) Panni fiatalabb Klárinál.
- b) Klári idősebb Bellánál.
- c) Bella fiatalabb Panninál.

Írd fel életkoruk szerint növekvő sorrendben a testvérek nevét!

*Megoldás:*

Írd fel életkoruk szerint növekvő sorrendben a testvéreket és írd le a neveiket. Megoldási vázlat készítése vonalak segítségével szemléletesen:


P —————>

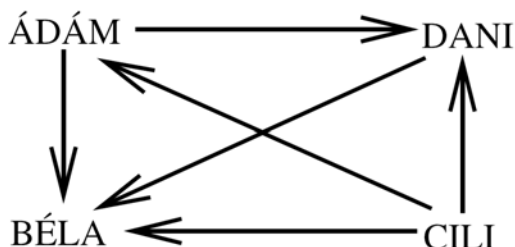
K —————>

B ———>

Relációjelekkel:  $P < K$  és  $K > B$  és  $B < P \Rightarrow B < P < K$ .


Sorrend: Bella, Panni, Klári.

-  **10.** Az ábrán Ádám, Dani, Cili és Béla életkorát ábrázoltuk nyilak segítségével. Minden nyíl a fiatalabb baráttól az idősebb barát felé mutat. Figyeld meg a nyilak irányát! Állítsd életkoruk szerint csökkenő sorrendbe a barátokat, és írd le a nevüket!



*Megoldás:*

Ki a legfiatalabb? Minden nyíl – 3 darab – tőle kifelé mutat, tehát CILI.  
 Honnan indul más irányba két nyíl? Ádámtól.  
 Honnan indul ki csak egy nyíl? Danitól.  
 Ki a legidősebb? Minden nyíl – 3 darab – felé mutat, tehát BÉLA.  
 Sorrend: BÉLA, DANI, ÁDÁM, CILI.

-  **11.** Három versenyző, Ági, Éva és Ili kondíció felmérésen voltak. Mindhármuk teljesítménye jó volt. Érdeklődésükre az edzőjük a következőt mondta:


Ági eredménye jó volt, de nem annyira, mint Éváé. Ili is erős, de nem annyira, mint Ági.

Állapítsd meg, hogy a lányok közül ki a leggyengébb, kinek kell erősíteni?

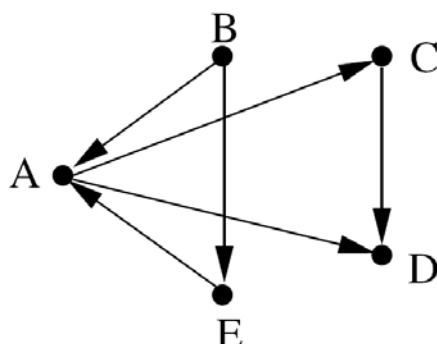
*Megoldás:*

Ági  $\longrightarrow$   
 Éva  $\longrightarrow$   
 Ili  $\longrightarrow$

Ili a leggyengébb.  $I < \text{Á} < \text{É}$ .


-  **12.** Egy társaságban – Adél, Béla, Cili, Dani, és Emma – különböző korú emberek voltak. Nem tudták, hogy ki a legfiatalabb és ki a legidősebb. Játékos kedvűek voltak, és az alábbi ábrát készítették a korukról. Minden nyilat az idősebb társuk felé irányítottak.

Írd fel életkoruk szerint növekvő sorrendben a vendégek nevét!



*Megoldás:*

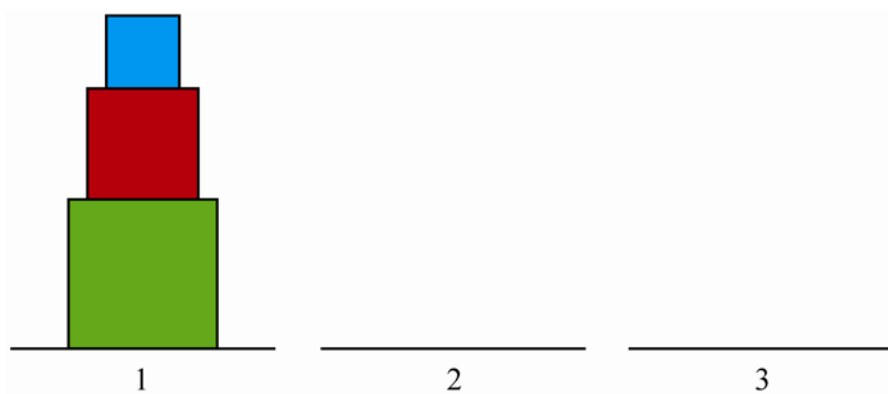
Az életkor szerinti sorrend: B, E, A, C, D.

 **13.** Három különböző méretű kocka egymásra rakva alkot egy tornyot (ez az úgynevezett Hanoi-torony). A legnagyobb van legalul, a legkisebb legfelül. A torony mellett van még két hely, ahová szabad kockát leraknunk.

Rakd át a tornyot az 1. helyről a 2. helyre, betartva a következő szabályokat:

- Egyszerre csak egy kockát mozgathatunk
- Kisebb kockára nem helyezhető nagyobb kocka.

Hány lépés kell a megoldáshoz?



Sokan játszottak már kockákkal, építettek azokból házat, várat. Úgy rakhattad azokat, ahogyan gondoltad, hogy nem dől össze. A Hanoi torony esetében három különböző méretű kocka egymásra rakva alkot egy tornyot. A legnagyobb van legalul, a legkisebb legfelül. A torony mellett van még két hely, ahova lerakhatunk kockát.

*Megoldás:*

az átrakások sorrendje:

K → 2

P → 3

K → 3

Z → 2

K → 1

P → 2


K → 2

A megoldáshoz 7 lépés kell.

Általánosan, ha a korongok száma  $n$ , akkor  $2^n - 1$  lépés kell az átrakáshoz.




Feladhatjuk a feladatot úgy is, hogy a tanulók három különböző átmérőjű pénzérme használatával oldják meg a feladatot

-  **14.** Egy húszas pénzérmére helyezz egy tízes érmét, arra pedig egy ötös érmét! Kapsz egy tornyot. A füzetedben egymástól 5 cm-re írd fel az 1, 2, 3 számokat!  
Helyezd el az egyesre az egymásra helyezett érméket! Rakd át az érméket a 3-as számra úgy, hogy betartod a következő szabályokat:
- Egyszerre csak egy érmét mozgathatsz.
  - Kisebb érmére nem helyezhető nagyobb érme.
- Hány lépés kell a megoldáshoz?

Oldják meg a feladatot 4 érme áthelyezésével is!


A feladat érdekességeként elmondható, hogy egy buddhista szerzetes azt a feladatot kapta, hogy 64 korongból álló tornyot rakjon át egyik helyről egy másikra. Meg tudta-e oldani?

Nem, mert ha feltételezzük, hogy egy korongot 1 másodperc alatt rak át, akkor  $1,85 \cdot 10^{19}$  másodpercig tartana az átrakás, ami 584,5 milliárd év!

-  **15.** Három felnőtt ember a folyó egyik oldaláról a másik partjára szeretne átjutni, de nincs híd a folyón. A szemközti parton két gyereket pillantanak meg, akik egy kis ladikkal játszanak. A ladik olyan kicsi, hogy egyszerre csak egy felnőtt vagy két gyerek fér el benne. Megkérik a gyerekeket, hogy segítsenek nekik átmenni a folyó túloldalára. Hogyan kelhetnek át a folyón úgy, hogy mind a három felnőtt és mind a két gyerek a túlsó partra kerüljön?

*Megoldás:*


- egyik gyerek átevez a folyó másik partjára,
- egy felnőtt visszavev a folyó szemközti oldalára,
- másik gyerek átevez a folyó másik partjára,
- a két gyerek együtt visszavev a folyó szemközti oldalára,
- a fentieket ismételjük annyiszor, ahány felnőtt át akar kelni a túloldalra.

-  **16.** A családi költségvetésből a telefonálások sok pénzt vesznek el. A kiadás csökkentése miatt a családfő bevezeti azt a szabályt, hogy a gyerekek legfeljebb 15 percig trécselhetnek barátaikkal telefonon. Egy 7 perces és egy 11 perces homokórát állítanak a telefon mellé. Hogyan mérik a 15 percet ezek segítségével?

*Megoldás:*

- egyszerre indítsuk el a két homokórát,
- amikor a 7 perces lejár, akkor kezdünk el telefonálni,

– miután lefolyt a homok a 11 percesből teljesen (akkor 4 percet telefonáltunk), fordítsuk meg a 11 perces homokórát (így összesen  $4+11=15$  percig telefonálunk folyamatosan).

 17. Milyen számok állhatnak a betűk helyén?

A következő feladatokban betűkkel végeztünk műveleteket. Add meg a betűk lehetséges értékeit úgy, hogy az összeg helyes legyen!

$$\begin{array}{r} \text{a) } \quad \text{AB} \\ \quad \text{+CC} \\ \hline \text{CBC} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } \quad \text{GH} \\ \quad \text{+HH} \\ \hline \text{FG} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } \quad \text{DE} \\ \quad \text{+ E} \\ \hline \text{FD} \end{array}$$

*Megoldás:*

a)  $A=9, B=0, C=1$ .

b) A megoldások:

F	1	3	5	7	9
G	0	2	4	6	8
H	5	6	7	8	9

c) Nincs megoldás.

## II. Mit tudunk a halmazokról?

Manapság a halmazelmélet egyre nagyobb hangsúlyt kap. Szinte nincs olyan terület, beleértve a természettudományt és a társadalomtudományt is, amelyben ne lenne szükség halmazelméleti ismeretekre, illetve azok alkalmazására.

Megnőtt a gyakorlati jellegű szöveges feladatok jelentősége is. A problémamegoldó gondolkodáshoz, azzal együtt, hogy a tanulók értelmezzék a feladat szövegét, és felismerjék, a matematika mely ágát alkalmazva tudják legeredményesebben megoldani, elengedhetetlenül szükséges a halmazelméleti alapfogalmak, műveletek ismerete és biztonságos alkalmazása.

Matematikát csak akkor tudunk eredményesen tanítani, ha az ismereteket egységes rendszerben közvetítjük, mintegy felfűzzük valamilyen vezérfonalra. Csak ekkor kapunk összefüggő struktúrát. Egyébként az adott ismeretek, alkalmazások mozaikszerűen jelennek meg, ami nehezíti, hogy az elsajátított ismereteket, kompetenciákat, képességeket egészen más területeken is alkalmazni tudják.

Ez a vezérfonal a halmaz és függvényszemléletű feldolgozásmód.

### Fontos!

Nem halmazelméletet tanítunk, hanem elemi halmazszemlélet kialakításával hasznos módszert biztosítunk a tanulók számára olyan problémák megoldásához, amelyek más módon nehezebben, esetleg bonyolultabban oldhatók meg.

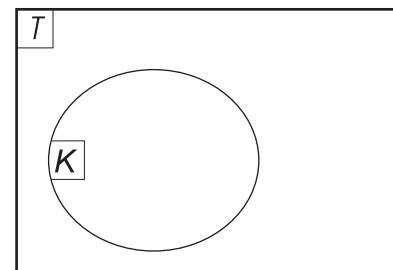
A NAT által megfogalmazott célok közül azok, amelyek jelentősen fejleszthetők ebben a témakörben:

- „a matematika természettudományokban, társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában betöltött fontos szerepének az értése, a döntési kompetencia fejlesztése;
- a modellek érvényességi körének és a gyakorlatban való alkalmazhatóságának eldöntésére alkalmas kompetenciák és képességek kialakítása;
- a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazása.

## Mozogjunk!

Frontális osztálymunka. A halmazábrát rajzoljuk fel a táblára és az elemeket egy-egy tanuló írja be.

- a) Álljanak fel azok, akik kék pólót viselnek. (Ha nincs kettőnél több kék pólót viselő tanuló, válasszunk más színt) Írjuk be a monogramjukat az ábrába!  
A kék pólót viselők bediktálják a monogramjukat.  
Hány tanuló visel kék pólót?

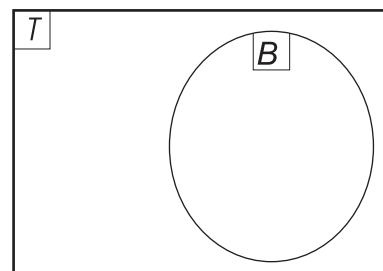


Halmaz elemeinek meghatározása, felsorolása, ábrázolása Venn-diagrammon. Halmaz számosságának meghatározása.  
Az alaphalmaz: az osztály jelen levő tanulói.

Az egyes feladatoknál megjelöltük, hogy milyen halmaz-tulajdonságokat, mutatunk meg, illetve milyen műveleteket végzünk. (Alaphalmaz, részhalmaz, számosság, metszet, unió, komplementer halmaz) A tanulóknak azonban itt még nem beszélünk erről.

Írjuk be az elemeket a megfelelő helyre, és beszéljük meg az így kialakult ábrát.

- b)** Álljanak fel azok, akik barna hajúak. (Ha nincs kék pólót viselő, vagy nincs kék pólót viselő és barna hajú tanuló, válasszunk más szempontot.)  
Írjuk be a monogramjukat az ábrába!  
A barna hajúak bediktálják a monogramjukat.  
Hány tanuló barna hajú?



Halmaz elemeinek meghatározása, felsorolása, ábrázolása Venn-diagramon. Halmaz számosságának meghatározása.

- c)** Álljanak fel azok, akik barna hajúak és kék pólót viselnek.  
Hány tanuló állt fel?
- d)** Álljanak fel azok, akik kék pólót viselnek és barna hajúak.  
Hány tanuló állt fel?

Jöjjenek rá a tanulók, hogy ugyanazok álltak fel!  
Két halmaz metszetének meghatározása, a metszet művelet kommutativitásának megtapasztalása. Ábrázolása Venn-diagramon. Halmaz számosságának meghatározása.

Írjuk be a monogramjukat az ábrába!

- e)** Álljanak fel azok, akik barna hajúak vagy kék pólót viselnek.  
Hány tanuló állt fel?
- f)** Álljanak fel azok, akik kék pólót viselnek vagy barna hajúak.  
Hány tanuló állt fel?

Két halmaz uniójának meghatározása, az unió művelet kommutativitásának megtapasztalása. Ábrázolása Venn-diagramon. Halmaz számosságának meghatározása.

Írjuk be a monogramjukat az ábrába!

- g)** Most azok álljanak fel, akik eddig nem álltak fel!  
Hány tanuló állt fel most?

Komplementer halmaz meghatározása.

Írjuk be a monogramjukat az ábrába!

## Rend a lelke mindennek!

Az EZERAPRÓ vegyesboltba egy vidám ellenőr lépett be. Rend és tisztaság fogadta. Mosolygós arckifejezése hamarosan elkomorult, amikor a polcon lévő árukra nézett. Meglátta a polcokon a vásárolható „APRÓ”-kat. A polcokon a különböző árukat így helyezték el.

Sajt	Szappanok	Cukorkák	Bors	Konzervek	Borok
Desodorok	Csokoládék	Liszt	Tej	Befőttek	Cukor
Teák	Száraztészták	Illatosítók	Kávés	Körömlakk	Vaj
Mosóporok	Zsemlemorzsa	Öblítők	Kekszek	Hypo	Sörök

Nézd meg az egymás mellett elhelyezett árukat, és megérted az ellenőr megdöbbenését. Az áruk elhelyezésénél milyen alapvető hibákat követett el a kereskedő?

### SEGÍTS RENDET RAKNI!

Hogyan tudnád az üzletben lévő árukat csoportosítani? Adj meg címkéket a besoroláshoz!

Gabonafélék	Édességek	Kávék, teák
Tejtermékek	Zsiradékok	
Palackozott italok	Konzervek	Fűszerek
Tisztítószer	Tisztálkodószer	Kozmetikai cikkek

Milyen termékeket tennél az egyes címkék alá?

Ügyelj a legfontosabb szabályokra, amelyeket be kell tartani, amikor az árukat a polcra helyezik!

Élelmiszer és vegyi áru egymástól elkülönítve tárolandók!

Az erős illatot árasztó termékek ne kerüljenek olyan termékek mellé, amelyek ezt az illatot felvehetik, és ezáltal sérülhet a minőségük.

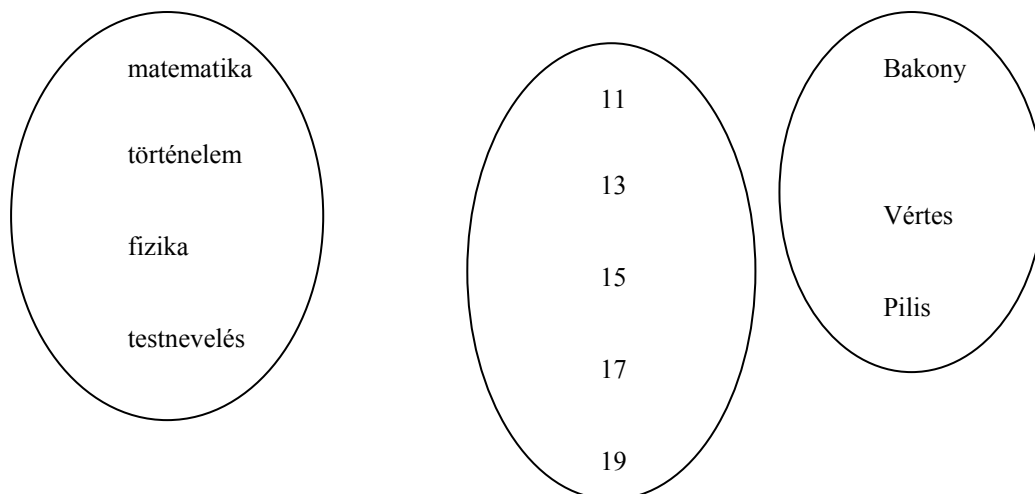
Javasoljatok más elrendezési szabályt is!

Az egyes termékek, amelyeket valamilyen közös tulajdonság alapján egy csoportba sorolunk, **halmazt** alkotnak.

Halmazokkal már találkoztunk általános iskolai tanulmányaink során.

Bizonyos dolgok összességét halmaznak nevezzük.

Például halmazt alkotnak egy tanítási nap órarendjében szereplő tantárgyak, a Dunántúli Középhegység hegyei, vagy a 10-nél nagyobb, 20-nál kisebb páratlan számok.



A halmazba tartozó dolgok a **halmaz elemei**.

Az  $A$  halmazt megadhatjuk egy, az elemeire jellemző olyan tulajdonsággal, ami csak a halmaz elemeire igaz:  $A = \{\text{Dunántúli Középhegység hegyei}\}$ , de megadhatjuk elemei felsorolásával is:  $A = \{\text{Bakony, Vértes, Pilis}\}$

Halmaz lehet olyan dolgok összessége is, amelyeknek nem sok közülük van egymáshoz. Például lehet egy halmaz három eleme az asztal, az uzsonnám, és a töltőtollam, ezt így jelöljük:  $A = \{\text{asztal; uzsonnám; töltőtollam}\}$ .

## Feladatok

Páros munkában oldassuk meg a következő feladatot. Hagyjunk időt a pároknak a megoldás megvitatására. Ha elkészültek, frontálisan beszéljük meg a feladat megoldását. Értékelés: helyes megoldásra 1-1 pontot adjunk.

 **18.** Az alább felsoroltak közül melyik esetben adtunk meg halmazt?

$A = \{\text{kék ceruza; sárga ceruza; piros ceruza; zöld ceruza; fekete ceruza}\}$

$B = \{\text{ikes igék}\}$

$C = \{\text{a világ legjobb gitárosai}\}$

$D = \{\text{páratlan pozitív egész számok}\}$

$E = \{\text{azok a lottószámok, amelyeket a jövő héten fognak kihúzni}\}$

**Megoldás:**

Az  $A$  megadás valóban halmazt jelöl, hiszen egyértelműen eldönthető, mi tartozik bele, és mi nem. Ez rendszerint így van, ha az elemeket felsoroljuk, hiszen az lesz eleme a halmaznak, ami ott van a felsorolásban. Ennek a halmaznak elemei kék ceruza; sárga ceruza; piros ceruza; zöld ceruza; fekete ceruza. Nem eleme a halmaznak a piros labda, de a fehér ceruza sem.

A  $B$  jelű megadás is halmazt jelöl. Igaz, itt nem soroltuk fel a halmaz elemeit, de aki tudja a magyar nyelvtant, felismeri, hogy e halmaznak eleme a „fésülködik” szó, de nem eleme a „mos” ige.

$C$ -ben nem halmazt adtunk meg. Sokan úgy gondolják, egyértelműen el tudják dönteni, hogy kik azok, akik beletartoznak a halmazba, de még a halmazba tartozó gitárosok számában sem lenne egyezés köztük. Ha egy halmazt úgy akar megadni valaki, hogy szubjektív tényezők is szerepelnek a meghatározásban, akkor az nem vezet sikerre.

$D$ -ről mindenki érzi, hogy ez a korrekt meghatározás halmazt ad meg. Itt pár szóval olyan halmazt írtunk le, melynek elemeit nem tudtuk volna felsorolni, bármennyire is igyekszünk, ugyanis végtelen sok eleme van.

Az  $E$  megadás nem halmaz, hiszen ha ismernénk az elemeit, akkor a jövőbe látnánk.

Tehát halmazokat adtunk meg az  $A$ ,  $B$ ,  $D$  esetben.

 **19.** Az előző feladatban megadott halmazoknak hány elemük van?

**Megoldás:**

Az  $A$  halmaznak 5 eleme van, a  $B$  halmaznak pontosan meghatározható számú eleme, a  $D$  halmaznak végtelen sok eleme van,  $C$  és  $E$  nem ad meg halmazt, ezért elemei számáról sem beszélhetünk.

 **20.** Sorold fel a következő halmazok elemeit!

- {2 és 5 közé eső egész számok. Beleértve a 2-t és az 5-öt is }
- {50-nél nagyobb, de 80-nál kisebb páros számok}
- {Az iskola szóban előforduló betűk}
- {Magyarország két legnagyobb folyója}

**Megoldás:**

- {2; 3; 4; 5}
- {52; 54; 56; 58; 60; 62; 64; 68; 70; 72; 74; 76; 78}
- {a; i; k; l; o; s}
- {Duna; Tisza}

Két halmazt akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha ugyanazok az elemei.

Az elemek sorrendje nem számít.

 **21.** Döntsd el, hogy az alább felsorolt halmazok közül vannak-e egyenlők?

$$A = \{2; 5; -4\}$$

$$B = \{\text{a 6 osztói}\}$$

$$C = \{\text{a 0-nál kisebb pozitív számok}\}$$

$$D = \{\text{a 1-nél nagyobb, de 5-nél nem nagyobb egész számok}\}$$

$$E = \{-2; -3\}$$

$$F = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$G = \{\text{a } (-4)\text{-nél nagyobb, de } (-2)\text{-nél nem nagyobb egész számok}\}$$

$$H = \{3; 4; 5\}$$

$$I = \{-4; 2; 5\}$$

$$J = \{2, \text{ vagy nagyobb, de } 3\text{-nál nem nagyobb egész számok}\}$$

*Módszertani megjegyzés:* A feladatot önálló munkában itemenkénti ellenőrzéssel oldassuk meg. Azt, hogy mit választunk egy itemnek, a tanulók tudásszintje határozza meg. Például mutatjuk a megoldáson belül a szürkére színezett részenkénti bontást. Az ellenőrzés során minden helyes megoldást pipáltassuk ki, minden téveset javítottassunk. Az értékelésnél a helyes megoldások számára kérdezzünk rá a kisebb számtól a nagyobb felé haladva. Használjuk a legalább, pontosan kifejezéseket.

*Megoldás:*

Tudjuk, hogy két halmaz akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemei. Tehát első lépésben vizsgáljuk meg azokat a halmazokat, amelyek nem elemeikkel vannak megadva.

Az első ilyen halmaz a  $B$ . Sorold fel (írásban) a  $B$  halmaz elemeit!

Indoklás, ellenőrzés, értékelés.

Mivel a 6 osztói a következő számok: 1, 2, 3, 6, így  $B = \{1; 2; 3; 6\}$ .

Akinek jó a megoldása, pipálja ki.

Sorold fel a  $C$  halmaz elemeit! Indoklás, ellenőrzés, értékelés.

A  $C$  halmazba egyetlen szám sem tartozik. Ilyen halmaz is van, **üres halmaznak** nevezzük és így jelöljük:  $\{\}$  vagy  $\emptyset$ .  $C = \{\}$ .

Akinek jó a megoldása, pipálja ki.

Sorold fel a  $D$  halmaz elemeit! Indoklás, ellenőrzés, értékelés. Stb.

$$D = \{2; 3; 4; 5\}.$$

$$G = \{-3; -2\}, J = \{2; 3\}.$$

Most tekintsük át, mely halmazoknak ugyanazok az elemei.


$A=I$ , mert az elemek sorrendje nem számít.

$B=F$

$E=G$ , mert az elemek sorrendje nem számít.

*Módszertani megjegyzés:* Értékelés: Tegye fel a kezét az, aki 3 pipánál többet gyűjtött, aki legalább 5 pipát gyűjtött... stb. Használjuk a pontosan, több, kevesebb, legalább, legfeljebb kifejezéseket!



 **22.** Döntsd el, hogy az alábbiak közül melyik ad meg halmazt:

$A = \{\text{legnagyobb egész szám}\}$

$B = \{24 \text{ osztói}\}$

$C = \{\text{a legszebb öt lány az osztályban}\}$

$D = \{\text{tetszőleges két egész szám}\}$

$E = \{\text{a legjobb magyar zenekarok}\}$

$F = \{\text{mély hangrendű magánhangzók}\}$

$G = \{\text{a } \pi \text{ számban előforduló számjegyek}\}$


$H = \{\text{osztályunk tehetséges tanulói}\}$

*Megoldás:*

Halmazt ad meg:  $A$  (üres halmaz),  $B$ ,  $F$ ,  $G$ .

Ahhoz, hogy lássuk, hogy a  $\pi$  leírásában előfordul az összes számjegy, a  $\pi$  első 33 jegyét kell ismerni, ugyanis a 33. jegyben fordul elő először a 0.

3.1415926535 8979323846 2643383279 50

 **23.** Add meg, hány eleme van az alábbi halmazoknak?

$A = \{\text{Az osztályodba járó fiúk}\}$

$B = \{\text{a HALMAZ szó betűi}\}$

$C = \{1; 2; 1; 2; 1\}$

$D = \{3; 5; 2\}$

*Megoldás:*

Az előbbi  $D = \{3; 5; 2\}$  halmaznak az elemei 3, 5; 2, azaz a halmaz 3 elemet tartalmaz.

Azt mondjuk, a  $D$  **halmaz számossága (elemeinek száma)** 3, a  $B$  halmaz számossága 6.

A halmazok azonos elemeit egy elemnek tekintjük, ezért a  $C$  halmaznak 2 eleme van: 1

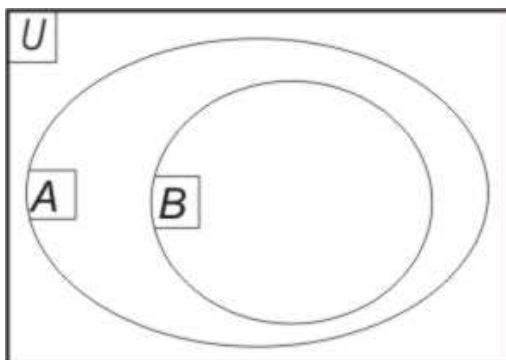
és 2, számossága: 2.

### III. Részhalmazok

#### Mintapélda<sub>3</sub>

Adott az alábbi két halmaz:  $A := \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ ,  $B := \{2; 4; 6; 8; 10\}$ .

- Soroljuk fel azokat a számokat, amelyek mind a két halmaznak elemei!
- Helyezzük el az elemeket az ábrában (Venn-diagramon)!



- Soroljuk fel azokat a számokat, amelyek elemei az  $A$  halmaznak, de nem elemei a  $B$ -nek!
- Soroljuk fel azokat a számokat, amelyek elemei a  $B$  halmaznak, de nem elemei  $A$ -nak!

Egy  $B$  halmaz **részhalmaza** az  $A$  halmaznak, ha minden  $B$ -beli elem az  $A$  halmaznak is eleme.

(Jelölése:  $B \subseteq A$ )



Minden halmaz részhalmaza önmagának, és minden halmaznak részhalmaza az üres halmaz. Ezek **nem valódi részhalmazok**.

A mintapéldában szereplő  $B$  halmaz **valódi részhalmaza** az  $A$  halmaznak, ha  $B$  minden eleme eleme  $A$ -nak is, de a  $B$  halmaz nem azonos az  $A$  halmazzal.

(Jelölése:  $B \subset A$ )

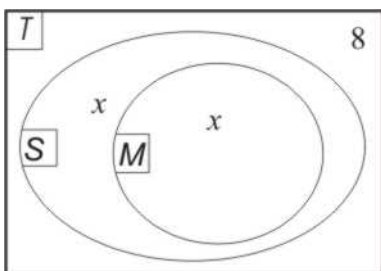
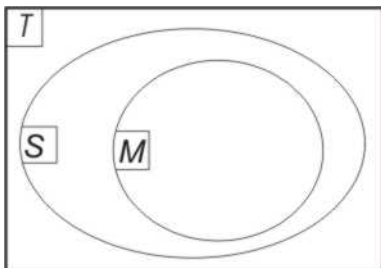
## Mintapélda<sub>4</sub>

Egy 50 fős turistacsoport vezetője megfigyelte a Hősök terén, hogy aki bement a Múcsarnokba, az bement a Szépművészeti Múzeumba is.

- a) Ábrázoljuk Venn-diagramon a turistacsoport, közülük a Múcsarnokot látogatók, és a Szépművészeti Múzeumot látogatók halmazának viszonyát!
-  b) Ha 8 turista nem ment be egyik múzeumba sem, és a Szépművészeti Múzeumba kétszer annyian mentek, mint a Múcsarnokba, akkor hányan mentek az egyes múzeumokba?
-  c) Hány múzeumjegyet vásároltak összesen?


### Megoldás:

Jelöljük  $T$ -vel a turistacsoport tagjait, ami egy 50 elemű halmaz, tekintsük ezt **alaphalmaznak**.  $M$ -mel jelöljük a turistacsoport tagjai közül azokat, akik bementek a Múcsarnokba,  $S$ -sel pedig a Szépművészeti Múzeumba látogatók halmazát.



- a) Mivel az  $M$  halmaz minden tagja tagja az  $S$  halmaznak is, ( $M \subseteq S$ ), indokolt az  $M$  halmazt az  $S$  halmazon belül rajzolni. Mivel az  $M$  és az  $S$  halmaz elemei mind a csoportba való turisták, ( $M \subseteq T$  és  $S \subseteq T$ )  $T$ -nek részhalmaza  $S$  is és  $M$  is.
- b) A szöveg alapján kiderül, hogy kétszer annyian mentek a Szépművészeti Múzeumba, mint a Múcsarnokba. Ez csak úgy lehet, hogy az  $M$  halmazon kívül, de az  $S$  halmazon belül is  $x$  elem van. Írjuk be az ábrába azoknak a részeknek az elemszámát, amelyeket biztosan tudjuk. Így látható, hogy  $x + x + 8 = 50 \Rightarrow x = 21$ .  
Vagyis a Múcsarnokba 21-en mentek be.
- c) A Múcsarnokot látogatók a Szépművészeti Múzeumot is megnézték, ezért ők  $2x = 42$  jegyet váltottak. Összesen  $2x + x = 3x = 63$  jegyet vettek.

## Feladatok

 **24.** Itthon a következő fűszereim vannak: majoránna, só cukor, pirospaprika, szegfűszeg, fahéj, bors, babérlevél, bazsalikom, fokhagyma, kömény.

Az alábbi finomságok közül melyikhez van itthon fűszerem?

Fogalmazd át a feladatot a halmazok „nyelvi világába”!

A konyhaművészetben kevésbé járatosak kedvéért felsoroljuk az egyes ételekhez nélkülözhetetlen fűszereket.

Körözött: só, mustár, pirospaprika, kömény.

Paprikás krumpli: só, pirospaprika.


Burgonyafőzelék: bors, só, babérlevél.

Almás pite: cukor, fahéj.

Túrós táska: cukor, vaníliás cukor.

### Megoldás:

A körözöttet és a túrós táskát nem tudom megcsinálni.

 **25.** Tekintsük az alábbi halmazokat

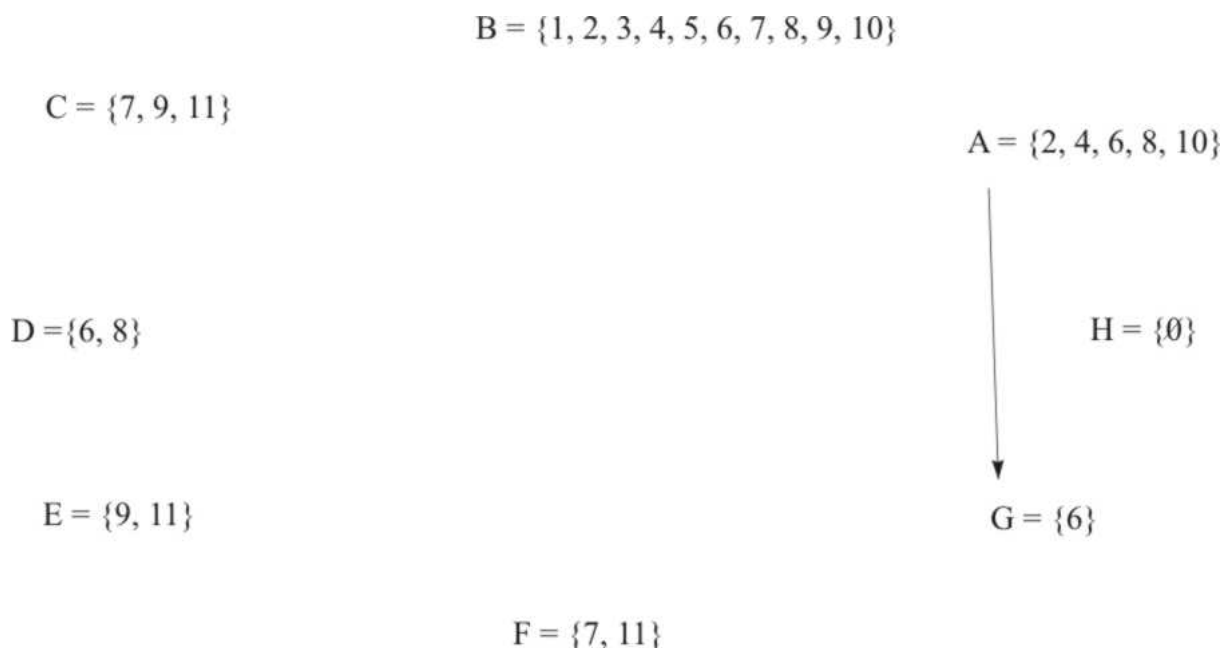
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad C = \{7, 9, 11\},$$

$$D = \{6, 8\}, \quad E = \{9, 11\}, \quad F = \{7, 11\},$$

$$G = \{6\}, \quad H = \{\}.$$

Húzz nyilakat a halmazok betűjelei közé úgy, hogy ha a  $G$  halmaz valódi részhalmaza  $A$ -nek, akkor  $A$ -ból  $G$  felé mutasson a nyíl.

Könnyítésül egy nyilat behúztunk:

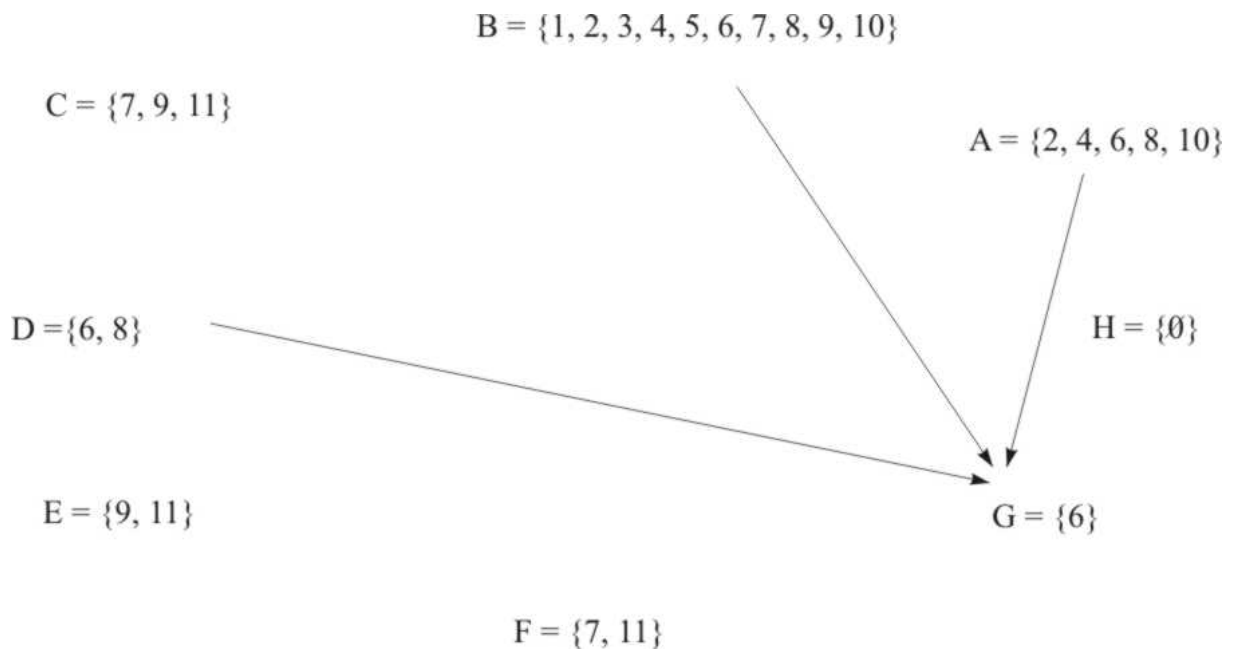


*Megoldás:*

Rajzoljuk föl a 8 halmazt.

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, de ezt **nem valódi részhalmaznak** nevezzük. Így a  $H$ -halmaz irányába nem húztunk nyilakat.

A  $G$  halmazba az  $A$ ,  $B$  és  $D$  halmazok felől húzhatunk nyilat:



Az  $F$  részhalmaza a  $C$ -nek.

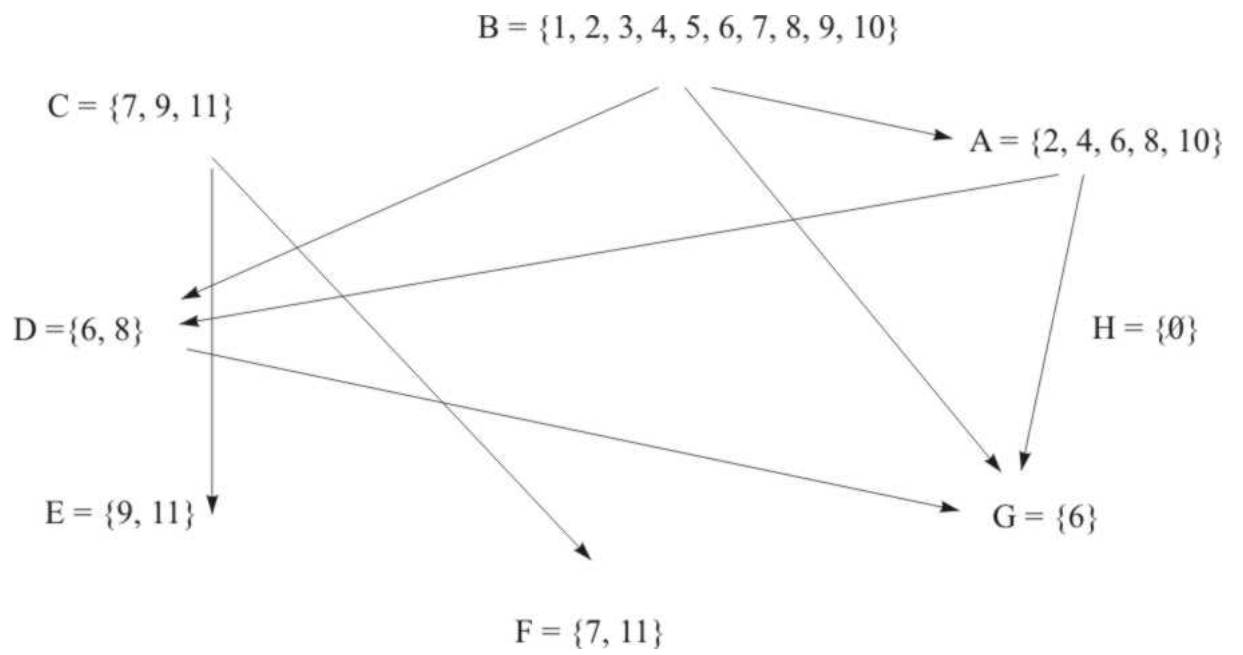
Az  $E$  részhalmaza a  $C$ -nek.

Az  $D$  részhalmaza az  $A$ -nek és a  $B$ -nek.

Az  $C$  nem részhalmaza a többi halmaznak. Innen nem indul ki nyíl.

Az  $A$  részhalmaza a  $B$ -nek.

Így az ábra:



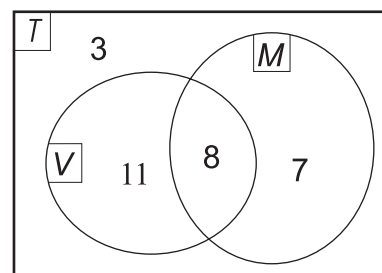
## IV. Halmazműveletek

A feladatok megoldása során mindenütt alkalmaztuk a halmazelméleti jelöléseket. A tanulóknak ezeket megmutathatjuk, de számon kérni semmiképpen nem szabad. A cél, hogy a tanulók pontosan el tudják helyezni a halmazábrában az adott tulajdonsággal, illetve tulajdonságokkal rendelkező elemeket, illetve meg tudják állapítani ezeknek a halmazoknak a számosságát, és így válaszolni tudjanak a konkrét kérdésekre.

### Mintapélda<sub>5</sub>

*Módszertani megjegyzés:* A feladatot önálló, vagy páros munkában itemenkénti ellenőrzéssel oldassuk meg. Érdemes követni a jelölt beosztást. Itemenként ellenőrizzünk, értékeljük a tanulók munkáját. A jelölések, és elnevezések súlyolásánál fontosabb a szövegértés, értelmezés, a szöveg alapján a modell elkészítése, a logikai megértés.

Egy turistacsoport tagjai ( $T$ ) közül néhányan elmentek vásárolni ( $V$ ). Néhányan múzeumba mentek ( $M$ ). Voltak, akik vásároltak és múzeumban is voltak. Olyanok is akadtak, akik nagyon elfáradtak, és a szállodában maradtak. A halmazábrában jelöltük, hogy hányan voltak vásárolni, illetve múzeumban. Olvasd le az ábráról:



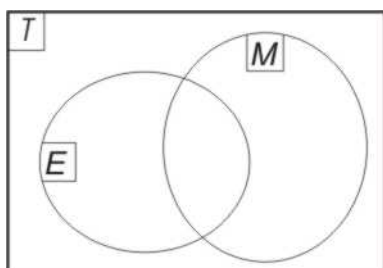
- Hányan voltak múzeumban?
- Hányan voltak vásárolni?
- Hányan voltak múzeumban is és vásárolni is?
- Hányan voltak múzeumban vagy vásárolni is?
- Hányan voltak múzeumban, de vásárolni nem?
- Hányan nem voltak múzeumban?
- Hányan maradtak otthon?
- Hányan voltak a turistacsoportban?

### Mintapélda<sub>6</sub>

Egy kétnapos fesztivált rendeztek a városban. Az osztályból 25 tanuló ment el vagy az egyik, vagy a másik, vagy mindkét napjára. Mind a két nap 6 tanuló volt ott. 16 tanuló volt az első napon, és 5 tanuló egyáltalán nem ment el.

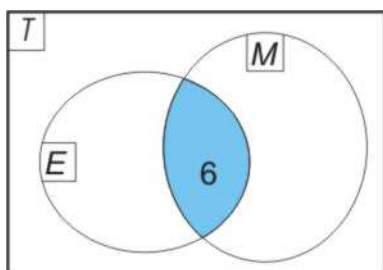
- Hány tanuló van az osztályban?
- Hány tanulója volt az osztálynak a fesztiválon csak az első napon?
- Hány tanuló volt az osztályból a fesztivál második napján?
- Hány olyan tanuló volt, aki csak a második napon vett részt a fesztiválon?
- Hány olyan tanuló volt, aki legfeljebb egyik nap vett részt?

Első ránézésre ez bonyolult feladatnak tűnik, de ha sikerül ábrázolni az adatokat, könnyedén válaszolhatunk a kérdésekre.



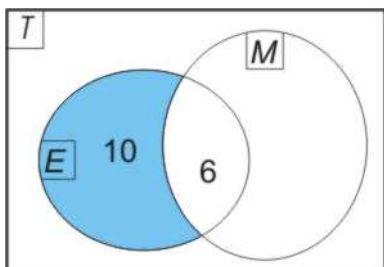
A megoldáshoz készítsünk halmazábrát, majd írjuk be az egyes részekbe az odatartozó tanulók számát. Legyen  
 $T = \{\text{Az osztály tanulói}\}$ ,  
 $E = \{\text{Első nap}\}$ ,  
 $M = \{\text{Második nap}\}$ .

Írjuk be a halmazábrába, hány tanuló volt a fesztiválon mind a két nap!



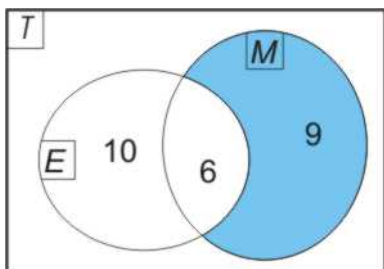
6 tanuló volt a fesztiválon mind a két nap.  
 Azaz a két halmaz **közös részének** (metszetének) 6 eleme van. (Jelölés:  $E \cap M$ .)

Írjuk be a halmazábrába, hány olyan tanuló van, aki az első nap ott volt a fesztiválon, de a második napon nem!



Mivel 16-an voltak a fesztiválon az első nap, így 10 olyan tanuló van, aki az első nap ott volt, de a másodikon nem.  
 Az  $(E \setminus M)$  **különbség-halmaz** elemeinek száma 10.

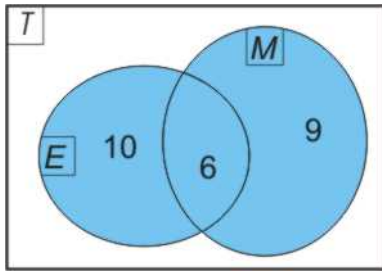
Írjuk be a halmazábrába, hány olyan tanuló van, aki a második nap ott volt a fesztiválon, de az első napon nem!



9 olyan tanuló van, aki csak a második nap volt a fesztiválon, az első nap nem.  
 Az  $(M \setminus E)$  különbség-halmaz elemeinek száma 9.

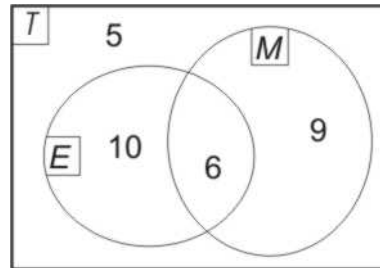
Írjuk be a halmazábrába, hány tanuló volt a két nap alatt legalább az egyik napon a fesztiválon.





25 tanuló volt a két nap közül legalább az egyikén a fesztiválon.

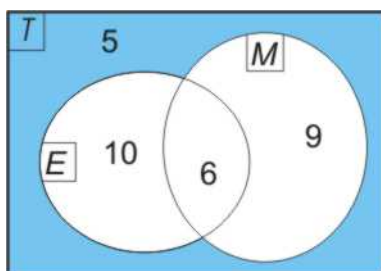
Ez azt jelenti, hogy a két halmaz **egyesítettjének** (azaz uniójának, az  $E \cup M$  halmaznak) összesen 25 eleme van.



5 tanuló egyik nap sem volt a fesztiválon.

Ez az 5 tanuló nem eleme az  $M$

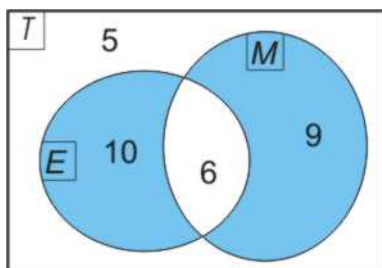
halmaznak, vagyis az  $M$



**kiegészítő halmazának** (jelölése:  $\bar{M}$ ) az eleme.

Ez az 5 tanuló nem eleme az  $E$  halmaznak, azaz eleme az  $E$  kiegészítő halmazának. A megoldás a két kiegészítő halmaz közös része.

A halmazábra segítségével könnyedén válaszolhatunk a kérdésekre.



- Az osztálynak  $9+6+10+5=30$  tanulója van.
- Pontosan egy napon  $9+10=19$  tanulója volt a fesztiválon az osztálynak.
- A második nap  $9+6=14$  tanulója volt a fesztiválon az osztálynak.
- Csak a második nap 9 tanuló vett részt a fesztiválon.
- Legfeljebb egy napon volt a fesztiválon  $30 - 6 = 24$  tanuló.

Vizsgáljuk meg az egyes halmazműveleteket és a nekik megfelelő kifejezések jelentését.

„**Legalább az egyik**”; „egyik **vagy** másik, vagy mindkettő”: a két halmaz egyesítése ( $A \cup M$ ).

„**Legfeljebb az egyik**”: „pontosan az egyik, vagy egyik sem”.

„**Mindkettő**”; „egyik **és** másik”; „egyik **is**, és a másik **is**”: a két halmaz közös része ( $A \cap M$ ).

„**Pontosan az egyik**”; „**vagy** az egyik, **vagy** a másik”: a két halmaz különbségeinek közös része.

## Mintapélda<sub>7</sub>

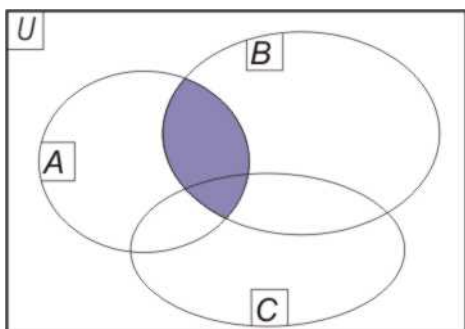
Legyen  $A$  halmaz a kíváncsiak halmaza és  $B$  halmaz a pletykásoké,  $C$  halmaz pedig az oktondiaké. Tegyük fel, hogy ezek a jellemzők egyértelműen meghatározhatók.

Rajzold be a halmazábrába a

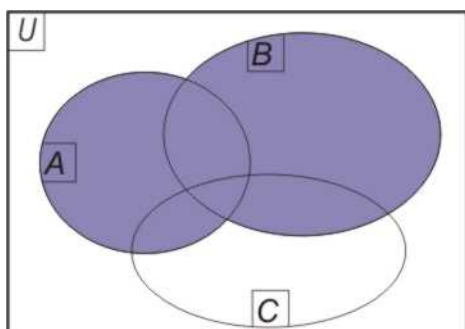
- kíváncsi pletykásokat,
- azokat, akik oktondik, vagy kíváncsiak, vagy oktondi kíváncsiak.
- Melyik részhalmazba helyezhetnénk el Katit, aki oktondi is, kíváncsi is, de nem pletykás?!

**Megoldás:**

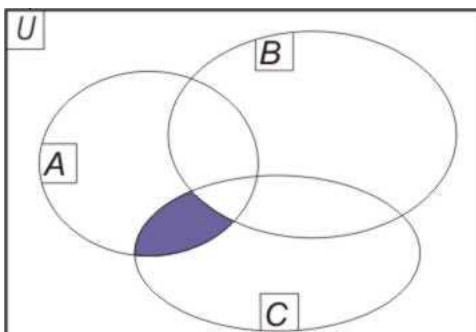
- Az, aki kíváncsi is és pletykás is, az beletartozik az  $A$  és a  $B$  halmazba is, tehát ez a halmaz közös része, metszete ( $A \cap B$ ).



- A két tulajdonság közül legalább az egyik vonatkozik rájuk, így a két halmaz egyesítéséből kapott halmazba, uniójába tartoznak. ( $A \cup B$ ).



- $(A \cap C) \setminus B$



## Feladatok

 **26.** Az  $A$  jelentse az okosak halmazát:  $A = \{\text{okosak}\}$ ,  $B$  legyen a szépek halmaza:

$B = \{\text{szépek}\}$ ,  $C$  pedig a csúnyák halmaza:  $C = \{\text{csúnyák}\}$ .

Tegyük fel, hogy ezek a jellemzők mindenkiről egyértelműen meghatározhatók.

Fogalmazd meg, kik tartoznak az


- $A$  és  $B$  közös részébe ?
- az  $A$  és  $C$  egyesített részébe?
- a  $B$  és  $C$  közös részébe?

*Megoldás:*

$A \cap B$ : Az okos, szép emberek: azok az emberek, akik okosak is és szépek is.

$A \cup C$ : Akik vagy okosak vagy csúnyák, vagy okosak és csúnyák.

$B \cap C$ : Akik szépek és csúnyák egyszerre. Ha jó volt a meghatározó tulajdonság, ilyen ember nincs, tehát üres halmaz.

 **27.** Legyen az  $A$  halmaz a jogosítvánnyal rendelkezők halmaza.  $B$  a 18 éven aluliak halmaza,  $C$  pedig azoké, akiknek legalább 3 gyermekük van. Azaz:

$A = \{\text{jogosítvánnyal rendelkezők}\}$ ;  $B = \{18 \text{ éven aluliak}\}$ ;

$C = \{\text{legalább 3 gyermekük van}\}$ .

Fogalmazd meg, kik tartoznak

- a  $B$  és  $C$  halmaz közös részébe?
- az  $A$  és  $B$  halmaz közös részébe?
- az  $A$  halmazba és ugyanakkor a  $B$ -be, vagy a  $C$ -be is ?


*Megoldás:*

$B \cup C$ : azok, akiknek legalább három gyerekük van, vagy 18 éven aluliak.

$A \cap B$ : azok a tizennyolc éven aluliak, akiknek van jogosítványa.

$A \cap (B \cup C)$ : Legyenek 18 éven aluliak, vagy legalább három gyermekük legyen, de mindenképp legyen jogosítványuk.

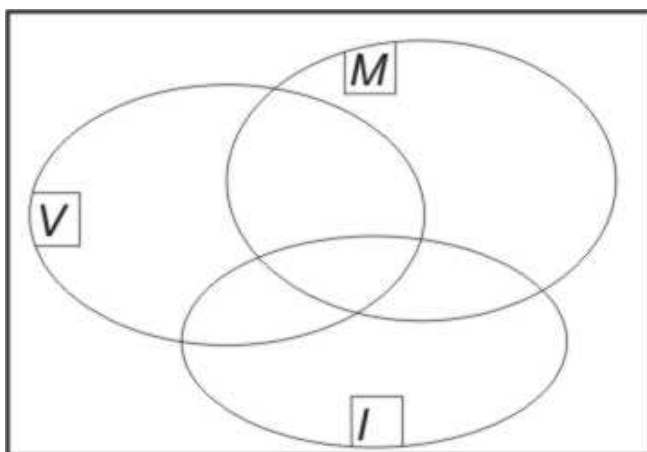
A következő feladatot 2-3 fős csoportokban érdemes feldolgozni. Az egyik gyerek beírja a neveket a Venn-diagramba, a másik (vagy másik kettő) a kérdéses számosságokat határozza meg a táblázat alapján. Elképzelhető, hogy a számosságoknál valaki úgy számol, hogy figyelembe veszi azt is, ha egy családnak pl. több mobilja van. Az eredményeket megosztják egymással, majd ennek alapján jó befejezést írnak a mondathoz és közösen készítik el az új Venn-diagramot.

 **28.** Nyolc család igen jó barátságban van. Azért, hogy egymást bármikor el tudják érni, elkészítették a következő táblázatot:

Név	Vezetékes telefonszám	Mobil telefonszám	E-mail cím
Kovács	111-1111	(30)111-1111 (30)111-1112	<a href="mailto:kovacs@papa.com">kovacs@papa.com</a>
Kiss	222-2222	(20)222-2222 (20)222-2223 (20)222-2224	<a href="mailto:kiss@huhu.hu">kiss@huhu.hu</a>
Molnár		(70)333-3333 (70)333-3334 (70)333-3335 (70)333-3336	
Nagy		(20)313-1313 (20)313-1314 (70)414-4141 (70)414-4142	<a href="mailto:nagy@uzenek.hu">nagy@uzenek.hu</a>
Fekete	333-3333 333-3334	(30)212-1212 (30)212-1213	<a href="mailto:fekete@level.hu">fekete@level.hu</a>
Fehér	444-4444		
Szabó	555-5555	(30)444-4444	
Balog	666-6666	(20)555-5555 (20)555-5556	<a href="mailto:balog@hocinesze.hu">balog@hocinesze.hu</a>

Legyen  $V$  azon családok halmaza, amelyeknek van vezetékes telefonja,  
 $M$  azon családok halmaza, amelyeknek van mobil telefonja,  
 $I$  azon családok halmaza, akik elérhetők interneten.

a) Töltsd ki a következő Venn-diagramot! (Írd be a neveket!)



b) Írd le a keresett halmazok számosságát!

Hány családnak van vezetékes telefonja?

Hány családnak van mobil telefonja,

Hány családnak van e-mail elérhetősége?

Hány olyan család van, akik elérhetők vezetékes telefonon és e-mailben is?

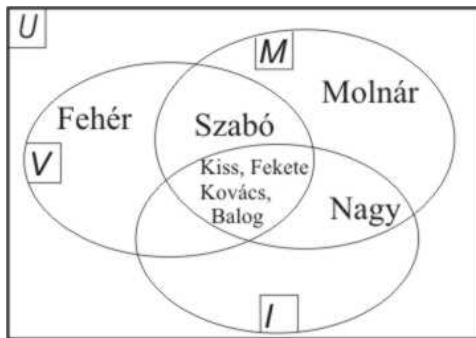
Hány olyan család van, akik vagy vezetékes telefonon vagy mobilon, vagy mindkettőn elérhetők?

Hány család érhető el vagy mobil telefonon vagy e-mailben, vagy mindkettőn?

- c) Fejezd be a mondatot: Az adatok alapján nincs olyan család, ...  
 d) Kik azok, akiknek van vezetékes telefonjuk és e-mail címük is, de nincs mobil telefonjuk?

*Megoldás:*

a)



b)

$$|V| = 6$$

$$|M| = 7$$

$$|I| = 5$$

$$|V \cap I| = 4$$

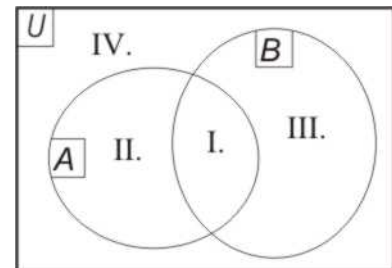
$$|V \cup M| = 8$$

$$|M \cup I| = 7$$

- c) Az adatok alapján nincs olyan család, aki elérhető e-mail-ben, de nincs mobil telefonja.  
 d) Nincs ilyen család.



29. A tanár a tanulók valamelyikét szeretné megbízni azzal, hogy készüljön föl a halmazelmélet történetéből. Jelentkeznek is rá szép számmal, nevüket elhelyezi az A halmazban. Majd megkérdezi, ki az, aki ebben a tanévben már felelt szóban matematikából. Az ő nevük a B halmazba kerül.



A tanár azok közül szeretne választani előadót, akik jelentkeztek, és eddig nem feleltek.

Ezt a halmazt hogy tudnád kifejezni a halmazműveletek segítségével?

Fogalmazd meg, hogy kik kerülnek az I., II., III. és IV. tartományokba!

(Az  $U$  halmaz az osztály összes tanulója.)

*Megoldás:*

Valószínűleg a jelentkezők közül azt, aki még nem felelt szóban, ez a II. tartomány:

$A \setminus B$ .

A további tartományok:








I: aki felelt már szóban, de most is jelentkezik.

III: aki felelt már szóban, de most nem jelentkezik.

IV: eddig még nem felelt és most sem kíván készülni.

## Játék:

A halmazműveletek átisméltéséhez a mellékletben levő kártyakészlettel lehet játszani. Annyi példányban kell elhelyezni a kártyakészletet egy kis zsákba, ahány játékos van egy csoportban mínusz egy fő. Tehát 5 fős csoport esetén 4 kártyacsomag kell, de két fős csoportnál is kell minimum 2 kártyacsomag. (A javasolt csoportlétszám 3-5 fő).

Kezdetben minden tanuló kihúzza 5-5 kártyát egy zsákból, amit nem mutat meg a többieknek, és az asztal közepére helyeznek további 5 kártyát. A soron következő tanuló kirakja az asztalon fekvők mellé tetszőleges számú kártyát és megnevezi egy halmazműveletet. Pl. ha az asztalon volt     , mellé helyezi a   kártyákat, és hozzáteszi, hogy metszet. Ekkor ő kap egy pontot, mivel a cél az a játékban, hogy minél többször éadjunk el egyelemű halmazt, de aki üres halmazt „csinál” az asztalon, az egy pontot veszít.