

MATEMATIK „A” 9. évfolyam

---

## 7. modul: HÁROMSZÖGEK

---

KÉSZÍTETTE: VIDRA GÁBOR, LÉNÁRT ISTVÁN

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| <b>A modul célja</b>            | <p>Az általános iskolából hozott geometriai alapok ismétlése. Ismerje és használja megfelelően az alapfogalom, axióma, definiált fogalom, bizonyított tétel fogalmát. Tudja csoportosítani a háromszögeket oldalak és szögek szerint.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a háromszögekkel kapcsolatos fogalmakat és alapvető összefüggéseket, a speciális háromszögek tulajdonságait.</p>   |
| <b>Időkeret</b>                 | 6 óra   |
| <b>Ajánlott korosztály</b>      | 9. évfolyam   |
| <b>Modulkapcsolódási pontok</b> | <p>Tágabb környezetben: képzőművészet, zene, építészet, informatika, természeti környezet, kertészet, szabás- varrás, rajz, vizuális kultúra.</p> <p>Szűkebb környezetben: sokszögek, transzformációk, hasonlóság, térgeometria, halmazelmélet, összehasonlító geometria, trigonometria, koordináta-geometria.</p> <p>Ajánlott megelőző tevékenységek: általános iskolai ismeretek szögekről, háromszögről; szögek összeadása, kivonása, a háromszög nevezetes vonalainak elnevezése, jelölése; pontthalmazok ismerete</p> <p>Ajánlott követő tevékenységek: hasonlósági feladatok, bizonyítások hasonlóság felhasználásával, trigonometriai és koordináta-geometriai feladatok, térfogat- és felszínszámítás</p> |

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| <b>A képességfejlesztés fókuszai</b> | <p><i>Számolás, számlálás, számítás</i></p> <p>Geometriai alakzatok mennyiségi jellemzői, mérőszámok összehasonlítása rendezése, a számolási készség alkalmazása a valóság tárgyain, illetve azok geometriai modelljein.</p> <p><i>Mennyiségi következtetés</i></p> <p>Következtetések megfogalmazása mennyiségi jellemzőik között. A mennyiségek folytonosságának, fogalmának továbbfejlesztése. Gömbi geometriában szögek és szögösszegek becslése.</p> <p><i>Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet</i></p> <p>Számolási eredmények közelítő értékének, nagyságrendjének becslése.</p> <p><i>Szöveges feladatok, metakogníció</i></p> <p>Szövegértelmezés továbbfejlesztése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek fejlesztése.</p> <p><i>Rendszerezés, kombinatív gondolkodás</i></p> <p>Síkbeli és térbeli analógiák felfedezése. A valóság tárgyainak jellemzése a geometriai fogalmak segítségével, absztrakciós képesség fejlesztése.</p> <p><i>Induktív, deduktív következtetés</i></p> <p>Összefüggések, képletek felfedezése gyakorlati tapasztalatból kiindulva, azok általánosítása és alkalmazása más esetekben</p> |
|--------------------------------------|--|

## **ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK**

### **Elemi geometria**

#### **Középszint**

Ismerje és használja megfelelően az alapfogalom, axióma, definiált fogalom, bizonyított tétel fogalmát.

### **A távolságfogalom segítségével definiált ponthalmazok**

#### **Középszint**

Tudja a kör, gömb, szakaszfelező merőleges, szögfelező fogalmát.

Használja a fogalmakat feladatmegoldásokban.

#### **Emelt szint**

Parabola fogalma.

### **Síkbeli és térbeli alakzatok**

#### **Középszint**

Ismerje a síkidomok, testek csoportosítását különböző szempontok szerint.

### **Háromszögek**

#### **Középszint**

Tudja csoportosítani a háromszögeket oldalak és szögek szerint.

Ismerje és alkalmazza az alapvető összefüggéseket háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között (háromszög-egyenlőtlenség, belső, illetve külső szögek összege, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van).

Ismerje és alkalmazza speciális háromszögek tulajdonságait.

Tudja a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó definíciókat, tételeket (oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör).

Ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban.

Ismerje és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását.

Ismerje és alkalmazza feladatokban a magasság- és a befogótételt.

#### **Emelt szint**

Bizonyítsa a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételeket (körülrít és beírt kör középpontja; magasságpont, súlypont, középvonal tulajdonságai).

Bizonyítsa a Pitagorasz-tételt és megfordítását.

Bizonyítsa a magasság- és a befogótételt.

## PROJEKTEK INDÍTÁSA

A modulban olyan kiegészítő jellegű ötletek is helyet kaptak (pl. életrajzok, bizonyítások), amelyek feldolgozása projekt módszerrel, kutatómunkában, elsősorban csoportokban javasolt. A projektek végterméke lehet például számítógépes bemutató, kiselőadás, kartonpapírra összegyűjtött anyagok (képek, írások stb), esetleg egy szórólap jellegű írás, amelyet a többi tanuló beragaszthat a füzetébe. A projekteket a modul első óráján célszerű elindítani: felvetni az ötleteket, és összegyűjteni a gyerekek vállalásait. Példák projektötletekre:

### **Euklidesz élete, axiómái, posztulátumai;**

A geometriai tételek bizonyításai (szövegre, oldalakra vonatkozók stb.);

A Pitagorasz-tétel bizonyításai (gyűjtőmunka);

Pitagorasz élete és munkássága;

### **Thalész élete és munkássága** (sok az érdekes történet);

A szerkesztési feladatok megoldásai egy alternatív geometriai szerkesztőprogramban (pl. Cabri);

Patchwork minták, színezések (quilt pattern; főleg minták keresése, készítése, kész termékek bemutatása az internetről)

Háromszögek szerepe a művészetben (kompozíciók, épületek, népművészet stb.);

## AJÁNLOTT TEVÉKENYSÉGEK

Csoportmunka: a sík, illetve a tér kitöltése különböző formákkal.

A síkon és a gömbön felrajzolt alakzatok tulajdonságainak megfigyelése: hasonlóságok, különbségek.

Kutatómunka, projektmunka (előadás, vetítés számítógéppel, interaktív programok az internetről).

Valóságos tárgyak, modellek elkészítéséhez felhasználandó anyagok mennyiségének közelítő meghatározása, az ehhez szükséges képességek fejlesztése.

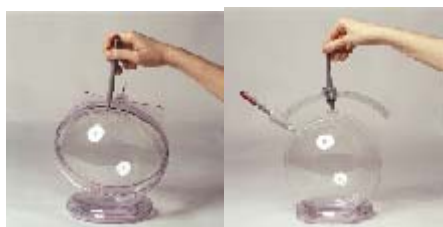
Szövegértelmezés továbbfejlesztése a lényegkiemelő képesség fejlesztése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek, a térlátás fejlesztése.

Síkbeli és térbeli analógiák felfedezése.

A valóság tárgyainak jellemzése a geometriai fogalmak segítségével, absztrakciós képesség fejlesztése.

### **ÖSSZEHAONLÍTÓ GEOMETRIA (LÉNÁRT ISTVÁN MUNKÁJA)**

Az összehasonlító geometria lényege, hogy a síkgeometriai kísérletezést a gömbi geometria területén történő kísérletezéssel egészítjük ki. Az elsődleges eszköz a manipulációs rajzgömb-készlet, amelyet sokféle módon egészíthet ki az informatikai úton elérhető ismeretanyag.



A két legfontosabb célkitűzés:

a síkgeometriai fogalmak gyorsabb és mélyebb megértése az ellenpélda, az összehasonlítás, a kontraszt segítségével;

annak tudatosítása, hogy az euklideszi geometrián kívül másféle, éppoly hasznos és érdekes geometriai rendszerek is léteznek, így is erősítve a lezáratlan, nyitott geometriáról kialakítandó képet.

A javasolt munkamódszer a kiscsoportos módszer. Három-négy tanuló együttműködve, egymást segítve, egymással vitatkozva dolgozik egyazon készlettel. A tanár összefoglalja az eredményeket, új ötleteket vet fel, elindítja a kísérletet; de ő a kísérletezés alatt sokkal inkább szervező, beszélgetőpartner, kutatópartner, mint csalhatatlan döntéshozó. Elsősorban nem tudásanyaggal, hanem viselkedésmóddal, gondolkozásmóddal tanít.

A közölt példák túlnyomó többsége a síkbeli példa gömbi átfogalmazásával kezdődik. Ez nem pusztán fogalmazási, hanem nagyon mély, a megértéssel, a valódi, nem formális tudással kapcsolatos kérdés. Ezután következik a kétféle eset, a kétféle geometria összehasonlítása. Gyakran elég az induktív, kísérleti tapasztalatszerzés. Pontosabb bizonyításokra akkor kerül sor, ha azok világosak, rövidek, és esetleg geometrián kívüli témákhoz (aritmetikai műveletek, egyenletrendezés, egyenlőtlenségek, lineáris függvények stb.) kapcsolódnak.

### **INTERAKTÍV HÁROMSZÖGEK – INFORMATIKAI ESZKÖZÖK HASZNÁLATA**

A modul feldolgozása során lehetőségünk adódik, hogy tanításunkat informatikai eszközökkel színesítsük, a nevezetes vonalak és pontok érdekességeit felfedezzük a tanulókkal. A gyerekek örömmel használják az informatikai eszközöket, azonban alkalmazás előtt a pedagógusnak el kell sajátítania valamilyen geometriai szerkesztőprogram használatát. Ilyen például az Euklides, amely nagyon szemléletes, dinamikus tulajdonságokkal rendelkezik (például egy bázispontot mozgatva az egész ábra megváltozik, és animáció is készíthető vele), van ingyenes verziója, és nem utolsósorban magyar fejlesztés. Ismertetőket és feladatokat találunk a <http://geometria.lap.hu/> weboldalon és a Sulineten.

Célszerű előre elkészítenünk a feladatok megoldásait, hogy gyakorlatot szerezzünk, és hatékonyan segíthessünk a tanítványainknak. Ha nincs elég gép a gépteremben, osszuk csoportokra a gyerekeket. Ilyen esetben ügyeljünk rá, hogy a különböző feladatokat más-más tanuló végezze.

## ÓRABEOSZTÁS

### 1. óra (Bevezetés, I, II. – főleg frontális módszerrel)

A geometria, mint tudományterület, 1. mintapélda.

Csoportmunkában a definíciók, feladatok összegyűjtése és megbeszélése.

A háromszögek csoportosítása különböző szempontok szerint (oldalak, szögek, speciális háromszögek).

A háromszög szögeinek tulajdonságai.

A háromszög oldalaira vonatkozó összefüggések.

### 2. óra (Gyakorló óra)

A háromszög szögeivel kapcsolatos feladatok

### 3. óra (III.)

A háromszög nevezetes vonalai, körei (számítógépes laborban, Euklides szerkesztőprogrammal)

### 4. óra (IV, V.)

A háromszög kerülete, területe

Pitagorasz-tétel és megfordítása



Feladatok Pitagorasz-tételre

5. óra (V.)

Feladatok Pitagorasz-tételre

Thalész-tétel és megfordítása, Thalész-projekt ismertetése

Feladatok Thalész-tételre

6. óra

Speciális háromszögek áttekintése

Feladatok speciális háromszögekre

A modul összefoglalása

## **TÁMOGATÓ RENDSZER**

Lénárt-gömb készlet, internetcímek a kutató projektekhez, összehasonlító geometria elemei a modulban, geometriai szerkesztő szoftverek (például ingyenesen Euklides, Cabri).

**MODULVÁZLAT**

|                                      | <b>Lépések,<br/>tevékenységek</b>  | <b>Kiemelt készségek, képessé-<br/>gek</b> | <b>Eszköz/<br/>Feladat/<br/>Gyűjtemény</b>                 |
|--------------------------------------|--|--|--|
| <b>I. Diagnosztika, ráhangolódás</b> |  |  |  |
| 1                                    | A geometria, mint tudományterület<br>Projektindítások (résztevők, témák és határidők megválasztása)                            |  | Olvasmány a modulból, 1. mintapél-<br>da                   |
| 2                                    | Feladatmegoldás: definíciók, tételek összegyűjtése (csoportmunka)  | Kooperáció, rendszerezés,<br>metakogníció  | Tanári modulból feladatlap-másolat<br>(Bevezető feladatok) |
| 3.                                   | Kiemelt: szögfajták, szögpárok, háromszög definíciója, háromszö-<br>gek csoportosítása, szögekre vonatkozó tételek (frontális) | Rendszerezés                               | Tanulói modul ábrái  |

| <b>II. Számolás szögekkel</b> |  |   |  |
|-------------------------------|--|---|--|
| 1.                            | Feladatok szögekre (csoportmunkában; 3 – 6. feladatok diákkvartettben is feldolgozhatók, a többi ellenőrzés párban módszerrel) | Kooperáció, metakogníció, kombinativitás, modellalkotás | 2–10. feladat  |
| 2.                            | A háromszögek csoportosítása (frontális, tanári magyarázat)  | Rendszerezés  | Tanulói munkafüzet; 12. feladat csoportmunkában      |
| 3.                            | A háromszög szögeiről (frontális, tanári magyarázat)   |   | Tanulói munkafüzet, 14. feladat, 3. és 4. mintapélda |
| 4.                            | A háromszög szögeivel kapcsolatos feladatok (csoportmunkában, differenciáltan)   | Metakogníció, kombinativitás, modellalkotás             | 15–26. feladatok közül válogatunk                    |
| 5.                            | A háromszög oldalaival kapcsolatos feladatok (csoportmunkában, esetleg ellenőrzés párban módszerrel)                           |   | 28. és 30. feladat                                   |
| 6.                            | A háromszög oldalaival kapcsolatos ismeretek összegzése (frontális, tanári magyarázat)   |   |  |

| <b>III. A háromszög oldalai, nevezetes vonalai (szerkesztések Euklides programmal)</b> |   |   |   |
|--|---|---|---|
| 1.   | A háromszög oldalaira, nevezetes vonalaira, köreire vonatkozó szerkesztések (egyéni és frontális munka váltakozása) | Rendszerezés, modellalkotás, kooperativitás, IKT használata | Számítógépes labor, Euklides program, projektor |
| 2.   | A háromszög kerülete, területe (frontális tanári magyarázat)  | Rendszerezés  |   |
| 3.   | Projektmunka javaslat: Heron képlet felderítése   |   |   |

| <b>IV. Speciális háromszögek</b> |  |   |  |
|----------------------------------|--|---|--|
| 1.                               | Pitagorasz-tétel és megfordítása (frontális munka, tanári magyarázat)                          | Rendszerezés, számolás, szükséges és elégséges kapcsolat            | Tanulói munkafüzet, 5. és 6. mintapélda            |
| 2.                               | Pitagorasz-tétellel kapcsolatos feladatok (csoportmunkában, diákkvartettben is feldolgozhatók) | Rendszerezés, számolás, metakogníció, kombinativitás, modellalkotás | 35–38. feladatokból válogatunk                     |
| 3.                               | Thalész-tétel és megfordítása (tanári magyarázat), Thalész-projekt ismertetése                 | Rendszerezés  | Tanulói munkafüzet                                 |
| 4.                               | Thalész-tétellel kapcsolatos feladatok (csoportmunka)  | Rendszerezés, számolás, metakogníció                                | 7. – 9. mintapélda, 39–41. feladatokból válogatunk |
| 5.                               | Háromszögekkel kapcsolatos feladatok (tetszőleges módszerrel)                                  |   | 42–53. feladat                                     |
| 6.                               | Speciális háromszögek áttekintése (tanári magyarázat)  | Rendszerezés  |  |
| 7.                               | Speciális háromszögekkel kapcsolatos feladatok (többnyire csoportmunkában, differenciáltan)    | Rendszerezés, számolás, metakogníció                                | 10–11. mintapélda, 54–80. feladatokból válogatunk  |