I. Osztó, többszörös, prímszámok, összetett számok, számelmélet alaptétele, osztók száma

Módszertani megjegyzés: Keresd a csoportodat!
Minden tanulónak adunk egy-egy kártyát, melyen azonos számok vannak szorzat alakban. Ez a kiosztás lehet véletlenszerű: például a tanulók maguk húznak egy-egy kártyát a tanári asztalról, vagy tudatos: figyelünk arra, hogy kinek melyik kártyát adjuk. A tanulók feladata megkeresni azokat a társaikat, akiknek a kártyáján ugyanaz a szám szerepel. A feladat egyben fejszámolási gyakorlat is, ne engedjük, hogy számológépet használjanak!

4.1. kártyakészlet alkalmazása

144	$6\cdot 24$	$4\cdot 36$	$9\cdot 16$
108	$6\cdot 18$	$4\cdot 27$	$3\cdot 36$
126	$2\cdot 63$	$9\cdot 14$	$6\cdot 21$
120	$3\cdot 40$	$8\cdot 15$	$5\cdot 24$
105	$3\cdot 35$	$7\cdot 15$	$5\cdot 21$
88	$2\cdot 44$	$8\cdot 11$	$4\cdot 22$
96	$4\cdot 24$	$8\cdot 12$	$6\cdot 16$
225	$5\cdot 45$	$3\cdot 75$	$25\cdot 9$

Módszertani megjegyzés: Ha megalakultak a csoportok, akkor írják fel annak a számnak néhány osztóját és néhány többszörösét, amelyik a kártyájukon szerepel. Fogalmaztassuk meg a csoportokkal, hogy mit jelent az, hogy egy szám osztója vagy többszöröse egy másik számnak, majd beszéljük meg közösen, és írjuk is le a füzetbe a pontos meghatározásokat.
Általános iskolában a pozitív egész számok halmazában már értelmeztük az oszthatóságot, ezt most kiterjesztjük a természetes számok halmazára. Vizsgáljuk meg az újonnan hozzávett számot oszthatósági szempontból: nullának minden szám osztója, a nulla viszont egyetlen pozitív egész számnak sem osztója.

Emelt szinten érdemes az oszthatóságot kiterjeszteni az egész számok halmazára is. Sok változást nem jelent, csak minden számnak kétszer annyi osztója lesz, mint eddig.

Az *a* és *b* természetes számok esetén akkor mondjuk, hogy az *a* szám osztója *b*-nek, ha van olyan *c* természetes szám amelyre $a \cdot c = b$.
Jelölés: $a \mid b$.
Akkor mondjuk, hogy egy *d* természetes számnak többszöröse az *f* természetes szám, ha *d* osztója *f*-nek.
Egy szám 1-en és önmagán kívüli osztóit a szám valódi osztóinak nevezzük.

Mintapélda$_1$

Keressük meg a következő számok osztóit: 1; 9; 13; 15; 17; 19; 23; 24; 26; 31; 35; 36!

Módszertani megjegyzés: Az előzőleg megalakult csoportokban dolgozzanak a tanulók. Minden csoporttag válasszon ki három számot, és keresse meg az osztóit egyedül. Ha készen vannak, ketten-ketten cseréljék ki a füzeteiket, és ellenőrizzék, hogy a másik jól gondolkodott-e, nem találnak-e hibát, vagy esetleg olyan osztót, ami kimaradt.

Megoldás:

1 osztói: 1.

9 osztói: 1; 3; 9.

13 osztói: 1; 13.

15 osztói: 1; 3; 5; 15.

17 osztói: 1; 17.

19 osztói: 1; 19.

23 osztói: 1; 23.

24 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

26 osztói: 1; 2; 13; 26.

31 osztói: 1; 31.

35 osztói: 1; 5; 7; 35.

36 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.

Módszertani megjegyzés: Ha a csoportok elkészültek, kérdezzük meg, hogy lehetne-e valamilyen szempont szerint csoportosítani az előbbi számokat. Melyek azok, amelyeknek egy, kettő vagy több osztójuk van? Hogyan hívjuk ezeket a számokat? A tanulók meghatározásai alapján írjuk le a füzetbe a definíciókat!

Azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztója van, prímszámoknak nevezzük.
Azokat a természetes számokat, amelyeknek kettőnél több pozitív osztója van, összetett számoknak nevezzük.

Mi a helyzet az 1-gyel?

Vigyázat! Az 1 se nem prím, se nem összetett szám.

Mintapélda$_2$

Keressük meg az 1 és 100 között található prímszámokat!

Megoldás: Eratosztenészi szitával.

1	2	3	4	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

A prímszámok kiszűrésére való eljárás az ún. eratosztenészi szita. Rendezett táblázatba írjuk fel 1-től 100-ig az egész számokat. A 2-t karikázzuk (az ábrán szürkére színezzük) be, majd húzzuk ki a kettőnél nagyobb, 2-vel osztható számokat! Hasonlóan a 3-at karikázzuk be, majd húzzuk ki a háromnál nagyobb, 3-mal osztható számokat! A következő szám, ami még nincs kihúzva az 5, karikázzuk be és húzzuk ki a nála nagyobb, öttel osztható számokat! Keressük meg a következő nem áthúzott számot, ez a 7, karikázzuk be és húzzuk ki a nála nagyobb többszöröseit! És így tovább, addig folytassuk az eljárást, amíg az 1-en kívül minden számot vagy bekarikáztunk, vagy áthúztunk. Azok a számok, amelyeket áthúztunk, összetett számok, amelyeket bekarikáztunk, pedig prímszámok. Az 1-et nem karikáztuk be, és nem húztuk át, hiszen az egy se nem összetett, se nem prímszám.

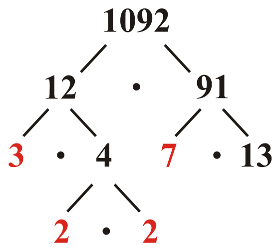
Mintapélda$_3$

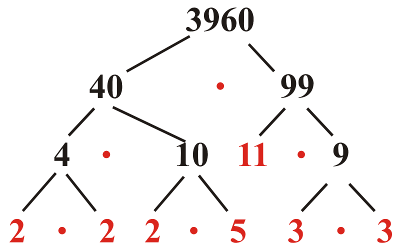
Írjuk fel a következő számok prímtényezős felbontását: 1092; 3960.

Mit jelent az, hogy prímtényezős felbontás, hogyan tudjuk ezt könnyen felírni?

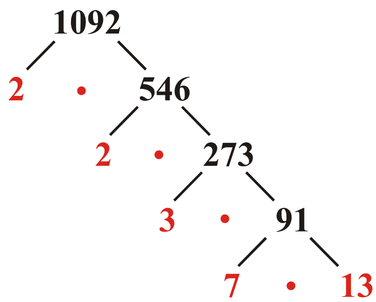
Megoldás:

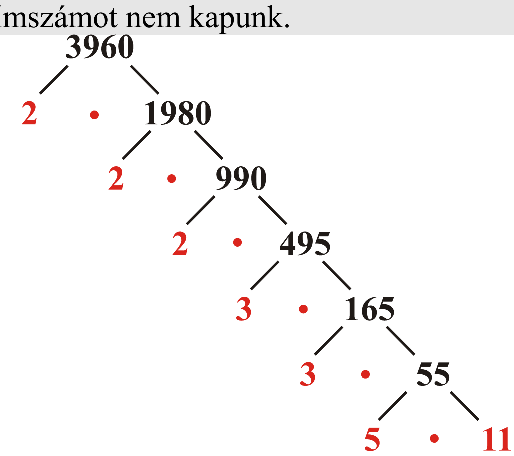
Biztos, hogy minden csoportnak egyforma a számolása? Mi az, aminek biztosan meg kell egyeznie?





Kisebb természetes számok szorzatára bontjuk az adott számot, majd mindegyik tényezőt tovább bontjuk, ezt addig folytatjuk, amíg prímszámot nem kapunk.





$$\begin{array}{r|l} 1092 & 2 \\ 546 & 2 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

A legkisebb prímszámtól kezdve egyenként leválasztjuk a tényezőket, majd a vonal jobb oldalán lévő számokat összeszorozzuk.

$$1092 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 13 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$$

$$3960 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 11 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$$

Módszertani megjegyzés: Beszéljük meg közösen, hogy ha valaki más sorrendben végezte el az osztásokat, az nem baj, de a végén kapott prímtényezős felbontásnak meg kell egyeznie. Egy-két lehetőséget fel is írhatunk a táblára. Fogalmazzuk meg a számelmélet alaptételét!

Itt érdemes elmondani, hogy a matematikában az oszthatósági problémákkal a számelmélet foglakozik.

A számelmélet alaptétele: Minden összetett szám felbontható prímszámok szorzatára és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Figyeljünk arra, hogy a prímtényezők közé ne kerüljenek összetett számok. Néha odakeveredik a 4 vagy a 9 is. Most tisztázzuk, hogy a vonal jobb oldalára csak prímszámok kerülhetnek. Fedeztessük fel a tanulókkal, hogy egy szám prímosztóit a négyzetgyökéig kell keresni, ha odáig nem találunk, akkor a szám prímszám. A felbontásban segítenek az oszthatósági szabályok.

Mintapélda$_4$

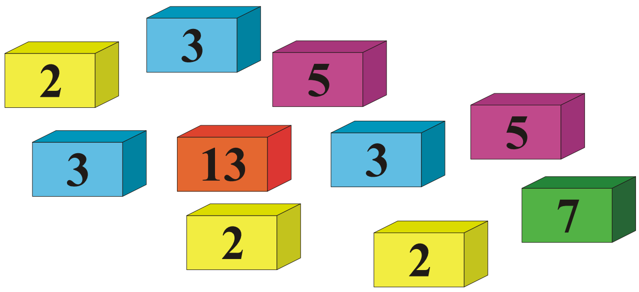
Az adott prímtéglákat használva készítsünk

a) négyzetszámot,

b) köbszámot,

c) a lehető legnagyobb számot,

d) 0-ra végződő 13-mal osztható számot!



Megoldás:

Négyzetszámot úgy kapunk, ha minden azonos jelű téglából páros darabot veszünk.

Köbszámot úgy kapunk, ha minden azonos jelű téglából 3-mal osztható darabot veszünk.

A lehető legnagyobb számot úgy kapjuk, ha az összes prímtéglát felhasználjuk.

Egy szám akkor osztható 13-mal, ha prímtényezői között szerepel a 13.

Mintapélda$_5$

Határozzuk meg a következő számok prímtényezős felbontását, osztóit és osztóinak a számát: 18; 32; 36; 42; 49; 72!

Módszertani megjegyzés: A csoporttagok osszák fel egymás között, hogy ki melyik számnak készíti el a prímtényezős felbontását. Aki leghamarabb készen van, az választ még egy számot. Közösen írják fel az osztókat és állapítják meg a számukat. Ha a csoportok elkészültek, akkor a megoldásokat frontálisan beszéljük meg.

Megoldás:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$18 = 2 \cdot 3^2$ $32 = 2^5$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ $49 = 7^2$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$

18 osztói: 1; 2; 3; 6; 9; 18. Osztóinak a száma: 6 db.

32 osztói: 1; 2; 4; 8; 16; 32. Osztóinak a száma: 6 db.

36 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36. Osztóinak a száma: 9 db.

42 osztói: 1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42. Osztóinak a száma: 8 db.

49 osztói: 1; 7; 49. Osztóinak a száma: 3 db.

72 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72. Osztóinak a száma: 12 db.

Mintapélda$_6$

Határozzuk meg 360 osztóinak a számát!

Vajon megállapítható-e csak a prímtényezős felbontásból, hogy egy számnak hány darab osztója van?

Megoldás:

		Kitevő			
		0	**1**	**2**	**3**
Prímszámok	**2**	**1**	**2**	**4**	**8**
	3	**1**	**3**	**9**	**-**
	5	**1**	**5**	**-**	**-**

Írjuk fel a 360 prímtényezős felbontását:

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Úgy kapunk egy tetszőleges osztót, hogy mindhárom sorból választunk egy-egy számot és az így kiválasztott három számot, összeszorozzuk. Az első sorból 4-féle, a másodikból 3-féle, a harmadikból 2-féle számot választhatunk, ezért összesen:

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ osztója van a 360-nak.

Módszertani megjegyzés: Minden csoport összeállít három kérdést az óra anyagával kapcsolatban. Például: mit nevezünk prímszámnak; sorold fel 24 osztóit; hány osztója van a 144-nek! A kérdéseket odaadja egy másik csoportnak. Felügyeljük a feladat írását, hogy ne adjanak egymásnak túl nehéz feladatokat, csak olyanokat, amiket maguk is meg tudnak oldani. Minden csoport közösen megoldja a kapott feladatokat, a megoldást visszaküldi a feladóknak, akik kijavítják és értékelik a másik csoport munkáját. (Megnézzük az elkészült megoldásokat, hogy van-e benne hiba, de ne szóljunk érte rögtön, hanem figyeljük meg, hogy a javító csoport megtalálja-e a hibát.)

Feladatok

1. Keresd meg a következő számok osztóit: 113; 169; 517; 659; 901. Melyek ezek közül prímek?

Megoldás:

113 osztói: 1; 113. Prímszám.

169 osztói: 1; 13; 169.

517 osztói: 1; 11; 47; 517.

659 osztói: 1; 659. Prímszám.

901 osztói: 1; 17; 53; 901.

2. Bontsd fel a következő számokat prímszámok szorzatára: $2016; 1980; 1456$.

Megoldás:

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \qquad 1456 = 2^4 \cdot 7 \cdot 13$

3. Egy hajó hosszának, az árboc magasságának, a kapitány kisfiának és a kapitány életkorának szorzata 303335. Hány éves a kapitány?

Megoldás:

31 éves, mert $303335 = 5 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 103$ (prímtényezőkre bontva), és 103 öreg lenne kapitánynak, de jó hajóhossznak. 5 túl fiatal kapitánynak és rövid árboc magasságnak, de a fia életkora lehet. 19 túl fiatal kapitánynak, ez lesz az árboc.

4. Mitől függ, hogy egy szám osztóinak a száma páros vagy páratlan?

Megoldás:

Az osztókat párba rendezve, úgy, hogy az osztópárok szorzata a számot adja, akkor kapunk páratlan számú osztót, ha az osztó párja önmaga, azaz ha a szám négyzetszám. Minden más esetben az osztók száma páros.

5. Két testvér életkorának összege legalább 10, de legfeljebb 20 esztendő. Az életkorok összegének 6 pozitív osztója van. Hány évesek a testvérek, ha egyikük háromszor annyi idős, mint a másik?

Megoldás:

Vegyük ki a prímeket, hiszen azoknak pontosan két osztójuk van. (11; 13; 17; 19)

Ha az összetett szám két prímszám szorzata, akkor 4 osztója van: 1, önmaga és a két prímszám. Vegyük ki ezeket is. (10; 14; 15)

Vizsgáljuk a megmaradt számok osztóit:

$12 = 2^2 \cdot 3^1$ osztóinak a száma: $(2+1)\cdot(1+1) = 6$

$16 = 2^4$ osztóinak a száma: $4 + 1 = 5$

$18 = 3^2 \cdot 2^1$ osztóinak a száma: $(2+1)\cdot(1+1)=6$

$20 = 2^2 \cdot 5^1$ osztóinak a száma: $(2+1)\cdot(1+1)=6$

Fogadjuk el, ha a diákok az osztók számát az osztók felsorolásával adják meg.

Ha együtt 12 évesek, akkor a fiatalabb 3 éves, az idősebb 9 éves.

Ha együtt 18 évesek, akkor a fiatalabb 4,5 éves, az idősebb 13,5 éves. Az egész számok halmazán ez nem megoldás, de a feladatban ez nem volt kikötés.

Ha együtt 20 évesek, akkor a fiatalabb 5 éves, az idősebb 15 éves.

A feladat jó példa arra, hogy ha kapunk egy megoldást, az nem azt jelenti, hogy más megoldás nincs.

6. Hány pozitív osztója van az 1224-nek?

Megoldás:

1224 prímtényezős felbontása: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$.

Ezért osztóinak a száma: $(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)=24$.

7. Határozd meg 3496 páratlan osztóinak a számát!

Megoldás:

3496 prímtényezős felbontása: $2^3 \cdot 19 \cdot 23$. A 2-t nem tartalmazó osztók, mind osztói a $19 \cdot 23$- nak. Ezek száma: $(1+1)\cdot(1+1)=4$.

Házi feladatnak javasoljuk: 1. és 2. feladat.

II. Oszthatósági szabályok

Mintapélda$_7$

Írjuk be az alábbi számokat a táblázatba!

32178 350 1625 15249 2584 200 23715 3000

OSZTHATÓSÁG											
Utolsó számjegy alapján			Utolsó két számjegy alapján				Utolsó három számjegy alapján			Számjegyek összege alapján	
2-vel	5-tel	10-zel	4-gyel	25-tel	50-nel	100-zal	8-cal	125-tel	1000-rel	3-mal	9-cel

Megoldás:

OSZTHATÓSÁG											
Utolsó számjegy alapján			Utolsó két számjegy alapján				Utolsó három számjegy alapján			Számjegyek összege alapján	
2-vel	5-tel	10-zel	4-gyel	25-tel	50-nel	100-zal	8-cal	125-tel	1000-rel	3-mal	9-cel
32178 3000 2584 350 200	3000 23715 1625 350 200	3000 350 200	3000 2584 200	3000 1625 350 200	3000 350 200	3000 200	3000 2584 200	3000 1625	3000	32178 15249 3000 23715	23715

Próbáljuk a táblázat alapján megfogalmaztatni az oszthatósági szabályokat!

Utolsó számjegy

Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel, vagyis ha páros (azaz, ha az utolsó számjegye 0, 2, 4, 6, 8).

Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye osztható 5-tel (azaz, ha az utolsó számjegy 0 vagy 5).

Utolsó két számjegy

Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből álló legfeljebb kétjegyű szám osztható 4-gyel.
Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 25-tel, ha az utolsó két számjegyéből álló legfeljebb kétjegyű szám osztható 25-tel.
Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 50-nel, ha az utolsó két számjegyéből álló legfeljebb kétjegyű szám osztható 50-nel.
Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 100-zal, ha az utolsó két számjegye 0.
(Mivel 100 osztható 4-gyel, 25-tel, 50-nel és 100-zal, ezért 10-nek minden, kettőnél nem kisebb egész hatványa is osztható ezekkel.)

Számjegyek összege

Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.
Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.
(Ugyanis 10 hatványai felírhatóak a következő módon:
10 = 9 + 1; 100 = 99 + 1; 1000 = 999 + 1 stb. Az összegek első tagjai oszthatóak 3-mal, illetve 9-cel, így a megfelelő helyi értékeken álló számok összege – szorozva 1-gyel – dönti el az oszthatóságot.)

Például:

$$2724 = 2\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 = 2\cdot(999+1) + 7\cdot(99+1) + 2\cdot(9+1) + 4\cdot 1 .$$

Elég vizsgálnunk a számjegyek összegét: 2 + 7 + 2 + 4 = 15, mivel ez a szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, ezért az eredeti szám is osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel.

Mintapélda₈

Egy számlán látható a következő tétel: 72 db. könyv ára ❧679❧ Ft.

Sajnos az első és az utolsó számjegy olvashatatlan. Mennyibe került egy könyv?

Megoldás:

$72 \mid \overline{x679y}$

Egy szám akkor és csak akkor osztható 72-vel, ha osztható 9 · 8 –cal, azaz 9-cel is és 8-cal is. Egy szám akkor és csak akkor osztható 8-cal, ha utolsó három számjegyéből álló szám osztható 8-cal. $8 \mid \overline{79y}$. Ez akkor tejesül, ha $y = 2$ Egy szám, akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel. $9 \mid x+6+7+9+2 = x+24$. Tehát $x = 3$.

Tehát 72 könyv 36792 Ft-ba, így egy könyv 511 Ft-ba került.

Figyelem! A tényezőnkénti oszthatóság csak relatív prím tényezők esetében alkalmazható!

Mintapélda₉

Egy szobában kétféle szék van: háromlábú suszterszék és négylábú karosszék. Minden széken ül egy gyerek. Így összesen 35 lábat tudunk megszámolni. Hány gyerek van a szobában?

Megoldás:

A székeken ülő gyerekek kétlábúak, így a suszterszékek „ötlábú”, a karosszékek „hatlábú” székként adnak 35 lábat. Ez az összeg 5-nek többszöröse, tehát a „hatlábú” székek száma is 5-nek többszöröse, ami legfeljebb 5 lehet, különben több mint 35 láb lenne a szobában. Ezek szerint 5 karosszék és 1 suszterszék van a szobában, mindegyiken egy gyerek ül, számuk tehát 6.

Módszertani megjegyzés: Jobb csoportokban a 35 láb helyett adjunk nagyobb számot, például a **72**-t. Ez azért is nehezebb, mert több megoldás lehetséges.
A székeken ülő gyerekek kétlábúak, így a suszterszékek "ötlábú", a karosszékek "hatlábú" székként adnak 72 lábat. Ez az összeg 6-nak többszöröse, tehát az "ötlábú" székek száma is 6-nak többszöröse, ami maximum 14 $(5 \cdot 14 = 70)$ lehet, különben több mint 72 láb lenne a szobában. Ezek szerint 7 karosszék és 6 suszterszék van a szobában, mindegyiken egy gyerek, számuk tehát 13, vagy 2 karosszék és 12 suszterszék van a szobában, tehát 14 gyerek ül a szobában.

Feladatok

Módszertani megjegyzés. Minden csoportba osszunk ki A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint. Szétválnak a csoportok az A, B, C, D jelek szerint, ők dolgoznak most együtt. Ha a csoportok elkészültek, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többieknek elmondja a feladatainak megoldását.
Az A jelűek feladata:

8. Milyen számjegyek írhatók a $*$ helyére, ha a) $5 \mid \overline{9371*}$; b) $3 \mid \overline{82*54}$?

Megoldás: a) $* = 0; 5$; b) $* = 2; 5; 8$.

A B jelűek feladata:

9. Milyen számjegyek írhatók a $*$ helyére, ha a) $9 \mid \overline{7*213}$, b) $4 \mid \overline{754*2}$?

Megoldás: a) $* = 5$; b) $* = 1; 3; 5; 7; 9$.

A C jelűek feladata: (Az oszthatóság tényezőnként csak akkor vizsgálható, ha a tényezők relatív prímek.)

10. Milyen számjegyek írhatók x és y helyére, ha a) $12 \mid \overline{234xy2}$, b) $18 \mid \overline{1x302y}$?

Megoldás:

a) Ha $y = 1$, akkor $x = 0; 3; 6; 9$, ha $y = 3$, akkor $x = 1; 4; 7$,
ha $y = 5$, akkor $x = 2; 5; 8$, ha $y = 7$, akkor $x = 0; 3; 6; 9$, ha $y = 9$, akkor $x = 1; 4; 7$.

b) Ha $y = 0$, akkor $x = 3$, ha $y = 2$, akkor $x = 1$, ha $y = 4$, akkor $x = 8$,
ha $y = 6$, akkor $x = 6$, ha $y = 8$, akkor $x = 4$.

A D jelűek feladata:

11. Milyen számjegyek írhatók x és y helyére, ha a) $45 \mid \overline{136x7y}$, b) $36 \mid \overline{24x45y}$?

Megoldás:

a) Ha $y = 0$, akkor $x = 1$; ha $y = 5$, akkor $x = 5$.

b) Ha $y = 2$, akkor $x = 1$; a $y = 6$, akkor $x = 6$.

12. Lehet-e két prímszám összege 2003?

Megoldás:

Nem, mert két prímszám összege csak abban az esetben lehet páratlan, ha közülük az egyik a 2. Viszont a 2001 biztosan nem prím, mivel osztható 3-mal.

13. Igaz-e, hogy $10^{1526}+2$ osztható 3-mal?

Megoldás:

$10^{1526}=1\underbrace{00\ldots00}_{1526}$ $10^{1526}+2=1\underbrace{00\ldots00}_{1526}2$, ennek a számjegyeinek összege 3, tehát a szám osztható 3-mal.

14. Bizonyítsd be, hogy $45\,|\,10^{70}+80$!

Megoldás:

Egy szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha osztható 9-cel és 5-tel. Egy szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye osztható 5-tel. A szám utolsó számjegye: 0, ezért a szám biztosan osztható 5-tel. Egy szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel. A szám számjegyeinek összege: 9, ezért a szám biztosan osztható 9-cel. Így a vizsgált szám osztható 45-tel.

15. Milyen n egész számok esetén lesz az alábbi tört értéke egész szám?

a) $\dfrac{3n+11}{n+2}$; b) $\dfrac{2n+5}{n-3}$.

Megoldás:

a) $\dfrac{3n+11}{n+2}=\dfrac{3(n+2)+5}{n+2}=3+\dfrac{5}{n+2}$ Így elég azt vizsgálni, hogy $(n+2)\,|\,5$ milyen n egész szám esetén teljesül; ezek a következők: $n=-1$, $n=3$, $n=-3$, $n=-7$.

b) $\dfrac{2n+5}{n-3}=\dfrac{2(n-3)+11}{n-3}=2+\dfrac{11}{n-3}$ Így elég azt vizsgálni, hogy $(n-3)\,|\,11$ milyen n egész szám esetén teljesül;, ezek a következők: $n=4$, $n=14$, $n=2$, $n=-8$.

Házi feladat javaslat: 12. és 13. feladat.

III. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Módszertani megjegyzés: Minden csoport külön dolgozik a 10. és 11. mintapéldán. A leggyorsabban elkészülő csapat ismerteti a megoldást. Közösen megfogalmazzuk, hogy mit nevezünk két szám legnagyobb közös osztójának, és legkisebb közös többszörösének? Hogyan jelöljük, és hogyan tudjuk kiszámolni a prímtényezős alakból? Mely számokat nevezünk relatív prímeknek?

Mintapélda$_{10}$

Felújítjuk lakásunkat! Úgy döntöttünk, hogy a konyha padlójának burkolásához járólapokat vásárolunk. Milyen maximális oldalhosszúságú négyzet alapú lapokat vehetünk, ha a helység mérete 270 cm x 420 cm és egyetlen járólapot sem akarunk szétvágni? Hány db járólapot kell vásárolni? Hány csomag járólapot kell vásárolni, ha egy csomagban 10 db van? Becsüljük meg, hogy mennyi pénzt kell kivenni az automatából, hogy biztosan ki tudjuk fizetni a járólapokat, ha egy csomag ára 1790 Ft! (Az automatából csak 1000 forintot illetve ennek többszöröseit lehet kivenni.) Vizsgáljuk meg, hogy pontos volt-e a becslés!

Megoldás:

A két szám prímtényezős felbontása:

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

A két szám legnagyobb közös osztója: $(270; 420) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Maximum 30 cm x 30 cm-es csempéket vehetünk.

$270 = 9 \cdot 30$, $420 = 14 \cdot 30$

Összesen $9 \cdot 14 = 126$ darab járólapot, azaz 13 csomagot kell vásárolni.

Így, ha néhány (maximum 4 db) selejtes járólap is van a csomagunkban, akkor is be tudjuk fejezni a munkát.

A járólapok ára: $13 \cdot 1790 = 23270$ Ft. Az automatából 24000 Ft-ot kell kivenni.

Módszertani megjegyzés: Jobb csoportoknak úgy nehezíthetjük a feladatot, hogy megkérdezzük, hányféle négyzet alakú csempét vehetünk?
30 osztói: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30. 30 osztóinak a száma: 8.
Tehát 8-féle négyzet alakú csempe közül választhatunk, bár ezekből a legkisebbek a valóságban csak mozaiknak képzelhetőek el.

Mintapélda₁₁

A kalózok egy lakatlan szigeten osztozkodnak a zsákmányon. Hogyan osztották szét a 156 aranytallért, 91 rubintot és az 52 gyémántot, ha a háromféle kincsből mindenki ugyanannyit kapott? Hányan voltak a kalózok?

Megoldás

A három szám prímtényezős felbontása:

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ $\qquad 91 = 7 \cdot 13$ $\qquad 52 = 2^2 \cdot 13$

$(156, 91, 52) = 13$ a kalózok 13-an voltak. Mindenki 12 aranytallért, 7 rubintot és 4 gyémántot kapott a zsákmányból.

Jobb csoportoknak feladhatjuk: Egy hónap múlva még nagyobb zsákmányra tettek szert a kalózok, közben a csapathoz csatlakozott néhány újonc. Hogyan osztották szét a 1224 aranytallért, 595 rubintot és az 1938 gyémántot, ha a háromféle kincsből mindenki ugyanannyit kapott. Hány tagú most a csapat?

$1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$, $595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$, $1938 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19$, $(1224; 595; 1938) = 17$

17-en voltak a kalózok. Mindenki 72 aranytallért, 35 rubintot és 114 gyémántot kapott a zsákmányból.

Mit tudunk két szám legnagyobb közös osztójáról és legkisebb közös többszöröséről? Hogyan jelöljük? Hogyan tudjuk kiszámolni a prímtényezős alakból? Mely számokat nevezünk relatív prímeknek?

Két vagy több pozitív egész szám közös osztói közül a legnagyobbat a vizsgált számok legnagyobb közös osztójának nevezzük. (A prímtényezős felbontásból a közös prímtényezőket kell összeszorozni az előforduló legkisebb hatványon.)

Jelölés: Az *a* és *b* pozitív egész számok legnagyobb közös osztója: (*a*; *b*).

Ha két szám legnagyobb közös osztója 1, akkor a két számot relatív prímeknek nevezzük.

Két vagy több pozitív egész szám közös többszörösei közül a legkisebbet a vizsgált számok legkisebb közös többszörösének nevezzük. (A prímtényezős felbontásból minden előforduló prímet összeszorzunk az előforduló legmagasabb hatványon.)

Jelölés: Az *a* és *b* pozitív egész számok legkisebb közös többszöröse: [*a*; *b*].

Írjunk egy-egy példát!

$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11, \quad (72; 264) = 2^3 \cdot 3 = 24.$

$75 = 3 \cdot 5^2, \quad 56 = 2^3 \cdot 7, \quad (75; 56) = 1.$

$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11, \quad [72; 264] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 = 792.$

Módszertani megjegyzés: Minden csoportnak 4 pakli kártyát adunk. A csoport minden tagja választ magának egy paklit, majd megoldja a feladatokat. Az önálló feladat megoldás után a csoport megbeszéli minden feladat megoldását, a helyes eredményt leírják a füzetükbe. A tanár húz egy csoportszámot, és egy jelet, az a diák, akinek a jelét kihúzták, táblára felírja az eredményt, a többiek ellenőrzik, hogy jót írt-e.

4.2. kártyakészlet alkalmazása

I. Pakli	II. Pakli	III. Pakli	IV. Pakli
$(840; 336) =$	$(297; 396) =$	$(156; 104) =$	$(714; 510) =$
$[840; 336] =$	$[297; 396] =$	$[156; 104] =$	$[714; 510]$
$\frac{840}{336} =$	$\frac{297}{396} =$	$\frac{156}{104} =$	$\frac{714}{510} =$
$\frac{1}{840} + \frac{1}{336} =$	$\frac{1}{297} - \frac{1}{396} =$	$\frac{1}{156} - \frac{1}{104} =$	$\frac{1}{714} + \frac{1}{510} =$

Ismételjük át közösen, hogyan végzünk műveleteket törtekkel. Írjunk egy-egy példát.

Törtek bővítése: (A számlálót és a nevezőt ugyanazzal a nullától különböző egész számmal szorozva a tört értéke nem változik) $\frac{7}{3} = \frac{35}{15}$.

Törtek egyszerűsítése: (A számlálót és a nevezőt ugyanazzal a nullától különböző egész számmal osztva a tört értéke nem változik) $\frac{40}{88} = \frac{5}{11}$.

Törtek összeadása, kivonása: (Törteket akkor könnyű összeadni, illetve kivonni, ha ugyanaz a nevezőjük, ezt bővítéssel mindig elérhetjük): $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} - \frac{2}{35} = \frac{10}{35} + \frac{21}{35} - \frac{2}{35} = \frac{29}{35}$.

Törtek szorzása: (Törtet törttel úgy szorzunk, hogy számlálót a számlálóval nevezőt a nevezővel összeszorozzuk) $\frac{9}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{63}{20}$.

Törtek osztása: (Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorozzuk az osztandót) $\frac{6}{11} : \frac{5}{2} = \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{55}$.

Mintapélda$_{12}$

A budapesti Jászai Mari térnél lévő troli végállomásról reggel 8-kor egyszerre indulnak a 79-es és 76-os trolibuszok. Az egyik vonalon 12 percenként, míg a másikon 15 percenként indulnak a buszok. Mennyi idő múlva indul újra egyszerre két troli?

Megoldás:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$[12; 15] = [2^2 \cdot 3; 3 \cdot 5] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

60 perc, azaz 1 óra múlva indul újra egyszerre két troli.

Feladatok

16. Végezd el a következő műveleteket!

$\frac{13}{12} - \frac{5}{21}$; $\frac{7}{24} + \frac{3}{40}$; $\frac{8}{45} - \frac{4}{27} + \frac{5}{54}$;

$\frac{9}{13} \cdot \frac{9}{15}$; $\frac{18}{5} : \frac{-6}{10}$; $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{3} : \frac{3}{2}$.

Megoldás:

$\frac{13}{12} - \frac{5}{21} = \frac{71}{84}$; $\frac{7}{24} + \frac{3}{40} = \frac{11}{30}$; $\frac{8}{45} - \frac{4}{27} + \frac{5}{54} = \frac{11}{90}$;

$\frac{9}{13} \cdot \frac{39}{15} = \frac{9}{5}$; $\frac{18}{5} : \frac{-6}{10} = -6$; $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{3} : \frac{3}{2} = \frac{10}{27}$.

17. Húzd alá azokat a számokat, amelyekkel relatív prím az 504.

55 38 39 65 143 21 19

Megoldás:

<u>55</u> 38 39 <u>65</u> <u>143</u> 21 <u>19</u>

18. Nagyi Mikulásra csomagot készített. Hány unokája van, ha minden csomag teljesen megegyezett és összesen 63 szaloncukrot, 7 csoki mikulást és 21 csoki szeletet tett a zacskókba?

Megoldás:

$(63;\,7;\,21)=7$ Nagyinak 7 unokája van, és mindegyik 9 szaloncukrot, 1 csoki mikulást és 3 csoki szeletet kapott.

19. Két inga lengésideje 60, illetve 105 másodperc. Ha a két ingát egyszerre indítjuk el, akkor lengésük során leghamarabb mennyi idő múlva kerülnek egyszerre a kiindulási helyzetbe?

Megoldás:

$[60;\,105]=[\ 22\cdot3\cdot5;\ 3\cdot5\cdot7\ ]\ =2^2\cdot3\cdot5\cdot7=420$. Leghamarabb 420 másodperc, vagyis 7 perc után.

20. Határozd meg a 4950 és a 2940 számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! Végezd el a következő műveletet: $\frac{1}{4950}+\frac{1}{2940}$! Egyszerűsítsd a $\frac{4950}{2490}$ törtet!

Megoldás:

$4950=2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11$; $2940=2^2\cdot3\cdot5\cdot7^2$; $\quad(4950;2940)=2\cdot3\cdot5=30$;

$[4950;\,2940]=2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot11=485100$;

$$\frac{1}{4950}+\frac{1}{2940}=\frac{263}{485100};\qquad \frac{4950}{2940}=\frac{165}{98}.$$

21. Töltsd ki a bűvös négyzeteket!

$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$

$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{7}$
		$\frac{3}{28}$

Megoldás:

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{7}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{28}$
$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{1}{7}$

22. Határozd meg *x*, *y* és *z* értékét, ha $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$, $b = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 11$, $(a; b) = 60$, $[a; b] = 51480$!

Megoldás:

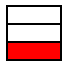
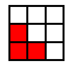
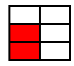
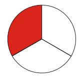
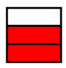
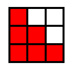
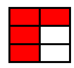
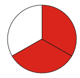
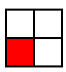
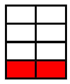
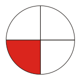
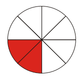
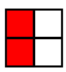
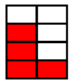
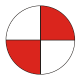
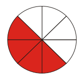
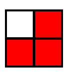
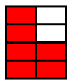
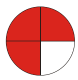
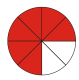
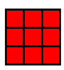
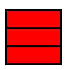
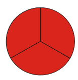
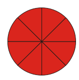
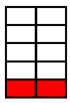
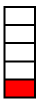
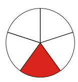
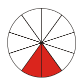
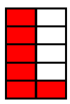
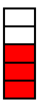
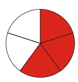
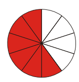
$(a; b) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $[a; b] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$; $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

Házi feladat javaslat: 19. és 21. feladat.

IV. A számfogalom kiterjesztése

Módszertani megjegyzés: **Dominójáték**.
Az előző órán megalakult csoportok dolgozzanak együtt. Minden csoport megkapja a dominókészletet. Elemezzük a dominóra írt számokat. Minden csoportnak adjunk 32 darab kártyát. Feladatuk először felfelé fordítva kirakni a dominókat. Majd összekeverik a kártyákat, mindenki kap 8 darab dominót. Az első tanuló felfordít egy dominót, a következő: ha talál vele egyenértékűt, akkor tesz, ha nem, akkor passzol és jön a következő. Addig játszanak, amíg az összes dominó el nem fogy. Az nyer, akinek a leghamarabb fognak el a dominói. Felügyeljük a játék menetét, figyeljünk arra, hogy a csoportok dolgozzanak, ne csaljanak.

4.3. dominókészlet alkalmazása

	$\frac{6}{10}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{6}{10}$
	$\frac{2}{10}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{5}$
	$\frac{8}{8}$		$\frac{3}{3}$		$\frac{3}{3}$		$\frac{9}{9}$
	$\frac{6}{8}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{6}{8}$		$\frac{3}{4}$
	$\frac{4}{8}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{4}{8}$		$\frac{2}{4}$
	$\frac{2}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{6}{9}$		$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{1}{3}$

Elemezzük a dominóra írt számokat!

1. Természetes számok: $\frac{3}{3}, \frac{8}{8}, \frac{9}{9}$.
2. Tovább nem egyszerűsíthető törtek, azaz ahol a számláló és nevező relatív prím:
   $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$.
3. Egyenértékű törtek: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \frac{2}{4} = \frac{4}{8}, \frac{2}{6} = \frac{3}{9}, \frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.
4. Tizedestört alakra átírva a tizedestört alak:
   véges: $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$; szakaszosan végtelen: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

Racionális számok halmaza

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\quad p,q\in Z,\quad q\neq 0\right\}$$

A racionális számok felírhatók két egész szám hányadosaként, tört alakban, ahol a nevező nem nulla.

Bármely racionális szám felírható tizedestört alakban.

Egy racionális szám tizedestört alakja véges, ha a maradékos osztás során a nulla fellép mint maradék.

Egy racionális szám tizedestört alakja végtelen szakaszos, ha a maradékos osztás során nem szerepel a nulla mint maradék, így előbb-utóbb a maradékok ismétlődni kezdenek.

Minden végtelen szakaszos tizedestört felírható két egész szám hányadosaként.

Mintapélda13

Írjuk fel a $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{19}{6}$ tizedestört alakját!

Megoldás:

Véges	Tiszta szakaszos	Vegyes szakaszos
$7:8=0{,}875$	$15:7=2{,}\dot{1}4285\dot{7}$	$19:6=3{,}1\dot{6}$
70	10	10
60	30	40
40	20	4
0	60	
	40	
	50	
	1	

Hogyan lehet a tizedestört alakból megkapni a tört alakot? A tanulók aktív közreműködésével oldjuk meg a feladatot.

Mintapélda$_{14}$

Írjuk fel a következő számokat két egész szám hányadosaként! 4,513; $1,\dot{3}$; $7,\dot{2}\dot{8}$; $0,\dot{5}1\dot{3}$.

Megoldás: $4{,}513 = \dfrac{4513}{1000}$.

Egy véges tizedestörtet mindig átírhatunk tört alakba: a számlálóban az értékes jegyekből álló egész szám, míg a nevezőben egy tíz hatvány, aminek a kitevője a tizedes jegyek számát mutatja.

Legyen $x = 1,\dot{3}$.

Tudjuk, hogy $\dfrac{1}{3} = 0,\dot{3}$ ebből adódik, hogy $1,\dot{3} = 1 + 0,\dot{3} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.Keressünk egy olyan módszert, ami minden végtelen szakaszos tizedestörtnél célra vezet.

Mivel egy jegy ismétlődik, szorozzuk meg a számot 10-zel: $10x = 13,\dot{3}$.

$$\begin{array}{r} 10x = 13,\dot{3} \\ -\ x = 1,\dot{3} \\ \hline 9x = 12 \end{array}$$

$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Legyen $y = 7,\dot{2}\dot{8}$. Mivel két jegy ismétlődik, szorozzuk meg 100-zal: $100y = 728,\dot{2}\dot{8}$.

$$\begin{array}{r} 100y = 728,\dot{2}\dot{8} \\ -\ y = 7,\dot{2}\dot{8} \\ \hline 99y = 721 \end{array}$$

$$z = \frac{721}{99}$$

Legyen $z = 0,\dot{5}1\dot{3}$, mivel három jegy ismétlődik, szorozzuk meg a számot 1000-rel: $1000x = 513,\dot{5}1\dot{3}$, ebből kivonva az eredetit, pont kipotyog a végtelen hosszú szakasz: $999x = 513$, azaz $x = \dfrac{513}{999}$.

Ez a módszer jól működik, de a dolgok hátterében a végtelen mértani sorok állnak. Bizonyítható, hogy ha valamely végtelen mértani sornál $|q| < 1$, akkor annak összege: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

A végtelen nem szakaszos tizedestörteket nem kapjuk meg két egész szám hányadosaként, ezek nem racionális számok. Beszéljük meg, mit nevezünk racionális, irracionális, illetve valós számoknak.

Irracionális számok

Irracionális számoknak nevezzük azokat a számokat, amiknek a tizedestört alakja végtelen nem szakaszos. Jelölés:Q*.

Valós számok

A racionális és irracionális számok egyesítése a valós számok halmaza. Jelölés: *R* (Real = valós szó kezdőbetűje) Nyomtatásban vastagon szedett betűvel, a füzetbe dupla szárral kell írni.

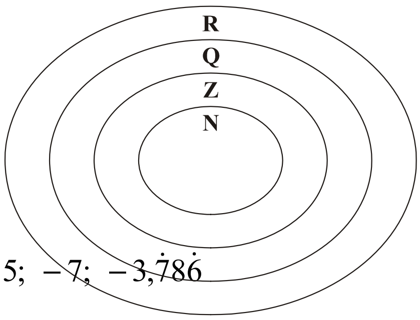
Q Q* = R

Példák irracionális számokra: $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$; $\pi = 3{,}1415926\ldots$; $0{,}1010010001\ldots$.

Készítsünk további irracionális számokat! (Azt kell biztosítani, hogy ne legyen szakaszos.)
Például:
Mindig eggyel növeljük az egyesek számát:
$7{,}121121112111121111112\ldots$
A pozitív egész számokat írjuk egymás után:
$0{,}1234567891011121314\ldots$
A prímszámokat írjuk egymás után: $2{,}35711131719232931\ldots$
Tegyünk említést arról, hogy a valós számok halmaza az a legbővebb számhalmaz, amivel középiskolában foglalkozunk, de létezik még ennél is bővebb számhalmaz.
Ábrázoljuk az eddig megismert számhalmazokat közös Venn-diagrammal!

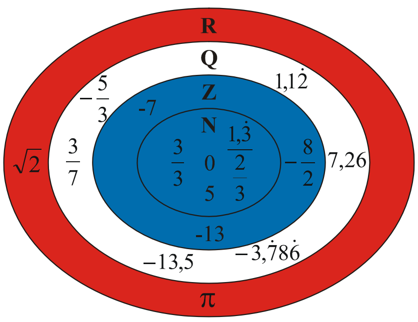
Mintapélda₁₅

Töltsük ki az ábrát, írjunk mindenhova két-három számot! Színezzük pirosra, hogy hol helyezkednek el az irracionális számok! Színezzük kékre, hogy hol helyezkednek el az egész számok! Helyezzük el az alábbi számokat az ábrán:



$0;\ \frac{3}{3};\ \sqrt{2};\ -13{,}5;\ \frac{3}{7};\ \pi;\ 7{,}26;\ 1{,}1\dot{2};\ -\frac{8}{2};\ -13;\ \frac{1{,}\dot{3}}{\frac{2}{3}};\ -\frac{5}{3};\ 5;\ -7;\ -3{,}\dot{7}8\dot{6}$

Megoldás:



Mintapélda$_{16}$

Végezzük el az alábbi műveleteket! Mit tapasztalunk?

$7+5=$	$5+7=$
$3\cdot 4=$	$4\cdot 3=$
$(9+1)+10=$	$9+(1+10)=$
$(2\cdot 6)\cdot 8=$	$2\cdot(6\cdot 8)=$
$3\cdot(4+5)=$	$3\cdot 4+3\cdot 5=$

Megoldás:

$7+5=12$	$5+7=12$
$3\cdot 4=12$	$4\cdot 3=12$
$(9+1)+10=10+10=20$	$9+(1+10)=9+11=20$
$(2\cdot 6)\cdot 8=12\cdot 8=96$	$2\cdot(6\cdot 8)=2\cdot 48=96$
$3\cdot(4+5)=3\cdot 9=27$	$3\cdot 4+3\cdot 5=12+15=27$

Tapasztalat: Az egy sorban szereplő kifejezések egyenlőek.

Már az általános iskolában találkoztunk a racionális számkörben végzett műveletek alaptulajdonságaival: a felcserélhetőséggel a csoportosíthatósággal és a széttagolhatósággal. Ezek a **tulajdonságok a valós számkörben is érvényben maradnak.**

Az egész számok körében értelmeztünk három műveletet, az összeadást, a kivonást és a szorzást.

Bármely két egész szám összege, különbsége és szorzata is egész szám.

Ezt úgy mondjuk, hogy az egész számok halmaza az összeadásra, kivonásra és a szorzásra nézve zárt.

Például $7+(-3)=4$ $\quad 6-(-1)=7$ $\quad 3\cdot(-2)=-6$

$-2+(-7)=-9$ $\quad -3-10=-13$ $\quad (-4)\cdot(-1)=4$.

Az egész számok között végezhetünk osztást is.

Például $12:4=3$ $\quad (-15):3=-5$.

Az egész számok körében az osztás nem mindig végezhető el.

Például $4:12=$ nincs ilyen egész szám.

Ha el akarjuk végezni az előző osztást, akkor ki kell bővítenünk az egész számok halmazát a törtszámokkal.

Bármely két természetes szám összege és szorzata is természetes szám. Ezt úgy mondjuk, hogy a természetes számok halmaza az összeadásra és a szorzásra nézve zárt.

Például $\begin{matrix} 7+2=9 & 7\cdot 2=14 \\ 3+0=3 & 7\cdot 0=0 \end{matrix}$.

A természetes számok között végezhetünk kivonást is, ha a kisebbítendő nagyobb, mint a kivonandó.

Például $\underbrace{7}_{\text{kisebbítendő}} - \underbrace{2}_{\text{kivonandó}} = \underbrace{5}_{\text{különbség}}$.

Ha a kisebbítendő kisebb, mint a kivonandó, akkor a kivonás nem végezhető el a természetes számok körében.

Például $2-7=$ nincs ilyen természetes szám.

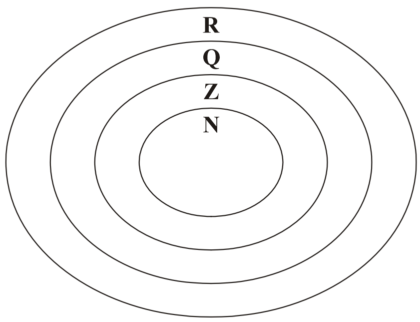
Ha el akarjuk végezni az előző kivonást, akkor ki kell bővítenünk a természetes számok halmazát a negatív egész számokkal.

Bármely két racionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa (kivéve a nullával való osztást, mert azt nem értelmezzük) is racionális szám. Ezt úgy mondjuk, hogy a racionális számok halmaza az összeadásra, kivonásra, szorzásra és az osztásra (azaz a négy alapműveletre) nézve zárt.

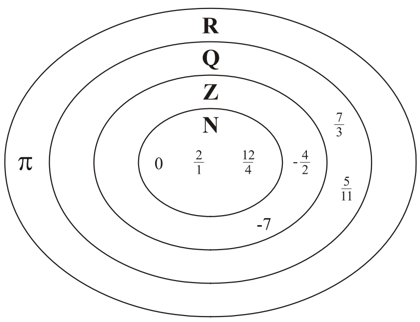
Feladatok

23. Helyezd el e következő számokat az ábrán!

$-7;\quad 0;\quad \frac{2}{1};\quad \frac{7}{3};\quad \frac{12}{4};\quad \sqrt{2};\quad \frac{5}{11};\quad \pi;\quad -\frac{4}{2}$



Megoldás:



24. Írd át tizedestört alakba a $\frac{11}{6}$; $\frac{16}{3}$; $\frac{19}{5}$; $\frac{2}{13}$; $\frac{14}{3}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{5}{7}$ számokat, és jellemezd őket! (véges, végtelen tiszta szakaszos, végtelen vegyes szakaszos)

Megoldás:

$11:6=1{,}8\dot{3}$ végtelen vegyes szakaszos;

$16:3=5{,}\dot{3}$ végtelen tiszta szakaszos;

$19:5=3{,}8$ véges;

$2:13=0{,}\dot{1}5384\dot{6}$ végtelen tiszta szakaszos;

$14:3=4{,}\dot{6}$ végtelen tiszta szakaszos;

$13:12=1{,}08\dot{3}$ végtelen vegyes szakaszos;

$5:7=0{,}\dot{7}1428\dot{5}$ végtelen tiszta szakaszos tizedestört.

25. Írd fel két egész szám hányadosaként!

a) $6{,}2$; b) $7{,}12$; c) $3{,}734$; d) $5{,}\dot{1}$; e) $5{,}1\dot{3}$;

f) $4{,}98\dot{1}$; g) $5{,}\dot{1}\dot{3}$; h) $4{,}9\dot{8}\dot{1}$; i) $4{,}\dot{9}8\dot{1}$.

Megoldás: a) $\frac{31}{5}$; b) $\frac{178}{25}$; c) $\frac{1867}{500}$; d) $\frac{46}{9}$; e) $\frac{231}{45}$; f) $\frac{4483}{900}$; g) $\frac{508}{99}$;

h) $\frac{274}{55}$; i) $\frac{553}{111}$.

Házi feladat javaslat: 24. feladat.

V. Valós számok és a számegyenes

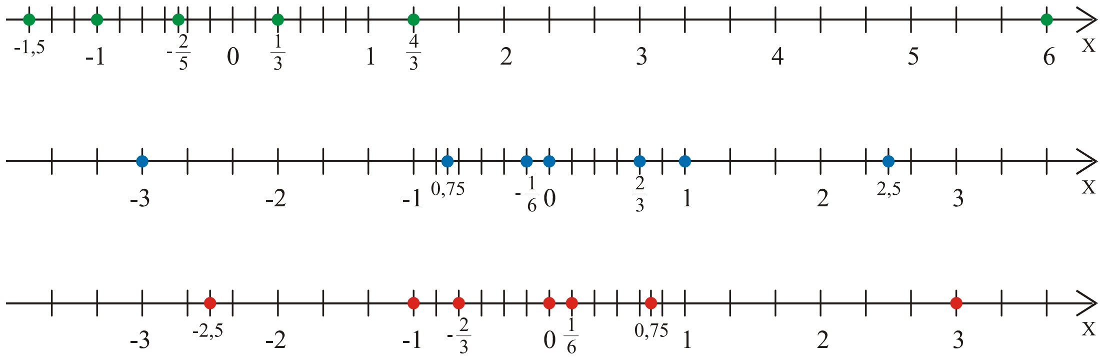
Módszertani megjegyzés: A következő mintapéldát csoportmunkában dolgozzuk fel.

Mintapélda₁₇

Ábrázoljuk pirossal a számegyenesen a következő számokat: $3; -1; \frac{1}{6}; 0; -\frac{2}{3}; 0{,}75; -2{,}5$.

Kékkel ábrázoljuk a számok ellentettjét, zölddel a számok reciprokait!

Megoldás:



A szám	3	-1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0,75	-2,5
Ellentettje	-3	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	-0,75	2,5
Abszolútértéke	3	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0,75	2,5
Reciproka	$\frac{1}{3}$	-1	6	$-\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{5}$

Elemezzük a tapasztalatokat!

Írjanak 3–4 igaz állítást a gyerekek a feladat megoldása után. Például: Minden számnak van ellentettje és ezek abszolútértéke azonos. A nullának nincs reciproka. A pozitív számok és a nulla abszolútértéke önmaga. Elevenítsük fel mit jelent egy számnak az ellentettje, abszolútértéke, reciproka. Minden csoport saját szavaival fogalmazza meg. Közösen beszéljük meg ezeket!

Egy szám ellentettje az a szám, amellyel összeadva az eredeti számot, nullát kapunk.

Egy nem nulla szám reciproka az a szám, amellyel az eredeti számot megszorozva egyet kapunk.

Legyen a tetszőleges szám, ekkor a szám abszolútértéke: $|a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a \ge 0 \\ -a, \text{ ha } a < 0 \end{cases}$.

Valós számok és a számegyenes

A számegyenes bármely pontja egy valós számot jelöl és fordítva, minden valós számnak megfelel egy pont a számegyenesen.

Intervallumok

Zárt intervallum: $[a;b] = \{a \le x \le b\}$

A szakasz mindkét vége az intervallumhoz tartozik.

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a;\ b[= \{a \le x < b\}$

A szakasz bal vége az intervallumhoz tarozik, jobb vége nem.

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a;b] = \{a < x \le b\}$

A szakasz jobb vége az intervallumhoz tarozik, bal vége nem.

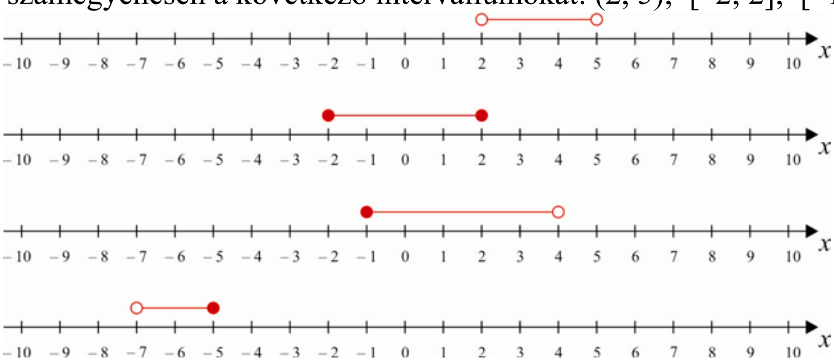
Nyílt intervallum: $]a;b[= \{a < x < b\}$

A szakasz végpontjai nem tartoznak az intervallumhoz.

Mintapélda$_{18}$

Ábrázoljuk számegyenesen a következő intervallumokat: (2, 5); [–2; 2]; [–1; 4); (–7; –5]!

Megoldás:



Mintapélda$_{19}$

Ábrázoljuk számegyenesen az alábbi feltételeknek eleget tevő valós számok halmazát!

a) $x < -4$,

b) $x > \frac{1}{2}$,

c) $x \le -6$,

d) $x \ge -\frac{3}{2}$

e) x nem kisebb, mint 4

f) x nagyobb, mint –2

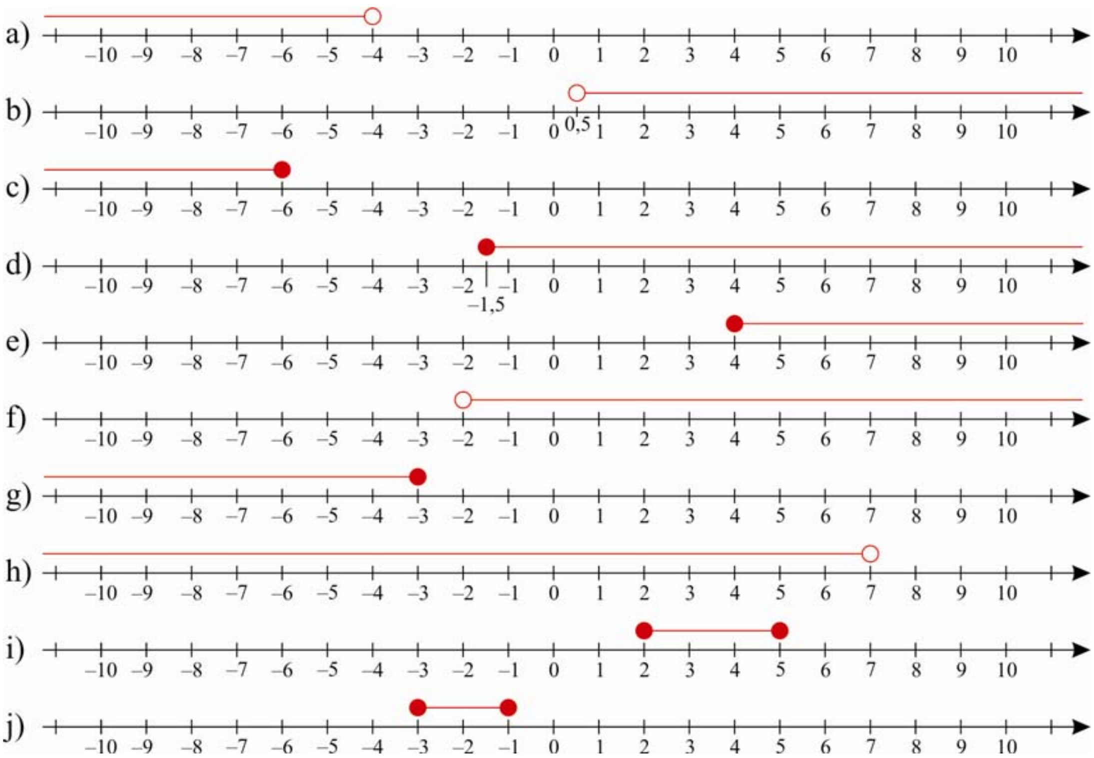
g) x nem nagyobb, mint –3

h) x kisebb, mint 7

i) x legalább 2 és legfeljebb 5

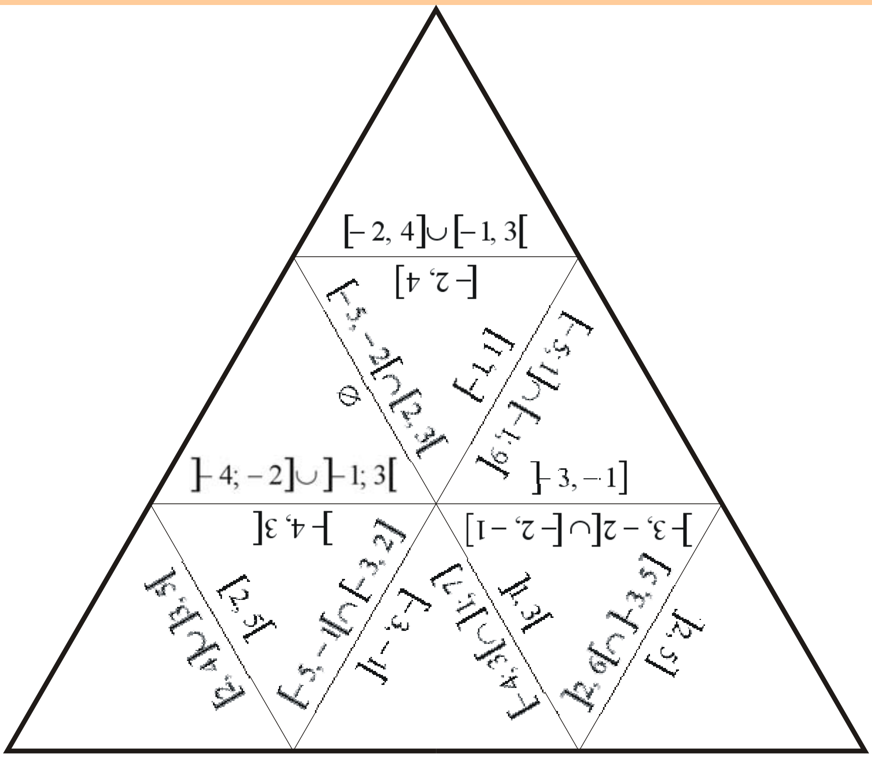
j) x legalább –3 és legfeljebb –1

Megoldás:



Módszertani megjegyzés: **Dominójáték**.
Minden csoportnak adjunk 9 darab háromszög alakú kártyát. Feladatuk felfelé fordítva kirakni a dominókat. Figyeljünk, hogy a kifejezések minden oldalon megegyezzenek.

4.4. dominókészlet alkalmazása



Feladatok

26. Melyik a nagyobb: $\frac{1}{4}$ vagy $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ vagy $-\frac{1}{3}$?

Megoldás: $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{3}$.

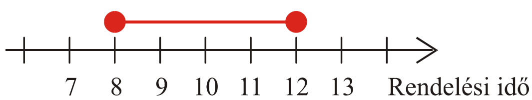
27. Adjuk meg számokkal, és ábrázoljuk számegyenesen a következő intervallumokat!

Ma délelőtt 8-tól 12-ig rendel az orvos.

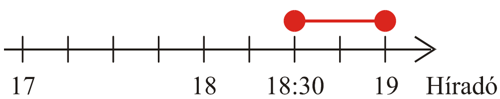
18^{30}-19^{00} között megy a tv-ben a híradó.

12^{00}-ig a kondi teremben kedvezményes jegy kapható. (nyitás 7 órakor)

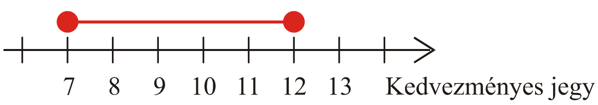
Megoldás: $8 \le x \le 12$, x: rendelési idő



$18^{30} \le x \le 19^{00}$, x: híradó sugárzási ideje



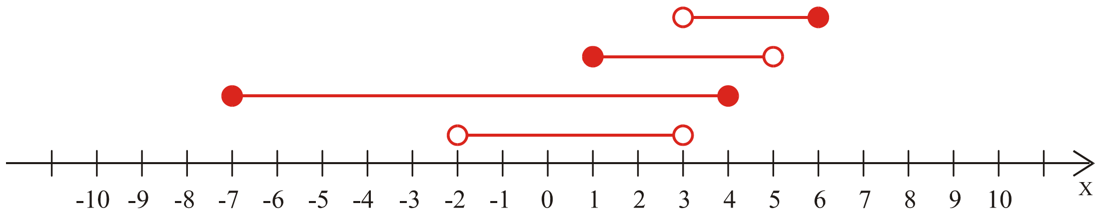
$7 \le x \le 12$, x: kedvezményes időszak



28. Ábrázold számegyenesen a következő intervallumokat!

$(-2;3)$, $[-7;-4]$, $[1;5)$, $(3;6]$.

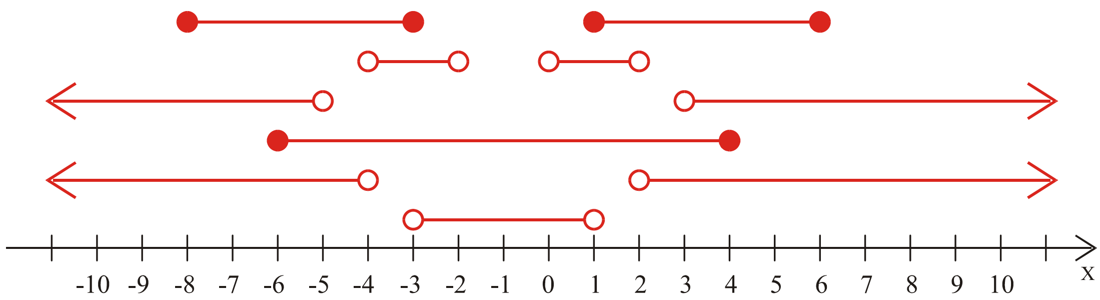
Megoldás:



29. Jelöld számegyenesen azokat a számokat, amelyeknek (-1)-től való távolsága

Kisebb 2-nél;	nagyobb 3-nál;	legfeljebb 5;
legalább 4;	nagyobb 1-nél és kisebb 3-nál;	legalább 2 és legfeljebb 7.

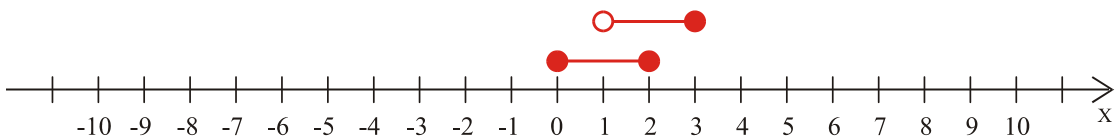
Megoldás:



30. Add meg a következő intervallumok metszetét, és ábrázold számegyenesen!

$[-3;2]\cap[0;4]$; $[-1;3]\cap(1;5)$.

Megoldás:



Házi feladat javaslat: 29. és 30. feladat.

VI. Betűk használata

Ha a négy alapműveletet véges sokszor alkalmazzuk számokra vagy betűkre, akkor **algebrai kifejezést** kapunk. Az algebrai kifejezésekben előforduló betűket **változóknak** vagy **ismeretleneknek** szoktuk nevezni. Ha az algebrai kifejezésekben minden betű számokat takar, akkor meg kell adnunk, hogy a betűk mely számhalmaz elemeit helyettesítik. Ezt a halmazt nevezzük a kifejezés **alaphalmazának**.

Például ha a $2n+1$ kifejezésben $n \in \mathbf{N}$, akkor a kifejezés a pozitív páratlan egészszámokat írja le.

A változók szorzótényezőit **együtthatóknak** nevezzük.

Egy algebrai kifejezés **értelmezési tartományán** az alaphalmaznak azt a *legbővebb* részhalmazát értjük, amelynek elemeit a változók helyére írva, a kifejezésben levő műveletek elvégezhetőek.

Az értelmezési tartományt úgy kapjuk meg, hogy figyelembe vesszük a kikötéseket: az alaphalmazt szűkítjük azokkal a számokkal, amelyeket a kikötések kizárnak.

Például ha az $\frac{1}{x}+\frac{44}{x-2}$ kifejezés alaphalmaza az egész számok halmaza (vagyis $x \in \mathbf{Z}$), akkor az értelmezési tartománya: $\mathbf{Z}\setminus\{0;\ 2\}$, hiszen nullával nem oszthatunk, a nevezők értéke pedig $x = 0$ vagy $x = 2$ esetében nulla.

Ha az alaphalmazból konkrét számokat helyettesítünk a változók helyére, akkor a műveletek elvégzése után kapott számot az algebrai kifejezés **helyettesítési értékének** nevezzük.

Például a $2n+1$ kifejezés helyettesítési értéke $n = 5$ esetén $2\cdot 5+1=11$.

Az algebrai kifejezéseknek több típusát különböztetjük meg:

algebrai egész kifejezés: vagy nincs benne tört, vagy ha van benne tört, akkor annak a nevezőjében nem szerepel változó;

algebrai törtkifejezés: az előforduló tört nevezőjében van változó;

egytagú algebrai kifejezés: olyan algebrai kifejezés, amiben a számok és a betűk alapvetően a szorzás vagy az osztás műveletével vannak összekapcsolva.

Például az $\frac{5(x+1)}{y-2}$ kifejezés egytagú.

Két egytagú algebrai kifejezés **egynemű**, ha legfeljebb együtthatóikban különböznek egymástól. Az egynemű kifejezéseket összevonhatjuk.

Például $2a^2b$, $\frac{1}{4}a^2b$ és - $2a^2b$ egynemű kifejezések.

Az egytagú algebrai egész kifejezések összegét többtagú algebrai kifejezésnek vagy más néven **polinomnak** nevezzük.

Mintapélda₂₀

Határozzuk meg a következő kifejezések együtthatóját!

$7a;\quad 0{,}3bc;\quad \frac{2}{3}c;\quad \frac{d}{5};\quad 0{,}25a^2;\quad -b^3;\quad \frac{2d}{7};\quad c^2d\,.$

Megoldás: $7;\quad 0{,}3;\quad \frac{2}{3};\quad \frac{1}{5};\quad 0{,}25;\quad -1;\quad \frac{2}{7};\quad 1\,.$

Mintapélda₂₁

Mely kifejezések egyneműek az alábbiak közül?

$$2ab;\quad 0{,}25ba^2;\quad -\frac{2}{3}ab^2;\quad -b^2a;\quad 2a^2b;\quad -5ba;\quad \frac{a}{3};\quad \frac{ab}{4};\quad \frac{3ba^2}{6};\quad 2a$$

Megoldás: Egyneműek: $2ab,\quad -5ba,\quad \frac{ab}{4};$ $\qquad 0{,}25ba^2,\quad 2a^2b,\quad \frac{3ba^2}{6};$

$-\frac{2}{3}ab^2,\quad -b^2a;$ $\qquad \frac{a}{3},\quad 2a\,.$

Módszertani megjegyzés: Minden csoportba osszunk ki A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint. Szétválnak a csoportok az A, B, C, D jelek szerint, ők dolgoznak most együtt. Ha elkészültek a csoportok, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többieknek elmondja a feladatainak a megoldását.
Ismételjük át, hogy mit tudunk a műveletek elvégzésének sorrendjéről, illetve a zárójel felbontásról.
Műveletek sorrendje:
- A zárójelben lévő művelet elvégzése megelőzi a zárójelen kívüli műveletek elvégzését.
- A szorzások és az osztások elvégzése megelőzi az összeadások és kivonások elvégzését.
- A hatványozás megelőzi a szorzások és osztások elvégzését.

Zárójelfelbontás:
- Ha egy zárójel előtt + jel áll, akkor a zárójel elhagyható.
- Ha egy zárójel előtt – jel áll, akkor a zárójel felbontásakor a zárójelen belül minden tag előjele megváltozik, az összeadásból kivonás a kivonásból összeadás lesz.

Mintapélda[22]

Végezzük el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vonjunk össze, majd számítsuk ki a kifejezés helyettesítési értékét, ha $a=3,\quad b=-\frac{1}{2},\quad x=-2$.

Az A jelűek feladata: a) $3a(2a+4)$;

A B jelűek feladata: b) $(3b+4)(5b+3)$;

A C jelűek feladata: c) $(3x^2+x-2)(2x+3)$;

A D jelűek feladata: d) $(2a-3)(4-5a)$.

Megoldás:

a) $3a(2a+4)=6a^2+12a=90$;

b) $(3b+4)(5b+3)=15b^2+29b+12=\frac{5}{4}=1{,}25$;

c) $(3x^2+x-2)(2x+3)=6x^3+11x^2-x-6=-8$;

d) $(2a-3)(4-5a)=23a-10a^2-12=-33$.

Mintapélda[23]

Számítsuk ki az alábbi törtkifejezések helyettesítési értékeit a megadott számokkal:

Az A jelűek feladata: a) $\frac{x-7}{x}-\frac{6+x}{x}$, ha $x=1$;

A B jelűek feladata: b) $\frac{5b}{b+1}+\frac{3b-2}{3b+2}$, ha $b=-1$;

A C jelűek feladata: c) $\frac{3}{s+2}-\frac{4+s}{s+5}$, ha $s=-3$;

A D jelűek feladata: d) $\frac{4a+1}{2a-3}+\frac{a-1}{4a-3}+\frac{8}{a}$, ha $a=\frac{1}{2}$.

Megoldás:

a) $\frac{x-7}{x}-\frac{6+x}{x}=\frac{1-7}{1}-\frac{6+1}{1}=-13$;

b) $\frac{5b}{b+1}+\frac{3b-2}{3b+2}=\frac{5(-1)}{(-1)+1}+\frac{3(-1)-2}{3(-1)+2}$. Nincs értelme: az első tört nevezőjében 0 áll.

c) $\frac{3}{s+2}-\frac{4+s}{s+5}=\frac{3}{(-3)+2}-\frac{4+(-3)}{(-3)+5}=-3{,}5$;

d) $$\frac{4a+1}{2a-3}+\frac{a-1}{4a-3}+\frac{8}{a}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{1}{2}-3}+\frac{\frac{1}{2}-1}{4\cdot\frac{1}{2}-3}+\frac{8}{\frac{1}{2}}=15.$$

Mintapélda$_{24}$

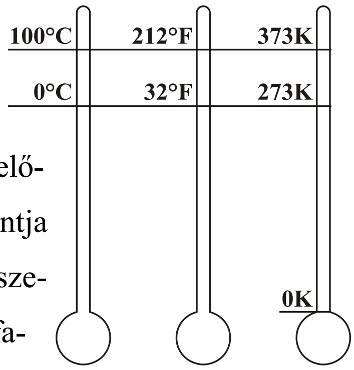
Készíts képleteket! A tudósok ritkán használják hőmérséklet mérésére a Celsius-fokot, vagy az Amerikában elterjedt Fahrenheit-fokot. Számukra a Kelvin a leggyakrabban használt skála. Lássuk csak, hogyan viszonyulnak ezek egymáshoz?

Celsius-skála:

A legelterjedtebb hőmérsékleti skála a közéletben, az európai kontinensen.

Ezen a skálán az olvadó jég hőmérséklete jelenti a 0° értéket, a forrásban levő víz hőmérséklete pedig a 100° (0.1013 MPa nyomáson). Egysége tehát ennek az intervallumnak az $\frac{1}{100}$-ad része. Mértékegysége: °C (Celsius-fok).

Fahrenheit-skála:



Az 1700-as évektől széles körben használják, napjainkban főképp az amerikai kontinensen.

A Fahrenheit-skála nullpontja a Fahrenheit által kísérleti úton előállított legjobban lehűlő sós oldat fagyáspontja, a másik alappontja az emberi test hőmérséklete volt, mely hőtartományt az egyszerűbb oszthatóság kedvéért 96 egységre bontotta (így a víz fagyáspontja épp 32 fok). Mértékegysége: °F (Fahrenheit-fok).

Kelvin-skála:

A hőmérsékletnek létezik minimumértéke, ezt nevezzük abszolút nulla foknak, ez az SI mértékegységrendszerben elfogadott Kelvin-skála nulla pontja. Egységének ugyanakkorát választották, mint a Celsius-skála egy foka. Mértékegysége: K (Kelvin).

A Kelvin szót fok nélkül használják!

Megoldás: A hőmérséklet átszámítása.

$$n\ {}^\circ\mathrm{C} = (n+273)\ \mathrm{K} = \left(\frac{9\cdot n}{5}+32\right){}^\circ\mathrm{F}$$

$$n\ \mathrm{K} = (n-273)\ {}^\circ\mathrm{C} = \left(\frac{9\cdot(n-273)}{5}+32\right){}^\circ\mathrm{F}$$

$$n\ {}^\circ\mathrm{F} = \frac{(n-32)\cdot 5}{9}\ {}^\circ\mathrm{C} = \left(\frac{(n-32)\cdot 5}{9}+273\right)\mathrm{K}$$

Feladatok

31. Bontsd fel a zárójelet, az eredményekben vonj össze, majd számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét, ha $x = 2$, $y = -3$.

Az A jelűek feladata: a) $(x^2+3xy-y^2)+(2x^2-5xy+4y^2)$;

A B jelűek feladata: b) $(8x^2-2xy+y^2)-(2x^2+2xy-3y^2)$;

A C jelűek feladata: c) $(x^2-2x^3+6x)+(x^3-7x+5)-(3-2x+3x^2)$;

A D jelűek feladata: d) $(3x^2-x^3+11x)+(4x^3-6x+2)-(5-2x+4x^2)$.

Megoldás:

a) $x^2+3xy-y^2+2x^2-5xy+4y^2=3x^2-2xy+3y^2=51$;

b) $8x^2-2xy+y^2-2x^2-2xy+3y^2=6x^2-4xy+4y^2=84$;

c) $x^2-2x^3+6x+x^3-7x+5-3+2x-3x^2=-2x^2-x^3+x+2=-12$;

d) $3x^2-x^3+11x+4x^3-6x+2-5+2x-4x^2=-x^2+3x^3+7x-3=31$.

32. Tekintsd az $\mathrm{A}=0{,}012345678910111213\ldots997998999$ számot. (A tizedes vessző után sorba írd a természetes számokat 999-ig.) Mi lesz ennek a számnak a tizedesvessző utáni 2002-edik számjegye? (Varga Tamás matematikaverseny)

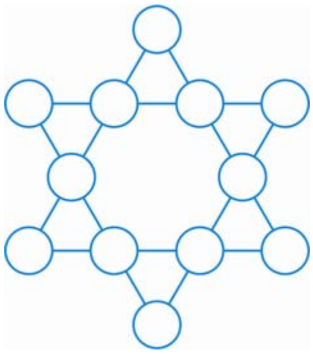
Megoldás:

Egyjegyűként 10 számot írtunk le, kétjegyűként összesen 180 számot.

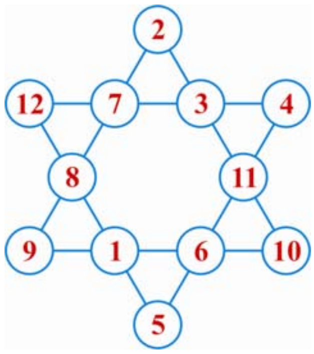
$2002-190=1812=3\cdot 604$

A 604-edik háromjegyű szám harmadik számjegyét keressük. A 604. háromjegyű szám a 703, így a keresett szám a 3.

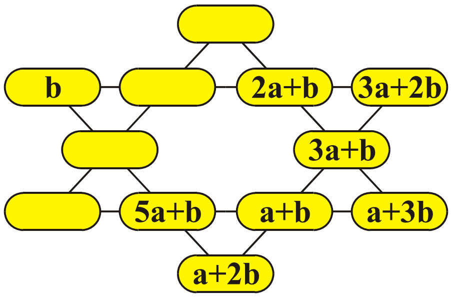
33. a) Helyezd el 1-től 12-ig a számokat úgy, hogy a vonalak mentén az összegük egyenlő legyen. Az összeget bűvös számnak nevezzük. Melyik a bűvös szám?



a) *Megoldás*: A bűvös szám: 26.

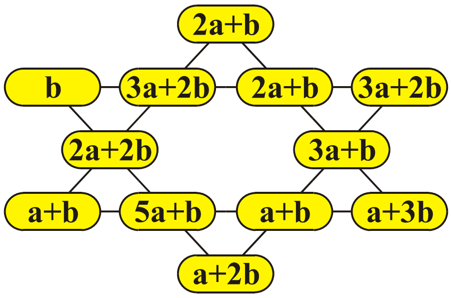


b) A csillagábra minden egyenese mentén egyenlő az algebrai kifejezések összege. Mennyi ez az összeg? Milyen algebrai kifejezések kerülnek az üres helyekre? Mennyi a bűvös szám, ha $a = 5$ és $b = -2$?



Megoldás:

A bűvös szám: $8a + 6b = 8 \cdot 5 + 6 \cdot (-2) = 40 - 12 = 28$.



34. Mely kifejezések egyneműek az alábbiak közül?

$$3x;\quad x^2y;\quad 1;\quad 2xy;\quad -3;\quad 2x^2y;\quad -5x;\quad xy;\quad -0{,}13;\quad \frac{x}{2};\quad \frac{xy}{5};\quad \frac{3}{7};\quad 7x.$$

Megoldás: $3x; -5x; \frac{x}{2}; 7x;$ $x^2y; 2x^2y;$ $1; -3; -0{,}13; \frac{3}{7};$ $2xy; xy; \frac{xy}{5}.$

35. Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vonj össze, majd számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét, ha $a = 3,\quad b = -\frac{1}{2},\quad x = -2,\quad y = \frac{2}{3}$!

a) $6x(2x - 4)$; b) $(3y^2 - 2y + 3) \cdot 7y$;

c) $(4a^2 - 6a + 2)(3 + 2a - 5a^2)$; d) $7b(3 - 2b + 5b^2)$;

e) $(2x^2 - x + 3)(5x - 2)$; f) $(4x^2 - 2x + 2)(7x - 3)$.

Megoldás:

a) $6x(2x - 4) = 12x^2 - 24x = 96$;

b) $(3y^2 - 2y + 3) \cdot 7y = 21y^3 - 14y^2 + 21y = 14$;

c) $(4a^2 - 6a + 2)(3 + 2a - 5a^2) = -20a^4 + 38a^3 - 10a^2 - 14a + 6 = -720$;

d) $7b(3 - 2b + 5b^2) = 21b - 14b^2 + 35b^3 = -\frac{147}{8}$;

e) $(2x^2 - x + 3)(5x - 2) = 10x^3 - 9x^2 + 17x - 6 = -156$;

f) $(4x^2 - 2x + 2)(7x - 3) = 28x^3 - 26x^2 + 20x - 6 = -374$.

36. Számítsd ki az alábbi törtkifejezések helyettesítési értékeit:

a) $\frac{2y + 3}{y + 1} - \frac{3y - 2}{y - 1}$, ha $y = 2$; b) $1 + \frac{2}{1 - p} - \frac{3}{2p + 2}$, ha $p = -5$.

Megoldás: a) $\frac{2 \cdot 2 + 3}{2 + 1} - \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 - 1} = -\frac{5}{3}$; b) $1 + \frac{2}{1 - (-5)} - \frac{3}{2(-5) + 2} = \frac{41}{24}$.

Házi feladat javaslat: 35. és 36. feladat.

VII. Hatványozás

Mintapélda₂₅

Írjuk hatványalakba a következő kifejezéseket: $2^3\cdot 2^7$; $\frac{3^5}{3^3}$; $5^3\cdot 2^3$; $\frac{7^5}{2^5}$; $\left(4^3\right)^5$.

Az alábbi konkrét példák segítségével elevenítsük fel a hatványozás azonosságait!

Megoldás:

$$2^3\cdot 2^7=\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3\ db\ tényező}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{7\ db\ tényező}=\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{3+7=10\ db\ tényező}=$$

$$=2^{3+7}=2^{10};$$

$$\frac{3^5}{3^3}=\frac{\overbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}^{5\ tényező}}{\underbrace{3\cdot 3\cdot 3}_{3\ db\ tényező}}=\underbrace{3\cdot 3}_{5-3\ db\ tényező}=3^{5-3}=3^2;$$

$$5^3\cdot 2^3=\underbrace{(5\cdot 5\cdot 5)}_{3\ db\ tényező}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3\ db\ tényező}=\underbrace{(5\cdot 2)\cdot(5\cdot 2)\cdot(5\cdot 2)}_{3\ db\ tényező}=(5\cdot 2)^3;$$

$$\frac{7^5}{2^5}=\frac{\overbrace{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}^{5\ db\ tényező}}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{5\ db\ tényező}}=\underbrace{\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)}_{5\ db\ tényező}=\left(\frac{7}{2}\right)^5;$$

$$\left(4^3\right)^5=\underbrace{\left(4^3\right)\left(4^3\right)\left(4^3\right)\left(4^3\right)\left(4^3\right)}_{5\ db\ tényező}=\underbrace{\overbrace{(4\cdot 4\cdot 4)}^{3\ db\ tényező}\overbrace{(4\cdot 4\cdot 4)}^{3\ db\ tényező}\overbrace{(4\cdot 4\cdot 4)}^{3\ db\ tényező}\overbrace{(4\cdot 4\cdot 4)}^{3\ db\ tényező}\overbrace{(4\cdot 4\cdot 4)}^{3\ db\ tényező}}_{5\cdot 3\ db\ tényező}=4^{15}.$$

Pozitív egész kitevőjű hatványok

Ha *a* valós szám és *m* pozitív egész szám, akkor az a^m hatvány olyan *m* tényezős szorzatot jelöl, amelynek minden tényezője *a*. Az *m* neve hatványkitevő, az *a* neve hatványalap. $a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ db}$ $a^1=a$

Például $2^4=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$; $5^2=5\cdot 5=25$; $12^1=12$.

Bármely szám első hatványa önmaga.

Bármely szám nulladik hatványa 1, kivéve 0-t, 0^0-t nem értelmezzük.

Tehát $a\neq 0$ esetén $a^0=1$. Például $17^0=1$.

Megjegyzés: 0^0-t azért nem értelmezzük, mert az értéke nem lenne egyértelmű.

Például $a^0=1=0^0=1$, vagy $0^n=0=0^0=0$.

Negatív egész kitevőjű hatványok

A 0-tól különböző bármely szám negatív egész kitevőjű hatványa az alap ellentett kitevővel vett hatványának reciproka.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0}$$

Például $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{25}{5}$.

A hatványozás azonosságai

Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük.

- $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

Indokolás: $a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ db\ tényező} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ db\ tényező}}_{m+n\ db\ tényező} = a^{m+n}$

Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük, ha a hatvány alapja nem nulla.

- $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad ha\ m > n,\ a \neq 0}$

Indokolás: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ db\ tényező}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ db\ tényező}} = a^{m-n}, \quad ha\ m > n$

Megjegyzés: az azonosság akkor is igaz, ha $m \leq n$.

Azonos kitevőjű mennyiségeket úgy is szorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

- $\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$

Indokolás: $(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{m\ db\ tényező} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\ db\ tényező} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{m\ db\ tényező} = a^m \cdot b^m$

Azonos kitevőjű mennyiségeket, úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

- $\boxed{\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m \qquad b \neq 0}$

Indokolás: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\left(\dfrac{a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)}_{m \text{ db tényező}} = \dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m \text{ db tényező}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m \text{ db tényező}}} = \dfrac{a^m}{b^m}$

Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük:

- $\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}}$

Indokolás: $\left(a^n\right)^m = \underbrace{\left(a^n\right)\cdot\left(a^n\right)\cdot\ldots\cdot\left(a^n\right)}_{m \text{ db tényező}} = \underbrace{\overbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}^{n \text{ db tényező}}\cdot\overbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}^{n \text{ db tényező}}\cdot\ldots\cdot\overbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}^{n \text{ db tényező}}}_{n\cdot m \text{ db tényező}} = a^{n\cdot m}$

Módszertani megjegyzés: **Melyik a kakukktojás?**
Minden csoportnak 20 darab kártyát adunk. Ha elkészültek a csoportok, akkor megbeszéljük, hogy mely kártyák maradtak ki, és miért.

4.5. kártyakészlet alkalmazása

$(2a^3b)^2$	$4b^2a^6$	$2a^2b^2\cdot 2a^4$	$\dfrac{(2a^2b)^3}{2b}$	$2a^3b + 2a^3b$
$(3ab^2)^3$	$27b^6a^3$	$3ab^5\cdot 9a^2b$	$\dfrac{(3a^2b^3)^3}{a^3b^3}$	$9a^3b^6$
$(2a^2b)^3$	$8a^6b^3$	$2a^3b\cdot 4a^3b^2$	$\dfrac{(2a^2b^3)^3}{b^6}$	$6a^6b^3$
$(3ab^3)^2$	$9a^2b^6$	$3ab^2\cdot 3ab^4$	$\dfrac{(3ab^3)^3}{3ab^3}$	$3(ab3)^2$

Mintapélda[26]

Számítsuk ki a következő törtek pontos értékét:

a) $\dfrac{36^2\cdot 12^3}{48^3\cdot 18^2}$; b) $\dfrac{72^{-3}\cdot 54^{-2}}{108^{-4}}$!

Megoldás:

a) $\dfrac{36^2\cdot 12^3}{48^3\cdot 18^2}=\dfrac{\left(2^2\cdot 3^2\right)^2\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^3}{\left(3\cdot 2^4\right)^3\cdot\left(2\cdot 3^2\right)^2}=\dfrac{2^4\cdot 3^4\cdot 2^6\cdot 3^3}{3^3\cdot 2^{12}\cdot 2^2\cdot 3^4}=\dfrac{2^{10}\cdot 3^7}{2^{14}\cdot 3^7}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16};$

b) $\dfrac{72^{-3}\cdot 54^{-2}}{108^{-4}}=\dfrac{\left(2^3\cdot 3^2\right)^{-3}\cdot\left(2\cdot 3^3\right)^{-2}}{\left(2^2\cdot 3^3\right)^{-4}}=\dfrac{2^{-11}\cdot 3^{-12}}{2^{-8}\cdot 3^{-12}}=2^{-11+8}=2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}.$

Mintapélda$_{27}$

Egyszerűsítsük a következő törteket! (A nevező helyettesítési értéke nem lehet 0)

a) $\dfrac{\left(a^2\right)^3\cdot a^4\cdot\left(a^5\right)^2}{a^7\cdot\left(a^2\right)^4};$ b) $\dfrac{b^2\cdot\left(b^3\right)^{-3}\cdot\left(b^{-2}\right)^{-4}}{\left(b^5\right)^{-3}\cdot b^9}.$

Megoldás:

a) $\dfrac{\left(a^2\right)^3\cdot a^4\cdot\left(a^5\right)^2}{a^7\cdot\left(a^2\right)^4}=\dfrac{a^6\cdot a^4\cdot a^{10}}{a^7\cdot a^8}=\dfrac{a^{20}}{a^{15}}=a^5;$

b) $\dfrac{b^2\cdot\left(b^3\right)^{-3}\cdot\left(b^{-2}\right)^{-4}}{\left(b^5\right)^{-3}\cdot b^9}=\dfrac{b^2\cdot b^{-9}\cdot b^8}{b^{-15}\cdot b^9}=\dfrac{b^1}{b^{-6}}=b^{1-(-6)}=b^7.$

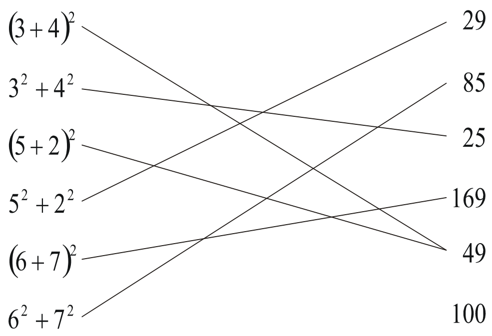
Feladatok

37. Válaszd ki az egyenlőket!

$(3+4)^2$	29
3^2+4^2	85
$(5+2)^2$	25
5^2+2^2	169
$(6+7)^2$	49
6^2+7^2	100

Vigyázat! Összeget, különbséget nem lehet tagonként hatványozni!

Megoldás:



38. Melyik a helyes eredmény? Hol a hiba?

$2^3 + 2^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12} = 4096\,;$ $\qquad 2^3(1+2) = 3\cdot 2^3 = 3\cdot 8 = 24\,;$

$3^2 + 3^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6 = 729\,;$ $\qquad 3^2(1+3) = 3^2\cdot 4 = 9\cdot 4 = 36\,.$

Megoldás: A két bal oldali egyenlőség hibás, a jobb oldaliak jók.

Vigyázat! Hatványok összegéről és különbségéről nincsenek olyan azonosságaink, mint a szorzatukról vagy a hányadosukról!

39. Töltsd ki a bűvösnégyzeteket! (Minden sorban, oszlopban és átlóban a számok szorzata ugyanannyi.)

Módszertani megjegyzés: A tanulókat ösztönözzük arra, hogy hatványalakban számoljanak!

6561	3	
27		
81		

128	2^{73}	
	2^{37}	
	2	

Megoldás:

3^8	3^1	3^6
3^3	3^5	3^7
3^4	3^9	3^2

2^7	2^{73}	2^{31}
2^{61}	2^{37}	2^{13}
2^{43}	2^1	2^{67}

40. Írd fel hatványalakban!

$3^7 \cdot 3^{12} \cdot 3^4$; $11^{-3} \cdot 11^{-7}$; $5^{-8} \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-6}$; $b^6 \cdot b^{-2}$; $c^{-4} \cdot c^{-5}$; $x^{-3} \cdot x^{-5} \cdot x^{-7}$;

$\frac{3^8}{3^{10}}$; $\frac{4^{-2}}{4^{-5}}$; $\frac{5^{-3}}{5^4}$; $\frac{b^5}{b^2}$; $\frac{c^{-3}}{c^{-5}}$; $\frac{x^{-7}}{x^2}$.

Megoldás:

3^{23}; 11^{-10}; 5^{-16}; b^4; c^{-9}; x^{-15};

3^{-2}; 4^3; 5^{-7}; b^3; c^2; x^{-9}.

41. Írd át a kifejezéseket olyan alakba, hogy ne szerepeljen bennük zárójel!

$(-3)^3$; $(-1)^4$; $(-2)^{-2}$; $(3^2)^5$;

$(a^3)^2$; $(b^7)^8$; $(3ab)^3$; $(2b^2c)^4$;

$\left(\frac{3a}{4b}\right)^2$; $\left(\frac{2a^3}{b^5}\right)^3$; $\left(\frac{7c^3}{5b^4}\right)^5$; $\left(\frac{2a^2b}{3c^3d^4}\right)^2$;

$\left(\frac{7xy^7}{5a^3b^6}\right)^2$; $\left(\frac{2a^8b^7}{c^{12}}\right)^5$; $\left(\frac{8c^9d^{11}}{5b^7}\right)^2$; $\left(\frac{4a^3b}{5c^5d^9}\right)^{12}$.

Megoldás:

$(-3)^3 = -27$; $(-1)^4 = 1$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$; $(3^2)^5 = 3^{10}$;

$(a^3)^2 = a^6$; $(b^7)^8 = b^{56}$; $(3ab)^3 = 27a^3b^3$; $(2b^2c)^4 = 16b^8c^4$;

$\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{9a^2}{16b^2}$; $\left(\frac{2a^3}{b^5}\right)^3 = \frac{8a^9}{b^{15}}$; $\left(\frac{7c^3}{5b^4}\right)^5 = \frac{7^5c^{15}}{5^5b^{20}}$; $\left(\frac{2a^2b}{3c^3d^4}\right)^2 = \frac{4a^4b^2}{9c^6d^8}$;

$\left(\frac{7xy^7}{5a^3b^6}\right)^2 = \frac{49x^2y^{14}}{25a^6b^{12}}$; $\left(\frac{2a^8b^7}{c^{12}}\right)^5 = \frac{32a^{40}b^{35}}{c^{60}}$;

$\left(\frac{8c^9d^{11}}{5b^7}\right)^2 = \frac{64c^{18}d^{22}}{25b^{14}}$; $\left(\frac{4a^3b}{5c^5d^9}\right)^{12} = \frac{4^{12}a^{36}b^{12}}{5^{12}c^{60}d^{108}}$.

42. Írd át a kifejezéseket olyan alakba, hogy ne szerepeljen bennük negatív kitevő!

2^{-2}; 3^{-3}; 5^{-2}; 6^{-4}; 8^{-2}.

Megoldás: $\frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{3^3}$; $\frac{1}{5^2}$; $\frac{1}{6^4}$; $\frac{1}{8^2}$.

43. Végezd el a következő szorzásokat és osztásokat! (A nevező helyettesítési értéke nem lehet 0)

a) $\frac{18a^7b^2}{25c^3d^5}\cdot\frac{15c^2d^4}{24a^5b^3}$; b) $\frac{21a^8b^3}{16a^2b^5}\cdot\frac{12a^4b^2}{14b^3a^5}$;

c) $\frac{36x^2y}{10a^2b^3}:\frac{12xy^2}{20a^3b^2}$; d) $\frac{7x^3y^2z^3}{9a^3b^2c}:\frac{21x^2yz^4}{3a^2b}$.

Megoldás:

a) $\frac{18a^7b^2}{25c^3d^5}\cdot\frac{15c^2d^4}{24a^5b^3}=\frac{9a^2}{20bcd}$; b) $\frac{21a^8b^3}{16a^2b^5}\cdot\frac{12a^4b^2}{14b^3a^5}=\frac{9a^5}{8b^3}$;

c) $\frac{36x^2y}{10a^2b^3}:\frac{12xy^2}{20a^3b^2}=\frac{6ax}{by}$; d) $\frac{7x^3y^2z^3}{9a^3b^2c}:\frac{21x^2yz^4}{3a^2b}=\frac{xy}{9abcz}$.

44. Egyszerűsítsd a következő törteket! (A nevező helyettesítési értéke nem lehet 0)

a) $\frac{(a^3)^2\cdot a^5\cdot(a^4)^3}{(a^3)^4\cdot a^8}$; b) $\frac{b^7\cdot(b^3)^2\cdot(b^4)^3}{b^9\cdot(b^3)^4}$;

c) $\frac{(c^{-3})^2\cdot c^{14}\cdot(c^{-5})^{-3}}{c^7\cdot(c^4)^{-2}}$; d) $\frac{(d^3)^{-7}\cdot d^{15}\cdot(d^{-5})^2}{(d^{-2})^{-4}\cdot d^{12}}$.

Megoldás:

a) $\frac{(a^3)^2\cdot a^5\cdot(a^4)^3}{(a^3)^4\cdot a^8}=a^3$; b) $\frac{b^7\cdot(b^3)^2\cdot(b^4)^3}{b^9\cdot(b^3)^4}=b^4$;

c) $\frac{(c^{-3})^2\cdot c^{14}\cdot(c^{-5})^{-3}}{c^7\cdot(c^4)^{-2}}=c^{24}$; d) $\frac{(d^3)^{-7}\cdot d^{15}\cdot(d^{-5})^2}{(d^{-2})^{-4}\cdot d^{12}}=d^{-36}$.

45. Számítsd ki a következő törtek pontos értékét!

a) $\frac{25^3\cdot 20^2}{10^2\cdot 50^2}$; b) $\frac{36^2\cdot 12^3}{48^3\cdot 18^2}$; c) $\frac{45^{-3}\cdot 20^{-4}\cdot 18^{-2}}{180^{-5}}$; d) $\frac{21^{-2}\cdot 14^{-1}\cdot 125^{-1}}{35^{-3}\cdot 6^{-1}}$.

Megoldás:

a) $\frac{25^3\cdot 20^2}{10^2\cdot 50^2}=25$; b) $\frac{36^2\cdot 12^3}{48^3\cdot 18^2}=\frac{1}{16}$;

c) $\frac{45^{-3}\cdot 20^{-4}\cdot 18^{-2}}{180^{-5}}=\frac{1}{25}$; d) $\frac{21^{-2}\cdot 14^{-1}\cdot 125^{-1}}{35^{-3}\cdot 6^{-1}}=\frac{1}{3}$.

46. Bizonyítsd be, hogy $5 \mid 3214^{1500} - 1731^{2000}$!

Megoldás:

$4^1 = 4, \quad 4^3 = 64$; 4-nek minden páratlan kitevőjű hatványa 4-re végződik.

$4^2 = 16, \quad 4^4 = 256$; 4-nek minden páros kitevőjű hatványa 6-ra végződik.

Ezért 3214^{1500} (páros kitevő) 6-ra végződik, azaz 5-tel osztva 1 maradékot ad.

Egy 1-re végződő szám hatványai 1-re végződnek

Ezért 1731^{2000} is 1-re végződik, azaz 5-tel osztva 1 maradékot ad.

Ha két számot, amely 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, kivonunk egymásból, akkor a különbség osztható lesz 5-tel.

47. Határozd meg 99^{99} - 51^{51} utolsó két számjegyét! (Arany Dániel matematikaverseny)

Megoldás:

Sok esetben célravezető lehet ha elkezdjük vizsgálni az utolsó két számjegyet. Vizsgáljuk külön előbb 99 hatványait és utána 51 hatványait végződésük szempontjából. $99^2 = \ldots 01, \quad 99^3 = \ldots 99, \quad 99^4 = \ldots 01, \quad 99^5 = \ldots 99 \quad \ldots$. Észrevehetjük, hogy páros hatvány esetén 01, páratlan hatvány esetében 99 a végződés, ezért 99^{99} utolsó két számjegye: 99. Most tekintsük 51 hatványait.

$51^2 = \ldots 01, \quad 51^3 = \ldots 51, \quad 51^4 = \ldots 01, \quad 51^5 = \ldots 51$, tehát az előzőhöz hasonlóan, 51 páros hatványainak utolsó két számjegye 01, míg páratlan hatványoknál ez 51. Ebből 51^{51} végződése 51. Ennek a kettőnek a különbsége 99 – 51 = 48. Ez lesz 99^{99} - 51^{51} utolsó két számjegye.

Házi feladat javaslat: 41. és 43. feladat.

VIII. Normálalak, gyökvonás

A hatványokkal való számolás sok tudományágban gyakran előfordul, hiszen sokszor van szükség nagyon nagy, ill. nagyon pici számok felírására, ami hatványok segítségével áttekinthetőbb, és a velük való számolás egyszerűbb. Ehhez nyújt segítséget, ha egy számot a normálalakjában írjuk fel. Mit értünk egy szám normálalakján?

Valamely valós szám $m \cdot 10^k$ alakú felírását a szám normálalakjának nevezzük, ha 1 | m | < 10 és k egész szám.

Példák: $0{,}089 = 8{,}9 \cdot 10^{-2}$; $-31200 = -3{,}12 \cdot 10^4$. A $12{,}3 \cdot 10^6$ nem normálalakban felírt szám.

A normálalak első tényezője a számjegyeket fejezi ki (neve: mantissza), a 10 kitevője a szám *nagyságrendjét* mutatja (neve: karakterisztika).

Módszertani megjegyzés: A mintapéldák megoldásán a csoporttagok együtt dolgoznak. Az a csoport, amelyik jó eredményt kap, felírja azt a táblára, a többiek pedig ellenőrzik a számításaikat.

Mintapélda₂₈

Írjuk át az alábbi adatokat normálalakba!

A Föld tömege: 6 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Az alumíniumatomok távolsága: 0,000 000 025 cm.

A vörösvérsejt átmérője: 0,000 007 4 cm.

A fény terjedési sebessége: 300 000 000 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A proton sugara 0,000 000 000 0014 m.

Az elektron körpályájának a sugara: 0, 000 000 000 053 m.

Megoldás:

A Föld tömege: $6 \cdot 10^{24}$ kg.

Az alumíniumatomok távolsága: $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm.

A vörösvérsejt átmérője: $7{,}4 \cdot 10^{-6}$ cm.

A fény terjedési sebessége: $3 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A proton sugara $1{,}4 \cdot 10^{-12}$ m.

Az elektron körpályájának a sugara: $5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m.

Mintapélda$_{29}$

Számoljuk ki, hányszorosa a Nap tömege a Föld tömegének? (A Nap tömege: $2\cdot 10^{30}$ kg, a Föld tömege $6\cdot 10^{24}$ kg.) Mekkora lenne a Föld tömege, ha színaranyból lenne? (A Föld térfogata: kb. $10^{21}\,\mathrm{m}^3$, az arany sűrűsége: $19{,}3\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$.)

Figyelmeztessük a tanulókat a mértékegység-átváltásokra!

Megoldás: A keresett arány: $\dfrac{2\cdot 10^{30}}{6\cdot 10^{24}} = 0{,}3\cdot 10^6 = 3\cdot 10^5$. A Nap tömege 300000-szerese a Föld tömegének.

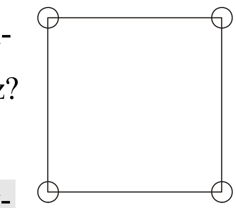
Segítségül felírhatjuk a sűrűség képletét a táblára, nem biztos, hogy mindenki emlékszik rá!

Képlet: $\rho = \dfrac{m}{V}$. Az arany sűrűsége: $19{,}3\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = 1{,}93\cdot 10^4\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \approx 2\cdot 10^4\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

A Föld tömege, ha aranyból lenne: $m = 10^{21}\cdot 2\cdot 10^4\ \mathrm{kg} = 2\cdot 10^{25}\ \mathrm{kg}$.

Mintapélda$_{30}$

Egy grófnő kertjében a virágágyások 3 m x 3 m-es négyzet alakúak. A négyzetek minden sarkában egy-egy fűzfa áll. A grófnő egy szeszélyes reggelen azt mondta a kertészének, hogy szeretné, ha minden virágágyás dupla olyan nagy területű lenne és ugyancsak négyzet alakú. Hogyan oldotta meg a feladatot a furfangos kertész? Milyen hosszúak az új virágágyások oldalai?



Módszertani megjegyzés: Ismételjük át, hogy mit értettünk egy szám négyzetgyökén! Akinek kell, mutassuk meg, hogy a számológép segítségével hogyan tudják kiszámolni egy szám négyzetgyökét!

Megoldás:

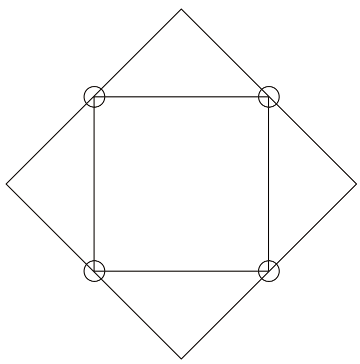
A virágágyások eredeti területe: $T = 3^2 = 9\,m^2$.

Az új virágágyások területe kétszer ekkora, azaz:

$2T = 18\,\mathrm{m}^2$.

Az új virágágyások egy oldalának a hossza:

$a = \sqrt{18}$ m.



Valamely *a* nemnegatív szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, amelynek a négyzete az *a* szám. Azaz $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ahol $a \geq 0$. **Jelölés:** $\sqrt{a}$ **.**

Példák: $\sqrt{9} = 3$, mert $3^2 = 9$; $\sqrt{25} = 5$, mert $5^2 = 25$;

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, mert $0{,}4^2 = 0{,}16$; $\sqrt{0{,}0049} = 0{,}07$, mert $0{,}07^2 = 0{,}0049$;

$\sqrt{1} = 1$, mert $1^2 = 1$; $\sqrt{0} = 0$, mert $0^2 = 0$;

$\sqrt{-9} =$ nincs értelmezve, mert nincs olyan valós szám, amelynek a négyzete –9.

Mintapélda$_{31}$

Írjuk fel az alábbi számok négyzetgyökét!

144;	196;	10000;
0,36;	0,0025;	0,000049;
1,21;	5,76;	$2{,}56 \cdot 10^4$;
$64 \cdot 25$;	$49 \cdot 256$;	$121 \cdot 196$
$\frac{169}{36}$;	$\frac{9}{225}$;	$\frac{4}{676}$.

Megoldás:

$\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{196} = 14$; $\sqrt{10\,000} = 100$;

$\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$; $\sqrt{0{,}0025} = 0{,}05$; $\sqrt{0{,}0\,00049} = 0{,}007$;

$\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$; $\sqrt{5{,}76} = 2{,}4$; $\sqrt{2{,}56 \cdot 10^4} = \sqrt{25600} = 160$;

Számítsuk ki kétféleképpen a szorzatok hányadosok négyzetgyökét! Állapítsuk meg, hogy ugyanazokat az értékeket kaptuk. Fogalmazzuk meg a négyzetgyökvonás azonosságait!

$\sqrt{64 \cdot 25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{25} = 8 \cdot 5 = 40$; $\sqrt{64 \cdot 25} = \sqrt{1600} = 40$;

$\sqrt{49 \cdot 256} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{256} = 7 \cdot 16 = 112$; $\sqrt{49 \cdot 256} = \sqrt{12544} = 112$;

$\sqrt{121 \cdot 196} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{196} = 11 \cdot 14 = 154$; $\sqrt{121 \cdot 196} = \sqrt{23716} = 154$;

$$\sqrt{\frac{169}{36}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{36}}=\frac{13}{6};$$

$$\sqrt{\frac{9}{225}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{225}}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0{,}2; \quad \sqrt{\frac{9}{225}}=\sqrt{0{,}04}=0{,}2;$$

$$\sqrt{\frac{4}{676}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{676}}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}.$$

A négyzetgyökvonás műveletének azonosságait a számolásokban gyakran használjuk.

Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával, ha a tényezők nemnegatív számok.

$$\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},}\ \text{ahol } a\ge 0,\, b\ge 0.$$

Példa: $\sqrt{100}=\sqrt{25\cdot 4}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{4}=5\cdot 2=10$; $\sqrt{2304}=\sqrt{16\cdot 144}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{144}=4\cdot 12=48$.

Tört négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával, ha a számláló nemnegatív, a nevező pozitív szám.

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},}\ \text{ahol } a\ge 0,\, b>0.$$

Példa: $\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}}=\frac{7}{8}$.

Hatvány négyzetgyöke egyenlő az alap négyzetgyökének hatványával!

$$\boxed{\sqrt{a^n}=\left(\sqrt{a}\right)^n,}\ \text{ahol } a\ge 0.$$

Példa: $\sqrt{9^3}=\left(\sqrt{9}\right)^3=3^3=27$.

Feladatok

48. Keresd meg a párját! Mit tapasztalsz?

$\sqrt{100}-\sqrt{64}$	21	$\sqrt{576}+\sqrt{100}$	26
$\sqrt{100-64}$	34	$\sqrt{841}-\sqrt{400}$	7
$\sqrt{16}+\sqrt{9}$	5	$\sqrt{576+100}$	9
$\sqrt{16+9}$	2	$\sqrt{841-400}$	6

Megoldás:

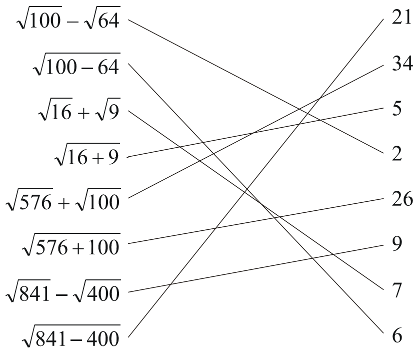
$\sqrt{100}-\sqrt{64}=2;$ $\sqrt{100-64}=6;$

$\sqrt{576}+\sqrt{100}=34;$ $\sqrt{576+100}=26;$

$\sqrt{841}-\sqrt{400}=9;$ $\sqrt{841-400}=21;$

$\sqrt{16}+\sqrt{9}=7;$ $\sqrt{16+9}=5.$

Tapasztalat: összegből, illetve különbségből tagonként nem lehet négyzetgyököt vonni.



Vigyázat! Összeg, különbség négyzetgyöke nem egyenlő a tagok négyzetgyökének összegével!

49. Mekkora távolság egy fényév? (A szökőévtől eltekintünk.)

Mennyi idő alatt ér a Napról a Földre a fény?

Mennyi idő alatt ér a Napról a Merkúrra a fény?

Mennyi idő alatt ér a Napról a Plútóra a fény?

A fény sebessége állandó: $v=3\cdot10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=3\cdot10^5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Megoldás:

1 fényév az a távolság, amelyet a fény egy év alatt megtesz.
Egy év: $t=365\cdot24\cdot60\cdot60\approx3\cdot10^7\,\text{s}$.

$s=v\cdot t=3\cdot10^8\cdot3\cdot10^7=9\cdot10^{15}\,\text{m}$.
Nap – Föld távolság: $s=149{,}6$ millió km $=1{,}496\cdot10^8\,\text{km}$.

$$t=\frac{s}{v}=\frac{1{,}496\cdot10^8\,\text{km}}{3\cdot10^5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}=0{,}49867\cdot10^3\,\text{s}=498{,}67\text{ s}=8{,}3\text{ perc.}$$

Nap – Merkúr távolság: $s=57{,}9$ millió km $=5{,}79\cdot10^7\,\text{km}$.

$$t=\frac{s}{v}=\frac{5{,}79\cdot10^7\,\text{km}}{3\cdot10^5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}=1{,}93\cdot10^2\,\text{s}=193\text{ s}=3{,}2\text{ perc.}$$

Nap – Plútó távolság: $\text{s}=5900$ millió km $=5{,}9\cdot10^9\,\text{km}$.

$$t=\frac{s}{v}=\frac{5{,}9\cdot10^9\,\text{km}}{3\cdot10^5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}=1{,}9667\cdot10^4\,\text{s}=19667\text{ s}=327{,}8\text{ perc}=5{,}5\text{ óra}.$$

50. Nap és a Föld átlagos távolságát nevezzük 1 Csillagászati Egységnek.

Töltsd ki a táblázat hiányzó adatait!

A csoportok egyéni tempójukban dolgoznak. Ha egy feladattal készen vannak, akkor szólnak a tanárnak, aki ellenőrzi, hogy helyesen számoltak-e.

Bolygó	Átlagos naptávolság	
	millió km	Cs. E.
Merkúr	57,9	0,387
Vénusz	108,2	
Föld	149,6	1
Mars		1,524
Jupiter	778,3	
Szaturnusz		9,539
Uránusz	2869,6	
Neptunusz		30,061
Plútó	5900	39,529

Módszertani megjegyzés: A feladat egy másik megközelítése lehet: „Szedjük össze a naprendszerünk bolygóit, tegyük őket a Naptól mért távolságuk szerint sorrendbe, kezdjük a legközelebbivel!”

Megoldás:

Bolygó	Átlagos naptávolság	
	millió km	Cs. E.
Merkúr	57,9	0,387
Vénusz	108,2	0,*723*
Föld	149,6	1
Mars	*228*,0	1,524
Jupiter	778,3	5,203
Szaturnusz	*1427*	9,539
Uránusz	2869,6	19,18
Neptunusz	*4497*,1	30,061
Plútó	5900	39,529

51. Kalászék évi kiadása kb. 3 500 ezer fabatka. Az állam évi kiadása kb. 10 000 milliárd fabatka. Hány százaléka Kalászék évi kiadása az állam évi kiadásának?

Megoldás: Kalászék évi kiadása: $3{,}5\cdot 10^{6}$ fabatka. Az állam évi kiadása: $1\cdot 10^{13}$ fabatka.

$$\frac{3{,}5\cdot 10^{6}}{1\cdot 10^{13}}=3{,}5\cdot 10^{-7}\text{, ez } 0{,}000035\,\%.$$

52. Az állam folyó fizetésimérleg-hiánya 55 milliárd fabatka. Kalászék lakáskölcsön-törlesztése évente 960 000 fabatka. Hány százaléka a lakáskölcsön-törlesztés az állam évi adósság szolgálatának?

Megoldás: Az állam folyó fizetésimérleg-hiánya: $5{,}5\cdot 10^{10}$ fabatka. Kalászék lakáskölcsön-törlesztése évente: $9{,}6\cdot 10^{5}$ fabatka.

$$\frac{9{,}6\cdot 10^{5}}{5{,}5\cdot 10^{10}}=1{,}745\cdot 10^{-5}\text{, ez } 0{,}001745\,\%.$$

53. Számítsd ki a következő kifejezések értékét!

a) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; b) $\left(\sqrt{19}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{11}\right)$.

Megoldás:

a) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=5-3=2$; b) $\left(\sqrt{19}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{11}\right)=19-11=8$.

Házi feladat javaslat: 51. és 52. feladat.

Módszertani megjegyzés: Kizárólag jobb képességű csoportokban érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy azok az (a+b) és (a–b) alakú kifejezések, megyek szorzata 1, egymás reciprokai. Példa: $a=\sqrt{2}+1$, és $b=\sqrt{2}-1$ esetén $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$, így $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ és $\sqrt{2}+1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Néhány további példa: $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$; $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}=5+2\sqrt{6}$; $\frac{1}{4-\sqrt{15}}=4+\sqrt{15}$.

IX. Számrendszerek

Már az őskorban felmerült az igény a dolgok megszámlálására. Ehhez az ősember – úgy, mint mi kisgyermekként – az ujjait használta. Nagyobb számokat kövekkel vagy csomókkal jelenítettek meg. A túl sok kő és csomó kezelése nehézkes volt, így lassan kialakult az átváltásos számábrázolás. Eleinte 60-as számrendszerben számoltak (Mezopotámia), majd megjelent a 12-es (angolszász népek) és a 10-es számrendszer (rómaiak). Az európai számírást az arabok által közvetített kultúra nagymértékben befolyásolta. A ma arab számoknak nevezett tízes számrendszerünk valójában indiai eredetű, az arabok csak közvetítették a módszert.

Kutatómunka: Keress a hétköznapi életünkben a római számok jelenlétére példákat!

Ötletek: Napjainkban a római számokat leginkább sorszámozásra (pl. budapesti kerületek), fejezetszámozásra használjuk, illetve dinasztiák neveiben is megjelennek (pl. VIII. Henrik). Ezen kívül épületek építésének évét jelöljük velük, valamint látható még karórák számlapjain is.

Mintapélda32

Írjuk fel római számok segítségével 1-től 20-ig a számokat!

Megoldás:

I = 1, II = 2, III = 3, IV = 4, V = 5, VI = 6, VII = 7, VIII = 8, IX = 9,
X = 10, XI = 11, XII = 12, XIII = 13, XIV = 14, XV = 15,
XVI = 16, XVII = 17, XVIII = 18, XIX = 19, XX = 20.

Mintapélda33

A gladiátorok viadalán az első sorban CXXXII néző ült, a következő sorokban mindig az előző duplája. Hányan voltak kíváncsiak a viadalra, ha 4 soros volt a nézőtér? Hányan menjenek át a harmadik sorból az elsőbe, hogy azonos legyen a két sor nézőszáma? (Római számokkal dolgozz!)

Megoldás:

1. sor CXXXII 2. sor CCLXIV 3. sor DXXVIII 4. sor MLVI

Összesen: MCMLXXX

Az 1. és 3. sorban összesen DCLX néző ült. Ennek a fele CCCXXX nézőnek kell lennie az ültetés során mindkét sorban. Ehhez a 3. sorból CXCVIII nézőnek kell átmennie az első sorba.

Természetesen arab számokkal számolunk, és azokat írjuk át római számokká.

Római számok

Római számírásnál a következő jeleket használjuk:

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

A római számírás számjegyei az ötös és tízes számrendszer keveredését mutatják. Tőlünk eltérően a rómaiak nem helyiértékes számírást használtak.

Példák római számokra: III = 1+1+1 = 3; VII = 5+1+1 = 7;

IX = 10-1 = 9; XXXIV = 10+10+10+5-1=34;

MCMXCIX = 1000+1000–100+100–10+10–1 = 1999.

A szám értékét a jelek összeadásával, illetve kivonásával számolták ki.

Római számok írásakor legfeljebb három azonos jel kerülhet egymás mellé. A sok azonos jel egymás utáni ismétlésének elkerülésére a kivonást is alkalmazzák. A kivonni kívánt szám nem lehet tetszőleges: V és X elé csak I-t, az L és C elé csak X-et, a D és M elé csak C-t írhatunk. Nagyobb számok helyes leírása a következő módon történik: először az ezresek, aztán a százasok, majd a tízesek, végül az egyesek. Később szükségessé vált a nagyobb számok kényelmesebb leírása: ezerszerest jelentett a szám föléhúzása, és százezerszerest a ketrecbe helyezése: $\overline{\text{XIV}} = 14\,000$; $\boxed{\text{V}} = 500\,000$.

Római számírással nehézkes volt a számolás, ezért számolótábla (abakusz) segítségével dolgoztak. Ebben párhuzamos vájatok szolgáltak az egyesek, ötösök, tízesek, ötvenesek stb. számára.

Manapság, mindegyikünknek természetesnek tűnik a tízes számrendszer használata, de ez csak fokozatosan alakult ki. A régebbi időkben más–más népek más-más módon számoltak. Ennek nyomai megtalálhatóak a mai hétköznapi életünkben is.

Kutatómunka: Keress más számrendszerek létezésére utaló jeleket hétköznapi életünkben! Ötletek: 60-as számrendszer: szögmérés, időmérés; 12-es számrendszer: tucat, év hónapjai, órabeosztás, rovásírás és az 5-ös számrendszer kapcsolata, 2-es számrendszer alkalmazása az informatikában stb. Kapcsolódó Internet címek 2006-ban:

http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/16210/1

http://www.sulinet.hu/tart/ncikk/aj/0/5380/egyiptom.htm

http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/16210/3

http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/21844/1

http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/szam/index.html

http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/pi/egypt.html

Számrendszerek

A számrendszerek lényege, hogy a megszámolni való dolgokat csoportokba rendezzük.

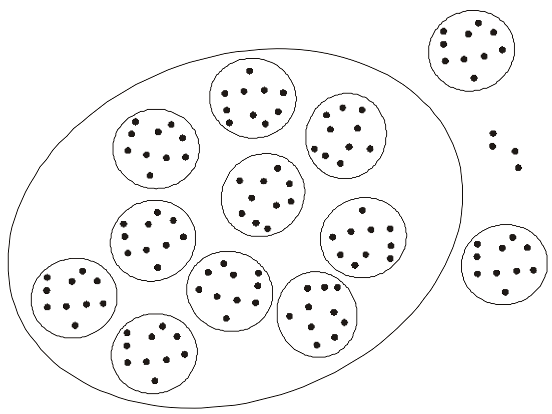
Tízes számrendszer esetén minden egységből 10 darabot egy újabb, nagy egységbe foglalunk. 10 darab egyesből áll egy tízes egység, tíz darab tízes egységből áll egy százas egység, tíz darab százas egységből áll egy ezres egység és így tovább.

Ezek az egységek kifejezhetőek a 10 megfelelő hatványaival:

$$10^0 = 1\,(\text{egyes}),\quad 10^1 = 10\,(\text{tízes}),\quad 10^2 = 100\,(\text{százas}),\quad 10^3 = 1000\,(\text{ezres}).$$

Végül megszámoljuk, hogy az egyes egységekből hány darab van. Ennek leírásához, tíz darab, különböző számjegyre van szükségünk. (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Hogy ezek a számjegyek hol fordulnak elő, azt az mutatja meg, hogy melyik egységről beszélünk. Ezt nevezzük **helyiértékes írásmódnak.**

Például: $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 124$.



Ha azonban a csoportosítás nem tízesével történik, akkor egy másik, szintén helyiértékes számrendszerhez jutunk.

Módszertani megjegyzés: A csoporttagok együtt dolgoznak a 33. és 34. mintapéldán. A feladat megoldását azon csoport képviselője ismerteti a táblánál, akinek a csoport jelét kihúzza a tanár.

Mintapélda34

Írjuk át 3-as számrendszerbe a 124, 10-es számrendszerbeli számot!

Megoldás:

Képezzünk 3-as csoportokat, így a csoportosítás egységei 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5,…

Meg kell nézni, hogy a 124-t milyen helyértékes egységekre tudjuk felbontani. 1 db $3^4=81$-es egység után a maradék 43-ba 1 db $3^3=27$-es egység fér bele. Így még a maradék 16-t kell $3^2=9$-es egységbe rendeznie. Ebből is 1- lesz és a maradék 7-be 2 db 3-as egység fér el és még marad 1. A megoldás: $124=11121_3$

Ezt célszerű táblázatba rendezni:

	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
124	1	1	1	2	1
Marad	43	16	7	1	

Visszafelé gondolkodva egyszerűbb eljárással is eljuthatunk az eredményhez:

$124:3=41$, és a maradék 1.
$41:3=13$, és a maradék 2.
$13:3=4$, és a maradék 1.
$4:3=1$, és a maradék 1.
$1:3=0$, és a maradék 1.

Tehát a 124-ből létrehoztunk:

1 db 81-es csoportot, 1 db 27-es csoportot, 1 db 9-es csoportot, 2 db 3-as csoportot, 1 db 1-es csoportot: $124=11121_3$

Tízes számrendszer esetében nem jelöljük az alapszámot. Minden más számrendszernél a szám végén alsó indexben jelezzük, hogy milyen számrendszerben vagyunk.

Például 325_8 egy 8-as számrendszerbeli számot jelöl.

Ha a számrendszer alapszáma nagyobb, mint 10, akkor új jeleket kell bevezetni.

Mintapélda35

Írjuk át 10-es számrendszerből 16-os számrendszerbe a 451 számot!

Megoldás:

A 16-os számrendszerben 16 jegy van. 0–9-ig a 10-es számrendszer számjegyeit használjuk, de 10-től szükségünk van új számjegyekre. Ugyanis ha két számjeggyel írnánk le a 10, 11, 12, … számjegyeket, akkor nem lenne egyértelmű, hogy pl. 113 milyen számot jelöl: egy háromjegyűt, vagy olyan kétjegyűt, amelynek első számjegye 11 és a második számjegye 3, vagy az első számjegye 1 és a második 13.

Legyenek a 16-os számrendszer számjegyei 10-től: A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

$451:16=28$, és a maradék 3.

$28:16=1$, és a maradék $12=C$.

$1:16=0$, és a maradék 1.

Tehát a 451-ből létrehoztunk:

1 db 256-os csoportot, 12 db 16-os csoportot, 3 db 1-es csoportot

$451=1C3_{16}$

Ellenőrzés: $1C3_{16}=1\cdot 16^2+12\cdot 16^1+3\cdot 16^0=256+192+3=451$.

Mintapélda$_{36}$

Van egy kétkarú mérlegünk, és a 1 kg-os, 2 kg-os, 4 kg-os, 8 kg-os, 16 kg-os mérőtömegekből egy-egy darab. Egy árus azt állítja, hogy ő egészen 31 kg-ig bármit meg tud mérni. Igazat mond-e, és ha igen hogyan csinálja? (Természetesen, csak egész kilogrammokat tudunk mérni.)

Megoldás:

$1=1\quad 2=2\quad 3=1+2\quad 4=4\quad 5=1+4\quad 6=2+4\quad 7=1+2+4$

$8=8\quad 9=1+8\quad 10=2+8\quad 11=1+2+8\quad 12=4+8$

$13=1+4+8\quad 14=2+4+8\quad 15=1+2+4+8\quad 16=16\quad 17=1+16$

$18=2+16\quad 19=1+2+16\quad 20=4+16\quad 21=1+4+16$

$22=2+4+16\quad 23=1+2+4+16\quad 24=8+16\quad 25=1+8+16$

$26=2+8+16\quad 27=1+2+8+16\quad 28=4+8+16\quad 29=1+4+8+16$

$30=2+4+8+16\quad 31=1+2+4+8+16$

Ez igazából a számok 2-es számrendszerbeli felírásának felel meg. Ha a 2-es számrendszerbeli jegy 1, akkor a neki megfelelő nehezéket a serpenyőbe teszi, ha 0, akkor nem rakja bele.

Feladatok

54. Keresd meg a párját. Melyik a kakukktojás?

CCCLXXVI; DCCXLIX; MMCMLXXVIII;

MMCCLXXXVI; MMMCDLXIV;

749; 2978; 3464; 376.

Megoldás:

CCCLXXVI = 376; DCCXLIX = 749;

MMCMLXXVIII = 2978; MMMCDLXIV = 3464;

A kakukktojás: MMCCLXXXVI = 2286.

55. A C, X, V, L, I római számjegyekből állítsd elő a lehető legkisebb és legnagyobb számot, ha mindegyik jegy pontosan egyszer használható!

Megoldás: A legkisebb: CXLIV = 144. A legnagyobb CLXVI = 166.

56. Melyik az az ezernél kisebb szám, amelynek római számmal való felírásában a legtöbb jel található?

Megoldás:

Az egyesek helyén legtöbb jelből álló számjegy: VIII (4 jel).

A tízesek helyén legtöbb jelből álló számjegy: LXXX (4 jel).

A százasok helyén legtöbb jelből álló számjegy: DCCC (4 jel).

888 = DCCCLXXXVIII (12 jel).

57. Írjuk át 10-es számrendszerbe az 1010011_2 számot!

Megoldás: $1010011_2 = 83$.

58. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat!

1101001_2; 2010221_3; 30201_4; 14320_5

Megoldás:

Növekvő sorrend: $1101001_2 = 105$; $30201_4 = 801$; $14320_5 = 1210$; $2010221_3 = 1564$.

59. Végezd el az alábbi műveleteket, majd ellenőrizd a művelet helyességét 10-es számrendszerbe való átírással!

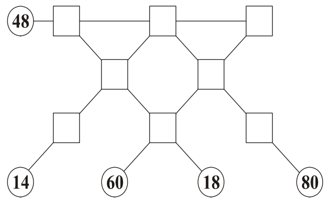
a) $135_6 + 542_6$ b) $103_5 + 214_5$ c) $713_8 + 276_8$ d) $302_4 - 213_4$

Megoldás: a) 1121_6; b) 322_5; c) 1211_8; d) 23_4.

Házi feladat javaslat: 57. feladat.

X. Vegyes feladatok

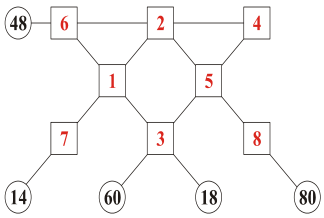
60. PÓKHÁLÓ – SZORZÁS



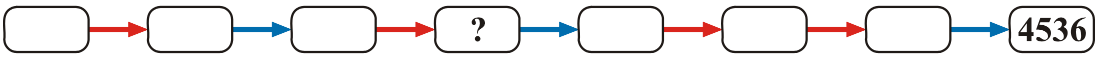
(Matematika határok nélkül verseny)

Az egy-egy körben levő szám a vele egy egyenesre fűzött négyzetekből hiányzó számok szorzata. Írjátok be a megfelelő számokat, ha tudjuk, hogy 1-től 8-ig mindegyik egész előfordul valamelyik négyzetben!

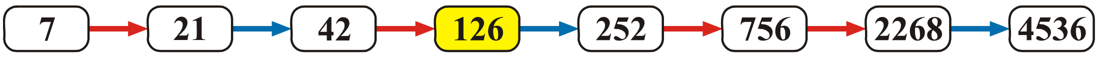
Megoldás:



61. Kétféle nyíl van a rajzon. Mindegyik a "többszörösre" mutat: ugyanolyan színű nyíl ugyanannyiszorosra, és egyik sem mutat az egyszeresre. Mennyi a ? helyén álló szám számjegyeinek összege?



Megoldás:



1+2+6 = 9.

62. Az ábrán látható számkártyákból ötjegyű számokat alkotunk. Legfeljebb hány, 6-tal osztható ötjegyű számot hozhatunk létre ezekből a számkártyákból?

Megoldás:

6-tal oszthatók a 3-mal osztható páros számok. A számkártyákból előállítható összes ötjegyű szám osztható 3-mal, mert a számjegyeinek összege is osztható 3-mal. A számok utolsó számjegye 2 vagy 6 lehet. Mind két esetben az első négy helyen 24-féleképpen helyezhetjük el a megmaradó kártyákat. Tehát összesen 48 darab 6-tal osztható számot állíthatunk elő a számkártyák segítségével.

63. Noéminek két testvére van. Hármójuk életkorának szorzata 30, összege 14. Hány évesek külön-külön? (A gyerekek életkora egész szám)

Megoldás:

A lehetséges szorzatok: $1\cdot 1\cdot 30$, $1\cdot 2\cdot 15$, $1\cdot 3\cdot 10$, $1\cdot 5\cdot 6$, $2\cdot 3\cdot 5$. Ezek közül csak egy olyan van, ahol a tényezők összege 14, az 1, 3, 10. Ezért a testvérek életkora 1, 3 és 10 év.

64. Bontsd fel a zárójelet, az eredményekben vonj össze, majd számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét, ha $c = -2$, $d = -3$.

$$\left(c^2d + 3cd - 4dc^2\right) - \left(5cd - 2cd^2\right) + \left(3d^2c - 7cd + c^2d\right)$$

Megoldás:

$$\left(c^2d + 3cd - 4dc^2\right) - \left(5cd - 2cd^2\right) + \left(3d^2c - 7cd + c^2d\right) = -2c^2d - 9cd + 5d^2c = -120$$

65. Pótold a hiányzó számokat, vagy betűket úgy, hogy azonos kifejezések szerepeljenek!

$$\left(3a^2b^3\right)^3 = 27a^6b^2\cdot b^{\square} = (3ab)^2\cdot\boxed{} = (ab)^{\square}\cdot(3b)^3$$

Megoldás: $\left(3a^2b^3\right)^3 = 27a^6b^2\cdot b^9 = (3ab)^2\cdot 3a^4b^7 = (ab)^6\cdot(3b)^3$

Módszertani megjegyzés: Osszuk az osztályt két részre, és valamelyik csoportból hívjunk egy önként vállalkozót.
A mi feladatunk az időmérés, illetve a csapatok pontjainak számolása. Fél percen belüli sikeres megfejtés esetén 2 pontot szerzett a csapat, s ez idő alatt rabolni sem lehetett. Fél perc utáni megfejtésért 1 pont jár, s érvényesült az ún. szabad rablás.
Az önkéntes húz két kártyát. (egyet a feladvány kártyák közül, egyet a cselekvés kártyák közül) A saját csoportjának elmutogatja, lerajzolja vagy körülírja a feladványt. Ha kitalálták, akkor ő választ a másik csoportból egy játékost.
A játék befejezése után fogalmaztassuk meg az osztállyal a pontos definíciókat.

***4. 6. kártyakészlet alkalmazása* – Activity játék**

Cselekvés kártyák

Rajzolás	Mutogatás	Körülírás

Feladvány kártyák

Prímszám	Összetett szám	Osztó	Többszörös
Legnagyobb közös osztó	Legkisebb közös többszörös	Relatív prímek	Tizedestört
Irracionális szám	Valós szám	Természetes szám	Egész szám
Racionális szám	Számegyenes	Intervallum	Együttható
Egynemű kifejezések	Normálalak	Négyzetgyök	Hatvány