# I. Hányféle?

A kombinatorika a véges halmaz elemeinek csoportosításával, kiválasztásával, sorrendbe rendezésével foglalkozik. Az itt felsorolt évszámokból is láthatjuk, hogy a kombinatorika viszonylag fiatal ága a matematikának. A szerencsejátékokkal (kártya, kockajátékok) kapcsolatban felmerültek valószínűségszámítási kérdések, amelyekre választ a kombinatorikai módszerek segítségével adtak.

A kombinatorika alapfogalmainak kezdeti kidolgozása Pierre Fermat (1623–1662) és G. W. Leibniz (1646–1716) nevéhez fűződik. Sok érdekes kombinatorikai problémával foglalkozott Leonhard Euler (1707–1783) is.

A kombinatorika a XX. században vált önálló tudományággá. A magyar vagy magyar származású matematikusok közül igen sokan dolgoztak ezen a területen.

Részlet Katona Gyula magyar matematikus Hogyan lett „magyar matematika” a kombinatoria? című – a Mindentudás Egyetemén 2006-ban tartott – előadásából:

„A második világháború előtt és után sok szép eredmény született. Ezeket azonban nem az alkalmazások kényszerítették ki. A megoldott problémák többnyire játékosak, fejtörő jellegűek voltak: érdekesek és nehezek, vagyis nagy kihívást jelentettek. Erdős Pál az egyik fontos eredményét 1938-ban találta ki, de csak 1961-ben jelentette meg, mert úgy gondolta, hogy azt mások nem tekintik matematikának. Amikor a számítógépek megjelentek, néhány év után kiderült, hogy azok a kombinatorikát, más néven a véges matematikát igénylik. Akkor indult be az igazán rohamos fejlődés. És a magyar matematika azóta is tartja helyét e területen. Itt dolgozik, illetve dolgozott két olyan világhíresség, mint a Mindentudás Egyetemének egy korábbi előadója, Lovász László[1] (1948–) és Erdős Pál[2] (1913–1996). A kombinatorikát sokan máig „magyar tudománynak” tartják a világban. Az 1970-es, 1980-as években volt egy amerikai mondás (recept) arra, hogy hogyan csináljunk számítástudományi tanszéket:

1. Végy egy magyart!”

Az itt említett matematikusok rövid életrajza megtalálható az alábbi címen:
http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/jegyzetek/eletrajzok/matematikusok/a.html

[1] A matematika „Oscar díját”, a Wolf díjat 1999-ben nyerte el. (Szerk. megj.)
[2] Az első magyar Wolf-díjas.

*Módszertani megjegyzés:* Az első két feladatot javasoljuk tanórai feldolgozásra. Először csak az 1. feladatot tűzzük ki. A tanulók párokban dolgozzanak!

*Módszertani megjegyzés:* Az első feladat egy lehetséges feldolgozási módja:
A munka elején szükségessé válhat, hogy vita során egyértelműsítsük a feladatot (Pl. Miért lényeges a zászlórúd? Van-e a zászlónak „teteje”, „alja”?) A tanár kísérje figyelemmel tanulópárok önálló munkáját. Ha már minden pár talált néhány elrendezést, folyamatosan rajzoltassunk föl a tanulókkal a táblára egyet-egyet. Amikor már áttekinthetetlenné kezdenek válni a rendszertelenül felrajzolt lehetőségek, akkor természetes módon merül fel a rendszerbe foglalás igénye. Ekkor érdemes közös megbeszélést kezdeményezni a rendszerezés módjáról, megvitatni az ezzel kapcsolatos javaslataikat. A táblára elegendő egyfajta rendszer szerint megadni a csoportosítást, de a tanulók dolgozhatnak másféle rendszer szerint is.
Most hasznos megbeszélni, hogy a választott szempontrendszer miért alkalmas arra, hogy minden lehetőséget számba vegyen, és mindegyiket egyszer. (A megoldásban megadott vázlatrajzok mutatnak egy lehetséges szempontrendszer szerinti csoportosítást.) Célszerű a táblán a vázlatrajzokat a választott szempontrendszer szerint csoportosítani. Ezután beszéljük meg, hogy miként lehetett volna az összes eset számát meghatározni a szempontrendszerünk segítségével a konkrét esetek lerajzolása nélkül.
Végül érdemes megkérdezni, hogyan változna a lehetőségek száma, ha a feltételeket módosítanánk? (Javasolhatjuk az 1/a, 1/b feladatok megoldását.)

## Feladatok

**1.** Egy iskola matematika tanárai egyik napon iskolavetélkedőt rendeztek az osztályok számára. Mind a 12 osztály előfeladata egy osztályzászló tervezése és kivitelezése volt. Az osztályok mindegyike kapott egy darab 60 cm×30 cm piros színű, és egy-egy 30cm×15cm méretű kék, illetve fekete, téglalap alakú egyszínű anyagot. A három anyag összevarrásával kellett egy téglalap alakú zászlót készíteni =az anyagokat nem lehetett kisebb darabokra vágni).

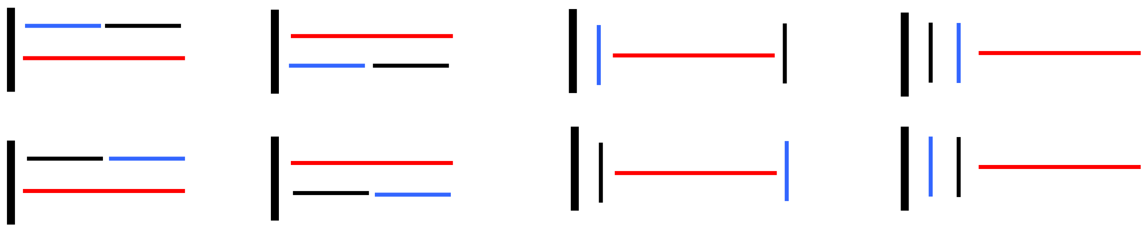
Az osztályoknak az elkészült zászlót rúdra kellett erősíteni, és az iskola aulájában lévő zászlótartókba kitűzni. (Az egyik gyerek meg is jegyezte: „Most legalább nem keverhető össze az olasz és a magyar zászló.”)

Tervezd meg az összes lehetséges zászlót, amelyet az egyes osztályok készíthettek! Előfordulhatott-e, hogy végül az aulát 12 különféle zászló díszítette?

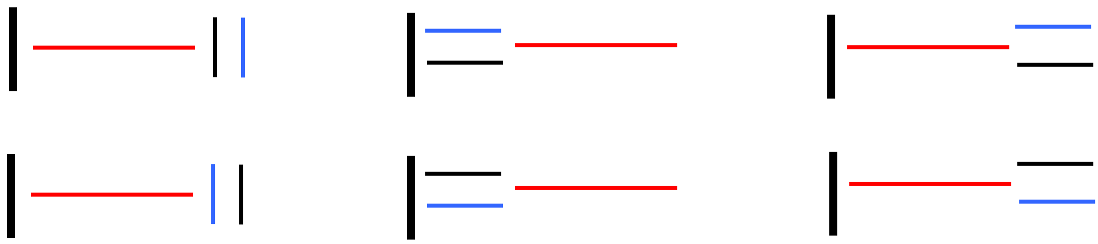
*Megoldás:* Két különböző esetet lehet vizsgálni: A (hosszabb) piros anyagnak

a) rövidebb oldala; b) hosszabb oldala párhuzamos a zászlórúddal.

a) I.,



II.,



Ebben az esetben 14-féle zászló készíthető.

b) Azok az esetek, amikor a piros anyag hosszabb oldala párhuzamos a zászlórúddal, rendre előállíthatók az előbbi esetekből. A fenti ábrák mindegyikén helyezzük a zászlórudat a zászlók „felső” szélével párhuzamosan!

Tehát összesen 28 különböző zászló készíthető. A feladat kérdésére a válasz: igen.

**1/a** Hogyan változik az 1. feladatban a készíthető zászlók száma, ha a feltételeket úgy változtatjuk meg, hogy a három anyagdarab kétféle színű (kék és piros)?

*Módszertani megjegyzés:* Az 1/a feladat kitűzhető szétbontva is a következő megfogalmazásban:

**1/b** Hogyan változik az 1. feladatban a készíthető zászlók száma, ha a feltételeket úgy változtatjuk meg, hogy a három anyagdarab kétféle színű, mégpedig a két rövidebb anyag kék, a hosszú most is piros színű?

**1/c** Hogyan változik az 1. feladatban a készíthető zászlók száma, ha a feltételeket úgy változtatjuk meg, hogy a három anyagdarab kétféle színű, mégpedig az egyik rövidebb anyag és a hosszú anyag piros, a másik rövidebb pedig kék színű?

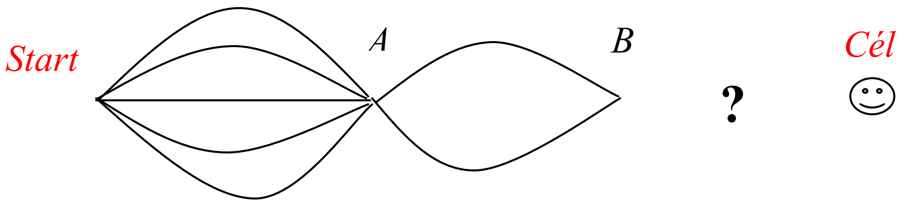
*Megoldás:*

Az azonos színű anyagok vagy egybevágó téglalapok, vagy nem.

Az első esetben az 1. feladatban kapott bármelyik elrendezéshez található pontosan egy darab olyan elrendezés, amit a két egybevágó téglalap felcserélésével kaptunk. Ha a két téglalap azonos színű, ezek a párok nem különböztethetők meg, így feleannyi (14 darab) különböző zászló készíthető.

A második esetben az „azonos színűség” nem változtatja a különböző lehetőségek számát, hiszen az elrendezésből adódó különbözőségek megmaradnak, mert a hosszabb és rövidebb „helyzete” nem változik attól, hogy azonos a szín.

**2.** Az iskolában egy vetélkedőn akadályverseny is lesz. Minden osztály két csapatot állít ki. A 24 csapat mindegyike a *Start* jelű helyről indul, és az $A$ majd a $B$ állomások érintésével kell a *Cél*ig eljutni. A *Start*tól az $A$ állomásig 5, az $A$-ból a $B$-be 2 út vezet. Legalább hány út vezessen $B$-ből a *Cél*ba, ha azt akarjuk, hogy ne legyen két olyan csapat, amelynek a teljes útvonala azonos?




*Módszertani megjegyzés:* Végül ne csak azt fogalmaztassuk meg a tanulókkal, hogy B-ből a Célig 3 út elég, hanem az is kapjon kellő hangsúlyt, hogy 2 nem elegendő és 3-nál több út már felesleges.

*Megoldás*:

A *Start*tól az $A$ állomásig 5-féle útvonalon lehet eljutni. Bármelyike $A$-ból $B$-be 2-féle úton folytatható, tehát a *Start*tól $B$-ig $5 \cdot 2$-féle útvonalon mehetnek a csapatok. Ha $B$-től a *Cél*ig $x$ db útvonal vezet (ahol $x$ természetes számot jelöl), akkor a különböző útvonalak számát $5 \cdot 2 \cdot x$ kifejezés értéke adja meg. A feltétel miatt $5 \cdot 2 \cdot x \geq 24$, így $x \geq 2{,}4$.

Mivel $x$ egész szám, az egyenlőtlenség megoldása a 3-nál nem kisebb egész számok.

Tehát legalább 3 út vezet $B$-ből a *Cél*ba.

*Módszertani megjegyzés:* További, hasonló módszerrel megoldható feladatot fogalmaztassunk meg a tanulókkal.

Például: Egy csoport étkezésénél 5 fajta előételből, kétféle főételből és 3-féle desszertből lehetett választani. Mindenki háromfogásos ebédet evett. Az étkezés befejezése után kiderült, hogy nem volt a csoportban két olyan ember, aki pontosan ugyanazt a három fogást fogyasztotta el. Legfeljebb hány tagú lehetett a csoport?

*Megoldás:*

Mivel $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ különböző ebéd lehetséges, a csoport létszáma legfeljebb 30 volt.

# II. Egy 5-tagú társaságról

András, Balázs, Cili, Dénes és Erika nagyon jó barátok. Egy osztályba járnak, és a szabadidejüket is legtöbbször együtt töltik el. A következő feladatok róluk szólnak.

*Módszertani megjegyzés:* Tanórai feldolgozásra javasolt feladatok: 3.-tól 8.-ig. A tanulók 2-3 fős csoportokban dolgozzanak! A 3-as és a 4-es feladatot egyszerre tűzzük ki megoldásra. Ha valamelyik csoport a többinél hamarabb ad megoldást a feladatokra, a közös megbeszélésig a 8-as feladat megoldásán törjék a fejüket. Munka közben ne értékeljük az egyes csoportok munkáját, de segítő kérdésekkel bíztassuk őket a teljes megoldás megkeresésére.

## Mintapélda$_1$

András és Balázs vonaton utazik. Hogy könnyebben teljen az idő, snóblit játszanak, azaz mindketten a zsebükbe 3-3 fémpénzt tesznek, amelyekből mindketten elrejtenek az egyik kezükbe valamennyit (lehet, hogy mindet, de az is lehet, hogy egyet sem). Majd egymás után megmondják, hogy szerintük összesen hány darab pénz van a kezeikben. Ezután egyszerre kinyitják a kezüket, és az nyer, aki eltalálta, hogy összesen hány pénzérme van kettőjüknél.

a) Sorold fel a kezükben lévő pénz bemutatásakor bekövetkező különböző lehetőségeket!

b) Mekkora lehet a kezükben lévő érmék számának összege, és annak egyes értékei hányféleképpen következhetnek be?

c) Ha nagyon sokszor játsszák ezt a játékot, várhatóan melyik összeg értéke következik be a legtöbbször?

*Megoldás:*

a)

| András | Balázs |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 1 | 0 |
| 1 | 1 |
| 1 | 2 |
| 1 | 3 |
| 2 | 0 |
| 2 | 1 |
| 2 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 0 |
| 3 | 1 |
| 3 | 2 |
| 3 | 3 |

(Ha csak az összes lehetőségek számára lettünk volna kíváncsiak, akkor ehhez – felsorolás helyett – a következőképpen is eljuthattunk volna. András kezében 4-féle lehet az érmék száma (0, 1, 2 vagy 3). Mivel bármelyik esetben Balázs kezében lévő érmék száma is 4-féle lehet, ezért az összes lehetőségek száma: $4 \cdot 4 = 16$. Gondolatmenetünkből adódik, hogy minden lehetséges esetet figyelembe vettünk és mindegyiket pontosan egyszer.)

b)

| András | Balázs | Összeg |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 |
| 0 | 3 | 3 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 4 |
| 2 | 3 | 5 |
| 3 | 0 | 3 |
| 3 | 1 | 4 |
| 3 | 2 | 5 |
| 3 | 3 | 6 |

A táblázat alapján könnyen összeszámolhatjuk, hogy az egyes összegek hányféleképpen következhetnek be.

| **Az összegek:** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Bekövetkezések száma:** | **1** | **2** | **3** | **4** | **3** | **2** | **1** |

c) A 16 eset közül legtöbbször (2+4=6 esetben) a játékosok kezében lévő pénzérmék számának összege 3. Így, ha nagyon sokszor eljátsszák el ezt a játékot, várhatóan az érmék számának összege leggyakrabban 3 lesz.)

## Mintapélda$_2$

Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek számjegyei különbözőek, mégpedig 1,0, 5 és 7?

*Megoldás:*

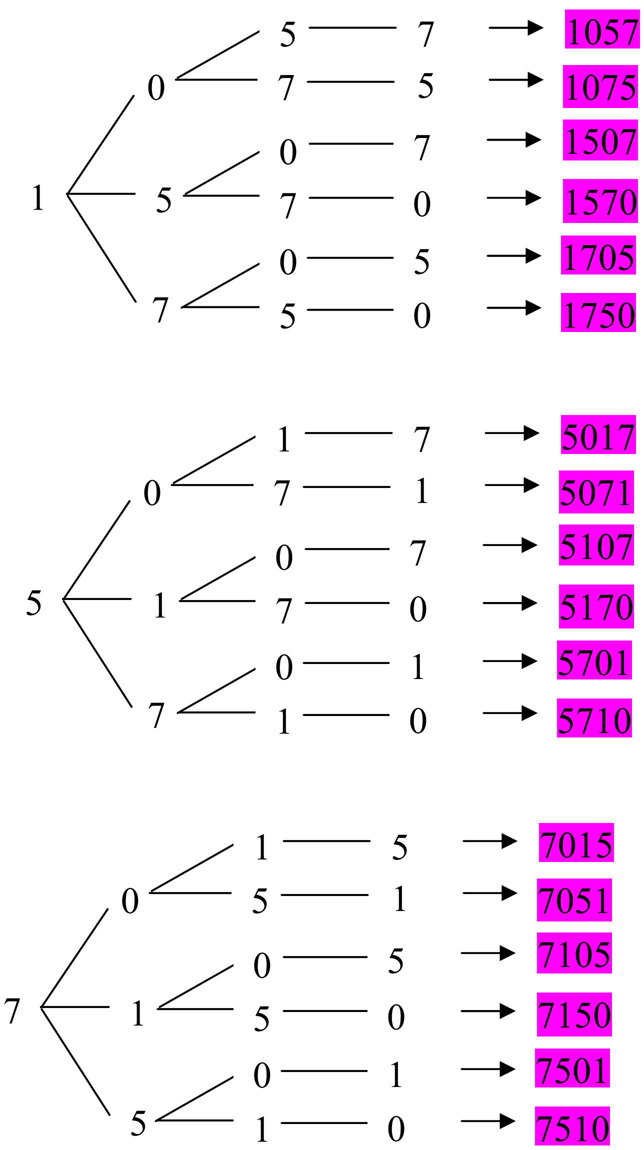
Megadhatjuk felsorolással a számokat, például így, növekvő sorrendben:

1057, 1075, 1507, 1570, 1705, 1750,

5017, 5071, 5107, 5170, 5701, 5710,

7015, 7051, 7105,7150, 7501, 7510

Más módon is felsorolhatjuk a számokat:




Ezt az összeszámlálási módot **fagráfos eljárásnak** nevezzük.

**Logikai úton** is meghatározhatjuk az ilyen számok számát. Az első számjegyet 3-féleképpen választhatjuk meg (5, 1 vagy 7). Bármelyik választás esetén is a második számjegyet ismét 3-féleképpen választhatjuk meg, hiszen a 0-t igen, a már kiválasztott első elemet nem. Tehát az első két számjegyet $3 \cdot 3$-féleképpen adhatjuk meg. A harmadik számjegy minden egyes esetben kétféleképpen választható, így az első három számjegy $3 \cdot 3 \cdot 2$, azaz 18-féleképpen adható meg. Mivel a negyedik számjegy minden esetben egyértelműen adódik, továbbá a gondolatmenetünkből következik, hogy minden lehetséges esetet összeszámoltunk, és mindegyiket pontosan egyszer, így az ilyen négyjegyű számok száma 18.

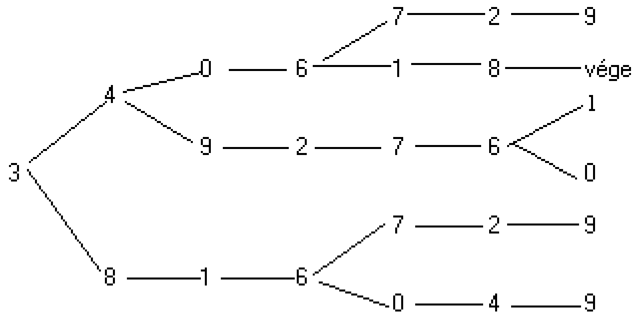
## Feladatok

**3.** Öt jó barát mindegyikéknek van mobiltelefonja. Észrevették, hogy mind az öt telefonszám olyan hétjegyű szám, amelynek első jegye 3-as és egyikük telefonszámában sincs két egyforma számjegy. Azt is megfigyelték, hogy amikor bármelyikük tárcsázza a másik számát, a lenyomott nyomógombok a sakkjátékban ismert lóugrással követik egymást. Meg tudjuk-e mondani, hogy mi az öt telefonszám? Lehet-e ötnél több ilyen telefonszám?

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| **4** | **5** | **6** |
| **7** | **8** | **9** |
| | **0** | |

*Megoldás:*

*Módszertani megjegyzés:* A feladat megoldásának megbeszélésekor gyűjtsük össze a csoportok megoldásait. Derüljön ki, hogy olyan megoldási módot célszerű keresni, amelynek során nemcsak a lehetséges megoldásokat találjuk meg, hanem amelyben az alkalmazott eljárás egyúttal bizonyítja is, hogy nincs a problémának ennél több megoldása. Ha van mágneses tábla, célszerű a mobiltelefon vázlatos rajzán megmutatni az egyes lehetséges lépéseket, majd azok megbeszélése után érdemes fagráfon is szemléltetni a megoldást.




Tehát pontosan öt telefonszám tesz eleget a feltételeknek, és ezek: 3 406 729; 3 492 761; 3 492 760; 3 816 729; 3 816 049.

**4.** Egyik nap András moziba hívta négy barátját. A jegyek a 7. sor bal oldalának 1–5. helyeire szóltak. Először András és Erika érkezett a moziba. András a 3-as székre ült le, Erika pedig mellé. A többiek egyszerre jöttek, kicsit később foglalták el helyeiket. Hányféle ülésrend alakulhatott ki?

*Megoldás:*

*Módszertani megjegyzés:* Ha van olyan csoport, amelyik az összes eset módszeres felsorolásával oldotta meg a problémát, akkor először az ő megoldásukat hallgassuk meg, és csak ezután kérdezzünk rá, hogy volt-e olyan megoldás, amelyben az össze lehetséges esetek számát nem felsorolással határozták meg. Itt még nem érdemes bevezetni a faktoriális fogalmát és jelölését.

| Erika András bal oldalán ül: | Erika András jobb oldalán ül: |
|---|---|
| *BCAED* | *BCEAD* |
| *BDAEC* | *BDEAC* |
| *CBAED* | *CBEAD* |
| *CDAEB* | *CDEAB* |
| *DBAEC* | *DBEAC* |
| *DCAEB* | *DCEAB* |

*Másik megoldás:*

Erika vagy a 2-es, vagy a 4-es székre ült le.

Ha Erika a 4-es székre ült le, akkor az 1-es széket a 3 személy bármelyike elfoglalhatja.

Mind a három esetben a 2-es székre a megmaradt 2 személy bármelyike leülhet, így az első négy széket összesen $3 \cdot 2$, azaz hatféleképpen foglalhatják el. Bármelyik esetben egyértelműen meghatározott az ötödik helyen ülő személy.

Hasonló gondolatmenettel adódik újabb hat lehetőség, ha Erika a 2-es székre ült le.

Így minden lehetőséget számba vettünk, és mindegyiket pontosan egyszer.

Tehát 12-féle ülésrend alakulhatott ki.

*Módszertani megjegyzés:* Az 5. feladat első három kérdésének megoldására versenyt hirdethetünk a csoportok számára: Melyik csoport ad legrövidebb idő alatt teljes megoldást a 3 kérdésre. A megoldásokat írásban kérjük. A leggyorsabban dolgozó első három csoport megoldását szedjük be. Olvassuk fel feladatonként mindhárom megoldást, a többi csoport pedig tegye meg észrevételét a következő szempont alapján: A megoldási mód lehetőséget nyújtott-e az összes lehetőség megadására, és minden esetet pontosan egyszer vettek-e figyelembe.

**5.** Mozi után mind az 5 gyerek ugyanazzal a busszal indult haza. A buszmegállóba érkező busznak csak egy ajtaja nyílt ki, s annak is csak az egyik szárnya.

a) Hány különböző sorrendben szállhatnak fel?

b) Hány különböző sorrendben szállhatnak fel, ha Cili és András (ebben a sorrendben) közvetlenül egymás után száll fel?

c) Hányféle sorrendben szállhatnak fel, ha a fiúk udvariasan előre engedik a lányokat?

d) Hányféle sorrendben szállhatnak fel, ha az ajtó mindkét szárnya kinyílik, és a buszvezető nagyon siet?

*Módszertani megjegyzés:* Az a) kérdés megoldásának megbeszélése után már célszerű bevezetni a faktoriális fogalmát.

Kombinatorikai feladatok megoldása során gyakran előfordul, hogy 1-től indulva valahány egymást követő pozitív egész számot össze kell szorozni. Az ilyen szorzatra bevezettek egy elnevezést és jelölést a matematikában.

Jelöljön $n$ egy 1-nél nagyobb pozitív egész számot. Szorozzuk össze 1-től $n$-ig az összes pozitív egész számot. Az így kapott szorzatot az $n$ szám faktoriálisának nevezzük. Jelölése: $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Például: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$$90! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90$$

*Megoldás:*

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

b) Mivel Cili és András egymás után ebben a sorrendben száll fel, tekinthetjük úgy is, hogy 4 „személy” (B, D, E és CA) felszállásának sorrendjére vagyunk kíváncsiak. Így összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ felszállási sorrend lehet.

c) $2 \cdot 3! = 12$

*Módszertani megjegyzés:* Ha a tanulók nem vették észre, hogy a c) alatt megfogalmazott probléma analóg a 4-es feladattal, hívjuk fel rá a figyelmüket.

d)

*Módszertani megjegyzés:* Ennek a feladatnak a megoldását a matematika iránt érdeklődő, a kombinatorikai feladatok megoldásában jártasabb tanulóknak ajánljuk.

*Módszertani megjegyzés:* „A buszvezető nagyon siet” alapján feltételezhető, hogy egyszerre két személynek kell felszállnia, de a feladat nyitva hagyja a kérdést, hogy megkülönböztessük-e, hogy melyik ember melyik oldalon száll fel? Hagyjuk érvelni a tanulókat egyik és másik lehetőség mellett, és mindkét értelmezés esetén vitassuk meg a megoldást.

1) Nem különböztetjük meg az egyszerre felszálló 2 ember helyzetét (a jobb és a bal oldali szárnyban felszállókat):
Mivel 5-en vannak, egy ember egyedül, 2-2 pedig párban száll fel a buszra. Az egyedül felszálló embert 5-féleképpen választhatjuk ki. A megmaradt 4 emberből 2 párt kell kialakítanunk. Jelölje ezt a 4 gyereket *a*, *b*, *c*, *d*. A lehetséges párok: *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd* és *cd*, azaz 6 pár jöhet létre.

2) Megkülönböztetjük az egyszerre felszálló párok helyzetét:
Ebben az esetben is az egyedül felszálló ember 5-féle lehet, de az vagy a bal vagy a jobb oldalon szállhat fel. Mivel ilyenkor a párok közül a buszra előbb felszálló pár is kétféle, és a megmaradt pár is 2-féle helyzetben szállhat fel, tehát a felszállási lehetőségek száma 8-szorosa az előbbi esetben meghatározottnak. Így, az adott feltételek mellett az 5 ember $90 \cdot 8 = 720$-féleképpen szállhat fel a buszra. Gondolatmenetünkből adódik, hogy minden esetet figyelembe vettünk és mindegyiket pontosan egyszer.

**6.** Egyszer az öttagú társaság egy betelefonálós rádióműsorban nyert két állóhelyet egy koncertre. A jegyeket kisorsolták maguk között. Hányféle lehetett a sorsolás eredménye? Hány esetben lehetett az egyik nyertes Cili?

*Megoldás*:

Felsorolással:

| | | | |
|---|---|---|---|
| AB | BC | CD | DE |
| AC | BD | CE | |
| AD | BE | | |
| AE | | | |

Azaz tízféle eredmény lehetséges.

Vagy

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| AB | ~~BA~~ | ~~CA~~ | ~~DA~~ | ~~EA~~ |
| AC | BC | ~~CB~~ | ~~DB~~ | ~~EB~~ |
| AD | BD | CD | ~~DC~~ | ~~EC~~ |
| AE | BE | CE | DE | ~~ED~~ |

A sorsolás eredménye $\frac{5\cdot 4}{2}=10$-féle lehetett.

Cili 4 esetben lehetett nyertes.

**7.** Mind az öten szerettek volna nyáron munkát vállalni, de sajnos csak két fő számára tudtak munkát szerezni: reggeli újságkihordást és fagylaltkimérést. Most is sorsolással döntötték el, hogy kik nyerjék el a munkákat. Hányféle lehetett most a sorsolás eredménye? Hány esetben lehetett az egyik nyertes András?

*Megoldás:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| AB | BA | CA | DA | EA |
| AC | BC | CB | DB | EB |
| AD | BD | CD | DC | EC |
| AE | BE | CE | DE | ED |

A sorsolás eredménye $5\cdot 4=20$-féle lehetett.

András $4\cdot 2=8$ esetben lehetett nyertes.

**8.** Az egyik testnevelési órán 100 méteres futóversenyen döntötték el, hogy kik az osztályban a legjobb sprintelők. Az öt jóbarát közül 4 (András, Balázs, Cili és Dénes) bekerült az első hat helyezett közé. Közülük a legjobb helyezést Dénes érte el, a leggyengébbet pedig András. Az első hat helyezett között nem volt döntetlen. Hány különböző helyezési sorrend alakulhatott ki a 4 jóbarát között?

*Megoldás:*

Jelölje ***a, b, c*** és ***d*** rendre András, Balázs, Cili és Dénes helyezésének sorszámát. A feladat szerint az *a* legnagyobb értéke 6, ***b*** illetve ***c*** legnagyobb értéke 5, ***d*** pedig legfeljebb 3 lehet. Mivel ***b*** és ***c*** értéke felcserélhető, tehát ***a***-t és ***d***-t változatlanul hagyva, ***b*** és ***c*** helyére írt számokat felcserélve újabb jó helyezési sorrendhez jutunk.

Egy lehetséges felsorolás:

| *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 1 |
| 6 | 5 | 3 | 1 |
| 6 | 5 | 2 | 1 |
| 6 | 4 | 3 | 1 |
| 6 | 4 | 2 | 1 |
| 6 | 3 | 2 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 2 |
| 6 | 5 | 3 | 2 |
| 6 | 4 | 3 | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 |
| 5 | 4 | 3 | 1 |
| 5 | 4 | 2 | 1 |
| 5 | 3 | 2 | 1 |
| 5 | 4 | 3 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

Mivel minden számnégyesből ***b*** és ***c*** helyére írt számok felcserélésével ismét jó számnégyest kapunk, és minden esetet figyelembe vettünk és mindegyiket pontosan egyszer, így összesen 30 helyezési sorrend alakulhatott ki a 4 barát között.

# III. Tapasztalatok gyűjtése

*Módszertani megjegyzés:* Tanórai feldolgozásra javasolt feladatok: 9.-tól 14.-ig. A tanulók párokban dolgoznak. Az első három feladatot egyszerre tűzzük ki megoldásra. A megoldásokat a párok munkáinak összevetésével beszéljük meg.

## Mintapélda$_3$

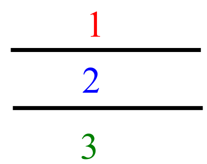
Legfeljebb hány részre oszthatja a síkot

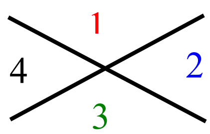
a) 2 egyenes; b) 3 egyenes; c) 4 egyenes?

*Módszertani megjegyzés:* Jobb képességű tanulókkal további kérdéseket is megvizsgálhatunk (pl. folytathatjuk a sort, általánosan is meghatározhatjuk a metszéspontok számát, feltételeket vizsgálhatunk).

*Megoldás:*

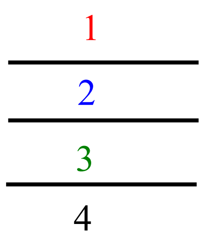
a) Két egyenes a síkban vagy párhuzamos, vagy metsző. Az első esetben 3, a másodikban 4 részre osztja a síkot.

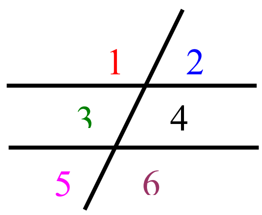


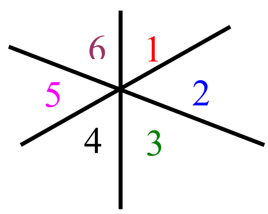



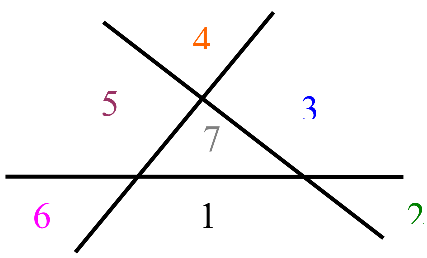

b) Három egyenes – a metszéspontok száma szerint – négyféleképpen helyezkedhet el a síkban:

1. A három egyenes párhuzamos egymással.
2. Kettő párhuzamos közülük, a harmadik metszi azokat.
3. Egy pontban metszi egymást a három egyenes.
4. A három egyenes nem megy át egy ponton és semelyik két egyenes sem párhuzamos egymással.



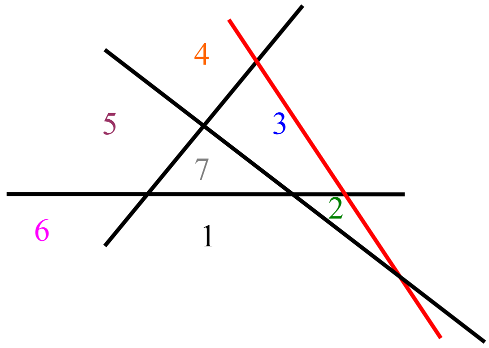




Tehát három egyenes a síkot legfeljebb 7 részre osztja.

c) Három egyenessel legfeljebb 7 részre tudjuk a síkot osztani. Húzzuk meg a negyedik egyenest e rajzon úgy, hogy ne menjen át egyik eddigi metszésponton sem, és ne legyen párhuzamos egyik egyenessel sem. (Nyilván ilyen módon jutunk a legtöbb újabb síkrészhez.)




Az eddigi három egyenes a negyedik egyenest 4 részre (két szakaszra és két félegyenesre) osztja. Mind a négy rész egyik eddigi síkrészbe „vág bele”, azaz eddigi négy síkrész mindegyikét két-két síkrészre vágja szét. Tehát a negyedik egyenes 4-gyel növeli az eddigi síkrészek számát. Így adódik, hogy négy egyenes a síkot legfeljebb 11 részre osztja.

## Mintapélda$_4$

Kétjegyű lottószámaimat egy piros és egy fekete kocka feldobásával határozom meg a következőképpen: a pirossal dobott lesz az első, a feketével dobott a második számjegy. Az így kapható számok hányadrésze lesz kilenccel osztható?

*Megoldás:*

Foglaljuk táblázatba az ilyen módon kapható kétjegyű számokat! A táblázat első sorába a piros kockával, az első oszlopába a fekete kockával dobott számokat írtuk. A táblázat egy sorának és egy oszlopának „metszéspontjába” a létrejött kétjegyű szám került.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
| **2** | 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 |
| **3** | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 |
| **4** | 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 |
| **5** | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
| **6** | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 |

36 ilyen kétjegyű számot kaptunk, hiszen piros kockával 6-féle számot dobhatunk, és bármelyik dobott szám esetén a fekete kockával szintén 6-félét.

A táblázatból könnyen kiolvasható, hogy összesen 4 szám (63, 54, 45 és 36), tehát az összes ilyen szám kilenced része osztható 9-cel.

(A kétjegyű számok felsorolása nélkül is eljuthattunk volna a kérdés megválaszolásához. Mivel a számításba jövő kétjegyű számok mindkét jegye 1-től 6-ig terjedő természetes szám lehet, és egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek öszszege osztható 9-cel, így a keresett kétjegyű szám jegyei vagy 3 és 6, vagy 4 és 5 lehet csak. Tehát a 36, 63, 45 és 54 osztható közülük 9-cel.)

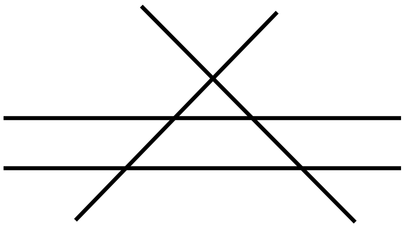
## Feladatok

**9.** Fel lehet-e rajzolni a síkban 4 különböző egyenest úgy, hogy összesen

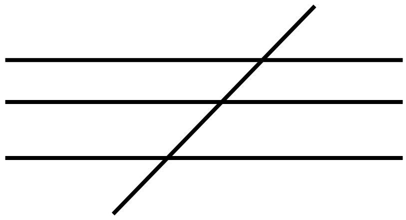
a) 5 metszéspontjuk van; b) 3 metszéspontjuk van?

*Megoldás:*

a)



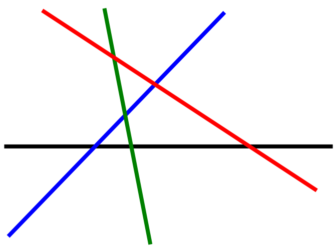
b)



**10.** Négy különböző egyenesnek a síkban legfeljebb hány közös pontja lehet?

*Megoldás:*

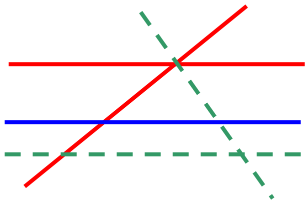
Úgy kaphatjuk a legtöbb közös pontot, ha a négy egyenes közül bármely kettőnek van közös pontja, és ezek a közös pontok különböznek egymástól. Két egymást metsző egyenesnek egy közös pontja van. Ha a harmadik egyenes metszi mindkét egyenest a közös pontjuktól különböző pontban, akkor a közös pontok száma 3. Végül, ha a negyedik egyenest úgy vesszük fel, hogy egyik eddig megrajzolt egyenessel sem párhuzamos, és nem megy át egyik közös ponton sem, a közös pontok száma 3-mal növekszik. Tehát a közös pontok száma legfeljebb 1+2+3=6 lehet.



**11.** Hány különböző egyenesnek lehet a síkban összesen 2 metszéspontja?

*Megoldás:*

Két egymást metsző egyenesnek egy közös pontja van. Egyetlen további metszéspont csak úgy hozható létre, ha a harmadik egyenest valamelyik eddig megrajzolt egyenessel párhuzamosan vesszük fel. Több egyenes nem rajzolható, hiszen egy további egyenes megrajzolása esetén legalább még eggyel nőne a metszéspontok száma.



**12.** Vegyél fel a síkon 5 különböző egyenest! Hány metszéspontjuk van? Milyen eredményt kaphattunk volna még?

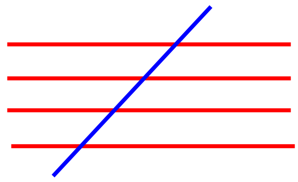
*Módszertani megjegyzés:* Ezt a feladatot csoportmunkában oldják meg a tanulók. A csoportok munkáinak összehasonlítása során hangsúlyozzuk ki, hogy olyan megoldási módot célszerű keresni, amelynek során nemcsak a lehetséges megoldásokat találjuk meg, hanem amelyben az alkalmazott eljárás egyúttal bizonyítja is, hogy nincs a problémának ennél több megoldása.

*Megoldás:*

a) Az 5 egyenes párhuzamos egymással:

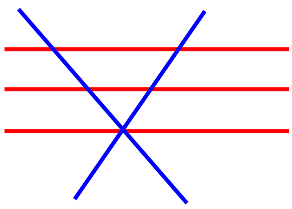
Metszéspontok száma: 0

b) Pontosan 4 egyenes párhuzamos egymással:

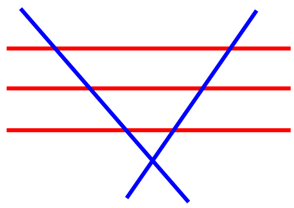


Metszéspontok száma: 4

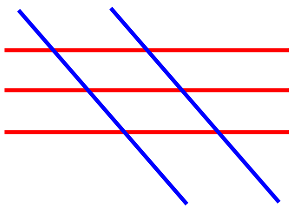
c) Három egyenes párhuzamos egymással:



Metszéspontok száma: 5

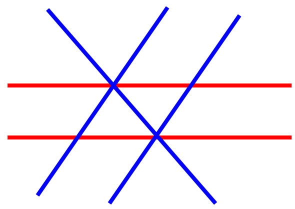


Metszéspontok száma: 7

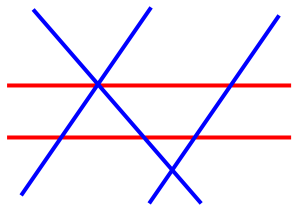


Metszéspontok száma: 6

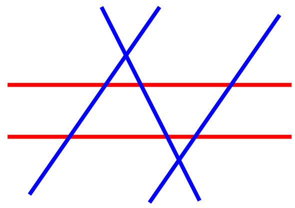
d) Két-két egyenes párhuzamos egymással:



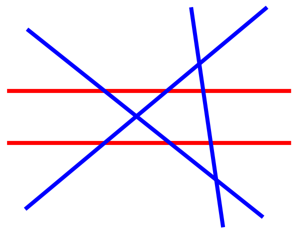
Metszéspontok száma: 4



Metszéspontok száma: 6

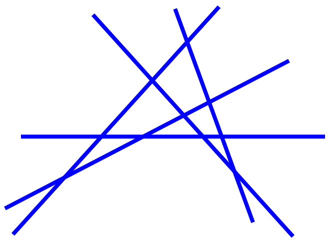


Metszéspontok száma: 8



Metszéspontok száma: 9

e) Nincs az 5 egyenes között párhuzamos



Metszéspontok száma: 10

*Módszertani megjegyzés:* A tanulók ismét párokban dolgoznak. Először csak a 13-as feladatot tűzzük ki megoldásra.

**13.** A héten két nap akarok uszodába menni. Hányféleképpen választhatom ki a két napot? Hányféleképpen választhatom ki a napokat, ha háromszor és hányféleképpen, ha négyszer akarok úszni menni? És ha ötször akarok menni?

*Megoldás:*

Az egyik napot 7-féleképpen választhatom ki. Bármelyik nap kiválasztása esetén a másik napot 6-féleképpen. Így $7 \cdot 6$, azaz 42–féleképpen választottam ki a 2 napot. A 42 pár között bármelyik két nap pontosan kétszer szerepel, hiszen pl. az első választás kedd, a második péntek mellett azt a választást is számba vettem, hogy elsőre pénteket és másodikra keddet választottam. Az összes lehetőségek száma tehát 21.

Három nap kiválasztásakor az első két napot $7 \cdot 6$, azaz 42-féleképpen választhatom ki. Bármelyik választás esetén a harmadik napot 5-féleképpen, így a 3 napot $7 \cdot 6 \cdot 5$, azaz

210-féleképpen állíthatom össze. Viszont ugyanazt a három napot többször is beszámítottam. Hiszen pl. kedd (K), péntek(P) és vasárnap (V) a következő 6 esetben is szerepel a 210 eset között: KPV, KVP, PKV, PVK, VKP, VPK. Mivel bármelyik három napot pontosan 6-szor vettem számba a 210 esetben, ezért az uszodai napokat ebben az esetben $\frac{210}{6}=35$-féleképpen választhatom meg.

Hét napból 4-et nyilván ugyanannyiféleképpen választhatunk ki, ahányféleképpen hármat, hiszen éppen 3 napon nem megyünk uszodába, és minden négynapos választáshoz pontosan egy 3 napos választás rendelhető hozzá (amikor nem megyünk úszni). Tehát 4 napot is 35-féleképpen választhatunk ki.

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy 5 úszónapot éppen annyiféleképpen választhatunk ki, ahányféleképpen 2-öt ki tudunk választani, tehát 21-féleképpen.

**14.** Egyszer megálmodtam, hogy a következő ötös lottóhúzáson az első, a harmadik és az ötödik szám (nagyság szerinti sorrendben) ez lesz: 8, 46 és 75. Ha teljesül az álmom, hány szelvényt töltsek ki a biztos telitalálathoz?

*Megoldás:*

A hiányzó két találat közül a kisebb 9-től 45-ig, a nagyobb pedig 47-től 74-ig bármelyik szám lehet. Az ötös találat második száma (növekvő sorrend esetén) tehát 37-féle, a negyedik száma pedig 28-féle lehet. Bármelyik számot is sorsolják ki a számításba jövő 37 közül, hozzá a sorban negyedikként 28-féle sorsolási eredmény alakulhat ki. Így, az álom teljesülése esetén $37\cdot 28=1036$-féle lehet az ötös találat. A biztos telitalálathoz tehát ennyi szelvényt kell kitölteni.

**15.** Erika busszal megy iskolába. Legfeljebb hány napot járt már iskolába a tanévkezdet óta, ha a busza minden reggel pontosan 2 megállóban – de soha nem ugyanabban a kettőben – állt meg az útközbeni 6 megálló közül?

*Megoldás (vázlat):* Legfeljebb $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ napot.

**16.** Hány különböző egyenes fektethető a kocka csúcspontjain át, ha mindegyik egyenes két-két csúcson halad keresztül?

*Megoldás (vázlat):* Ahányféleképpen ki tudunk választani a 8 csúcs közül kettőt. Tehát $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ különböző egyenes fektethető.

**17.** Melyik tömeg nem mérhető meg egy kétkarú mérleg és a következő négy súly igénybevételével: 1, 4, 7, 10?

A: 15; B: 14; C: 19; D: 13.

*Megoldás:*

**15** = 1 + 4 + 10; **14** = 10 + 4; **13** + 1 =10 + 4; A **19** nem mérhető meg.

**18.** Hány szelvényt kellene kitölteni ahhoz, hogy az ötös lottón biztosan legyen telitalálatunk? Tételezzük fel, hogy egy szelvény kitöltése átlag 5 másodpercig tart. Mennyi időbe telne az összes szelvény kitöltése? Ha egy szelvény ára 150 Ft, mennyibe kerülne az összes szelvény?

*Megoldás (vázlat):*

Összesen $\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=43\,949\,268$ szelvényt kellene kitölteni.

Ha egy szelvény kitöltése átlag 5 másodpercig tart, akkor a $43\,949\,268$ szelvény kitöltése $61\,040{,}65$ óráig, azaz kb. $2543$ napig, feltéve, hogy éjjel-nappal töltjük a szelvényeket.

Ha egy szelvény ára 150 Ft, akkor az összes szelvény $6\,592\,390\,200$ Ft-ba kerülne.

**19.** Ha annyi szelvényt kitöltenénk az ötös lottón, hogy biztosan legyen telitalálatunk, akkor hány négyes találatunk lenne?

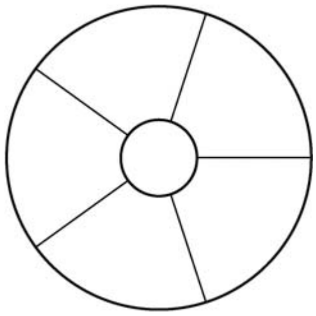
*Megoldás (vázlat):*

A kihúzott öt szám közül pontosan négyet kell eltalálni. Ezt 5-féleképpen tehetjük. Bármelyik el nem talált szám 85-féle lehet, így összesen $5\cdot 85=425$ négyes találatunk lehetne.

# IV. További tapasztalatok gyűjtése

*Módszertani megjegyzés:* Tanórai feldolgozásra javasolt feladatok: 20.-tól 24.-ig.Ezen a tanórán már célszerű az egyes megoldási módokat tudatosítani. A 20 – 23-as feladatokat páronként javasoljuk megoldásra. A 24. feladat csoportmunkára javasolt. Olvastassuk fel a csoportok által írt szöveges problémákat, és a többi csoport értékelje azokat. A csoportok által megfogalmazott feladatokat közösen oldják meg.

## Mintapélda$_5$

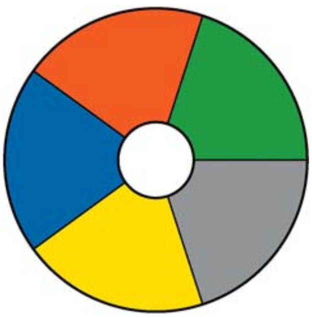


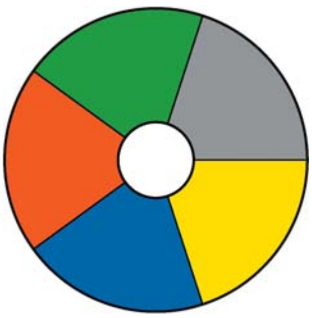
Egy cég logóján egy forgótárcsa látható. A közepe fehér, a körben elhelyezkedő 5 tartományt 5 különböző színnel (piros, fekete, sárga, kék és zöld) színezték ki. (Egy-egy tárcsa színezéséhez mind az öt színt használták.)

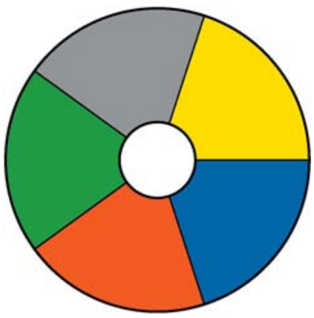
Hányféle különböző tárcsa készíthető ilyen módon?

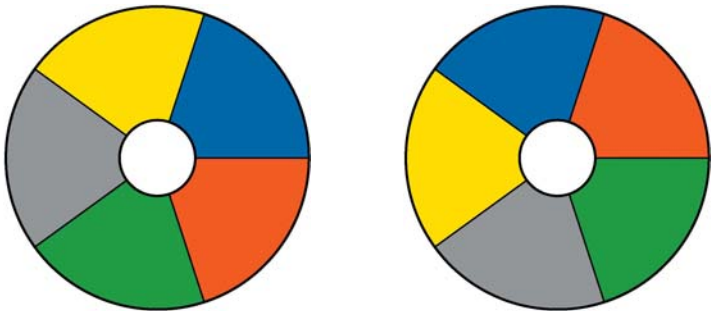
*Megoldás:*

Először azt gondolhatjuk, hogy 5!-féleképpen, hiszen ha az egyiket befestjük az 5 szín valamelyikével, bármelyikkel is színeztük ki, egy másik tartomány festéséhez 4-féle szín valamelyikét használhatjuk, így e két tartomány $5 \cdot 4$-féleképpen színezhető ki. Bármelyik két színt is használtuk fel eddig, egy harmadik tartomány kiszínezésére háromféle szín áll rendelkezésünkre. Tehát a három tartományt $5 \cdot 4 \cdot 3$-féleképpen festhetjük be. A három tartomány bármelyik kifestése esetén a negyedik tartomány festéséhez kétféle szín közül választhatunk. Az utolsó tartomány színe mindegyik esetben egyértelműen adódik. Igen ám, de például az alábbi öt kifestési mód ugyanazt a tárcsát eredményezi, hiszen a tárcsa forgatható.









Mivel a tárcsának minden olyan befestéseit, amelyek forgatással fedésbe hozhatók, ötször vettünk számba, pedig ezek egyetlen tárcsabefestést hoznak létre, így a különbözőképpen megfestett tárcsák száma a 120 ötöde, azaz 24.

(A problémát úgy is megoldhattuk volna, hogy beszámozzuk az egyes tartományokat, és mondjuk az 1-es tartományt befestjük pirossal. A többi négy tartományt a 4-féle színnel $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 24-féleképpen festhetjük be. Az így befestett tartományok között már nem lehetnek olyanok, amelyek forgatással fedésbe hozhatók, tehát minden esetet összeszámoltunk, és mindegyiket pontosan egyszer.)

## Mintapélda$_6$

Azonos átmérőjű, három piros és három kék vezetéket kell bekötnünk egy olyan kapcsolótáblába, amelyen egy sorban hat kapcsoló áll. Minden kapcsolóhoz egy vezetéket kapcsolunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

*Megoldás:*

Számozzuk meg a kapcsolókat 1-től 6-ig. Az azonos színű vezetékekre tegyünk egy-egy megkülönböztető jelet. Ekkor a hat „különböző” vezetéket a hat kapcsolóhoz $6! = 720$-féleképpen köthetjük be.

Először vizsgáljuk meg, hogy ha a kék vezetékek megkülönböztető jelét megszüntetjük, hány különböző bekötés marad. Nézzük pl. a bekötések következő sorrendjét: $p_1 k_1 k_2 p_2 k_3 p_3$. A 2-es, 3-as és 5-ös kapcsolóba kötöttük a kék vezetékeket. Ha a kék vezetékekről levesszük a megkülönböztető jelet, akkor éppen 6 ilyen bekötést láthatunk, hiszen a 3 kék vezeték a megadott 3 kapcsolóhoz hatféleképpen köthető. Mivel a piros vezetékek összes más elhelyezkedése esetén is a megmaradt 3 helyen a kékek 6-féleképpen köthetők be, így a kék jelzés megszüntetése utáni különböző esetek száma a 720 hatoda, tehát 120.

Ha ebben a 120 esetben a piros vezetékekről is letöröljük a megkülönböztető jelzést, hasonlóan adódik, hogy minden megfelelő hat kapcsolási módból csak 1 „marad”, melyet figyelembe akarunk venni.

Tehát a vezetékeket a kapcsolókhoz a 120 hatoda, azaz 20-féleképpen köthetjük be.

(Megoldhattuk volna a problémát úgy is, hogy a megszámozott hat kapcsolóhoz először pl. a kékeket kötjük be minden lehetséges módon. Az első kék vezetéket 6-féle helyre köthetjük. Bármelyik esetben a másodikat 5, a harmadikat pedig bármelyik két bekötés esetén 4-féle kapcsolóhoz köthetjük. Így $6 \cdot 5 \cdot 4$ bekötést hajthatunk végre. De ezek között – a bekötés „végeredményét” látva – vannak azonosak, hiszen pl. a 2-es, 3-as és 5-ös kapcsolóhoz kapcsolást pontosan 6-szor számoltuk össze (az első kék vezetéket ezek közül 3 helyre, s bármelyik kötés esetén a másodikat 2 helyre köthettük, azaz az első két kék vezetéket $3 \cdot 2$ -féleképpen köthettük be, míg az utolsó vezeték bekötése egyértelműen adódik). Így a három azonos kék vezetéket az eddig összeszámolt esetek hatodában, tehát $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6}$, azaz 20 -féleképpen köthetjük be. Mivel mindegyik esetben a maradék 3 kapcsolóhoz a piros vezetékeket egyértelműen köthetjük be, ezzel megkaptuk az összes különböző bekötések számát.)

## Feladatok

**20.** A már jól ismert öttagú baráti társaság (András, Balázs, Cili, Dénes és Erika) egy alkalommal, mozi után elment vacsorázni egy étterembe. Kerek asztal köré ültek le. Amíg vártak a vacsorára, feladványokkal szórakoztatták egymást.

„ Hányféleképpen ülhettünk volna le az asztal köré?” – kérdezte Balázs.

„Így nem egyértelmű a kérdés, mondd meg, hogy milyen ülésrendeket nem tekintesz különbözőnek!” – szólt Cili.

„Hát, azok az ülésrendek nem különbözőek, amelyekben mindenkinek a bal oldali szomszédja ugyanaz.”

Most már egyértelműen megválaszolható a kérdés?

*Megoldás:*

Egy padra 5!, azaz 120-féleképpen ülhettek volna le. „Zárjuk össze” a pad két végét! Az eddig különböző ülésrendek között – körbe ülve – találunk olyanokat, amelyek nem különböztethetők meg egymástól, hiszen azokban mindenkinek a bal oldali (és ezzel együtt a jobb oldali) szomszédja ugyanaz. Tekintsük pl. a következő ülésrendeket a padon: AEBDC, EBDCA, BDCAE, DCAEB, CAEBD. Ezek és csak ezek eredményezik ugyanazt az ülésrendet a kör alakú asztalnál. Így, mivel a kerek asztalnál bármely más ülésrendhez szintén pontosan 5-féle padra ülési sorrend tartozik, ezért az öttagú társaság a kerek asztal köré $\frac{120}{5} = 24$-féleképpen ülhetett volna le.

*Módszertani megjegyzés*: A probléma megoldását prezentálhatjuk úgy is, hogy megszámozzuk az asztal körül a székeket, és mondjuk az 1-es székre Andrást ültetjük. A többi 4 székre a többiek 24-féleképpen ülhetnek le.

**21.** Anna és Berci a következő szabály szerint játszanak: feldobnak egy-egy dobókockát, és összeadják a dobott számokat. Anna nyer, ha az összeg prímszám, Berci pedig akkor, ha az összeg legalább 8. Az összes lehetőség közül hányféleképpen nyerhet Anna, és hányféleképpen Berci?

*Megoldás:*

Foglaljuk táblázatba a játék összes lehetséges kimenetelét! A táblázat első sorában Anna, első oszlopában pedig Berci lehetséges dobásait soroltuk fel. Egy sor és egy oszlop „találkozásában” a dobott számok összegét tüntettük fel.

| Anna / Berci | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

A táblázatból könnyen kiolvasható, hogy a dobott számok összege 15 esetben prím, és szintén 15 esetben *legalább* 8. Tehát 15-féleképpen nyerhet Anna is és Berci is.

**22.** Egy baráti társaság (5 fiú és 4 lány) „Amerikából jöttünk…” játékot szeretne játszani. A játék kezdetekor egy lányt és két fiút kiválasztanak, akik kimennek a szobából. Hányféleképpen alakulhat a választás?

*Megoldás:*

A lányt 4 közül választhatjuk ki 4-féleképpen. Bármelyik lányválasztás esetében az első fiút 5-közül 5-féleképpen, és annak tetszőleges kiválasztása esetén a másikat már a maradék 4 közül 4-féleképpen választhatjuk ki. Így a két fiút $5 \cdot 4$, azaz 20-féleképpen választhatjuk ki. A fiúk kiválasztásakor a kiválasztás sorrendjét is figyelembe vettük, holott a játék szempontjából mindegy, hogy a két fiút milyen sorrendben választjuk ki, így a fiúk közül 10-féle pár választható ki. Így bármelyik lány kiválasztásához 10-féle fiúpár választható ki, ezért a játékban a választás $4 \cdot 10 = 40$-féleképpen következhet be.

**23.** a) Nekeresd ország egyik kisvárosában, *Páratlan*ban annyi önálló vonallal rendelkező telefontulajdonos van, hogy elegendőnek bizonyul a négyjegyű telefonszám. Minden telefonszám kizárólag páratlan (1, 3, 5, 7 és 9) számjegyekből áll. Legfeljebb hány telefontulajdonos él a városban?

b) Hogyan módosulna a telefontulajdonosok száma Páratlanban, ha azt a megkötést is alkalmaznánk, hogy egyetlen számjegy sem szerepelhet kétszer egy telefonszámban?

c) Egy másik kisvárosban, *Páros*ban szintén négyjegyűek a telefonszámok, de itt minden telefonszám kizárólag páros (0, 2, 4, 6 és 8) számjegyekből áll, és egyik sem kezdődik 0-val. Ebben a városban legfeljebb hány telefontulajdonos él?

d) Páros városkában is vizsgáljuk meg, hogy hogyan módosulna a telefontulajdonosok száma, ha egyetlen számjegy sem szerepelhetne kétszer egy telefonszámban?

*Megoldás:*

a) Legfeljebb annyi telefontulajdonos él a városban ahány különböző, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám állítható elő. A telefonszám első számjegye 5-féle lehet. Bármelyik választás esetében a második jegy is 5-féle lehet, hiszen az első számjeggyel azonos számjegy is lehet. Az első két számjegy így $5 \cdot 5$-féleképpen választható meg. Hasonlóan gondolatmenettel folytatva, bármelyik első két jegyhez a harmadikés a negyedik is, 5-féleképpen választható meg. Ebből adódik, hogy összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$-féle különböző telefonszám állítható elő, így legfeljebb ennyi telefontulajdonos lehet a kisvárosban.

b) Ha egyetlen számjegy sem fordulhat elő kétszer, akkor a telefonszám minden jegye különböző. Ekkor, az előbbi gondolatmenetet alkalmazva azt kapjuk, hogy legfeljebb $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, azaz 120 telefontulajdonos lehet a városban.

Az utóbbi kérdést más gondolatmenettel is megoldhatjuk. Egy telefonszám megalkotásához az öt számjegy közül egyet ki kell hagynunk, ezt 5-féleképpen tehetjük meg. Bármelyik számjegy kihagyása esetén a megmaradt négy számjegy 4!-féleképpen rendezhető sorba. Így adódik, hogy $5 \cdot 4!$ telefonszám állítható elő.

c) Legfeljebb $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ telefontulajdonos lehet Párosban.

d) Ebben az esetben, legfeljebb $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ telefontulajdonos lenne Páros városban.

**24.** Írj három szöveges feladatot! Az egyik feladat megoldásának gondolatmenete legyen hasonló a 13-as feladatéhoz, a másiké a 23-as b) illetve c) kérdéséhez, a harmadiké pedig a 4-es feladatéhoz.

**25.** Módosítjuk a 20-as feladatot. Hányféleképpen ülhettek volna le az asztal köré, ha a két lány ragaszkodott volna ahhoz, hogy ők egymás mellett üljenek? (Most is két ülésrendet akkor nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek a bal oldali szomszédja ugyanaz.)

*Megoldás (vázlat):*

*E*-t és *C*-t egy elemnek tekintve, a 4 „elem” elhelyezésére körbe 3!-féle lehetőség adódik. *E* és *C* felcserélésével a lehetőségek száma megduplázódik, így $2 \cdot 3! = 12$.

**26.** Jól tudjuk, hogy Meseországban a kincsesládát hét lakat alatt őrzik. Nos, a hét lakat igazából hét fogantyú, amelyek mindegyike két helyzetbe állítható: jobbra vagy balra. Mindössze egyetlen olyan beállítás létezik, amelynél a kincsesláda kinyílik. Hány próbálkozásra van szüksége a legkisebb királyfinak ahhoz, hogy kinyissa a kincsesláda ajtaját, ha nincs szerencséje?

*Megoldás (vázlat):*

Legfeljebb $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$ próbálkozással ki tudja nyitni a ládát.

# V. Útban a Pascal-háromszög felé

*Módszertani megjegyzés:* Ezen az órán feladatok megoldásán keresztül eljuthatunk a Pascal-háromszöghöz. Bár ennek ismerete nem szerepel a középszintű érettségi követelményrendszerében, de jól előkészíti a majd 11. osztályban megismert binomiális együttható fogalmát, annak tulajdonságait (ez már része a középszintű érettségi követelményrendszernek).

*Módszertani megjegyzés:* A tanulók párokban dolgozva oldják meg a 27. feladatot. A tapasztalatok összegyűjtése, a megoldások összevetése után a g) feladatra adott javaslatok befolyásolhatják az óra további menetét. Amennyiben az 5 dobás eredményének vizsgálata is szerepel a javaslatok között, tűzzük ki csoportmunkára a 28. feladatot. Elképzelhető az is, hogy nulla darab dobástól kiindulva, a probléma módszeres vizsgálatát javasolják. Ekkor érdemes ezt az utat követni.

## Mintapélda$_7$

Egy polcra összesen 5 helyen lehet válaszfalat rakni. Nyilván egyféleképpen következhet be, hogy egyetlen válaszfalat sem rakunk be. Vizsgáld meg, hogy hányféleképpen helyezhetünk el

a) 1 válaszfalat; b) 2 válaszfalat; c) 3 válaszfalat;

d) 4 válaszfalat; e) 5 válaszfalat?

*Megoldás:*

a) Nyilvánvaló, hogy 1 válaszfalat 5-féleképpen helyezhetünk el.

b) Az öt hely közül kettőt kell kiválasztanunk úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Az egyik válaszfalat 5-féleképpen helyezhetjük el. Bármelyik helyre is tettük, a másikat 4 helyre tehetjük. Így $5 \cdot 4$-féle elhelyezés lehetséges. Ekkor bármelyik két polcra való elhelyezést kétszer vettünk figyelembe, hiszen különböző elhelyezésnek számoltuk azokat, amikor pl. az első válaszfalat 2-es, a másodikat az 5-ös, illetve az elsőt az 5-ös és a másodikat a 2-es helyre tettük. Ezért a két válaszfal különböző elhelyezéseinek száma az eddig számoltnak csak a fele, azaz 10.

c) Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel adódik, hogy ha a három válaszfal elhelyezésének a sorrendjét is megkülönböztetnénk, akkor $5 \cdot 4 \cdot 3$ lehetőséget kapnánk. Ekkor viszont bármelyik három konkrét helyre történő elhelyezést annyiszor számoltunk össze, ahányféleképpen a három adott helyre rakott válaszfalak sorba rendezhetők. Például a 2-es, 3-as és 5-ös helyek esetében:

| Első választás | Második választás | Harmadik választás |
|---|---|---|
| 2-es | 3-as | 5-ös |
| 2-es | 5-ös | 3-as |
| 3-as | 2-es | 5-ös |
| 3-as | 5-ös | 2-es |
| 5-ös | 2-es | 3-as |
| 5-ös | 3-as | 2-es |

Így, az $5 \cdot 4 \cdot 3$ elhelyezés összeszámolásakor minden különböző esetet 6-szor vettünk figyelembe. Ezért ennek a hatoda, azaz 10 különböző módon helyezhető el három válaszfal.

Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint két válaszfal elhelyezésekor. Ez nem véletlen, hiszen ha 3 válaszfalat lerakunk, akkor két helyet kihagyunk. Tehát hármat annyiféleképpen lehet elhelyezni, ahányféleképpen kettő hely kihagyható. Ezt pedig már tudjuk, hogy 10-féleképpen lehet megtenni.

d) Az előző meggondolás alapján 4 válaszfal elhelyezésének számát már könnyen meg tudjuk határozni. Hiszen annyiféleképpen helyezhetők el, ahányféleképpen 1-et kihagyhatunk. Ezt 5-féleképpen tehetjük meg, tehát ennyiféleképpen helyezhető el 4 válaszfal.

e) Öt válaszfalat pedig nyilván 1-féleképpen helyezhetünk el.

## Feladatok

**27.** Bolyongjunk a derékszögű koordináta-rendszerben! Az origóból indulunk, és a rácspontokra lépegetünk. Minden rácspontban feldobunk egy pénzdarabot. Ha fejet (F) dobunk, akkor az $x$ tengely pozitív irányában lépünk egyet, ha írást (I), akkor az $y$ tengely pozitív irányában lépünk 1 egységnyit.

a) Az origóból indulva az első három dobásunk ez volt: FFI. Hová jutottunk?

b) Milyen más dobássorozattal juthattunk volna ugyanebbe a pontba? Sorold fel az összes ilyen dobássorozatot!

c) Hány különböző 3 hosszúságú fej-írás dobássorozat van összesen? Sorold fel az összes ilyen sorozatot!

d) Jelöld meg a koordináta-rendszerben azokat a rácspontokat, amelyekbe 3-as dobássorozattal juthatunk el! Írd a rácspontok mellé, hogy hányféle 3-as dobássorozattal juthattunk el oda!

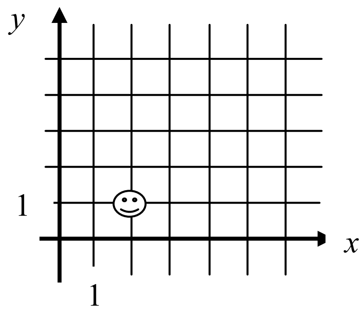
e) Hová juthatunk el az origóból, ha 4 dobás közül kétszer dobunk fejet? Hányféle dobássorozattal érkezhetünk még ugyanoda?

f) Vizsgáld meg az összes 4-es dobássorozatot! Hányban van közülük 0, vagy 1, vagy 2, vagy 3, vagy 4 fej? Melyik rácspontokba juthatunk el ezekkel a dobássorozatokkal?

g) Kérdezz tovább!

*Megoldás:*

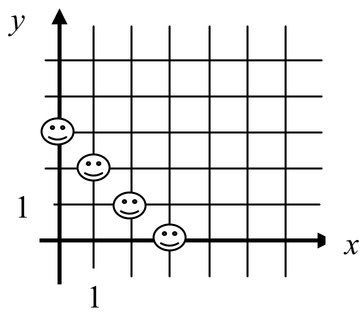
a)



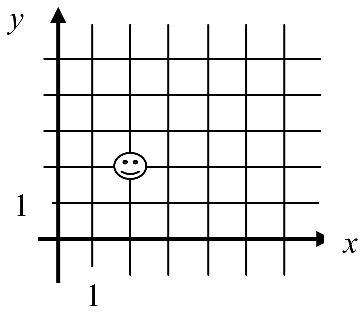
b) IFF, FIF, FFI

c) FFF, IFF, FIF, FFI, FII, IFI, IIF,FFF

d) 1, 3, 3, 1



e) FFII, FIFI, FIIF, IFFI, IFIF, IIFF



f)

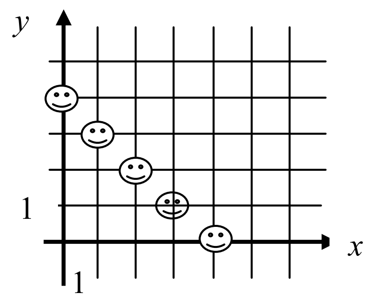
IIII

FIII IFII IIFI IIIF

FFII FIFI FIIF IFFI IFIF IIFF

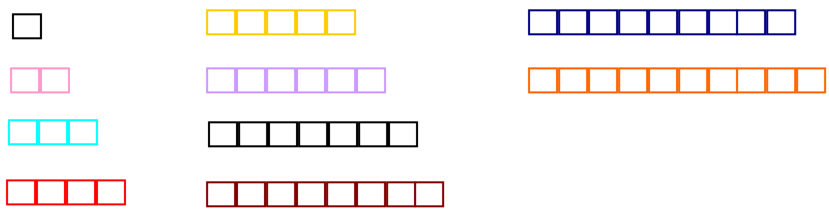
FFFI FFIF FIFF IFFF

FFFF




**28.** A kisiskolások színesrúd-készletében kis $1\text{cm}^2$ alapú színes négyzetes oszlopok vannak, mégpedig az alábbi méretben és színben:

1 cm magas (fehér), 2 cm magas (rózsaszín), 3 cm magas (világos kék), 4 cm magas (piros), 5 cm magas (sárga), 6 cm magas (lila), 7 cm magas (fekete), 8 cm magas (bordó), 9 cm magas (sötétkék) és 10 cm magas (narancs).



A gyerekek megpróbálnak színes rudakkal kirakni egy rudat.

a) Hányféleképpen lehet kirakni például a lila rudat? (Két kirakást különbözőnek tekintünk akkor is, ha azok csak a rudak sorrendjében különböznek.)

b) Csoportosítsd az eseteket aszerint, hogy hány darabból raktad ki a lila rudat!

1 darabból:

2 darabból:

3 darabból:

4 darabból:

5 darabból:

6 darabból:

c) A fekete rúd hányféleképpen rakható ki 3 darabból?

*Megoldás:*

a) $6 = 6 + 0$

$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1$

$6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 4 + 1 = 4 + 1 + 1 = 1 + 2 + 3 = 1 + 3 + 2 = 2 + 1 + 3 = 2 + 3 + 1 = 3 + 2 + 1 =$
$= 3 + 1 + 2 = 2 + 2 + 2$

$6 = 1+1+1+3 = 1+1+3+1 = 1+3+1+1 = 3+1+1+1 = 1+1+2+2 = 1+2+1+2 =$
$= 1+2+2+1 = 2+1+1+2 = 2+1+2+1 = 2+2+1+1$

$6 = 1+1+1+1+2 = 1+1+1+2+1 = 1+1+2+1+1 = 1+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1$

$6 = 1+1+1+1+1+1$

Összesen 32-féleképpen rakható ki a lila rúd.

b) 1, 5, 10, 10, 5, 1;

c) A 7 egység hosszú rúd 15-féleképpen rakható ki 3 elemből.

**29.** Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából a MATEK szó?

**M**
**A** **A**
**T** **T** **T**
**E** **E** **E** **E**
**K** **K** **K** **K** **K**

*Megoldás:*

Írjuk a betűk mellé, hogy melyikhez hányféle „úton” jutottunk el!

**M**
**A 1** **A 1**
**T 1** **T 2** **T 1**
**E 1** **E 3** **E 3** **E 1**
**K 1** **K 4** **K 6** **K 4** **K 1**

Ebből már adódik, hogy összesen 16-féleképpen olvasható ki a MATEK szó:

1+4+6+4+1=16.

A 27-es és a 29-es feladat megoldásában megismert számelrendezést **Blaise Pascal** (1623–1662) francia matematikus tiszteletére, aki ennek a számelrendezésnek sok érdekes tulajdonságát felfedezte, **Pascal-háromszögnek** nevezzük. A képzési szabálya nagyon egyszerű: A kezdő (nulladik sor) egy 1-es, a következő (1. sor) két 1-es, a továbbiakban minden sorban eggyel több szám szerepel, mint az őt megelőzőben és minden sor kezdő és utolsó eleme 1, a többi elemet pedig a felette álló két elem összegeként kapjuk. Így minden sorban a sor sorszámánál 1-gyel több elem van. Az egyes sorokon belül is 0-tól sorszámozzuk az elemeket. Tehát például a pirossal jelölt 21-es a 7. sor 2. eleme.

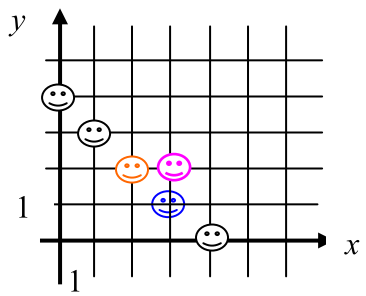
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.sor | **1** | | | | | | | | | |
| 1.sor | **1** | **1** | | | | | | | | |
| 2.sor | **1** | **2** | **1** | | | | | | | |
| 3.sor | **1** | **3** | **3** | **1** | | | | | | |
| 4.sor | **1** | **4** | **6** | **4** | **1** | | | | | |
| 5.sor | **1** | **5** | **10** | **10** | **5** | **1** | | | | |
| 6.sor | **1** | **6** | **15** | **20** | **15** | **6** | **1** | | | |
| 7.sor | **1** | **7** | **21** | **35** | **35** | **21** | **7** | **1** | | |
| 8.sor | **1** | **8** | **28** | **56** | **70** | **56** | **28** | **8** | **1** | |
| 9.sor | **1** | **9** | **36** | **84** | **126** | **126** | **84** | **36** | **9** | **1** |
| . | | | | | . | | | | | |
| . | | | | | . | | | | | |
| . | | | | | . | | | | | |

Szemeljük ki például a 6. sor 4. elemét. Az itt található szám (15) az 5. sor 3-adik (10-es szám) és 4-edik (5-ös szám) elemének összegével egyenlő.

**30.** Gondoljuk végig még egyszer a 27. feladat megoldását! Növeljük a dobások számát! Ha minden egyes dobásszám esetén a megfelelő rácspontra ráírnánk azt a számot, ahányféleképpen az adott helyre juthatunk, akkor a Pascal-háromszögben megismert képzési szabály szerint követnék egymást a számok. Mi ennek a magyarázata?

*Megoldás:*

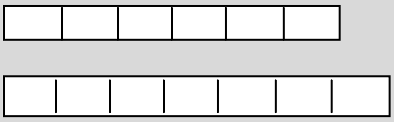
Ha például azokat a dobássorozatokat vizsgáljuk, amelyekkel a $(3;2)$ koordinátájú pontba juthatunk, akkor ide a 4 dobással elérhető rácspontok közül egyetlen további dobással csak a narancssárgával vagy a kékkel jelzett rácspontból juthatunk el. Mivel ezekhez a rácspontokhoz való eljutások számát már meghatároztuk (rendre 6 és 4), így a lilával jelzett $(3;2)$ koordinátájú pontba $6+4=10$-féleképpen juthatunk el.




*Módszertani megjegyzés:* A tanulócsoport érdeklődésétől és felkészültségétől függően általános esetben is igazolhatjuk a 30-as feladatban megfogalmazott állítást, de a teljes indukciós bizonyítási módszert csak alkalmazzuk, és ne használjuk annak megnevezését.

Érdekes módon mutatható meg az analógia a 28-as feladat megoldása és a Pascal-féle háromszög közötti analógia is.

Ha például arra vagyunk kíváncsiak, hogy a 7 egység hosszúságú (fekete) rúd 3 részből hányféleképpen rakható ki, akkor a következő gondolatmenettel nemcsak a megoldáshoz jutunk el, hanem felismerhetővé válik a Pascal-féle háromszöggel való analógia is.



A 7 egység hosszú rúd vagy úgy rakható ki 3 részből, hogy az utolsó egység egy külön részt alkot, vagy úgy, hogy az utolsó rész nem „vágódik le”, tehát legalább 2 egység hosszú rész kerül a végére. Az előbbi esetben annyiféleképpen rakható ki 3 részből, ahányféleképpen a 6 egység hosszú 2 részből (hiszen a 3. rész hozzárakott 1 egység.

$1+5+\mathbf{1}=2+4+\mathbf{1}=3+3+\mathbf{1}=4+2+\mathbf{1}=5+1+\mathbf{1}$

A második esetben pedig annyiféleképpen rakható ki, ahányféleképpen a 6 egység hosszú összeállítható 3 részből, hiszen ezekben az esetekben az utolsó részt kell csak eggyel hosszabbnak választani.

$1+1+\mathbf{5}=1+4+\mathbf{2}=4+1+\mathbf{2}=1+2+\mathbf{4}=1+3+\mathbf{3}=2+1+\mathbf{4}=2+3+\mathbf{2}=3+2+\mathbf{2}=$
$=3+1+\mathbf{3}=2+2+\mathbf{3}$

*Módszertani megjegyzés:* Amikor 10. osztályban, az algebra tanulmányok során eljutunk az összeg négyzetének, köbének (esetleg negyedik hatványának) polinom alakba írásához, feltétlen idézzük fel a Pascal-háromszöget. Talán lesz olyan tanuló, aki a polinom ügyes elrendezéséből felismeri, és bizonyítja is a képzési szabályok azonosságát.

**31.** Mi a közös 6., 10., 13., 15., 16., 18. problémákban?

*Megoldás:*

Mind a hat feladatban valahány különböző elem közül kellett kiválasztani néhányat úgy, hogy a kiválasztás sorrendjét nem vettük figyelembe.

A 6. feladatban 5 különböző elem közül 2-t , a 10.-ben 4 közül 2-t, a 13.-ban 7 közül 2-t, 3-at, 4-et illetve 5-öt választottunk ki minden lehetséges módon. A 15. feladatban 6 különböző elem közül 2-t, a 18.-ban 8 közül 2-t, a 18.-ban 90 közül 5-öt.

Válasszuk ki a Pascal-háromszög valamelyik sorát. A kiválasztott sor sorszámát jelöljük *n*-nel, ahol *n* tetszőleges természetes számot jelölhet. Az *n*-edik sor valamelyik elemét válasszuk ki. Az *n*-edik sor kiválasztott elemének sorszámát jelöljük *k*-val, ahol *k* szintén természetes számot jelöl és legfeljebb akkora, mint az *n*. Az itt található szám azoknak a lehetőségeknek a számát adja meg, ahányféleképpen *n* különböző dolog közül *k* darabot kiválaszthatunk úgy, hogy a kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe, azaz két kiválasztást nem tekintünk különbözőnek, ha azok csak a sorrendben különböznek egymástól.

Például: a 7-edik sor második eleme megadja azt, hogy hányféleképpen választhatunk ki a 7 nap közül kettőt úszónapnak. Ugyanennek a sornak a 3-adik eleme 7 nap közül 3 nap összes kiválasztási lehetőségének számát adja meg. A 90-edik sor 5-ödik eleme megadja, hogy hány ötös lottószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk.

**32.** A morzeábécében kétféle jelet használnak: **.** és **–.** (ezek a „ti" és a „tá")

a) Legfeljebb 4 hosszúságú jelsorozatokkal hány különböző karaktert (betűt, számot vagy írásjelet) lehet előállítani?

b) Az alábbi táblázatban a nemzetközi morzeábécé jeleit adtuk meg. Az előállítható, legfeljebb 4 hosszúságú jelsorozat között van-e olyan, amelyet nem használtak fel ebben a morzeábécében?

| **Karakter** | **Jel** | **Karakter** | **Jel** | **Karakter** | **Jel** |
|---|---|---|---|---|---|
| A | .– | P | .––. | 5 | ..... |
| B | –... | Q | ––.– | 6 | –.... |
| C | –.–. | R | .–. | 7 | ––... |
| D | –.. | S | ... | 8 | –––.. |
| E | . | T | – | 9 | ––––. |
| F | ..–. | U | ..– | 0 | ––––– |
| G | ––. | V | ...– | pont | .–.–.– |
| H | .... | W | .–– | vessző | ––..–– |
| I | .. | X | –..– | kérdőjel | ..––.. |
| J | .––– | Y | –.–– | kettőspont | –––... |
| K | –.– | Z | ––.. | pontosvessző | –.–.–. |
| L | .–.. | 1 | .–––– | kötőjel | –...– |
| M | –– | 2 | ..––– | ferde törtvonal | –..–. |
| N | –. | 3 | ...–– | idézőjel | .–..–. |
| O | ––– | 4 | ...– | | |

*Megoldás:*

| | |
|---|---|
| 1 hosszú: | 2 db |
| 2 hosszú: | 4 db |
| 3 hosszú: | 8 db |
| 4 hosszú: | 16 db |
| **Összesen:** | **30 db** |

Hármat nem használtak fel a morzeábécében: **.** – **.** – ; – – – **.** ; – – – –

**33.** Egy teremben 5 lámpa van. Mindegyiket külön-külön lehet felkapcsolni. Hányféleképpen éghetnek a lámpák, ha legalább egynek égnie kell?

*Megoldás (vázlat):* $5+10+10+5+1=31$.

# VI. Rendszerezés

*Módszertani megjegyzés:* Ezen a tanórán tudatosítunk egy-egy megoldási módot. A tanulók 3-4 fős csoportokban dolgoznak. A témakört diagnosztikai méréssel zárjuk.

## Emlékeztető

Valamely $\{a, b, c\}$ háromelemű halmaz összes kételemű részhalmaza:

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

## Feladatok

**34.** Keress az eddig megoldott feladatok között olyat, amelyben 5 különböző elem közül kellett kettőt kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számított!

*Megoldás:* A 6. feladat.

**35.** Keress az eddig megoldott feladatok között olyat, amelynek megoldása során lényegében szükségessé válik egy 6 elemű halmaz kételemű részhalmazai számának meghatározása!

*Módszertani megjegyzés:* Ebben a megfogalmazásban a 35. feladat jóval nehezebb, mint az előző. A tanulóknak le kell „hántani” egy-egy megoldott feladatról a szöveget, és fel kell ismerniük a probléma lényegét. Ha szükséges segítség, akkor a 6. feladat szövegének átfogalmazását kérjük a tanulóktól.

*Megoldás:* A 15. feladat.

**36.** Keresd meg az eddig megoldott feladatok közül azokat, amelyekben egy halmaz megadott elemszámú részhalmazai számának a meghatározása adta a kulcsot a megoldáshoz!

*Megoldás:* 6., 10., 13., 15., 16., 18., 6. mintapélda, 7. mintapélda, 27., 28., 29., 33.

## Emlékeztető

Az $\{a, b, c\}$ három elemű halmaz elemeit a következőképpen rendezhetjük sorba: *abc, acb, bac, bca, cab, cba.*

**37.** Keresd meg az eddig megoldott feladatok közül azokat, amelyek megoldásához lényegében egy halmaz elemeinek összes sorbarendezésének számát kellett meghatározni!

*Megoldás:* 5/a. feladat.

**38.** Keresd meg az eddig megoldott feladatok közül az összes olyat, amelyben a megoldás során lényegében egy halmaz elemeinek bizonyos (de nem az összes) sorbarendezésének számát kellett meghatározni!

*Megoldás:* 2. mintapélda, 4., 5., az 5. mintapélda, 20., 25. feladat.

**39.** Keresd meg az eddig megoldott feladatok közül azokat, amelyekben lényegében a megoldás során az alábbi kiválasztások számának meghatározása jelentette a kulcsot:

Valamely halmaz adott elemszámú valódi részhalmazainak elemeit kellett sorba rendezni. A különböző sorbarendezések számának meghatározása volt a cél.

*Megoldás:* 7., 23/b, d.

**40.** Keresd meg az eddig megoldott feladatok közül az összes olyat, amelyben a cél lényegében az alábbi kiválasztások számának meghatározása volt:

Egy halmaz elemei közül ki kellett választani megadott számút úgy, hogy egy elemet többször is választhattunk, majd a kiválasztottakat az összes lehetséges módon sorba rendeztük.

*Megoldás:* 23/a és c, 26., 32.

**41.** Egy állatkísérleteket végző laboratóriumban egerekkel a következő kísérletet végezték: Öt jól megkülönböztethető egeret egy olyan ketrecbe raktak, amelynek két kijárata volt. A bal oldali kijáraton keresztül olyan ketrecbe juthattak az egerek, ahol kedvenc csemegéjük várt rájuk, a jobb oldali kijáraton áthaladva viszont gyenge áramütés érte őket. Mindkét kijáraton egyszerre csak egy egér tudott áthaladni. A kísérlet első végrehajtásakor mind a két kijáratot egyszerre nyitották ki. Az egerek azonnal a kijáratokhoz rohantak, és mindegyikük igyekezett valamelyiken kijutni.

Arra a kérdésre, hogy hányféle sorrendben hagyhatták el a ketrecüket az egerek valaki a következő megoldást adta:

*Mivel 5-en vannak, vagy 2 egér tud egyszerre kimenni a jobb, illetve bal oldali nyíláson, vagy a pár nélkül maradt egér egyedül valamelyik kijáraton. Először számoljuk* *össze, hogy hányféleképpen tudunk az 5 egérből három, 2-2-1 darabszámú csoportot kialakítani. Egy pár* $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ *-féleképpen választható ki. Bármelyik esetben a megmaradt 3 egérből egy újabb pár 3-féleképpen alakítható ki. Így a két pár* $10\cdot 3=30$ *-féleképpen választható. Mind a 30 esetben a megmaradt egy egér egyértelműen adódik. Egy 2-2-1 felosztású csoport egymás után 6-féle sorrendben követheti egymást a „kijáratok felé". Így a 30-féle csoport* $30\cdot 6=180$ *-féle sorrendje alakulhat ki.*

*Bármelyik esetben a kijáratokon az egyik pár is 2-féle, hozzá a másik pár is 2-féle sorrendben mehet ki egyszerre, és az egyedül kimenő egér is vagy a bal, vagy a jobb oldali kijáraton mehet ki. Tehát az egerek* $180\cdot 2\cdot 2\cdot 2=1440$ *-féle sorrendben hagyhatják el a ketrecet.*

A megoldás hibás. Hol a hiba? Oldd meg a feladatot helyesen!

*Megoldás:*

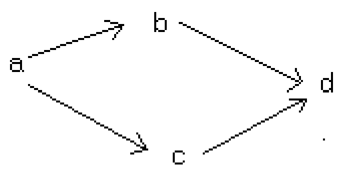
„Egy pár $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ -féleképpen választható ki. Bármelyik esetben a megmaradt 3 egérből egy újabb pár 3-féleképpen alakítható ki. Így a két pár $10\cdot 3=30$ -féleképpen választható."

Itt az összes lehetséges kiválasztások száma helyesen 15, mivel pl. az $AB, CD, E$ és a $CD, AB, E$ csoportba bontásokat külön esetnek tekintette a megoldó.

## A diagnosztikai mérés feladatai

*Módszertani megjegyzés:* A mérés feladatlapja sokszorosításra rendelkezésre áll a tanári modul végén.

**1.** Az ábrán a különböző betűk különböző, 6-nál kisebb pozitív egész számot jelölnek. A nyíl a kisebb felé mutat. Hány ilyen számnégyes van?




**2.** A Matematika Határok Nélkül versenyen 9. osztályok mérik össze problémamegoldó tudásukat. A versenyen az első 6 legjobb eredményt elérő osztályt díjazzák. Egyik évben 90 osztály jelentkezett a versenyre.

**a)** Hányféleképpen alakulhat ki a díjazottak köre?

Az első helyezett osztály jutalma egy utazás (belépőjegyekkel) az ország egyik aquaparkjába. A második helyezett osztály minden tagja egy „Matematika Határok Nélkül" felirattal ellátott trikót, a harmadik helyezett osztály színházjegyeket nyerhet egy általuk kiválasztott előadásra. A negyedik, ötödik és hatodik helyezést elérő osztályok ugyanolyan ajándékcsomagot kapnak.

Az eredményhirdetésre csak az első hat helyezést elért osztályokat hívják meg, de előre nem közlik egyik osztállyal sem, hogy hányadik helyezést ért el.

Ebben az évben 6 különböző iskola egy-egy 9-edik osztálya (jelölje ezeket A, B, C, D, E és F) kapott meghívót az eredményhirdetésre.

**b)** Hányféle helyezési sorrend alakulhat ki, ha nincs a 6 helyezett osztályok között döntetlent elérő két osztály?

**c)** Hányféleképpen nyerhetik el a jutalmakat, ha tudjuk, hogy nem volt a hat osztály között két azonos pontszámot elérő? (1-1-1 osztály kirándulást, trikót illetve színházjegyeket, míg 3 osztály ugyanolyan ajándékcsomagot nyer.)

**d)** Hányféleképpen nyerhetik el a jutalmakat, ha az aquaparki kirándulást két osztály is elnyeri, 1-1 osztály trikót illetve színházjegyet, és 2 osztály ajándékcsomagot nyer?

*Megoldás:*

1) Jelöljük az egyes osztályok helyezéseit a, b, c, d, e és f betűvel. Nyilván az a legnagyobb értéke 5, b illetve c legnagyobb értéke 4, a d pedig legfeljebb 2 lehet. A b és c szerepe felcserélhető, tehát a-t és d-t változatlanul hagyva, a b és c helyére írt számokat felcserélve egy újabb jó számnégyeshez jutunk.

Egy lehetséges felsorolás:

| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 1 |
| 5 | 4 | 2 | 1 |
| 5 | 3 | 2 | 1 |
| 5 | 4 | 3 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

Mivel minden számnégyesből a b és c helyére írt számok felcserélésével ismét jó számnégyest kapunk, összesen tehát 10 számnégyes alkotható.

2/a) 90 közül kell kiválasztani 6-ot úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. (Másképpen fogalmazva: 90 elemű halmaz 6 elemű részhalmazainak számát kell meghatározni.)

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \quad (= 622\ 614\ 630)$$

2/b) A 6 elem sorbarendezéseinek száma: $6! = 720$

2/c) A kirándulást elnyerő osztály 6-féle lehet. Bármelyik esetben a trikókat 5-féle, hozzá a színházjegyeket 4-féle osztály nyerheti el, így az első három díjat $6\cdot 5\cdot 4 = 120$-féleképpen oszthatják ki. Bármelyik esetben a 3 ajándékcsomagot nyerő osztály egyértelműen adódik.

Tehát a jutalmakat 120-féleképpen nyerhetik el.

2/d) Az utazást elnyerő két osztály $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$-féle lehet. Bármelyik esetben a trikókat elnyerő osztály 4-féle, hozzá a színházjegyeket nyerő osztály 3-féle lehet, tehát e három díjat $15\cdot 4\cdot 3 = 180$-féleképpen oszthatják ki. Bármelyik esetben a 180 közül, a két ajándékcsomagot nyerő 2 osztály egyértelműen adódik. Így ebben az esetben a jutalmakat 180-féleképpen nyerhetik el az osztályok.

# Kislexikon

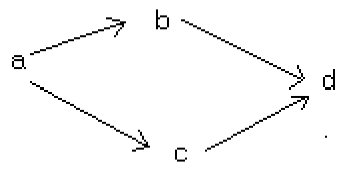
Jelöljön $n$ egy 1-nél nagyobb pozitív egész számot. Szorozzuk össze 1-től $n$-ig az összes pozitív egész számot. Az így kapott szorzatot **az *n* szám faktoriálisának nevezzük**. Jelölése: $n!$
Így $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

A **Pascal-háromszög** $n$-edik sorának $k$-adik eleme (ahol $n$ és $k$ is természetes számot jelöl, és $k$ értéke legfeljebb $n$-nel lehet megegyező) az $n$ elemű halmaz $k$ elemű részhalmazainak számát adja meg.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.sor | | | | | | | | | | **1** | | | | | | | | | | |
| 1.sor | | | | | | | | | **1** | | **1** | | | | | | | | | |
| 2.sor | | | | | | | | **1** | | **2** | | **1** | | | | | | | | |
| 3.sor | | | | | | | **1** | | **3** | | **3** | | **1** | | | | | | | |
| 4.sor | | | | | | **1** | | **4** | | **6** | | **4** | | **1** | | | | | | |
| 5.sor | | | | | **1** | | **5** | | **10** | | **10** | | **5** | | **1** | | | | | |
| 6.sor | | | | **1** | | **6** | | **15** | | **20** | | **15** | | **6** | | **1** | | | | |
| 7.sor | | | **1** | | **7** | | **21** | | **35** | | **35** | | **21** | | **7** | | **1** | | | |
| 8.sor | | **1** | | **8** | | **28** | | **56** | | **70** | | **56** | | **28** | | **8** | | **1** | | |
| 9.sor | **1** | | **9** | | **36** | | **84** | | **126** | | **126** | | **84** | | **36** | | **9** | | **1** | |
| . | | | | | | | | | | . | | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | | . | | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | | . | | | | | | | | | | |

## Feladatlap

**1.** Az ábrán a különböző betűk különböző, 6-nál kisebb pozitív egész számot jelölnek. A nyíl a kisebb felé mutat. Hány ilyen számnégyes van?




**2.** A Matematika Határok Nélkül versenyen 9. osztályok mérik össze problémamegoldó tudásukat. A versenyen az első 6 legjobb eredményt elérő osztályt díjazzák. Egyik évben 90 osztály jelentkezett a versenyre.

**a)** Hányféleképpen alakulhat ki a díjazottak köre?

Az első helyezett osztály jutalma egy utazás (belépőjegyekkel) az ország egyik aquaparkjába. A második helyezett osztály minden tagja egy „Matematika Határok Nélkül" felirattal ellátott trikót, a harmadik helyezett osztály színházjegyeket nyerhet egy általuk kiválasztott előadásra. A negyedik, ötödik és hatodik helyezést elérő osztályok ugyanolyan ajándékcsomagot kapnak.

Az eredményhirdetésre csak az első hat helyezést elért osztályokat hívják meg, de előre nem közlik egyik osztállyal sem, hogy hányadik helyezést ért el.

Ebben az évben 6 különböző iskola egy-egy 9-edik osztálya (jelölje ezeket A, B, C, D, E és F) kapott meghívót az eredményhirdetésre.

**b)** Hányféle helyezési sorrend alakulhat ki, ha nincs a 6 helyezett osztályok között döntetlent elérő két osztály?

**c)** Hányféleképpen nyerhetik el a jutalmakat, ha tudjuk, hogy nem volt a hat osztály között két azonos pontszámot elérő? (1-1-1 osztály kirándulást, trikót illetve színházjegyeket, míg 3 osztály ugyanolyan ajándékcsomagot nyer.)

**d)** Hányféleképpen nyerhetik el a jutalmakat, ha az aquaparki kirándulást két osztály is elnyeri, 1-1 osztály trikót illetve színházjegyet, és 2 osztály ajándékcsomagot nyer?