

I. Bevezető feladatok

Módszertani megjegyzés:


Az első feladatok bevezető jellegűek. A logika, logikus gondolkodás iránti igény kialakítását és a képességfejlesztést szolgálják. Javaslom, hogy önálló munkával 3 tetszőleges példát oldjanak meg a tanulók csoportmunkában az alábbi 8 közül, aztán beszéljék meg a megoldásokat. A tanári példányban azért található sok feladat, hogy a különböző érdeklődésű diákoknak is találjunk nekik tetsző példákat.

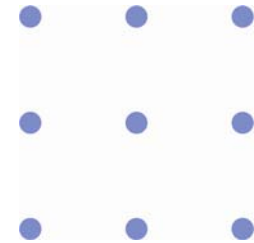
További bevezető feladatok találhatók a modul végén, a „Vegyes feladatok” fejezetben.

Maximálisan 20 percet szánunk a feladatokra: 7-8 percet a közös munkára, a többit a megoldások ismertetésére.

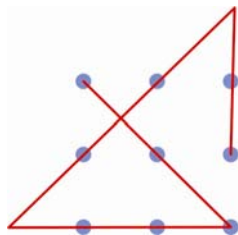
Innen átvezethető az óra a logika iránti ősi igény ismertetésével (logika története, pár mondatban – fontos, gondolva a humán beállítottságú tanulókra) a kijelentések és a logikai értékek világába.


Feladatok

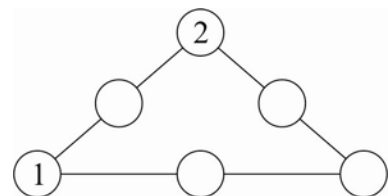
-  **1.** Kösd össze mind a 9 pontot egy folyamatos vonallal úgy, hogy csak 3 helyen legyen töréspontja!



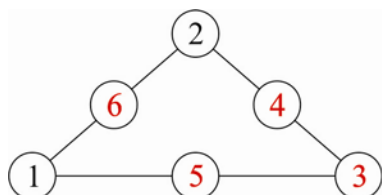
Megoldás:



-  **2.** Írd be a körökbe 3-tól 6-ig úgy a számokat, hogy a vonalak mentén az összegek egyenlők legyenek!



Megoldás:

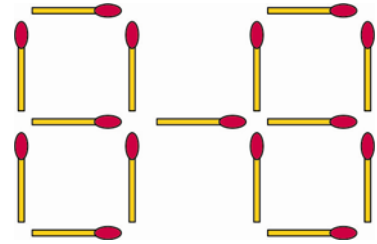
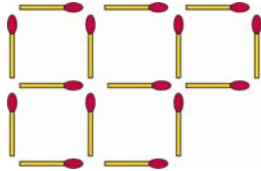


3. Egy tesztben 30 kérdést tettek fel. A jó válaszok +7 pontot, a rosszak –12 pontot értek. Mennyi volt a jó válaszok száma, ha 77 pontot szereztünk?

Megoldás: 23 jó válasz.

4. Helyezz át 2 gyufaszálat úgy, hogy 5 egyforma négyzet keletkezzen!

Megoldás:



5. Nagyapa és én együtt 85 évesek vagyunk. Apa és Nagyapa együtt 109, Apa és én együtt 54 évesek vagyunk. Hány évesek külön-külön a „fiúk”?

Megoldás: Nagyapa 70, Apa 39, én 15 éves vagyok.

6. Melyik két számot kell kicserélni, hogy jó legyen a számítás?

Megoldás: A 4 és a 3-at.

$$\begin{array}{r} 123 \\ + 481 \\ \hline 505 \end{array}$$

7. Hogyan kell érteni a következő mondatot: 10 féle ember létezik: aki ismeri az informatikát, és aki nem.

Megoldás: 10 értéke a kettes számrendszerben 2, így kétféle ember.

8. Hány diákja volt Pithagorasznak? Amikor kérdezték, ezt válaszolta: a diákjaim fele matematizist tanul, a negyed része fizikát, a heted része hallgatást, és még van 3 egészen kis kölyök. Hány diákja volt? (Daniel Schwenter, 1636).

Megoldás: 28 tanítvány.

A logika tárgya, története (olvasmány)

A logika eredetileg a filozófia részeként jelent meg a tudományok sorában. Az i. e. 5. századtól kezdtek terjedni a tisztán emberi gondolkodáson alapuló logikai bizonyítások. Nem matematikai jellegűek voltak, hanem a retorika (szónoklattan) és a dialektika (vitakozástan) gyakorlatából fejlődtek ki. Ezt hívták **tradicionális logikának**. Elsősorban a beszélt nyelv elemére, formáira épülő következtetési sémákkal és ítéletekkel foglalkozott. Nem sokkal később megjelent a gondolkodás természetének modellezése: a görög Platón a bizonyítás alapelveit, szabályait, logikai törvényszerűségeit kereste.

A logikát mintegy kétezer éven keresztül az Arisztotelész (i.e. 384 – 322, Platón tanítványa) Organon című munkájában kifejtett munkával és törvényszerűségeivel azonosították. A logika fejlődésének négy nagyobb szakasza volt:

1. Antik kor - Arisztotelész és a sztoikusok, a **tradicionális logika** megalkotása.
2. Középkor – a **skolasztikus logika**, az arisztotelészi hagyomány folytatása.

Ez azonban nem sokáig tartott. A korábbi elméleteket elfelejtették, és „arisztotelészi logikának” valami olyan, végletekig egyszerűsített és átértelmezett „kisiskolás” tant neveztek, amelynek Arisztotelészhez nem sok köze volt.

3. Újkor – a modern **szimbolikus logika vagy formális logika** létrejötte (Bacon, Leibniz, Boole: logikai algebra; Frege, Peano, Russell),
4. **Huszedik század** – a posztmodern, a tradicionális logika törvényeit megtagadó vagy már-már a tagadásig általánosító elméletek születése (modális logika, intuicionizmus, fuzzy logikák, kvantumlogika, bizonyításelmélet, Tarski, Gödel).

A modern logika, más néven a matematikai logika nagy eredményei az I. világháború után születtek, és manapság fontos szerepet játszanak. Nemzetközileg is elismert magyar művelői Kalmár László (1905–1976) és Péter Rózsa (1905–1977), de Varga Tamás (1919–1987) és Urbán János (1939–) is sokat tett a logika népszerűsítése érdekében.

A logika tárgya a helyes emberi gondolkodás fogalmainak, törvényszerűségeinek vizsgálata. Kijelentéseket vizsgál, következtetési sémákat határoz meg, de az emberi megismerés

folyamatáról és a problémamegoldó gondolkodásról nem mond semmit. Ellenőrizni tudja, hogy egy megoldás vagy következtetés helyes-e, vagy eszközöket kínálva segíthet a problémák megoldásában (például analitikus táblázat, Venn-diagram).

A logika tudományának eredményeit mindennapi életünkben sokat használjuk. Nemcsak a helyes emberi gondolkodás területén, hanem a technikai eszközök működésében is fontos szerepe van. A számítógép például a kettes számrendszert használja, ami megfeleltethető a kétértékű, igaz-hamis állításokkal foglalkozó logika rendszerének, és a számolási műveletek is visszavezethetők logikai műveletekre (ÉS, VAGY, tagadás).

Módszertani megjegyzés:

Mi a matematikai logika legegyszerűbb fogalmaival akarjuk megismertetni a 9. osztályos diákokat. Ezek tudása igen fontos, hiszen ma már az élet szinte minden területén lépten-nyomon belebotlunk. Ma a számítógépeknek, robotoknak és az informatikának is nélkülözhetetlen segédeszköze a matematikai logika. Jelentősége egyre nagyobb a humán tudományokban, és a gazdasági életben is.

Az axiomaticus felépítés elemeit a későbbiekben, a geometria kapcsán tanítjuk. Érdeklődő diákoknak mesélhetünk róla:

A legtöbb tudományos elmélet igaznak tekintett, nem bizonyítandó alapfeltevéseken, ún. **axiómákon** alapul (például „az egyenes szakasz végtelenül meghosszabbítható”). Ehhez párosulnak az **alapfogalmak** (pont, egyenes) és a **definíciók** (például háromszög), amelyek a tárgyterülettel kapcsolatos fogalmakat írják le. A definiált fogalmak tulajdonságait **tételek** írják le, amelyekhez tisztán logikai úton végigvitt, axiómákra, definíciókra és korábban bebizonyított tételekre támaszkodó bizonyítás társul (például a háromszög belső szögeinek összege 180). A tétel bizonyítás nélkül még csak **sejtés** (akkor is, ha ellenpéldát nem találtak rá).

Érdeklődő diákoknak indíthatunk olyan kutatási projekteket, amelyek végeredménye egy bemutató valamilyen logikához kapcsolódó témából, pl. mesterséges intelligencia, fuzzy-logika, Boole-algebra.

II. A kijelentés

A logika elsődleges tárgyai azok a mondatok, amelyekről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igazak vagy sem.

Kijelentés: olyan mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Egy kijelentésnek kétféle **logikai értéke** lehet: **igaz** vagy **hamis**.

A kijelentés, az állítás és az ítélet szavakat szinonimaként (ugyanolyan értelemben) használjuk. Mivel tartalmuktól eltekintünk, ezeket formálisan nagybetűkkel jelöljük: A, B, C, ...

Nem kijelentés például az, hogy „A földön kívül is van élet”, mert nem tudjuk egyértelműen eldönteni az igazságértékét. Általában a félig ismert dolgok, vagy az érzelmi megnyilvánulások nem kijelentések.

Az **egyszerű kijelentések** többnyire egyszerű kijelentő mondatok, amelyekben nincsenek logikai műveletek:

Süt a nap.

Kati Zalában született.

Minden ember halandó.

Van gyűrűs bolygó a Naprendszerben.

Összetett kijelentések (ítéletek) összetett mondatokban jelennek meg:

Esik az eső és fúj a szél.

Kovács vagy Mészáros lőtt.

Ezek olyan állítások, amelyeket az ÉS, illetve a VAGY szavak kapcsolnak össze.

A **paradoxonok** feloldhatatlan ellentmondást tartalmazó mondatok vagy szövegek, az általunk tanult logika nem foglalkozik velük. Érdekességük miatt azonban érdemes megemlíteni őket. Például ilyen nyelvi paradoxon a következő: „Ez a mondat nem igaz.” Ha igaz a mondat, akkor hamis. Ha hamis, akkor igaz...

Paradoxonok a művészetben is megjelennek, például a világhírű grafikus, M.C. Escher (1898–1972) munkáiban, aki hírnevét részint ezeknek a vizuális paradoxonoknak, részint fantáziadús szimmetriák tervezésének és ábrázolásának köszönheti. Lásd: Rajzoló kezek (Drawing hands), Vízesés (Waterfall) a <http://www.worldofescher.com/gallery/> internet oldalain, vagy Roger Penrose (1931-), a világhírű matematikai fizikus munkáiban (Penrose-háromszög: http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_triangle).

Módszertani megjegyzés:

Javasolt kutatási projekt keretében (interneten, művészeti albumokban) az említett szerzők olyan műveinek keresését feladni, amely lehetetlen jelenségeket mutat. Ha a paradoxon felkeltette a diákok érdeklődését, akkor javasolhatjuk a matematika történetével összefüggő további paradoxonok kutatását projektmunkaként (például Zénón paradoxonai: kilőtt nyíl, Akhillész és a teknős).

Jól ismert probléma: Akhillész egy teknőssel fut egy irányban, kezdetben a távolság köztük s . Akhillész sebessége $10v$, a teknőse v , így Akhillész a józan ész alapján belátható időn belül utolérné. De a paradoxon szerint nem éri utol, hisz ameddig Akhillész megteszi az s távolságot, a teknős $s/10$ távolságot halad előre, és amíg Akhillész az $s/10$ távolságot megteszi, addig a teknős újabb, $s/100$ távolságot tesz meg, és ez így megy a végtelenségig, mindig lesz köztük távolság, nem éri utol a teknőst.

A hiba az elgondolásban van, hogy a „végtelenségig” szót rosszul értelmezzük, a távolságok sorozata nem végtelen ideig tart, csak végtelen elemből áll. Akhillész nem végtelen idő alatt éri be a teknősbékát, hanem véges alatt, tehát véges időn belül le is előzi.

Ha kilövének egy nyilat, az az atomos térelmélet miatt nem mozoghat, hiszen a legkisebb távolság, amit egy nyíl megtehet, az egy tératomnyi, ám ekkor a nyíl atomjai nem mozognának, hanem egyik térpontból a másikba teleportálódnának, tehát folyamatos megsemmisülés-keletkezés játszódna le. Nem ugyanazt a nyilat látnánk különböző pillanatokban; az általunk kilőtt nyíl megsemmisül a pillanat törtrésze alatt.

A folytonos térből kiindulva a kilőtt nyílnak mindig meg kell tennie a távolság hátralevő részének a felét, így sosem ér a célba.


A Menón-paradoxon, amelyre Platón mutatott rá, a következő: „ha tudjuk egy probléma megoldását, akkor nincs probléma, ha viszont nem tudjuk a megoldást, akkor nem tudjuk, hogy mit keresünk és nem is várhatjuk el, hogy találjunk valamit.”

Feladatok

 9. Döntsd el, hogy kijelentések-e az alábbi mondatok:

- És mégis mozog a Föld!
- A fehér zongora szebb, mint a fekete.
- De szépen havazik!
- A statisztikai évkönyv objektív tényeket közöl.
- Hazádnak rendületlenül légy híve, oh magyar; (*Vörösmarty: Szózat*)


Megoldás: a), d): igen; b), c), e): nem.

 10. Döntsd el, hogy mi az igazságértéke az alábbi kijelentéseknek! Ha hamis a kijelentés, próbáld meg igazá tenni egy kis módosítással!

- Egy ötszögnek 6 átlója van.
- Minden négyszög köré írható kör.

Megoldás:

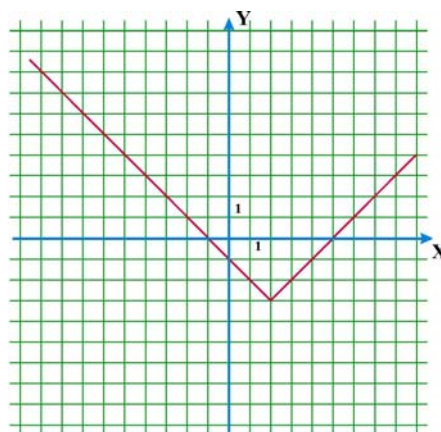
a) hamis; Egy ötszögnek öt átlója van. b) hamis; Nem minden négyszög köré írható kör.

 11. A következő kijelentések a jobb oldali grafikonról szólnak:


- A függvény értéke 2-nél pozitív.
- A függvény értékészlete a valós számok halmaza.
- A függvény zérushelyei -1 és 5 .
- A függvény értéke a $[-3; 0]$ intervallumon negatív.
- Ez egy abszolútérték-függvény grafikonja.

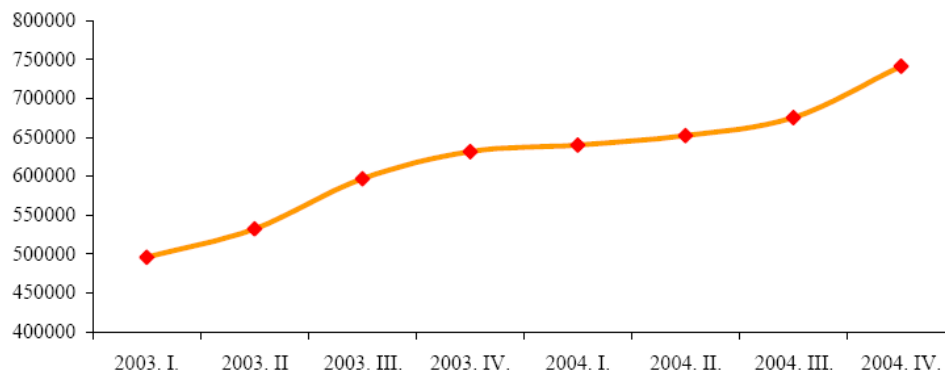
Megoldás: a), b), c), d) : hamis; e): igaz; f): hamis;

g): igaz.



Módszertani megjegyzés: A 12. feladatot csoportmunkában javasoljuk átvenni.

 12. A grafikon alapján kijelentés-e a következő mondat: két év alatt jelentősen nőtt az Internet előfizetések száma?



Internet előfizetések száma

Megoldás:

Az elemzés szerint 2004. IV. idején kb. 740000, míg 2003 januárjában 500000 körül volt az előfizetések száma. Ez 48%-os növekedést jelent két év alatt. Hogy kinek mit jelent ez a növekedés, nem lehet tudni, azonban határozott és erős fejlődést mutat, ami jelentős növekedést jelent.

Módszertani megjegyzés:

A példából érezni lehet, hogy a kinyilatkoztatások attól függően válhatnak kijelentéssé egyesek számára, hogy ki mondja, milyen környezetben, és hogy ki a befogadó közeg. Ez már a szociológia határát súrolja, és a matematikai logikát ilyenkor nem hívhatjuk segítségül.


13. Írjatok olyan mondatokat, amelyek kijelentések és olyanokat, amelyek nem azok!

Módszertani megjegyzés:

Következik három gondolkodtató feladat, önálló vagy csoportos feldolgozásra. Differenciáláshoz is használhatók

14. A róka hétfőn, szerdán és pénteken mindig hazudik, a hét többi napján mindig igazat mond. A szarka kedden, szerdán és csütörtökön mond igazat, míg a hét többi napján hazudik. Milyen napon mondta mindkettőjük: "Tegnap igazat mondtam!"

Megoldás: vasárnap.

 **15.** Bináris szigeten kétféle ember él, igazmondók (akik mindig igazat mondanak), és hazudozók (akik mindig hazudnak). Egy alkalommal John Bit meglátogatta a szigetet. A tengerparton talált három szigetlakót: A -t, B -t és C -t.

- Te igazmondó vagy?

A olyan halkán válaszolt, hogy nem értette. Ezért megkérdezte B -től:

- Mit mondott A ?

- Azt mondta A , hogy nem. - válaszolta B .

Ekkor közbeszólt C , a harmadik szigetlakó:

- Ne higgyen B -nek, hazudik!

Van-e a három szigetlakó között igazmondó?

1. megoldás: A feltett kérdésre A akár igazmondó, akár hazudós, mindenképpen igent mond, és így B hazudós, C tehát igazat mond.

2. megoldás: Ha B igazmondó, készen vagyunk, ha viszont B hazudós, akkor C igazat mond, vagyis a három szigetlakó között van igazmondó.

3. megoldás: Ha A , B , C mindegyike hazudós, akkor C nem mondhatja senkiről, aki a szigeten él, hogy hazudós. Ez ellentmond C közbeszólásának, és ez az ellentmondás biztosít minket afelől, hogy feltevésünk helytelen, annak ellenkezője az igaz, van a három szigetlakó között igazmondó.

Megjegyzés: Az utóbbi két megoldás csak a három szigetlakó közötti igazmondó létezését bizonyítja, de nem mutatja ki az 1. megoldással ellentétben, hogy ki vagy kik az ilyen tulajdonságúak. Ez a megoldás tisztázza ezt a kérdést, noha A igazmondó vagy hazudós voltára nem derül, mert nem derülhet fény.

 **16.** Egy pozitív egész számról János az alábbiakat állítja:

a rákövetkező egész szám nem osztható 3-mal.

maga a szám 5-tel osztva más maradékot ad, mint 7-tel osztva.

a szám nagyobb 800-nál.

a számot megelőző egész szám nem osztható 8-cal.

7-tel osztva a maradék kisebb, mint 3.

5-tel osztva a maradék nagyobb, mint 3.

Határozd meg a számot, ha tudod, hogy a felsorolt állítások mindegyike hamis!

Megoldás: 353.

III. A tagadás (negáció)

Az igaz ellentéte a hamis. Ha valamely igaz állítás elé tesszük a **NEM IGAZ, HOGY...** szókapcsolatot, akkor igazságértéke ellentettjére változik. A tagadást általában ennél rövidebb nyelvi eszközökkel fogalmazzuk meg:

Kijelentés	Tagadása
Süt a nap.	Nem süt a nap.
Az autó fehér.	Az autó nem fehér.
Piroska sétál az erdőben.	Piroska nem sétál az erdőben.
Itt több minden is tagadható. Figyelni kell arra, hogy a kijelentést, vagyis az állítmányt tagadjuk. Gondolatban a „Nem igaz az, hogy...” formulát illesszük a mondat elé, az segít.	
A gyerekek szeretik a csokit.	A gyerekek nem szeretik a csokit.
Tüzesen süt le a nyári nap sugára az ég tetejéről a juhászbojtárra.	Nem süt le a nap.
3 egész szám. Igazságértéke: igaz.	3 nem egész szám. Igazságértéke: hamis.
kisebb, mint 3. (< 3) Igazságértéke: hamis.	nem kisebb, mint 3. (≥ 3) Igazságértéke: igaz.
3 osztója 111-nek. Igazságértéke: igaz.	3 nem osztója 111-nek. Igazságértéke: hamis.
-2 nem racionális szám. ($-2 \notin \mathbb{Q}$) Igazságértéke: hamis.	-2 racionális szám. ($-2 \in \mathbb{Q}$) Igazságértéke: igaz.
0 természetes szám. Igazságértéke: igaz.	0 nem természetes szám. Igazságértéke: hamis.
Minden háromszögnek van alapja. Igazságértéke: hamis.	Nem minden háromszögnek van alapja. Igazságértéke: igaz.

Tagadás: logikai művelet, amely egy kijelentés igazságértékét ellentettjére változtatja:


a tagadás az igazból hamisat, a hamisból igazat csinál.

Az A állítás tagadásának jelölése: $\neg A$, vagy \bar{A} .

Megjegyzés:

Ha a tagadott kijelentést ismét tagadjuk, megkapjuk az eredeti kijelentés igazságértékét.

Feladatok

 **17.** Döntsd el, hogy a párok egymás tagadásai-e, vagy sem! Ha nem, hogyan tagadnád helyesen a mondatokat?

a)	Ez az autó fehér.	Ez az autó fekete
b)	Ma busszal megyek haza.	Ma gyalog megyek haza
c)	Ma kedd van.	Ma szerda van.

Megoldás:

Egyik sem tagadás; a tagadások a következők: Ez az autó nem fehér. Ma nem busszal megyek haza. Ma nem kedd van.

 **18.** Tagadd a következő mondatokat! Melyek kijelentések, és melyek nem azok?

- A kalapban nincsen nyúl.
- A mamám lekváros fánkot szokott sütni.
- A fekete hajú lányok szeretik a csokoládét.
- A Trabant a világ legjobb gépkocsi márkája.
- A bűvészek mindig csalnak.
- A lónak négy lába van.
- Sem utódja, sem boldog őse,
Sem rokona, sem ismerőse
Nem vagyok senkinek,
Nem vagyok senkinek.

(Ady Endre: Szeretném, ha szeretnének)

Megoldás:

a) A kalapban van nyúl. b) A mamám nem szokott lekváros fánkot sütni. c) Nem igaz az, hogy a fekete hajú lányok szeretik a csokoládét (= van olyan fekete hajú lány, aki nem szereti a csokoládét). d) A Trabant nem a világ legjobb gépkocsi márkája. e) A bűvészek nem mindig csalnak (= van úgy, hogy a bűvészek nem csalnak). f) A lónak nem négy lába van.

g) Valakinek utódja vagyok,
Valakinek boldog őse vagyok,
Valakinek rokona és valakinek ismerőse vagyok.

Kijelentések: a), b), f).

IV. Konjunkció

Szülői értekezlet előtti napon otthon persze megkérdezték Zsoltit, hogy mi volt az iskolában. „Bioszból négyest kaptam és a kémia dogám ötös lett” válaszolta. Másnap kiderült, hogy a biológia felelet valóban négyesre sikerült, de kémiából a kettes is alig jött össze. „Miért hazudtál?” kérdezték tőle. Zsolti azonban állította, hogy igazat mondott, hiszen biológiából tényleg négyesre felelt. Hazudott Zsolt, vagy igazat mondott?

Láttuk, hogy ha **ÉS**-sel kötünk össze kijelentéseket, újabb kijelentést kapunk:

Kint esik az eső és fúj a szél.

Egy ilyen kijelentés csak akkor igaz, ha a benne szereplő állítások mindegyike igaz (kint esik az eső, ugyanakkor fúj is a szél). Ha az egyik nem teljesül, akkor az egész mondat hamis, mert az **ÉS** egyidejű bekövetkezést feltételez.

Ha két kijelentést **ÉS**-sel összekapcsolunk, akkor az csak abban az esetben lesz igaz, ha mindkét kijelentés logikai értéke igaz.

Az **ÉS** logikai műveletet **konjunkciónak** nevezik.

A magyar nyelv ezt a kapcsolatot többféleképpen is kifejezheti:

Esik is, és fúj is.

Esik, de fúj is.

Esik, ugyanakkor fúj is.

Tán csodállak, ámde nem szeretlek. (*Petőfi: Az Alföld*)

Konjunkcióra jellemző példa az **egyenlőtlenség-rendszer**.

Mintapélda₁

Milyen számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek együtt: $2x - 4 \geq 0$ és $x - 5 \geq 0$?

Megoldás:

$$2x - 4 \geq 0 = x \geq 2 \quad \mathbf{\text{ÉS}} \quad x - 5 \geq 0 = x \geq 5.$$




Mivel az x mindkét helyen ugyanazt a számot jelöli, a két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, azaz $5 \leq x$.


A halmazelméletből tudjuk, hogy ez éppen megfelel **a két számhalmaz metszetének**.

A megoldáshalmaz a $[2; \infty[$ és az $[5; \infty[$ intervallumok közös része, metszete, ami $[5; \infty[$.

Feladatok

 **19.** Keressünk példákat konjunkcióra a mindennapi életből!

Módszertani megjegyzés: A gyerekek néhány perces csoportmunkában gyűjtsenek mondatokat, és a végén beszéljék meg az eredményeket!


 **20.** Döntsük el, milyen feltételek mellett igaz, és mikor hamis a következő kijelentések logikai értéke!

a) A dobozban zöld és kék golyók találhatók.

b) A tettesnek fekete haja és 45-ös lába van.

c) Magyarország lakossága csökken, és csökken a születések száma is.

Megoldás: akkor igaz, ha egyszerre teljesülnek.

 **21.** Oldd meg a következő egyenlőtlenség rendszereket, és írd fel a megoldást intervallum jelöléssel:

a) $2x + 1 > 7$ és $2 - 3x \geq -13$;

b) $4x - 10 \leq -2$ és $-2x + 8 > 0$;

c) $2x + 2 < -2$ és $0 \leq 3 + 3x$.

Megoldás: a) $]3 ; 5]$, b) $x \leq 2$, c) $x < -2$.

V. Diszjunkció

Ha **VAGY**-gyal kapcsolunk össze két kijelentést, új kijelentést kapunk:

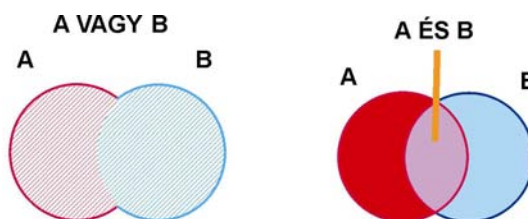
A szemtanú szerint **az autó piros volt, vagy Suzuki**.

Ez a kijelentés akkor is igaz, ha piros volt az autó és akkor is, ha Suzuki. Akkor is igaz, ha piros Suzuki volt. Két kijelentés ilyen jellegű összekapcsolását **diszjunkciónak, megengedő vagy**-nak nevezzük.

Ha két kijelentést **VAGY**-gyal összekapcsolunk, akkor az abban az esetben lesz igaz, ha valamelyik, ill. mindkét kijelentés logikai értéke igaz.

Ezt a logikai műveletet **diszjunkciónak** nevezik.

A logika és a halmazelmélet szoros kapcsolatban álló tudományágak. A diszjunkció megfelel a metszet, a konjunkció pedig az egyesítés műveletének.



A következő mondatban szintén **VAGY** kapcsolja össze az ítéleteket, de itt az egyik kijelentés kizárja a másikat:

A szemtanú szerint **az autó vagy Ford volt, vagy Suzuki**.

Kétféle **VAGY** különböztethető meg egymástól: ez utóbbi a **KIZÁRÓ VAGY**, vagyis amikor a két kijelentés közül csak az egyik lehet igaz, a másik szükségképpen hamis. Ilyen például az a kijelentés, hogy „*vagy 14, vagy 15 gyertya volt a tortán*”.

Mi a továbbiakban mindig a diszjunkció (tehát a **MEGENGEDŐ VAGY**) műveletre gondolunk, amikor a **VAGY** kapcsolja össze a kijelentéseket.

Mintapélda₂

Keressük meg az 5 és 10 közé eső egész, vagy -10 -nél nagyobb negatív egész számokat.

Megoldás:

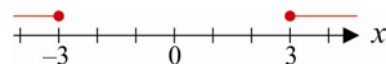
5 és 10 közé eső egészek: 6; 7; 8; 9.


-10-nél nagyobb negatív egészek: -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1.

A VAGY miatt azok az egészek jelentik a megoldásokat, amelyek legalább az egyik számhalmazban megtalálhatók.


A megoldáshalmaz: $\{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 6; 7; 8; 9\}$.

Az egyenlőtlenségek megoldása során gyakran találunk VAGY kapcsolattal összekapcsolt számhalmazokat. Például az $x^2 > 9$ egyenlőtlenség megoldását azok a számok alkotják, amelyek 3-nál nagyobbak, VAGY -3-nál kisebbek. Ez azt jelenti, hogy akár a $]-\infty; -3[$, akár a $]3; \infty[$ számhalmazból választunk ki egy számot, az megoldása az egyenlőtlenségnek.


**Feladatok**

 **22.** Keressünk példákat diszjunkcióra a mindennapi életből!

Módszertani megjegyzés: A gyerekek néhány perces csoportmunkában gyűjtsenek mondatokat, és a végén beszéljék meg az eredményeket!


 **23.** Döntsd el, milyen feltételek mellett igaz, és mikor hamis a következő kijelentések logikai értéke!

- A dobozban olyan golyók találhatóak, amelyek zöldek vagy csíkosak.
- A tettesnek fekete haja vagy 45-ös lába van.
- Többféle fagyit veszünk: csokisat vagy puncsosat.

 **24.** Oldd meg a következő egyenlőtlenség rendszereket, és írd fel a megoldást intervallum jelöléssel:

- $4x - 10 \leq -2$ vagy $-2x + 8 > 0$;
- $2x + 2 < -2$ vagy $0 \leq 3 + 3x$;
- $2x + 1 > 7$ vagy $2 - 3x \geq -13$.

Megoldás: a) $x < 4$; b) $x \leq -1$; c) **R**.

-  **25.** Add meg azokat az egész számokat, amelyekre érvényesek a következő állítások!
- a) -5 -nél nagyobb, vagy 0 -nál nagyobb; b) 2 -nél kisebb, vagy -1 -nél nagyobb;
c) $x \in [-4; 2]$, vagy $x \in [2; 4[$; d) $x \in [-2,9; 4,5]$, vagy $x \in]-1; 2[$;
e) pozitív, és 6 -nál kisebb, vagy 3 -nál kisebb;
f) 10 -nél kisebb természetes szám, és 8 -nál nem kisebb, vagy -5 és 5 közé esik.

Megoldás: a) $] - 5; \infty [$ intervallum összes egész száma: $\{-4; -3; \dots\}$; b) \mathbf{Z} ;

c) $\{-4; -3; -2, -1, 0; 1; 2; 3\}$; d) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; e) $\{1; 2; 3; 4; 5\}$;

f) $\{0; 1; 2; 3; 4; 8; 9\}$.

VI. A konjunkció és a diszjunkció tagadása

Mintapélda₃

Milyen feltételek mellett hamis a következő kijelentés: „esik az eső és fúj a szél” ?

Megoldás:

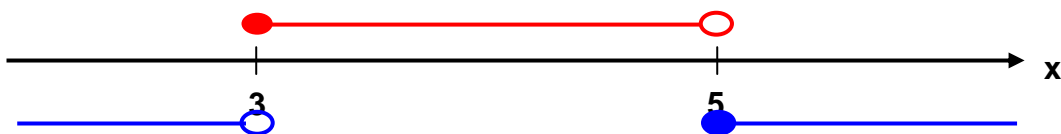
Mivel a konjunkció (ÉS-kapcsolat) egyidejűséget fejez ki, a fenti kijelentés akkor hamis, ha vagy nem esik az eső, vagy nem fúj a szél, vagy egyik sem. Ezért a fenti kijelentés tagadását kétféleképpen is felírhatjuk:

Nem igaz, hogy esik az eső és fúj a szél.

Nem esik az eső, vagy nem fúj a szél.

Mintapélda₄

Mikor nem teljesül x -re, hogy $3 < x < 5$?



A számegyenesről leolvasható, hogy $x < 3$, vagy $x \geq 5$.

Ha A és B két kijelentés, konjunkciójukat és diszjunkciójukat így kell tagadni:

$$\text{NEM (A ÉS B)} = \text{NEM A VAGY NEM B}$$

$$\text{NEM (A VAGY B)} = \text{NEM A ÉS NEM B}$$

A tagadás erősebben kötődik a kijelentéshez, mint az ÉS vagy a VAGY kapcsolat, vagyis a negáció magasabb rendű (nagyobb prioritású vagy precedenciájú) művelet, mint a konjunkció vagy a diszjunkció. Az informatika területén jelentős szerepet kap ez a három logikai művelet: a számítógépek működésének elvi alapját a kettes számrendszer és a kétértékű logika alkotja, és az áramköri elemek is e kettő együttesét modellezzik.

Logikai műveletek igazságtáblái (kiegészítő anyag az informatika iránt érdeklődő tanulóknak)

Módszertani megjegyzés: igazságtáblák nem tartoznak a középszintű érettségi tananyagába.

Igazságtáblával szoktuk szemléltetni a műveletek eredményét (X és Y kijelentések):

X	NEM X
hamis	igaz
igaz	hamis

X	Y	X ÉS Y	X VAGY Y
hamis	hamis	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis	igaz
igaz	hamis	hamis	igaz
igaz	igaz	igaz	igaz

A ÉS NEM A értéke például HAMIS az A értékétől függetlenül, mert két ellentétes logikai értékű kijelentésnél az ÉS hamis eredményt ad. A VAGY NEM A igaz lesz, függetlenül az A kijelentés logikai értékétől.

Mintapélda₅ (kifejezés logikai értékének meghatározása)

Mi lesz a logikai értéke a következő logikai kifejezésnek:

$$(2 > 5) \text{ ÉS } (4 > 5) \text{ VAGY } (3 > 4) ?$$

Megoldás:

A logikai értékeket beírva kapjuk az **igaz ÉS igaz VAGY hamis** kifejezést, amit kiértékelve balról jobbra **igaz VAGY hamis**, aminek **igaz** a logikai értéke. Vagyis a kifejezés logikai értéke **igaz**.

Módszertani megjegyzés: A következő mintapéldát elsősorban informatika iránt érdeklődő diákoknak ajánljuk.

Mintapélda₆

A=igaz, B=hamis, C=hamis, D=igaz esetén mi lesz a logikai értéke az alábbi kifejezésnek?

$$(A \text{ ÉS } NEM B) \text{ VAGY } NEM (NEM C \text{ ÉS } D)$$

Megoldás:

Beírva a logikai értékeket (igaz ÉS NEM hamis) VAGY NEM (NEM hamis ÉS igaz) kifejezést kapjuk, amit a következő sorrendben kiértékelünk:

Először az egyszerűbb tagadásokat végezzük el:

(igaz ÉS igaz) VAGY NEM (igaz ÉS igaz).

Utána kiértékeljük a zárójeles kifejezéseket: igaz VAGY NEM igaz.

NEM igaz értéke hamis, vagyis igaz VAGY hamis lesz az egyszerűsített kifejezés, aminek az értéke igaz.

Vagyis a kifejezés értéke **igaz**.

A hétköznapi életben az emberek sokszor rosszul tagadnak. Például annak a mondatnak a tagadása, hogy

„Ma vasárnap van, és holnap hétfő lesz.”

általában elgondolkodtatja a megkérdozetteket. Mi már tudjuk a helyes választ:

„Vagy ma nincs vasárnap, vagy holnap nem hétfő lesz.”

Mintapélda₇

Minek a tagadása a következő mondat? **Ma hétfő van, és nincs nyitva a bolt.**

Megoldás:

Két állításunk van: $A = \text{ma hétfő van}$, illetve $B = \text{nincs nyitva a bolt}$, köztük ÉS-kapcsolat.

Formálisan így fogható fel a mondat: $A \text{ ÉS } B$.

A fenti formulák szerint ez NEM A VAGY NEM B típusú mondat tagadása, vagyis az eredeti mondat így hangzott:

Ma nem hétfő van, vagy nyitva van a bolt.

(Persze ne keressünk túl sok értelmet ebben a mondatban...)

Módszertani megjegyzés: A következő mintapélda főleg informatika iránt érdeklődő diákoknak ajánlott.

Mintapélda₈

Írd fel a következő kifejezés igazságtáblázatát: NEM A VAGY (A ÉS NEM B)


	A	B	NEM A VAGY (A ÉS NEM B)
1.	hamis	hamis	igaz
2.	hamis	igaz	igaz
3.	igaz	hamis	igaz
4.	igaz	igaz	hamis

Megoldás:

Az 1. sorban például **A** és **B** egyaránt hamis, ezeket behelyettesítve a kifejezés:


NEM hamis VAGY (hamis ÉS NEM hamis) = igaz VAGY (hamis ÉS igaz) = igaz, mert igaz VAGY valami = mindig igaz.

Feladatok

 **26.** Tagadjátok a következő mondatokat:

- a) Odakint süt a nap és esik az eső.
- b) Az ördög veri a feleségét, vagy alszik.
- c) Puskás mellérúg és a labda repül a levegőben.
- d) Pista alszik vagy nem dolgozik.
- e) $3 < x \leq 5$
- f) $x < 1$ vagy $x > 6$
- g) Vagy bolondok vagyunk s elveszünk egy szálig,
Vagy ez a mi hitünk valósággá válik. (*Ady Endre*)
- h) Nincs rózsás labirint, s balzsamos illatok
Közt nem lengedez a zefír. (*Berzsenyi Dániel*)

Megoldás: a) Nem süt a nap, vagy nem esik az eső. b) Az ördög nem alszik, és nem veri a feleségét. c) Puskás nem rúg mellé, vagy a labda nem repül a levegőben. d) Pista nem alszik, és dolgozik. e) $x \leq 3$ vagy $x > 5$; f) $1 \leq x \leq 6$; g) Nem vagyunk bolondok, vagy nem veszünk el mind, de a mi hitünk nem válik valósággá; h) Van rózsás labirint, vagy balzsamos illatok közt lengedez a zefír.

 **27.** A következő feladatban találsz egy kijelentést, utána néhány mondatot. Válaszd ki, hogy melyik lehet a tagadása a megadott kijelentésnek!

- a) Az osztályunkban angolt és németet tanuló diákok vannak.
 - a₁) Az osztályunkban nincsenek angolt és németet tanuló diákok.
 - a₂) Nem a mi osztályunkban vannak angolt és németet tanuló diákok.
 - a₃) Az osztályunkban nincsen olyan diák, aki angolt és németet is tanul.
 - a₄) Az osztályban tanuló diákok nem tanulnak angolt, vagy nem tanulnak németet.

- b) Nem tört be a szélvédő, és a motorháztető kicsit meggyűrődött.
- b₁) Nem tört be a szélvédő, és nem gyűrődött meg a motorháztető.
- b₂) A szélvédő betört, és a motorháztető kicsit meggyűrődött.
- b₃) Betört a szélvédő, vagy nem gyűrődött meg a motorháztető.
- b₄) A szélvédő betört, vagy a motorháztető kicsit meggyűrődött.

Megoldás: a₃ ; a₄ ; b₃.


Módszertani megjegyzés: A tagadás tagadása maga az igazság, mármint a kétértékű logikában. Erre példa a következő feladat.

 **28.** Fogalmazd meg azt a mondatot, amelyiknek tagadása a következő:

- a) Tegnap este nem volt áram, és gyertyát égettünk.
- b) A kőműves nem késett, és én nem voltam ott.
- c) Ezt a képet Picasso festette, vagy nem Párizsban állították ki.
- d) Bauxitbánya van a környéken, és nincs víz a patakokban.

Megoldás:

- a) Tegnap este volt áram, vagy nem égettünk gyertyát. b) A kőműves késett, vagy én voltam ott. c) Ezt a képet nem Picasso festette, és Párizsban állították ki. d) Nincs bauxitbánya a környéken, vagy van víz a patakokban.

 **29.** Ha A azt jelenti, hogy „sötét van”, B azt, hogy „ég a lámpa”, írd fel a következő mondatokat és a tagadásukat:

- a) A **ÉS** B b) A **VAGY** B c) **NEM A ÉS B**
 d) A **VAGY NEM B** e) **NEM A VAGY NEM B**

Megoldás: a) Sötét van, és ég a lámpa. Nincs sötét vagy nem ég a lámpa. b) Sötét van, vagy ég a lámpa. Nincs sötét, és nem ég a lámpa. c) Nincs sötét, és ég a lámpa. Sötét van, vagy nem ég a lámpa. d) Sötét van, vagy nem ég a lámpa. Nincs sötét, és ég a lámpa. e) Nincs sötét, vagy nem ég a lámpa. Sötét van, és ég a lámpa.

Módszertani megjegyzés:

A szigorúan vett törzsanyag ennél a pontnál befejeződik. A 30.- 33. feladatok elsősorban az informatika iránt érdeklődő tanulóknak és a jobb képességűeknek szólnak (ui. az informatika képzésében a matematikai logikának nagy szerepe van). Döntenie kell a tanárnak: továbbhalad, vagy az eddig kihagyott, vagy esetleg a Vegyes feladatokból ad fel további gyakorló példákat a gyerekeknek. Ezt segítő javaslom az alábbi, pár perces diagnosztikát elvégezni a tanulócsoporton. Ennek eredménye szerint gyakoroljon tovább, vagy lépjen tovább a következő feladatokra.

DIAGNOSZTIKA**Javasolt kérdések:**

Kijelentés-e, vagy sem:

A Voyager űrszonda átlépte a Naprendszer határát. (Igen)

Az Internet a XX. század egyik csodájának számít. (Nem)

A rózsát mindenki szereti. (Nem)

Mi a logikai értéke a következő kijelentéseknek:

A négyzet paralelogramma. (Igaz)

Az óceán vizét meg lehet inni, és lehet sétálgatni a partján. (Hamis)

A multimédiás számítógép olvasni tudja a CD-t vagy írni tudja a DVD-t. (Igaz)

John Lennon nem volt Beatles-tag, vagy Gagarin nem volt űrhajós. (Hamis)

Tagadd a következő kijelentéseket:

Elmegyek a boltba, vagy megfürdök. (Nem megyek el a boltba, és nem fürdök meg)

A kockával nem hatost dobott, és nem sok pénzt nyert. (A kockával hatost dobott, vagy sok pénzt nyert)


Maga vagy sokat mozog, vagy nem eszik semmit. (Maga nem sokat mozog, és sokat eszik)

Nem megyek oda, és nem szidom le a gyereket. (Odamegyek, vagy leszidom a gyereket)

Vagy kifulladt a gyors tempótól, vagy begörcsölt a lába. (Nem fulladt ki, és nem görcsölt be a lába)

VII. Feladatok

A következő feladatok elsősorban informatika iránt érdeklődő diákoknak ajánlottak.

 **30.** Mi a logikai értéke a következő kijelentéseknek:

- $\text{NEM } (2 \geq 2) \text{ VAGY } (4 \geq 4) \text{ VAGY } (1 \geq 0)$
- $\text{NEM } ((2 \geq 3) \text{ \text{ÉS} } (4 \geq 6)) \text{ \text{ÉS} } (1 \geq 0)$
- $(2 \leq 3) \text{ \text{ÉS} } (8 \leq 6) \text{ VAGY } \text{NEM } (1 \leq 2)$
- $(2 \leq 3) \text{ VAGY } \text{NEM } (8 \leq 6) \text{ \text{ÉS} } (2 > 3)$
- $(2 < 3) \text{ \text{ÉS} } \text{NEM } ((8 < 6) \text{ VAGY } (1 = 2))$

Megoldás: a) igaz; b) hamis; c) hamis; d) hamis; e) igaz.

 **31.** Értékelj ki a következő kifejezéseket, ha A és D igaz, B és C hamis;

- $A \text{ VAGY } (\text{NEM } B \text{ \text{ÉS} } C)$
- $(\text{NEM } A \text{ VAGY } B) \text{ \text{ÉS} } \text{NEM } (A \text{ \text{ÉS} } \text{NEM } C)$
- $\text{NEM } ((A \text{ VAGY } B) \text{ VAGY } (A \text{ \text{ÉS} } B));$
- $(A \text{ \text{ÉS} } \text{NEM } (B \text{ VAGY } C)) \text{ \text{ÉS} } (D \text{ \text{ÉS} } \text{NEM } (A \text{ VAGY } C));$

Megoldás: a) igaz; b) hamis; c) hamis; d) hamis.

 **32.** Írd fel a következő kifejezések igazságtáblázatát:

- $A \text{ VAGY } (\text{NEM } B)$
- $\text{NEM } A \text{ \text{ÉS} } \text{NEM } B$
- $\text{NEM } (A \text{ \text{ÉS} } B) \text{ VAGY } B$
- $A \text{ \text{ÉS} } \text{NEM } B \text{ VAGY } (\text{NEM } A \text{ \text{ÉS} } B)$

Megoldás:

A	B	a)	b)	c)	d)
<i>igaz</i>	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>	<i>hamis</i>	<i>igaz</i>	<i>hamis</i>
<i>igaz</i>	<i>hamis</i>	<i>igaz</i>	<i>hamis</i>	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>
<i>hamis</i>	<i>igaz</i>	<i>hamis</i>	<i>hamis</i>	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>
<i>hamis</i>	<i>hamis</i>	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>	<i>hamis</i>

Módszertani megjegyzés:

A c)-nél A és B minden lehetséges értéke mellett igaz logikai érték jön ki eredménynek. Az ilyen kifejezéseket azonosan igaz kifejezésnek, más néven tautológiának hívjuk. Ilyen az A

VAGY NEM A kifejezés is. Általában a matematikai logika egyik fontos feladata az, hogy egy formuláról eldöntse, hogy az tautológia-e, vagy sem. Ennek egyik igazolása éppen a kifejezés igazságtáblázatának elkészítése.

- 🏠 **33.** Milyen logikai művelet szemléltethető két kapcsoló párhuzamos, illetve soros kapcsolásával?

Megoldás: a párhuzamos a VAGY, a soros kapcsolás az ÉS-nek felel meg.

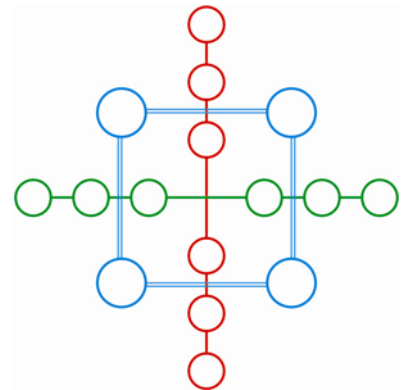
Vegyes feladatok (csak a tanári kézikönyvben szerepelnek)

- 🏠 **34.** A neve és a lakhelye magában foglalja a foglalkozását.
Mit dolgozik ez a hölgy?

MERKANI MÁRTA
TATA

Megoldás: Matematika tanár.

- 🏠 **35.** Helyezd el 0-tól 15-ig úgy a számokat a körökben, hogy az azonos színű körökben a számok összege egyaránt 40 legyen!



Megoldás: A négyzet csúcsaiban 3, 14, 15, 8; a 6 kört tartalmazó vonalak köreibben: 7, 5, 13, 12, 1, 2, illetve 4, 10, 11, 9, 0, 6.

- 🏠 **36.** Egy eset kivizsgálásakor feladták a nyomozónak a leckét. A kérdés az volt, hogy ki lőtt.

Kiss azt mondta: Kovács vagy Mészáros lőtt.

Nagy azt mondta: Mészáros lőtt.

Kovács azt mondta: nem én lőttem.

Mészáros azt mondta: én sem.

A szemtanú azt mondta: hárman igazat mondanak.

Megoldás: Mészáros lőtt, és ő hazudik.

41. Egy 6 és egy 7 literes edénnyel hogyan lehet megtölteni egy 50 literes hordót a kútból?

Megoldás:

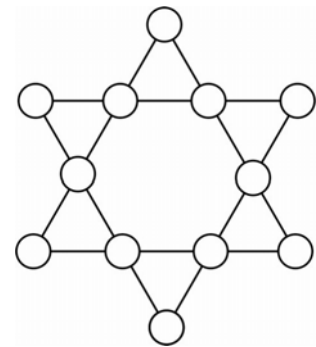
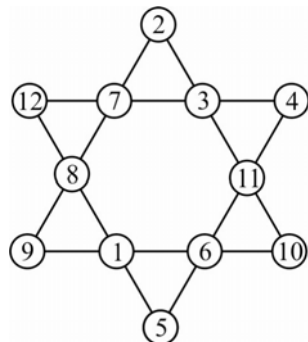
$6a + 7b = 50$ átalakítása után b -t kifejezve látjuk, hogy $50 - 6a$ kifejezés 7 többszöröse. Mivel egész szám, ez csak úgy lehetséges, ha $a = 6$, amiből $b = 2$. Tehát 6-szor 6 litert és 2-szer 7 litert kell bele mérni. Vagy $50 \cdot (7 - 6)$, azaz megtöltjük a 7 literes edényből a 6 literest, és a maradék 1 litert öntjük a hordóba (legrosszabb eset). Jobb lehetőség, ha kevesebbet öntünk ki, például $7 \cdot 7 + (7 - 6)$; $7 \cdot 6 + 8 \cdot (7 - 6)$; ...

42. A 2, 3, 5, 10, 25, 50 számokat kapcsold össze a megfelelő műveleti jelekkel úgy, hogy az eredmény 607 legyen.

Megoldás: $(50 : 2) \cdot 25 - 10 - 5 - 3 = 607$

43. Helyezd el 1-12-ig a számokat a körökbe úgy, hogy összegük minden vonal mentén megegyezzen.

Megoldás:



44. Írd be a számokat 1 – től 9 – ig a táblázat celláiba úgy, hogy szorzatuk a megadott számokat adja!

			28
			135
			96
10	126	288	

Megoldás:

1	7	4	28
5	3	9	135
2	6	8	96
10	126	288	

45. Helyezz át egy pálcát úgy, hogy igazzá váljon a felirat!

Megoldás:

$11111 \neq 11111$

$11111 \neq 11111$

Kislexikon

Kijelentés: olyan mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Egy kijelentésnek kétféle **logikai értéke** lehet: **igaz** vagy **hamis**.

Tagadás: logikai művelet, amely egy kijelentés igazságértékét ellentettjére változtatja: az igazból hamisat, a hamisból igazat csinál.

Ha két kijelentést ÉS-sel összekapcsolunk, akkor az csak abban az esetben lesz igaz, ha mindkét kijelentés logikai értéke igaz. Ez a logikai művelet a **konjunkció**. A konjunkció halmazelméleti megfelelője a metszetképzés.

Ha két kijelentést VAGY-gyal összekapcsolunk, akkor az abban az esetben lesz igaz, ha valamelyik, vagy mindkét kijelentés logikai értéke igaz. Ez a logikai művelet a **diszjunkció**. A diszjunkció halmazelméleti megfelelője az egyesítés (unió).