I. Egyszerű egyenletek

Módszertani megjegyzés: **Csoportalakítás**. Mindenkinek adunk egy kártyát, melyen azonos időtartamot meghatározó kifejezések vannak. Ez a kiosztás lehet véletlenszerű: például a tanulók maguk húznak egy-egy kártyát a tanári asztalról, lehet tudatos: figyelünk arra, hogy kinek melyik kártyát adjuk. Az azonos kifejezést jelentő kártyák tulajdonosai alkotnak egy csoportot. Ezen az órán ők dolgoznak együtt.

17.1 kártyakészlet alkalmazása

$\frac{9}{6}$ óra	1,5 óra	90 perc	Másfél óra
$\frac{1}{4}$ óra	0,25 óra	15 perc	Fertály óra
$\frac{1}{24}$ nap	$\frac{6}{6}$ óra	60 perc	3600 másodperc
$\frac{3}{5}$ óra	0,6 óra	36 perc	Fél óra és 6 perc
$\frac{9}{12}$ óra	0,75 óra	45 perc	Háromnegyed óra
$\frac{1}{5}$ óra	0,2 óra	12 perc	720 másodperc
$\frac{1}{6}$ óra	$\frac{1}{144}$ nap	10 perc	600 másodperc
$\frac{1}{3}$ óra	$\frac{1}{72}$ nap	20 perc	1200 másodperc

Módszertani megjegyzés: A tanulók az előbb megalakult 4 fős csoportokban dolgoznak tovább. Kiosztjuk a feladatokat, differenciálva a tanulók képességei szerint. A csoport mindegyik tagja más-más feladatot kap, melyet önállóan old meg. A csoportok munkáját tartsuk figyelemmel, nyújtsunk segítséget az elakadóknak. Az önálló feladatmegoldás után a csoport megismerkedik minden feladattal. Minden tanuló ismerteti saját megoldását a csoporton belül, ezt közösen megvitatják. Húzzunk egy feladatszámot és egy csoportjelet. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek a csoport jelét és feladatszámát kihúzza a tanár. A többi csoport véleményezi, hogy jó megoldást hallottak-e. Hozzáfűzhetik, ha ők esetleg másképpen gondolkodtak, megbeszélhetik, melyik megoldás az egyszerűbb.

Mintapélda₁

Egy könyvszekrény felső polcán háromszor annyi és még 6 könyv van, mint az alsó polcon. Dani a felső polcról 8 könyvet áttesz az alsó polcra, így ott a felső polcon található könyvek felénél 3-mal több könyv lesz. Hány darab könyv van most az alsó, ill. a felső polcon? Hány könyve van Daninak összesen?

Megoldás:

Jelöljük az alsó polcon található könyvek számát x-szel.

Ekkor a felső polcon: $3x + 6$ darab könyv van.

$$\frac{3x+6-8}{2}-3=x+8$$

$$3x-2-6=2x+16$$

$$x=24$$

Daninak jelenleg az alsó polcon: $x+8=24+8=32$, a felső polcon: $3\cdot 24+6-8=70$ darab könyve van, így összesen 102 darab könyve van.

Ellenőrzés: 70 fele: 35 tényleg 3-mal több a 32-nél.

Mintapélda₂

Egy 36 éves anyának 6 éves fia van. Hány év múlva lesz az anya háromszor annyi idős, mint a fia?

Megoldás:

	Anya	Fia
Most	36	6
x év múlva	$36 + x$	$6 + x$

$$36+x=3(6+x)$$

$$18=2x$$

$$x=9$$

9 év múlva lesz az anya háromszor annyi idős, mint a fia.

Ellenőrzés: 9 év múlva az anya 45 éves, a fia 15 éves lesz és $15\cdot 3=45$.

Egyenletek megoldásakor fontos szerepe van annak, hogy mi az alaphalmaz. Ismételjük át közösen, hogy milyen halmazokat ismerünk, és ezeket hogyan jelöljük.
Módszertani megjegyzés: A tanulók csoportokban dolgozva, próbálják átgondolni, hogy milyen számhalmazokat ismernek. Egy lehetséges módszer, hogy akinek a csoport jelét, és számát kihúzza a tanár, az ír egy halmazt a táblára, majd választ egy tanulót, akitől azt kéri, hogy írja fel a jelét az általa felírt halmazhoz.

Természetes számok halmaza **N**, Egész számok halmaza **Z**, Racionális számok halmaza **Q**, Valós számok halmaza **R**, Irracionális számok halmaza **Q***

Minden egyenlethez tartozik egy **alaphalmaz**, amelyben a megoldásokat keressük. Ha a feladat szövege nem adja meg előre, akkor a valós számok halmazát tekintjük alaphalmaznak. Az alaphalmaznak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az egyenletben szereplő összes kifejezés értelmezhető, az **egyenlet értelmezési tartományának** nevezzük.
Az egyenlet megoldásakor meg kell keresnünk azokat a számokat az értelmezési tartományból, amelyek kielégítik az egyenletet. Ezeket a számokat hívjuk az egyenlet **megoldásainak** vagy az egyenlet **gyökeinek**, és ezek a számok alkotják az egyenlet **megoldáshalmazát**. Amennyiben nincs olyan szám, amelyik igazzá teszi az egyenletet, akkor az egyenletnek nincsen megoldása, azaz a megoldáshalmaz az üres halmaz.

Az egyenlet megoldása során olyan átalakításokat végzünk, amelynek során egyre egyszerűbb egyenlethez jutunk. Célunk, hogy végül az egyenlet egyik oldalán csak az ismeretlen álljon, a másik oldalon egy konkrét szám. Ehhez a következő átalakításokat végezhetjük:

- Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk, illetve mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt a számot.
- Az egyenlet mindkét oldalát szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal.
- Ismeretlent tartalmazó kifejezéseket is hozzáadhatunk, illetve kivonhatunk az egyenlet mindkét oldalából.

Ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk, vagy az egyenletet négyzetre emeljük, akkor hamis gyököket kaphatunk**.** Ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel osztunk, akkor gyököket veszíthetünk. Ennek elkerülésére általában esetszétválasztást végzünk: egyik esetben megvizsgáljuk azt, amikor a kifejezés értéke nulla: ad-e megoldást, vagy sem. A másik esetben pedig az ismeretlent tartalmazó kifejezésről feltesszük, hogy nem 0, és elvégezve a „kritikus” műveletet, oldjuk tovább az egyenletet.

Feladatok

1. Oldd meg a $2x - 7 = 11$ egyenletet a racionális számok halmazán!

Megoldás:

$$2x - 7 = 11$$
$$x = 9$$

Ellenőrzés:

Hívjuk fel a figyelmet az ellenőrzés fontosságára. A mindennapi életünkben is fontos szerepet játszik az ellenőrzés. Például, ha a piacon nem ellenőrizzük, hogy az eladó jól adott-e vissza, könnyen pórul járhatunk.

Bal oldal: $2 \cdot 9 - 7 = 18 - 7 = 11$; jobb oldal: 11.

A 9 eleme az egyenlet alaphalmazának, és az ellenőrzésnél a két oldal helyettesítési értéke egyenlő, ezért az $x = 9$ valóban megoldás.

Mindig fogalmaztassuk meg a tanulókkal, hogy mi a megoldás (ne legyen elég kétszer aláhúzni).

Megoldáshalmaz: $M = \{9\}$.

2. Oldd meg a $12(4x - 7) = 16 + 3x$ egyenletet az egész számok halmazán!

Megoldás:

Figyeljünk a zárójelek helyes felbontására (disztributivitás). Gyakori hiba, hogy csak a zárójelen belüli első tagot szorozzák meg a zárójel előtt álló számmal.

$$12(4x - 7) = 16 + 3x$$
$$x = \frac{20}{9}$$

A $\frac{20}{9}$ nem eleme az egyenlet alaphalmazának, így az egyenletnek nincs megoldása.

Megoldáshalmaz: $M = \emptyset$.

3. Egy bankjegykiadó automata készlete az ünnepek előtt szinte teljesen kifogyott. Összesen 61000 Ft maradt benne 2000-es és 5000-es címletekben. Hány darab 2000-es és 5000-es maradt az automatában, ha egy híján kétszer annyi 2000-es van, mint 5000-es.

Megoldás:

Jelöljük az ötezresek számát x-szel.

Hívjuk fel a figyelmet az „egy híján kétszer annyi” kifejezésre, nem biztos, hogy mindenki pontosan érti. Próbáljuk őket rávezetni.

Ekkor a kétezresek száma: $2x - 1$.

$$(2x - 1) \cdot 2000 + x \cdot 5000 = 61000$$
$$x = 7$$

Az automatában 13 db kétezres és 7 darab ötezres maradt.

Két ismeretlennel is megoldható a feladat, például ha az ötezresek számát x-szel, a kétezresek számát y-nal jelöljük.

4. Meg tudja-e venni Tibor a 3600 Ft-os feltöltőkártyát, ha pénzének harmada 400 Ft-tal kevesebb, mint a feltöltőkártya árának a fele?

Megoldás:

Jelöljük Tibor pénzét x-szel.

$$\frac{x}{3} + 400 = \frac{3600}{2}$$

A helyes egyenlet felírásában segíthet, ha relációs jelekkel szemléltetjük, melyik a több és melyik a kevesebb. $\frac{x}{3} < \frac{3600}{2}$.

$x = 4200$

Tibornak 4200 Ft-ja van, ezért fel tudja tölteni a telefonját.

Figyeljünk arra, hogy szöveges feladatra mindig adjunk szöveges választ.

5. Tudjuk, hogy egy dobozban ötször annyi szög van, mint egy másikban. Az egyikből átraktunk a másikba 32 db szöget, így mindkét dobozban ugyanannyi szög lett. Mennyi szög volt a dobozokban eredetileg és a pakolás után?

Megoldás:

Legyen az egyik dobozban eredetileg x darab szög, ekkor a másikban 5x darab szög van.

$5x - 32 = x + 32$

$x = 16$

Így az egyik dobozban 16, a másik dobozban 80 darab szög van.

6. Enikőnek kétszer annyi gyűrűje van, mint Szandinak, Vikinek azonban 1-gyel kevesebb van, mint Szandinak és 4-gyel több, mint Anettnek. Ha összeszámolnánk Szandi, Viki és Anett gyűrűit, az pontosan annyi lenne mint amennyi Enikőnek van. Hány gyűrűje van külön-külön a lányoknak?

Megoldás:

Jelöljük Szandi gyűrűinek a számát x-szel.

$x + x - 1 + x - 5 = 2x$

$x = 6$

Enikőnek 12, Szandinak 6, Vikinek 5 és Anettnek 1 gyűrűje van.

Házi feladat javaslat: 5. és 6. feladat

II. Törtegyütthatós egyenletek

Módszertani megjegyzés: Memóriajáték: Minden csoport kap 30 darab kártyát. Feladatuk először felfelé fordítva összepárosítani az azonos értékűeket. Majd összekeverik a kártyákat, mindegyiket lefordítják és kiraknak belőle egy 6x5-ös téglalapot. Az első tanuló felfordít két kártyát, ha azonos kifejezések szerepelnek rajta, akkor az övé mind a két kártya, és még egyszer ő fordít, ha nem, akkor visszafordítja a kártyákat és jön a következő. Addig próbálkoznak, amíg az összes kártya el nem fogy. Az nyer, akihez a legtöbb kártya került. Ez a játék azon túl, hogy gyakoroltatja a szöveges feladatokban sokszor előforduló kifejezéseket fejszámolási és emlékezeterősítő gyakorlat is.

17.2 kártyakészlet alkalmazása

5 háromszorosánál 3-mal kevesebb	36 harmada	2 és 3 legkisebb közös többszöröse	20 negyedénél 1-gyel több
4 duplájának a negyede	24 hatoda	36 és 105 legnagyobb közös osztója	32 nyolcadánál eggyel kevesebb
Feleannyi, mint 48	Háromszor annyi, mint 8	Kétszerannyi, mint 5	Hatszor annyi, mint $\frac{5}{3}$
12–nek a $\frac{3}{2}$ -a	72-nek a 25%-a	16 duplája és még a 25%-a	24-nek a $\frac{5}{3}$ -e
3 és 5 legkisebb közös többszöröse	60 negyede	12 duplája és még a 25%-a	18-nak a $\frac{5}{3}$ -e
Egy híján 20	42 felénél kettővel kevesebb	14 másfélszerese	28-nak a $\frac{3}{4}$ -e
3 és 7 legkisebb közös többszöröse	28-nak a 75%-a	42-nek a másfélszerese	84-nek a $\frac{3}{4}$ -e
55 és 88 legnagyobb közös osztója	56 nyolcadánál néggyel több	Két és félszer annyi, mint 8	40 duplájának a negyede

Mintapélda$_3$

Zoli, Krisztián, Laci és István szeretnék megvenni a kedvenc Play Station játékukat. Zoli beleadott 3250 Ft-ot, Krisztián feleannyit, Laci harmadannyit, István negyedannyit fizetett, mint a többiek összesen. Mennyibe került a játék?

Megoldás:

Jelöljük x-szel a játék árát.

Krisztián feleannyit fizetett, mint a többiek összesen, vagyis kifizette a harmadát.

Laci harmadannyit fizetett, mint a többiek összesen, vagyis kifizette a negyedét.

István negyed annyit fizetett, mint a többiek összesen, vagyis kifizette az ötödét.

$$3250+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=x$$

$$195000+47x=60x$$

$$15000=x$$

A játék 15000 Ft-ba került. *Ellenőrzés*: a szöveg alapján.

Mintapélda$_4$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $\frac{3x-1}{5}-\frac{2-7x}{3}=1-\frac{4x+4}{15}$

Megoldás:

Alaphalmaz: **R**.

$$3\cdot(3x-1)-5\cdot(2-7x)=15-(4x+4)$$

$$9x-3-10+35x=15-4x-4$$

$$48x=24$$

$$x=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Ellenőrzés:

Bal oldal értéke: $\frac{3\cdot\frac{1}{2}-1}{5}-\frac{2-7\cdot\frac{1}{2}}{3}=\frac{3}{5}$; jobb oldal értéke: $1-\frac{4\cdot\frac{1}{2}+4}{15}=\frac{3}{5}$.

Az $\frac{1}{2}$ eleme az egyenlet alaphalmazának, és az ellenőrzésnél a két oldal helyettesítési értéke egyenlő, ezért az $x=\frac{1}{2}$ valóban megoldás.

Megoldáshalmaz: $M=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Feladatok

7. Egy osztály tanulóinak $\frac{1}{6}$-a jár gyalog az iskolába, $\frac{2}{3}$-a jár valamilyen tömegközlekedési eszközzel, a többi 5 diákot kocsival hozzák. Hány tanulója van az osztálynak? Hányan jönnek gyalog, és hányan valamilyen járművel?

Megoldás: (egyenlettel)

Jelöljük az osztály létszámát x-szel.

$$\frac{1}{6}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot x+5=x$$
$$x=30$$

Az osztály létszáma 30. Ebből $\frac{1}{6}\cdot 30=5-$en járnak gyalog, $\frac{2}{3}\cdot 30+5=25$-en járnak valamilyen járművel.

Megoldás: (következtetéssel)

Az osztály $\frac{1}{6}$-a jár gyalog és $\frac{2}{3}$-a jár valamilyen tömegközlekedési eszközzel, ez az osztály $\frac{5}{6}$-a. A többi $\frac{1}{6}$, azaz 5 gyerek kocsival érkezik. Tehát az osztálylétszám ennek 6 szorosa, azaz 30 fő. Közülük 5-en járnak gyalog, a többiek 25-en valamilyen járművel.

8. Oldd meg a $\frac{3x}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{7}{3}$ egyenletet a pozitív számok halmazán!

Megoldás:

Amikor az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a közös nevezővel, gyakran a tanulók a törtvonal eltűnésével elfelejtik kitenni a zárójelet. Hívjuk fel a figyelmet, hogy a törtvonal egyben zárójelet is jelent, és előbb írjuk fel a zárójeles, majd utána a felbontott alakot.

$$\frac{3x}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{7}{3}$$
$$9x-6(x-3)=28 \quad\Rightarrow\quad 9x-6x+18=28$$
$$x=\frac{10}{3}$$

Törtszámokkal nem nagyon szeretnek ellenőrizni a gyerekek, ez a törtekkel való nem magabiztos műveletvégzésre utal. Ezért ne sikkadjunk el az ellenőrzés megbeszélése felett, vegyük úgy, mint egy jó gyakorlást a törtekkel való számolásra.

Ellenőrzés: Bal oldal értéke: $\frac{7}{3}$; jobb oldal értéke: $\frac{7}{3}$.

Megoldáshalmaz: $M=\left\{\frac{7}{3}\right\}$.

9. Lóri szülei elutaztak, ezért édesanyja főzött egy nagy fazék töltött káposztát. Hétfőn a barátjával megette a töltelékek felét és még 6 darabot. Kedden a maradék káposzta harmadát és még 3 darabot, szerdán megette a maradék 7 tölteléket, így végre elfogyott a töltött káposzta Hány töltelék volt a fazékban hétfő reggel?

1. megoldás: (egyenlettel)

Eredetileg x töltelék volt a fazékban.

$$x-\left(\frac{x}{2}+6\right)-\left(\frac{\frac{x}{2}-6}{3}+3\right)-7=0$$

$$6x-3x-36-x+12-18-42=0$$

$$2x=84$$

$$x=42$$

Ellenőrzés: Hétfőn 21 + 6 = 27 darabot ettek meg, maradt 15, kedden 5 + 3 = 8 darabot, maradt 7, szerdán 7-et evett meg, így tényleg elfogyott a káposzta.

Hétfőn reggel 42 töltelék volt a fazékban.

2. megoldás: (következtetéssel)

„Visszafele” számolva egyenlet nélkül adódik a megoldás: $\left[(7+3)\cdot\frac{3}{2}+6\right]\cdot 2=42$.

10. Oldd meg az egyenletet a racionális számok halmazán: $3-\frac{6x+5}{4}=2-\frac{5x-1}{3}$

Megoldás:

$$36-3(6x+5)=24-4(5x-1)$$

$$36-18x-15=24-20x+4$$

$$2x=7$$

$$x=\frac{7}{2}=3{,}5$$

Ellenőrzés: Bal oldal értéke: $-3{,}5$; jobb oldal értéke: $-3{,}5$.

Megoldáshalmaz: $M=\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Egy törtegyütthatós egyenlet megoldásakor a „kényes” lépések: az alaphalmaz meghatározása, közös nevezőre hozás, beszorzásnál minden tagot meg kell szorozni, törtvonal, mint zárójel, zárójel felbontás, a megoldáshalmaz meghatározása, ellenőrzés stb.

11. Elutazás előtt zoknikat csomagolok. A fiókból kivettem három pár zoknit, majd a maradék egyharmadát. Később kivettem a fiókból még egyet, ekkor a zoknik fele maradt a fiókban. Hány pár zoknim van? Mennyit vittem magammal az utazásra?

Megoldás:

Jelöljük a zoknik számát *x*-szel.

$$3+\frac{x-3}{3}+1=\frac{x}{2}$$

$$x=18$$

18 pár zoknim van, ennek a felét azaz 9-et vittem magammal az utazásra. Ellenőrzés a szöveg alapján.

12. Fejtsd meg Diophantosz, görög matematikus sírfeliratát!

„Vén Diophantoszt rejti e kő. Bár ő maga szunnyad,
megtanította a sírt, mondja el élte sorát.
Évei egy hatodát tölté ki a gyönge gyerekkor,
még feleannyi lefolyt, s álla szakálla kinőtt.
Egy heted eltelt még, és nászágy várta a férfit,
elmúlt újra öt év, és fia megszületett.
Ez feleannyi napig láthatta a fényt idefenn, mint
atyja, mivel neki így szabta az isteni sors.
Őt gyászolva a sír felé hajlott agg Diophantosz,
négy évvel később ő is elérte a célt.
Mondd, hány esztendőt élt hát meg gyászban, örömben,
S itta az édes fényt, míg hona lett ez a sír?”

Megoldás:

Jelöljük *x*-szel Diophantosz életkorát.

$$\frac{x}{6}+\frac{\frac{x}{6}}{2}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

$$84=x$$

Dipohantosz 84 évig élt.

Ellenőrzés: Gyermekkor: $\frac{x}{6}=14\ év$; ifjúkor: $\frac{x}{12}=7\ év$; esküvőig: $\frac{x}{7}=12\ év$;

fia született: 5 év múlva; fia élt: $\frac{x}{2}=42\ év$; fia halála után: 4 év.

Összesen: $14+7+12+5+42+4=84$.

Házi feladat javaslat: 11. és 12. feladat

III. Algebrai törtes egyenletek

A következő feladatok az eddig ismert egyenletektől abban különböznek, hogy ismeretlen szerepel a nevezőben. Ilyenkor arra kell figyelni, hogy a nevező helyettesítési értéke nem lehet nulla.

Mintapélda$_5$

Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{8x-15}{x-4}-2=-\frac{6x-35}{x-4}$

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 4-től különböző egész számok halmaza. Röviden: $\mathbf{Z}\setminus\{4\}$.

Szorozzunk a közös nevezővel, $(x-4)$-gyel!

$(8x-15)-2(x-4)=-(6x-35)$

$8x-15-2x+8=-6x+35$

$12x=42$

$x=3{,}5$

Ellenőrzés:

Bal oldal értéke: $\frac{8\cdot 3{,}5-15}{3{,}5-4}-2=-28$; jobb oldal értéke: $-\frac{6\cdot 3{,}5-35}{3{,}5-4}=-28$.

Megoldáshalmaz: $M=\{3{,}5\}$.

Mintapélda$_6$

Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{3x-4}{x-3}=\frac{x+6}{3-x}+2$

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 3-tól különböző egész számok halmaza. Röviden: $\mathbf{Z}\setminus\{3\}$.

Észrevétel: $(x-3)$-nak a (-1)-szerese a $(3-x)$.

$\frac{3x-4}{x-3}=2-\frac{x+6}{x-3}$

Szorozzunk a közös nevezővel, $(x-3)$-mal!

$3x-4=2(x-3)-(x+6)$

$3x-4=2x-6-x-6$

$2x=-8$

$x=-4$

Ellenőrzés:

Bal oldal értéke: $\dfrac{3(-4)-4}{(-4)-3}=\dfrac{-12-4}{-4-3}=\dfrac{-16}{-7}=\dfrac{16}{7}$.

Jobb oldal értéke: $\dfrac{(-4)+6}{3-(-4)}+2=\dfrac{2}{7}+2=\dfrac{2+14}{7}=\dfrac{16}{7}$.

Megoldáshalmaz: $M=\{-4\}$.

Mintapélda$_7$

Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán: $\dfrac{x-1}{x-3}+\dfrac{2-x}{x+3}=\dfrac{7x-9}{x^2-9}$

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 3-tól és –3-tól különböző racionális számok halmaza. Röviden: $\mathbf{Q}\setminus\{3;-3\}$.

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{(2-x)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{7x-9}{x^2-9}$$

Szorozzunk a közös nevezővel, $(x-3)(x+3)=x^2-9$-cel!

$(x-1)(x+3)+(2-x)(x-3)=7x-9$

$x^2-x+3x-3+2x+3x-x^2-6=7x-9$

$7x-9=7x-9$

Azonosság. Az értelmezési tartomány minden eleme megoldás.

Megoldáshalmaz: $M=\{x\in\mathbf{Q}: x\neq 3,\ x\neq -3\}$.

Feladatok

13. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{2x}=11$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

$4+7=22x$

$\dfrac{1}{2}=x$

Megoldáshalmaz: $M=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

14. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{x-3}{x-4}=\frac{2}{x-4}$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{Z}\setminus\{4\}$.

$x-3=2$

$x=5$

Megoldáshalmaz: $M=\{5\}$.

15. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\frac{5}{x-3}=\frac{9-x}{x-3}+2$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{3\}$.

$5=9-x+2(x-3)$

$5=3+x$

$2=x$

Megoldáshalmaz: $M=\{2\}$.

Mintapélda$_8$

Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán!

$$\frac{8x-15}{x-4}-2=-\frac{6x-35}{x-4}$$

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 4-től különböző egész számok halmaza. Röviden: $\mathbf{Z}\setminus\{4\}$.

Szorozzunk a közös nevezővel, $(x-4)$-gyel!

$(8x-15)-2(x-4)=-(6x-35)$

$8x-15-2x+8=-6x+35$

$12x=42$

$x=3{,}5$

Ellenőrzés:

Bal oldal értéke: $\frac{8\cdot 3{,}5-15}{3{,}5-4}-2=-28$; jobb oldal értéke: $-\frac{6\cdot 3{,}5-35}{3{,}5-4}=-28$.

Megoldáshalmaz: $M=\{3{,}5\}$.

Mintapélda$_9$

Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán!

$$\frac{3x-4}{x-3}=\frac{x-6}{3-x}+2$$

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 3-tól különböző egész számok halmaza. Röviden: $\mathbf{Z}\setminus\{3\}$.

Észrevétel: $(x-3)$-nak a (-1)-szerese a $(3-x)$.

$$\frac{3x-4}{x-3}=2-\frac{x+6}{x-3}$$

Szorozzunk a közös nevezővel, $(x-3)$-mal!

$$3x-4=2(x-3)-(x+6)$$
$$3x-4=2x-6-x-6$$
$$2x=-8$$
$$x=-4$$

Ellenőrzés:

Bal oldal értéke: $\frac{3(-4)-4}{(-4)-3}=\frac{-12-4}{-4-3}=\frac{-16}{-7}=\frac{16}{7}$.

Jobb oldal értéke: $\frac{(-4)+6}{3-(-4)}+2=\frac{2}{7}+2=\frac{2+14}{7}=\frac{16}{7}$.

Megoldáshalmaz: $M=\{-4\}$.

Mintapélda$_{10}$

Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán!

$$\frac{x-1}{x-3}+\frac{2-x}{x+3}=\frac{7x-9}{x^2-9}$$

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 3-tól és –3-tól különböző racionális számok halmaza. Röviden: $\mathbf{Q}\setminus\{3;-3\}$.

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{(2-x)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{7x-9}{x^2-9}$$

Szorozzunk a közös nevezővel, $(x-3)(x+3)=x^2-9$-cel!

$$(x-1)(x+3)+(2-x)(x-3)=7x-9$$
$$x^2-x+3x-3+2x+3x-x^2-6=7x-9$$
$$7x-9=7x-9$$

Azonosság. Az értelmezési tartomány minden eleme megoldás.

Megoldáshalmaz: $M=\mathbf{Q}\setminus\{3;-3\}$.

Feladatok

16. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{22}{2x-8}=\frac{3x-1}{x-4}+2$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány $\mathbf{Z}\setminus\{4\}$.

$$22=2(3x-1)+2\cdot 2(x-4)$$
$$22=10x-18$$
$$40=10x$$
$$4=x$$

A 4 nem eleme az egyenlet értelmezési tartományának, így az egyenletnek nincs megoldása. Megoldáshalmaz: $M=\varnothing$.

Módszertani megjegyzés: Minden csoport kitalál egy algebrai törtes egyenletet és megad hozzá egy alaphalmazt, majd átadja egy másik csoportnak. Megoldják a kapott feladatokat, utána visszaküldik a feladónak, aki kijavítja és értékeli a megoldást.
Felügyeljük a feladat írását, hogy ne adjanak egymásnak túl nehéz feladatokat, csak olyanokat, amelyeket ők is meg tudnak oldani. Megnézzük az elkészült megoldásokat, hogy van-e benne hiba, de ne szóljunk érte, hanem figyeljük meg, hogy a javító csoport megtalálja-e a hibát.

17. Oldd meg a következő egyenletet a negatív számok halmazán: $\frac{3x-2}{2x+1}+6=\frac{7x+3}{2(2x+1)}$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^-\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

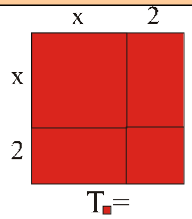
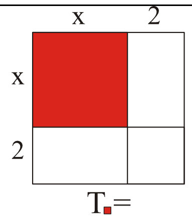
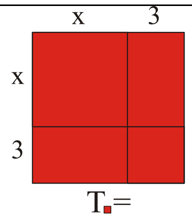
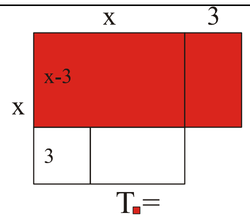
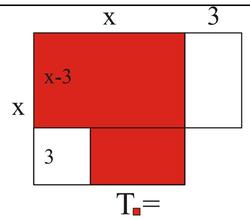
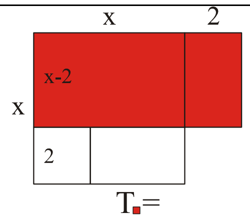
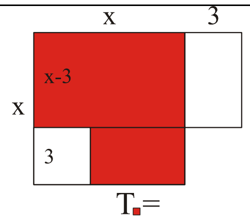
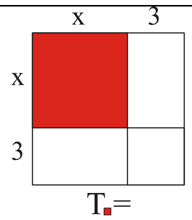
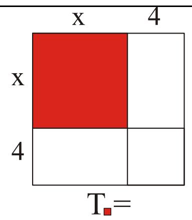
$$2(3x-2)+6\cdot 2(2x+1)=7x+3$$
$$30x+8=7x+3$$
$$23x=-5$$
$$x=-\frac{5}{23}$$

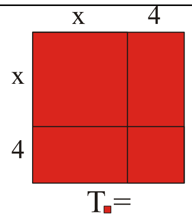
Megoldáshalmaz: $M=\left\{-\frac{5}{23}\right\}$.

Házi feladat javaslat: 17. feladat

Módszertani megjegyzés: Mindenkinek adunk egy kártyát az alábbiakból. Ez lehet véletlenszerű: például a tanulók maguk húznak egy-egy kártyát a tanári asztalról vagy tudatos: figyelünk arra, hogy kinek melyik kártyát adjuk. Az azonos kifejezést jelentő kártyák tulajdonosai alkotnak egy csoportot. Ezen az órán ők dolgoznak együtt.

17.3 kártyakészlet alkalmazása

	$(x+2)^2$	$(x+2)(x+2)$	x^2+4x+4
	$(x-2)^2$	$(x-2)(x-2)$	x^2-4x+4
	$(x+3)^2$	$(x+3)(x+3)$	x^2+6x+9
		$(x-3)(x+3)$	x^2-9
		$(x+2)(x-2)$	x^2-4
	$(x-3)^2$	$(x-3)(x-3)$	x^2-6x+9
	$(x-4)^2$	$(x-4)(x-4)$	$x^2-8x+16$

	$(x+4)^2$	$(x+4)(x+4)$	$x^2+8x+16$

Közösen oldjuk meg a feladatokat, a csoportok ötleteket adhatnak, hogy hogyan indulnának el.

18. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $\frac{2x-3}{x-4}+3=\frac{3x-1}{4-x}$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{Z}\setminus\{4\}$.

$$2x-3+3(x-4)=(-1)(3x-1)$$
$$5x-15=-3x+1$$
$$8x=16$$
$$x=2$$

Megoldáshalmaz: $M=\{2\}$.

19. Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x-7}{x-3}+\frac{6-2x}{x^2-9}=\frac{x+5}{x+3}$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{Q}\setminus\{3;-3\}$.

$$(x-7)(x+3)+6-2x=(x+5)(x-3)$$
$$x^2-7x+3x-21+6-2x=x^2+5x-3x-15$$
$$-6x-15=2x-15$$
$$-8x=0$$
$$x=0$$

Megoldáshalmaz: $M=\{0\}$.

Az előző feladatok alapján a csoportosan, vagy egyénileg megoldják az alábbi feladatokat.

20. Oldd meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán: $3=\frac{3x-5}{x-3}-\frac{5x+6}{3-x}$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{N}\setminus\{3\}$.

$3(x-3)=3x-5-(-1)(5x+6)$

$3x-9=8x+1$

$-10=5x$

$x=-2$

Megoldáshalmaz: $M=\varnothing$.

21. Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x+6}{x+4}+\frac{4-3x}{x^2-16}=\frac{x-5}{x-4}$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{Q}\setminus\{4;-4\}$.

$(x+6)(x-4)+(4-3x)=(x-5)(x+4)$

$x^2-4x+6x-24+4-3x=x^2-5x+4x-20$

$-x-20=-x-20$

Azonosság.

Az értelmezési tartománynak minden eleme megoldás.

Megoldáshalmaz: $M=\{x\in\mathbf{Q}: x\neq 4,\ x\neq -4\}$.

22. Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{3-x}{x+4}+\frac{x+2}{x-4}=\frac{13x-4}{x^2-16}$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{Q}\setminus\{4;-4\}$.

$(3-x)(x-4)+(x+2)(x+4)=13x-4$

$13x-4=13x-4$

Azonosság.

Az értelmezési tartomány minden eleme megoldás.

Megoldáshalmaz: $M=\{x\in\mathbf{Q}: x\neq 4,\ x\neq -4\}$.

23. Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x^2+3}{4-x^2}-\frac{x+2}{2-x}=\frac{3}{x+2}$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{Q}\setminus\{2;-2\}$.

$$\frac{x^2+3}{4-x^2}-\frac{(x+2)(x+2)}{(2-x)(x+2)}=\frac{3(2-x)}{(x+2)(2-x)}$$

$$x^2+3-x^2-4x-4=6-3x$$

$$x=-7$$

Megoldáshalmaz: $M=\{-7\}$.

24. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\dfrac{x^2+10x+25}{3x+15}=8$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{-5\}$.

$$\frac{(x+5)^2}{3(x+5)}=8$$

$$x+5=24$$

$$x=19$$

Megoldáshalmaz: $M=\{19\}$.

Házi feladat javaslat: 22. feladat

IV. Egyenlőtlenségek

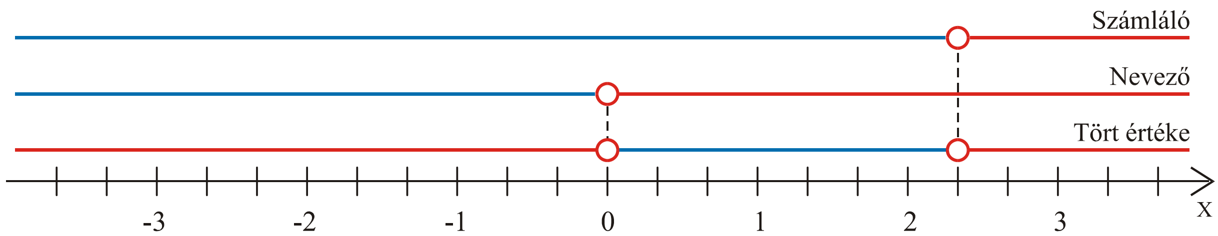
Mintapélda11

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget! A megoldáshalmazt ábrázoljuk számegyenesen!

$$\frac{3x-7}{x}<0$$

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a 0-tól különböző valós számok halmaza. Röviden: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.



Egy tört akkor és csak akkor negatív, ha a számlálója és a nevezője különböző előjelű.

I. eset VAGY II. eset

I. eset: Ha a számláló pozitív és a nevező negatív.

$$3x-7>0 \quad ÉS \quad x<0$$
$$3x>7$$
$$x>\frac{7}{3}$$

A kettő együtt sohasem teljesül, ebből az esetből nem kapunk megoldást.

II. eset: Ha a számláló negatív és a nevező pozitív.

$$3x-7<0 \quad ÉS \quad x>0$$
$$3x<7$$
$$x<\frac{7}{3}$$

A kettő együtt akkor teljesül, ha $x>0$ és $x<\frac{7}{3}$, azaz $0<x<\frac{7}{3}$.

A feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\left\{0<x<\frac{7}{3}\right\}$ más módon jelölve

$$M=\left]0;\ \frac{7}{3}\right[.$$

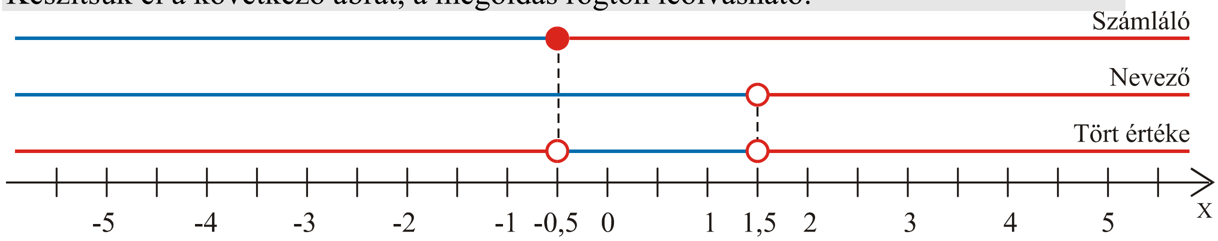
Mintapélda₁₂

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán: $\frac{2x-3}{6x+3}>0$! A megoldáshalmazt ábrázoljuk számegyenesen!

Beszéljük meg mind a háromféle megoldási módot, (előfordulhat, hogy a csoportok is különbözőképpen gondolkodnak), majd mindenki maga döntse le, hogy neki melyik módszer a legszimpatikusabb.

1. megoldás:

Készítsük el a következő ábrát, a megoldás rögtön leolvasható:



2. megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a $-\frac{1}{2}$-től különböző valós számok halmaza. Röviden: $\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Szorozzuk meg az egyenlőtlenséget $(6x+3)$-mal!

Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy ha egy egyenlőtlenséget, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk, akkor figyelnünk kell arra, hogy ez a kifejezés pozitív vagy negatív. E szerint két esetet kell megvizsgálnunk.

<u>I. eset</u> VAGY <u>II. eset</u>

I. eset:

Ha $6x+3>0$, azaz $x>-\frac{1}{2}$

Ha pozitív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya változatlan marad.

$$2x-3>0 \quad /+3$$
$$2x>3 \quad /:2$$
$$x>\frac{3}{2}$$

Ez valóban a vizsgált tartományba esik, mert $x>\frac{2}{3}>-\frac{1}{2}$.

II. eset:

Ha $6x+3<0$, azaz $x<-\frac{1}{2}$

Ha negatív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya megváltozik, megfordul a relációs jel.

$$2x-3<0 \quad /+3$$
$$2x<3 \quad /:2$$
$$x<\frac{3}{2}$$

Ennek csak egy része esik a vizsgált tartományba, ezért csak ezek a jó megoldások: $x<-\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$.

A feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M = \left\{ x < -\frac{1}{2} \text{ vagy } x > \frac{3}{2} \right\}$.

3. megoldás:

Értelmezési tartomány: $\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű.

I. eset VAGY II. eset

I. eset

Ha a számláló és a nevező is pozitív

$6x+3>0$ *ÉS* $2x-3>0$

$6x>-3$ $\quad$ $2x>3$

$x>-\frac{1}{2}$ $\quad$ $x>\frac{3}{2}$

A kettő együtt akkor teljesül, ha

$$x>\frac{3}{2}.$$

II. eset

Ha a számláló és a nevező is negatív

$6x+3<0$ *ÉS* $2x-3<0$

$6x<-3$ $\quad$ $2x<3$

$x>-\frac{1}{2}$ $\quad$ $x<\frac{3}{2}$

A kettő együtt akkor teljesül, ha

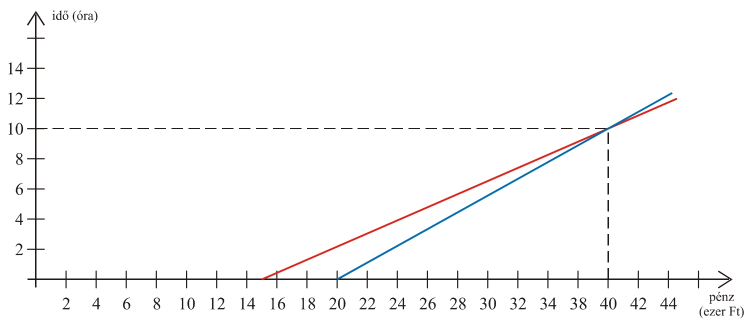
$$x<-\frac{1}{2}.$$

A feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M = \left\{ x < -\frac{1}{2} \text{ vagy } x > \frac{3}{2} \right\}$.

Feladatok

25. Isi és Marcsi az esküvőjüket szervezik. Két zenekartól kaptak ajánlatot. Az egyik zenekar 15000 Ft-ot kér előre és utána óránként 2500 Ft-ot, a másik 20000 Ft előleget kér, és óránként 2000 Ft-ot. Mit tanácsolnál Isinek és Marcsinak, melyik zenekart válassza, ha mindkét zenekar ugyanolyan jól játszik. Válaszodat indokold, készíts ábrát!

Megoldás:



	I. zenekar	II. zenekar
Előleg	15000	20000
Óradíj	2500	2000
x óra ára	$x \cdot 2500$	$x \cdot 2000$
Összesen	$15000 + 2500x$	$20000 + 2000x$

$$15000 + 2500x < 20000 + 2000x$$
$$500x < 5000$$
$$x < 10$$

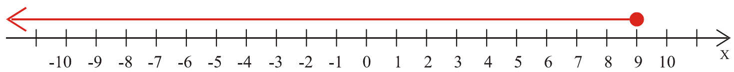
Ha 10 óránál kevesebbet játszik a zenekar, akkor az első zenekart, ha több mint 10 órát játszanak, akkor a második zenekart érdemes választani, ha pontosan 10 órát, akkor mindegy, hogy melyiket választják.

26. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! A megoldáshalmazt ábrázold számegyenesen! $-3x + 2 \geq -2x - 7$

Megoldás:

$$-3x + 2 \geq -2x - 7$$
$$x \leq 9$$

Végtelen sok megoldást ellenőrizni nem tudunk, de a feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a megoldáshalmaz: $M = \{x \leq 9\}$.

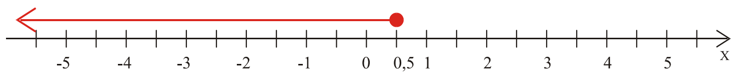


27. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! A megoldáshalmazt ábrázold számegyenesen! $\frac{3x+7}{3} - \frac{3x-1}{7} \leq 3 - \frac{2x+4}{21}$

Megoldás:

$$7 \cdot (3x + 7) - 3 \cdot (3x - 1) \leq 63 - (2x + 4)$$
$$12x + 52 \leq -2x + 59$$
$$x \leq \frac{1}{2}$$

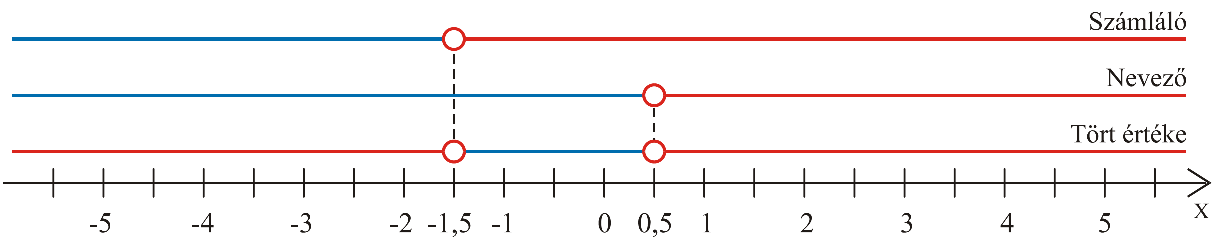
A feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a megoldáshalmaz: $M=\left\{x\le\frac{1}{2}\right\}$



28. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget! A megoldáshalmazt ábrázold számegyenesen!

$$\frac{2x+3}{4x-2}>0$$

Megoldás:



Egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű.

I. eset VAGY II. eset

I. eset		II. eset
Ha a számláló és a nevező is pozitív	VAGY	Ha a számláló és a nevező is negatív
$2x+3>0$ *ÉS* $4x-2>0$		$2x+3<0$ *ÉS* $4x-2<0$
$x>-\frac{3}{2}$ $\quad x>\frac{1}{2}$		$x<-\frac{3}{2}$ $\quad x<\frac{1}{2}$
A kettő együtt akkor teljesül, ha		A kettő együtt akkor teljesül, ha
$x>\frac{1}{2}$.		$x<-\frac{3}{2}$.

A feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\left\{x<-\frac{3}{2}\text{ vagy }x>\frac{1}{2}\right\}$.

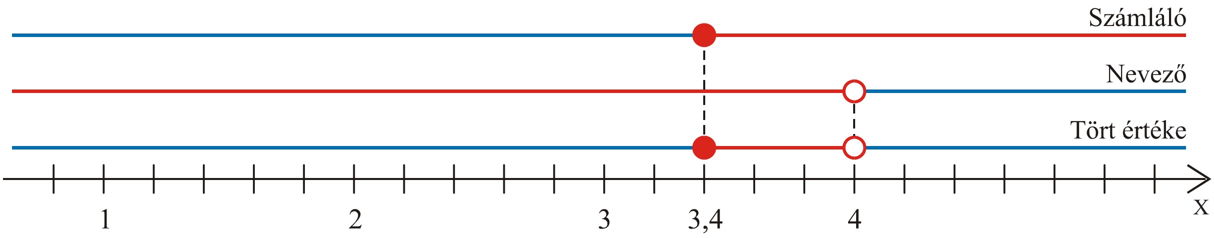
29. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget! A megoldáshalmazt ábrázold számegyenesen!

$$\frac{2x-5}{4-x}\geq 3$$

Megoldás:

$$\frac{2x-5}{4-x}-3\geq 0$$

$$\frac{5x-17}{4-x}\geq 0$$



Egy tört akkor és csak akkor nem negatív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű, illetve a számláló lehet 0 is.

I. eset VAGY II. eset

I. eset: Ha a számláló nem negatív és a nevező pozitív.

$$5x-17\geq 0 \quad \text{ÉS} \quad 4-x>0$$

$$5x\geq 17 \qquad 4>x$$

$$x\geq\frac{17}{5}$$

A kettő együtt akkor teljesül, ha

$$\frac{17}{5}\leq x<4.$$

II. eset: Ha a számláló nem pozitív és a nevező negatív.

$$5x-17\leq 0 \quad \text{ÉS} \quad 4-x<0$$

$$5x\leq 17 \qquad 4<x$$

$$x\leq\frac{17}{5}$$

A kettő együtt sohasem teljesül, ebből az esetből nem kapunk megoldást.

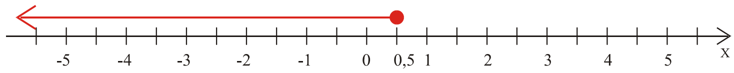
A feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\left\{\frac{17}{5}\leq x<4\right\}$ vagy $M=\left[\frac{17}{5};4\right[$.

30. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget! A megoldáshalmazt ábrázold számegyenesen!
$$\frac{2x+12}{7}-\frac{3x+1}{3}\geq 1+\frac{5x-3}{21}$$

Megoldás:

$$3\cdot(2x+12)-7\cdot(3x+1)\geq 21+(5x-3)$$
$$-15x+29\geq 5x+19$$
$$x\geq\frac{1}{2}$$

A feladat megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk, így a megoldáshalmaz: $M=\left\{x\geq\frac{1}{2}\right\}$.



Az **egyenlőtlenségek megoldásakor** a következő műveleteket végezhetjük:

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk, illetve mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt a számot.

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal a pozitív számmal.

Ismeretlent tartalmazó kifejezéseket is hozzáadhatunk, illetve kivonhatunk az egyenlőtlenség mindkét oldalából.

Ha negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk az egyenlőtlenséget, akkor megváltozik az egyenlőtlenség iránya. Ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk vagy osztunk, akkor figyelnünk kell arra, hogy az lehet pozitív, negatív, illetve nulla is (esetszétválasztást végzünk).

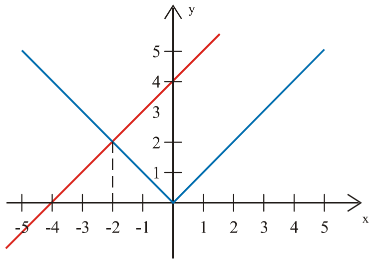
Házi feladat javaslat: 30. feladat

V. Abszolútértékes egyenletek

Mintapélda13

Oldjuk meg a valós számok halmazán az $|x| = 4 + x$ egyenletet!

1. megoldás (grafikus):



2. megoldás (algebrai):

I. eset VAGY II. eset

I. eset

Feltétel: $x \geq 0$

Ha az abszolútérték jelen belül álló kifejezés nemnegatív, akkor a szám abszolútértéke önmaga, azaz elhagyhatjuk az abszolútérték jelet:

$$x = 4 + x$$
$$0 = 4$$

Ellentmondás. Ebben a tartományban nem kaptunk megoldást.

II. eset

Feltétel: $x < 0$

Ha az abszolútérték jelen belül álló kifejezés negatív, akkor a szám abszolútértéke a szám ellentettje:

$$-x = 4 + x$$
$$-2x = 4$$
$$x = -2$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, mert $x = -2 < 0$.

Ellenőrzés: Bal oldal értéke: $|-2| = 2$; jobb oldal értéke: $4 + (-2) = 2$.

A két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M = \{-2\}$.

Mintapélda$_{14}$

Oldjuk meg a $|2x-1|=3x-3$ egyenletet!

Megoldás:

I. eset VAGY II. eset

<u>I. eset</u>

Feltétel: $x \ge \frac{1}{2}$

Ha az abszolútérték jelen belül álló kifejezés nem negatív, akkor a szám abszolútértéke önmaga, azaz elhagyhatjuk az abszolútérték jelet:

$$2x-1=3x-3$$
$$x=2$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

<u>II. eset</u>

Feltétel: $x < \frac{1}{2}$

Ha az abszolútérték jelen belül álló kifejezés negatív, akkor a szám abszolútértéke a szám ellentettje:

$$-(2x-1)=3x-3$$
$$-2x+1=3x-3$$
$$4=5x$$
$$x=\frac{4}{5}$$

Ez az érték nem felel meg az $x<\frac{1}{2}$ feltételnek, így az eredeti egyenletnek sem lesz gyöke.

Ellenőrzés: Bal oldal értéke: $|2\cdot 2-1|=3$; jobb oldal értéke: $3\cdot 2-3=3$.

A két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\{2\}$.

Legyen *a* tetszőleges algebrai kifejezés. *a* abszolútértéke: $|a|=\begin{cases} a, \text{ ha } a\ge 0 \\ -a, \text{ ha } a<0 \end{cases}$.

Feladatok

31. Jelöld számegyenesen azokat a számokat,

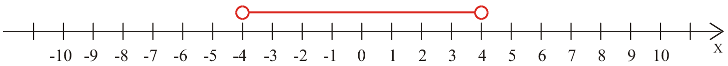
a) amelyeknek 0-tól való távolsága kisebb 4-nél;

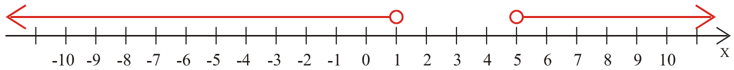
b) amelyeknek 3-tól való távolsága nagyobb 2-nél;

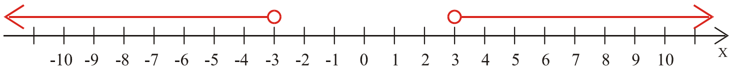
c) amelyeknek abszolútértéke nagyobb 3-nál;

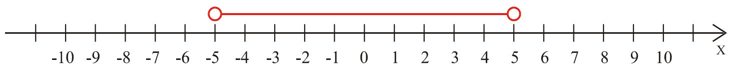
d) amelyeknek abszolútértéke kisebb 5-nél.

Megoldás:

a) 

b) 

c) 

d) 

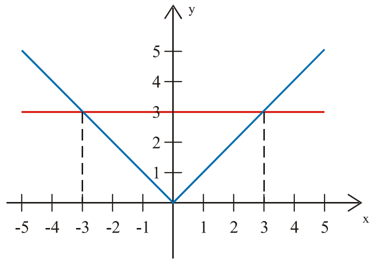
32. Melyik az a szám, amelynek az abszolútértéke 3?

Megoldás:

$$|x| = 3$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$



33. Oldd meg az $|x| = 5 + 3x$ egyenletet!

Megoldás:

I. eset	VAGY	II. eset
Feltétel: $x \geq 0$		Feltétel: $x < 0$
$x = 5 + 3x$		$-x = 5 + 3x$
$-5 = 2x$		$-4x = 5$
$x = -\frac{5}{2}$		$x = -\frac{5}{4}$
Ez az érték nem felel meg az $x \geq 0$ feltételnek, így az eredeti egyenletnek sem lesz gyöke.		Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

A két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

34. Oldd meg a racionális számok halmazán a $|2x-3|=4$ egyenletet!

Megoldás:

<u>I. eset</u> VAGY <u>II. eset</u>

<u>I. eset</u>

Feltétel: $2x-3\ge 0$, azaz ha $x\ge \frac{3}{2}$

$$2x-3=4$$
$$2x=7$$
$$x=\frac{7}{2}=3{,}5$$

Ez a szám, a feltételben meghatározott tartományba esik, mert

$$x=\frac{7}{2}\ge\frac{3}{2}.$$

<u>II. eset</u>

Feltétel: $2x-3<0$, azaz ha $x<\frac{3}{2}$

$$-(2x-3)=4$$
$$-2x+3=4$$
$$-2x=1$$
$$x=-\frac{1}{2}=-0{,}5$$

Ez a szám, a feltételben meghatározott tartományba esik, mert

$$x=-\frac{1}{2}<\frac{3}{2}.$$

A két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\left\{-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$.

35. Oldd meg a $|3x+2|=7x-2$ egyenletet!

Megoldás:

<u>I. eset</u> VAGY <u>II. eset</u>

<u>I. eset</u>

Feltétel: $3x+2\ge 0$, azaz ha $x\ge -\frac{2}{3}$

$$3x+2=7x-2$$
$$4=4x$$
$$x=1$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, mert $x=1\ge -\frac{2}{3}$.

<u>II. eset</u>

Feltétel: $3x+2<0$, azaz ha $x<-\frac{2}{3}$

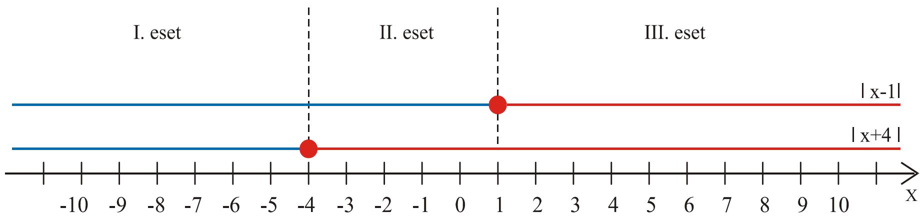
$$-(3x+2)=7x-2$$
$$-3x-2=7x-2$$
$$0=10x$$
$$x=0$$

Ez a feltételben megadott tartományon kívül esik, ezért ebben a tartományban nem kaptunk megoldást.

A két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\{1\}$.

36. Oldd meg az egész számok halmazán az $|x+4|+|x-1|=9$ egyenletet!

Megoldás:



<u>I. eset</u> VAGY <u>II. eset</u> VAGY <u>III. eset</u>

<u>I. eset</u>

Feltétel: $x<-4$

$$-(x+4)-(x-1)=9$$
$$-x-4-x+1=9$$
$$-2x-3=9$$
$$-2x=12$$
$$x=-6$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, mert

$$x=-6<-4.$$

<u>II. eset</u>

Feltétel: $-4\le x<1$

$$x+4-(x-1)=9$$
$$x+4-x+1=9$$
$$5=9$$

Ellentmondás. Ebben a tartományban nem kaptunk megoldást.

<u>III. eset</u>

Feltétel: $1\le x$

$$x+4+x-1=9$$
$$2x+3=9$$
$$2x=6$$
$$x=3$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, mert

$$x=3\ge 1.$$

A három esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz $M=\{-6, 3\}$.

Mindenkinek adjunk egy kártyát, amelyen abszolútérték-jelet tartalmazó algebrai kifejezések állnak. Írjuk a táblára a következő három kifejezést: $\left|\frac{6x+12}{2}\right|$, $\left|\frac{6x+12}{3}\right|$, $\left|\frac{6x+12}{6}\right|$, valamint nyissunk egy „egyik sem” rovatot is. Minden tanuló feladata az, hogy elhelyezze a saját kártyáját az alá a kifejezés alá, amelyikkel egyenlő, vagy ha nem talál ilyet, akkor az egyik sem rovat alá. Közösen beszéljük meg, hogy minden kártya jó helyre került-e.

17. 4 kártyakészlet alkalmazása

$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{2}$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{3}$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{6}$	$3\cdot\lvert x\rvert+6$
$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{\lvert 2\rvert}$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{\lvert 3\rvert}$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{\lvert 6\rvert}$	$-\lvert 3\rvert\cdot\lvert x+2\rvert$
$\lvert 3\mathrm{x}+6\rvert$	$\lvert 2x+4\rvert$	$\lvert x+2\rvert$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{-\lvert 2\rvert}$
$3\cdot\lvert x+2\rvert$	$2\cdot\lvert x+2\rvert$	$\frac{\lvert 12x+24\rvert}{\lvert 12\rvert}$	$2\cdot\lvert x\rvert+4$
$\lvert 3\rvert\cdot\lvert x+2\rvert$	$\lvert 2\rvert\cdot\lvert x+2\rvert$	$\frac{\lvert 12x+24\rvert}{\lvert -12\rvert}$	$-\lvert 2\rvert\cdot\lvert x+2\rvert$
$\left\lvert\frac{6x}{2}+\frac{12}{2}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{6x}{3}+\frac{12}{3}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{6x}{6}+\frac{12}{6}\right\rvert$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{-\lvert 3\rvert}$
$\lvert -3\rvert\cdot\lvert x+2\rvert$	$\lvert -2\rvert\cdot\lvert x+2\rvert$	$\lvert -1\rvert\cdot\lvert x+2\rvert$	$\lvert x\rvert+2$
$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{\lvert -2\rvert}$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{\lvert -3\rvert}$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{\lvert -6\rvert}$	$\frac{\lvert 6x+12\rvert}{-\lvert 6\rvert}$

37. Oldd meg az $|5x+7|=12$ egyenletet!

Megoldás:

I. eset VAGY II. eset

<u>I. eset</u>

Feltétel: $x \geq -\frac{7}{5}$

$$5x+7=12$$
$$5x=5$$
$$x=1$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

<u>II. eset</u>

Feltétel: $x < -\frac{7}{5}$

$$-(5x+7)=12$$
$$-5x-7=12$$
$$-5x=19$$
$$x=-\frac{19}{5}$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

A két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\left\{1;-\frac{19}{5}\right\}$.

38. Oldd meg az $|5x-3|=2x-1$ egyenletet!

Megoldás:

I. eset VAGY II. eset

<u>I. eset</u>

Feltétel: $x \geq \frac{3}{5}$

$$5x-3=2x-1$$
$$3x=2$$
$$x=\frac{2}{3}$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

<u>II. eset</u>

Feltétel: $x < \frac{3}{5}$

$$-(5x-3)=2x-1$$
$$-5x+3=2x-1$$
$$4=7x$$
$$x=\frac{4}{7}$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

A két esetet összevetve azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M=\left\{\frac{2}{3};\frac{4}{7}\right\}$.

Házi feladat javaslat: 37. és 38. feladat

VI. Kétismeretlenes egyenletrendszerek

Behelyettesítő módszer

Mintapélda15

Két testvér a bérletpénztárnál jegyet vásárol. Az egyik 2 vonaljegyért és egy átszálló jegyért 630 Ft-ot, a másik 6 vonaljegyért és 4 átszállójegyért 2180 Ft-ot fizet. Mennyibe kerül egy vonaljegy és egy átszállójegy?

Megoldás:

Jelöljük a vonaljegyek árát x-szel, az átszálló jegyekét y-nal. Így a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 630 \\ 6x + 4y = 2180 \end{array}\right\}$$

Az első egyenletből fejezzük ki y-t: $y = 630 - 2x$

Ezt helyettesítsük be a második egyenletbe, y helyére:

$$6x + 4(630 - 2x) = 2180$$

$$6x + 2520 - 8x = 2180$$

$$-2x = -340$$

$$x = 170$$

Az x-et ismerve y-t visszahelyettesítéssel kiszámíthatjuk:

$$y = 630 - 2x = 630 - 2 \cdot 170 = 630 - 340 = 290$$

Egy vonaljegy 170 Ft, míg egy átszállójegy 290 Ft-ba kerül. Ellenőrzés a szöveg alapján.

Behelyettesítő módszer

A kétismeretlenes egyenletrendszer egyik egyenletéből kifejezzük valamelyik ismeretlent és a kapott kifejezést, behelyettesítjük a másik egyenletbe. Így egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, ezt megoldva megkapjuk az egyik ismeretlent. Ennek segítségével kiszámítjuk a másik ismeretlent is.

Feladatok

Fejtörő feladat az óra elejére, hogy „bemelegedjenek” az agytekervények.

39. 17 perc múlva kezdődik a U2 együttes koncertje. A 4 fős társaságnak már csak egy hídon kell átkelnie, hogy odaérjen. Viszont a híd egyszerre csak 2 embert bír el. Azonkívül sötét van és világítás nélkül egy tapodtat sem tudnak megtenni, de szerencsére van egy zseblámpájuk. Tehát valaki világít és átkísér egy embert, aztán vissza kell vinni a zseblámpát (átdobni nem tudják), stb. Az egyik ember 1 perc alatt ér át a hídon, a másik 2 perc alatt, a harmadik 5 perc alatt, a negyedik 10 perc alatt. Milyen sorrendben menjenek át, hogy 17 perc múlva mind a négyen a híd túloldalán legyenek?

Megoldás:

Erősítsük meg a gyerekekben, hogy semmiféle trükk nincs a feladatban és létezik megoldás. Sokan úgy gondolkodnak, hogy a leggyorsabbak ingáznak a hídon, a megoldás kulcsa abban rejlik, hogy az a leggyorsabb, ha a két leglassúbb ember egyszerre cammog át a hídon.

Először menjen át a hídon a 2 perces és az 1 perces. Ez összesen 2 percet vesz igénybe, majd hozza vissza a lámpát az, aki 1 perc alatt ér át. Eddig három perc telt el. Adja át a lámpát a másik két barátjának (az 5 percesnek és a 10 percesnek) akik együtt átcammognak a hídon. 13 perc telt el összesen. Ők átadják a lámpát a 2 percesnek, aki átszalad a hídon az utolsó emberért. Most tartunk 15 percnél. Ketten együtt visszajönnek, ami szintén 2 percet vesz igénybe. Most telt le a 17 perc, kezdődhet a koncert.

40. Űrlények két faja érkezett a földre. Az egyik fajnak 3 feje és 7 lába, a másiknak 2 feje és egy lába van. Összesen 46 fejük és 89 lábuk van. Hány űrlény érkezett az egyes fajokból?

Megoldás:

Az egyik faj képviselőinek számát jelöljük x-szel, a másikét y-nal.

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y&=46 \\ 7x+y&=89 \end{aligned}\right\}$$

Ebből $y=89-7x$, ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$3x+2(89-7x)=46$

$12=x$

Ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletrendszer egyik egyenletébe kapjuk, hogy $y=89-7x=89-7\cdot 12=89-84=5$.

Ellenőrzés a szöveg alapján.

Tehát a háromfejűekből 12, míg a kétfejűekből 5 űrlény érkezett a földre.

41. Oldd meg a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned} x+5y&=7 \\ x-3y&=-1 \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

A második egyenletből: $x=3y-1$

Behelyettesítve az első egyenletbe: $y=1$

A megoldás a $(2;1)$ rendezett számpár.

42. Oldd meg a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned} x+3y&=9 \\ 3x-5y&=-22 \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

A első egyenletből: $x=9-3y$

Behelyettesítve a második egyenletbe: $y=\frac{7}{2}=3{,}5$

$x=9-3y=-1{,}5$

A megoldás a $(-1{,}5;3{,}5)$ rendezett számpár.

43. Három szám közül a középső ugyanannyival nagyobb a legkisebbnél, mint a legnagyobb a középsőnél. A két kisebb szám szorzata 85, a két nagyobbé 115. Melyek ezek a számok?

Megoldás:

Legyen a három szám: $x<y<z$, ekkor $\left.\begin{aligned} y-x&=z-y \\ xy&=85 \\ yz&=115 \end{aligned}\right\}$.

Az első egyenletből: $z=2y-x$. Ezt behelyettesítve a harmadikba: $2y^2-xy=115$, de a másodikból $xy=85$, ezért $2y^2=200 \Rightarrow y=\pm10$. Csak a pozitív megoldások felelnek meg az $x<y<z$ feltételnek, ezért $x=8{,}5$, $y=10$, $z=11{,}5$.

44. Egy háromszög oldalainak hossza 23 cm, 19 cm és 16 cm. Rajzoljunk köröket a háromszög mindhárom csúcsa körül úgy, hogy ezek a körök páronként érintsék egymást. Mekkorák a körök sugarai?

Megoldás:

A feladat szerint: $\left.\begin{aligned} x+z&=23\\ z+y&=19\\ y+x&=16\end{aligned}\right\}$. A három egyenletet összeadva: $2x+2y+2z=58$, ebből $x+y+z=29$.

Innen, felhasználva a feladat feltételeit: $y=6$ cm, $x=10$ cm, $z=13$cm.

Házi feladat javaslat: 42. feladat

Egyenlő együtthatók módszere

Mintapélda16

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned} 5x+3y&=2\\ 4x+7y&=20\end{aligned}\right\}$

Megoldás:

Az első egyenletet szorozzuk 4-gyel, a másodikat 5-tel.

$$\left.\begin{aligned} 20x+12y&=8\\ 20x+35y&=100\end{aligned}\right\}$$

Kivonjuk az első egyenletből a második egyenletet:

$$-23y=-92$$
$$y=4$$

Visszahelyettesítve valamelyik eredeti egyenletbe:

$$5x+3\cdot 4=2$$
$$x=-2$$

Ellenőrzés:

$$5\cdot(-2)+3\cdot 4=2$$
$$4\cdot(-2)+7\cdot 4=20$$

A megoldás a $(-2; 4)$ rendezett számpár.

Egyenlő együtthatók módszere

Úgy szorozzuk az egyenleteket, hogy valamelyik ismeretlenünk együtthatója mindkét egyenletben egyenlő, vagy egymás ellentettje legyen. Ezután a két egyenletet összeadva vagy egyiket a másikból kivonva, egy egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Ezt megoldva megkapjuk az egyik ismeretlen értékét. Ennek segítségével kiszámítjuk a másik ismeretlen értékét is.

Feladatok

45. Ádám négy évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint Dávid. Öt év múlva pedig kétszer annyi idős lesz. Hány évesek most?

Megoldás:

	Ádám	Dávid
4 évvel ezelőtt	$x-4$	$y-4$
Most	x	y
5 év múlva	$x+5$	$y+5$

A feladat szövege alapján két egyenletet is felírhatunk:

$$\left.\begin{array}{l} x-4=3(y-4) \\ x+5=2(y+5) \end{array}\right\}$$

$y=13$, $x=31$

Ádám 31, Dávid 13 éves most.

46. Oldd meg a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{l} 6x+8y=-9 \\ 5x-9y=16 \end{array}\right\}$

Megoldás:

Az első egyenletet szorozzuk 5-tel, a másodikat 6-tal.

$$\left.\begin{array}{l} 30x+40y=-45 \\ 30x-54y=96 \end{array}\right\}$$

$y=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{1}{2}$

A megoldás a $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ rendezett számpár.

47. A piacon valaki 4 kg krumplit és 3 kg hagymát vásárolt 440 Ft-ért. A sorban mögötte álló 5 kg hagymáért és 2 kg krumpliért 500 Ft-ot fizetett. Mennyibe kerül ennél a zöldségesnél a krumpli és a hagyma?

Megoldás:

Jelölje a krumpli árát *x*, a hagymáét *y*. Így a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y&=440\\ 2x+5y&=500 \end{aligned}\right\}$$

$y = 80$, $x = 50$

Egy kilogramm krumpli 50 Ft, míg egy kilogramm hagyma 80 Ft.

Házi feladat javaslat: 46. feladat

Egyenletrendszerek megoldhatósága

Elevenítsük fel, hogy milyen módszereket ismertünk meg az előző órákon. Adjuk ki a csoportoknak, hogy fogalmazzák meg valamelyik módszer lépéseit. Ügyeljünk arra, hogy mindkét módszert válassza valamelyik csoport.

Mintapélda17

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} 2x+6y&=8\\ 2x+6y&=8 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x+6{,}00001y&=7{,}99998\\ 2x+5{,}99999y&=8{,}00002 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x+2y&=6\\ 2x+4y&=4 \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

a) Az egyik egyenlet következménye a másiknak, így az egyenletrendszer megoldásainak elég az első egyenletet kielégítenie. Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. (Bármely *x* értékhez kiszámíthatjuk, hogy mennyi a hozzátartozó *y*)

Például: Ha $y = 1 \;=\; x = 4 - 3y = 1$. Ha $y = -2 \;=\; x = 4 - 3y = 10$.

b) Alkalmazzuk az egyenlő együtthatók módszerét, vonjuk ki az első egyenletből a másodikat $0{,}00002y = -0{,}00004 \;=\; y = -2$. Ezt visszahelyettesítve az eredetibe kapjuk: $x = 10$.

A megoldás a $(10; -2)$ rendezett számpár.

c) A második egyenletet kettővel egyszerűsítve kapjuk: $x - 2y = 2$, ami ellentmond az első egyenletnek. Ekkor az egyenletrendszernek nincsen megoldása.

Új ismeretlen bevezetése

Mintapélda$_{18}$

Oldjuk meg a $\left.\begin{array}{l}\frac{6}{x}+\frac{5}{y}=27\\ \frac{3}{x}-\frac{7}{y}=-15\end{array}\right\}$ egyenletrendszert!

1. megoldás:

$x \neq 0,\ y \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l}6y+5x=27xy\\ 3y-7x=-15xy\end{array}\right\}$$

Az első egyenletet a másodikkal elosztva az kapjuk, hogy:

$$\frac{6y+5x}{3y-7x}=\frac{27}{-15}$$

$$-90y-75x=81y-189x$$

$$114x=171y$$

$$x=\frac{3}{2}y$$

Visszahelyettesítünk az eredeti egyenletrendszer egyik egyenletébe:

$$\frac{6}{\frac{3}{2}y}+\frac{5}{y}=27$$

$$6+\frac{3}{2}\cdot 5=27\cdot\frac{3}{2}y$$

$$12+15=81y$$

$$27=81y$$

$$y=\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$$

Ekkor $x=\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

2. megoldás:

Vezessük be az $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$ ismeretleneket, ez megkönnyíti az egyenletrendszerünk megoldását. Az új egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{l}6a+5b=27\\ 3a-7b=-15\end{array}\right\}$$

Az egyenlő együtthatók módszerével megoldva az egyenletrendszert

$a = 2$ és $b = 3$ adódik.

Sokan itt befejezik a feladatot, ha megkapták a-t és b-t, és nem számolják ki x-et és y-t. hívjuk fel a figyelmet, hogy mindig az eredeti egyenlet ismeretleneit kell kiszámolni.

Most már kiszámíthatjuk x és y értékét:

$$2 = \frac{1}{x} \quad 3 = \frac{1}{y};$$

$$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{3}.$$

A $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ rendezett számpár eleme az egyenletrendszer alaphalmazának, és az ellenőrzésnél a két oldal helyettesítési értéke egyenlő, ezért ez valóban megoldás.

Új ismeretlen bevezetése

Akkor célszerű ezt a módszert alkalmazni, ha egyenleteinkben hasonló kifejezéseket fedezünk fel, így egyszerűbbé tehetjük a megoldandó feladatot.

Feladatok

48. Oldd meg a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{25}{y} &= 7 \\ \frac{8}{x} - \frac{15}{y} &= 1 \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

Vezessük be az $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ ismeretleneket.

$$\left.\begin{aligned} 4a + 25b &= 7 \\ 8a - 15b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$b = \frac{1}{5},\ a = \frac{1}{2}$$

Kiszámíthatjuk x-et és y-t:

$a = \frac{1}{x}$ $\qquad b = \frac{1}{y}$

$x = 2$ $\qquad y = 5$

A megoldás a $(2;\,5)$ rendezett számpár.

49. Oldd meg a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{l} \frac{4}{x-2} + \frac{3}{y+5} = 7 \\ \frac{1}{x-2} + \frac{2}{y+5} = 8 \end{array}\right\}$

Megoldás:

Vezessük be az $a = \frac{1}{x-2}$, $b = \frac{1}{y+5}$ ismeretleneket.

$\left.\begin{array}{l} 4a + 3b = 7 \\ a + 2b = 8 \end{array}\right\}$

$b = 5$, $a = -2$

Kiszámíthatjuk x-et és y-t:

$a = \frac{1}{x-2}$ $\qquad b = \frac{1}{y+5}$

$x = 1{,}5$ $\qquad y = -4{,}8$

A megoldás a $\left(\frac{3}{2};\, -\frac{24}{5}\right)$ rendezett számpár.

50. Két autó egyenlő teljesítményű motorjának gazdaságosságát vizsgálva kiderül, hogy adott idő alatt az egyik 60 liter benzint fogyasztott, a másik – két órával kevesebb idő alatt – 38,4 litert. Ha az első motor annyit fogyasztott volna óránként, mint a második, a második pedig annyit mint az első, akkor az előbbi idők alatt egyenlő lett volna a fogyasztásuk. Óránként hány litert fogyasztott az 1. és mennyit a 2. motor?

Megoldás:

Ha az 1. motor fogyasztása x liter/óra, a 2. motoré y liter/óra, akkor $\frac{60}{x} - \frac{38{,}4}{y} = 2$.

Ha az 1. motor y litert, a 2. motor x litert fogyasztana óránként, akkor a fogyasztásuk, $\frac{60}{x} \cdot y$, illetve $\frac{38{,}4}{y} \cdot x$ lenne, ami a feladat szerint megegyezik: $\frac{60}{x} \cdot y = \frac{38{,}4}{y} x$.

Vezessük be a következő jelöléseket: $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$. Ezekkel:

$$\left.\begin{array}{l} 60a - 38{,}4b = 2 \\ \frac{60a}{b} = \frac{38{,}4b}{a} \end{array}\right\}.$$

A második egyenletet átalakítva: $60a^2 = 38{,}4b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{38{,}4}{60}b^2 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}8b$.

(A negatív érték nyilván nem megoldás.)

Ezt az első egyenletbe írva: $60 \cdot 0{,}8b - 38{,}4b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{4{,}8}$. Ebből $y = \frac{1}{b} = 4{,}8$.

A másik érték $x = \frac{1}{a} = \frac{4{,}8}{0{,}8} = 6$. A motorok fogyasztása tehát 4,8 liter, illetve 6 liter.

Házi feladat javaslat: 48. feladat

VII. Vegyes feladatok

Módszertani megjegyzés: Összefoglalásként ajánljuk a következő játékot: Osszuk az osztályt két részre! Valamelyik csoportból, hívjunk egy önként vállalkozót. Az önkéntes húz két kártyát. (egyet a feladványkártyák közül, egyet a cselekvéskártyák közül) A saját csoportjának elmutogatja, lerajzolja vagy körülírja a feladványt. Ha kitalálták, akkor ő választ a másik csoportból egy játékost. A mi feladatunk az időmérés, illetve a csapatok pontjainak számolása. Fél percen belüli sikeres megfejtés esetén 2 pontot szerzett a csapat, s ez idő alatt rabolni sem lehetett. Fél perc utáni megfejtésért 1 pont jár, s érvényesült az ún. szabadrablás.

Cselekvéskártyák

Rajzolás	Mutogatás	Körülírás

Feladványkártyák

Abszolútérték	Ellentett	Üreshalmaz	Értelmezési tartomány
Reciprok	Relációs jel	Azonosság	Alaphalmaz

Mintapélda$_{19}$

Brigi kétféle (kék és fekete) tollból 17 darabot vásárolt a boltban 2185 Ft értékben. A kék tollak 125 Ft, a fekete tollak 135 Ft-ba kerülnek. Hány darabot vett Brigi a kék, illetve a fekete tollakból?

1. megoldás:

Legyen a kék tollak száma: x.

Mindig le kell írnunk, hogy mit jelölünk x-szel, y-nal stb.

Ekkor a fekete tollak száma: $17-x$.

Ha ezt y-nal jelöljük, akkor egy kétismeretlenes egyenletrendszert kell megoldani.

A kék tollakért fizetett pénz: $125x$.

A fekete tollakért fizetett pénz: $135\cdot(17-x)$.

A kettő összege a kifizetett pénz: $125x+135\cdot(17-x)=2185$.

$$125x + 2295 - 135x = 2185$$
$$-10x = -110$$
$$x = 11$$
$$17 - x = 6$$

Ellenőrzés:

Brigi 11 kék tollat vett, (1375 Ft), valamint 6 feketét (810 Ft) ez összesen 2185 Ft.

Brigi tehát 11 kék és 6 fekete tollat vásárolt.

2. megoldás:

Nem kell feltétlenül egyenletekkel megoldani egy feladatot, néha egy jó gondolatmenet vagy egy rajz sokkal egyszerűbbé teszi a megoldást. Ebben az esetben, azonban mindig kérjünk szöveges indoklást, a végeredmény önmagában nem fogadható el.

Ha az összes toll kék lett volna, akkor $17 \cdot 125 = 2125$ Ft-ot kellett volna fizetni. A különbözet: 60 Ft. Ha egy kék tollat kicserélünk egy feketére, akkor 10 Ft-tal kell többet fizetnie Briginek. A 60 Ft többlet tehát $60 : 10 = 6$ cserét jelent. Így a fekete tollak száma 6, a kék tollaké, pedig 11.

Feladatok

51. LÁGYTOJÁS (Matematika határok nélkül verseny)

A lágytojást, mint az közismert, 3 percig kell főzni forró vízben. Sajnos csak két homokóra áll rendelkezésünkre. Egyik 6 percet, a másik 7 percet tud mérni. Hogyan járjunk el, ha lágyra szeretnénk főzni a tojást?

Megoldás:

Egyszerre indítjuk a 6 és 7 perces homokórákat és megvárjuk, míg a 6 percesben a homok teljesen lepereg. Így marad 1 percnyi homokunk a 7 perces órában. Ekkor a 6 perces homokórát megfordítjuk, mikor az 1 perc letelik, ebben a homokórában marad 5 percnyi homok. Most a 7 perces homokórát fordítjuk meg, 5 perc múlva kiürül a másik óra, ebben pedig 2 percnyi homok marad. Megfordítjuk a 6 perces órát, 2 perc elteltével ebben 4 percnyi homok marad, míg a 7 perces kiürül, azt megfordítjuk. És amikor 4 perc múlva lepereg a 6 peres óra, tesszük a tojást a forrásban lévő vízbe, hiszen a 7 peres órában éppen 3 percnyi homok van.

52. HIXE ASSZONY ÉLETKORA (Matematika határok nélkül verseny)

Egy tapintatlan ember Hixe asszony életkora iránt érdeklődik. Íme Hixe asszony válasza: „Életkorom éppen 4/3-a a hátralevő időm felének, ha száz évig élek.” Hány éves Hixe asszony?

Megoldás:

Legyen Hixe asszony életkora x év.

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{100 - x}{2}$$

$$x = 40$$

Tehát Hixe asszony 40 éves.

53. Egy lakásban javításra szorul a vízvezeték. Két szerelőnél érdeklődtek: az egyik 5000 forint kiszállási díjat és 1500 forint óradíjat, míg a másiknál 3500 forint kiszállási díjat és 2000 forint órabért kért. Melyik szerelővel dolgoztassanak, ha előreláthatólag 3 órás munka vár rá? Becsüld meg, nagyjából mennyi pénz kell ahhoz, hogy biztosan ki tudják fizetni a szerelőt! Kivel dolgoztatnál, ha nem tudod mennyi időbe telik a javítás? Ábrázold grafikonon! Mitől függ, hogy kit bízol meg a munkával?

Megoldás:

	I. szerelő	II. szerelő
Kiszállási díj	5000	3500
Óradíj	1500	2000
3 óra ára	$3 \cdot 1500 = 4500$	$3 \cdot 2000 = 6000$
Összesen	$5000 + 4500 = 9500$	$3500 + 6000 = 9500$

Kb. 10000 Ft legyen nálunk.

Mindegy, hogy kivel dolgoztatnak 3 órás munkavégzés esetén. Ha a javítás 3 óránál kevesebb időt vesz igénybe, akkor a második, ha többet, akkor az első szerelőt érdemes megbízni.

54. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 11. Ha a számjegyeit felcseréljük, akkor az eredeti kétszeresénél 20-szal kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

1. megoldás:

	Tízes	Egyes	A kétjegyű szám
Eredeti	x	$11-x$	$10x+11-x=9x+11$
Felcserélt	$11-x$	x	$10(11-x)+x=110-9x$

$2(9x+11)-20=110-9x$

$18x+22-20=110-9x$

$27x=108$

$x=4$

$11-x=7$

A kétjegyű szám: 47

Ellenőrzés a szöveg alapján.

2. megoldás:

A kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ez csak a következő esetekben lehetséges: 2+9; 3+8; 4+7; 5+6.

Ezek közül a 47 felel meg a feladat feltételének.

55. 5 liter 64%-os alkoholhoz hány liter vizet öntsünk, hogy a keverék 38%-os legyen?

Megoldás:

	Alkohol	Víz	Keverék
Mennyiség (liter)	5	x	$5+x$
Töménység (%)	64	0	38
Oldott anyag	$5\cdot\frac{64}{100}$	$x\cdot\frac{0}{100}$	$(x+5)\cdot\frac{38}{100}$

$$5\cdot\frac{64}{100}+x\cdot\frac{0}{100}=(x+5)\cdot\frac{38}{100}$$

$320+0=38x+190$

$130=38x$

$$x=\frac{130}{38}=3{,}42$$

3,42 liter vizet kell hozzá öntenünk. Ellenőrzés a szöveg alapján.

56. A Rózsaszirom lakópark építésén három festő dolgozik. Az eddigi tapasztalatok alapján ugyanakkora lakást az első festő 8 óra alatt, a második 7,5 óra alatt a harmadik 7 óra alatt fest ki egyedül. Mennyi idő alatt végeznek az utolsó lakással, ha együtt dolgoznak? Be tudják-e fejezni a munkát, mire – előreláthatólag 3 óra múlva – a munkafelügyelő megérkezik?

Megoldás:

	Festő I.	Festő II.	Festő III.
Egyedül (óra)	8	7,5	7
1 óra alatt	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7,5}=\frac{2}{15}$	$\frac{1}{7}$
x óra alatt	$\frac{x}{8}$	$\frac{2x}{15}$	$\frac{x}{7}$

$$\frac{x}{8}+\frac{2x}{15}+\frac{x}{7}=1$$

$$105x+112x+120x=840$$

$$337x=840$$

$$x=\frac{840}{337}=2{,}49$$

Együtt 2,49 óra alatt végeznek a munkával. Be tudják fejezni a munkát a munkafelügyelő érkezéséig.

57. Egy uszodában leeresztették a vizet. Három csapon keresztül töltik újra a medencét. Az első csap egyedül 12 óra alatt, a második 15 óra alatt, a harmadik 16 óra alatt tölti tele a medencét. Mit mondjanak a vendégeknek, mennyi idő múlva úszhatnak újra a medencében, ha csak a teljesen feltöltött medencébe engedik be az úszni vágyókat?

Megoldás:

	I. csap	II. csap	III. csap
Egyedül (óra)	12	15	16
1 óra alatt	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{16}$
x óra alatt	$\frac{x}{12}$	$\frac{x}{15}$	$\frac{x}{16}$

$$\frac{x}{12}+\frac{x}{15}+\frac{x}{16}=1$$

$$20x+16x+15x=240$$

$$51x=240$$

$$x=\frac{240}{51}=4{,}71$$

Kb. 5 óra múlva jöjjenek vissza.

58. Egy kerékpáros a faluból a városba 10 km/h sebességgel megy. Egy órával később utána indul egy másik kerékpáros 12 km/h sebességgel és egyszerre érkeznek a városba. Hány km-re van a város a falutól?

Megoldás:

	Kerékpáros I.	Kerékpáros II.
Idő (h)	t	$t-1$
Út (km)	$10t$	$12(t-1)$
Sebesség (km/h)	10	12

$$s=v\cdot t$$

$$10t=12(t-1)$$

$$6=t$$

$$s=10t=10\cdot 6=60$$

60 km-re van a város a falutól.

Házi feladat javaslat: 57. és 58. feladat

59. Az állatkert két elefántja Fáni és Fáncsi. Fáni 24 évvel korábban született, és így négyszer annyi idős, mint Fáncsi. Hány évesek az elefántok?

Megoldás:

Legyen Fáni x, Fáncsi y éves.

$$\left.\begin{aligned} x&=4y\\ x-y&=24 \end{aligned}\right\}$$

$$y=8,\quad x=32$$

Fáni 32, Fáncsi 8 éves.

60. Egy anya 21 évvel idősebb a gyermekénél. 3 év múlva 4-szer annyi idős lesz, mint gyermeke. Mennyi idős az anya és a gyermeke most?

Megoldás:

	Anya	Gyerek
Most	x	y
3 év múlva	$x+3$	$y+3$

Legyen most az anya x, a gyermeke y éves.

$$\left.\begin{aligned} x &= y+21 \\ x+3 &= 4\cdot(y+3) \end{aligned}\right\}$$

$y=4,\quad x=25$

Az anya most 25, a gyermeke 4 éves.

61. Otthon alkoholmentes koktélt akarunk készíteni. Az Apricot Shake nevű koktélhoz összekeverünk háromféle gyümölcslevet: 2 liter 40%-os ananászlevet, 1 liter 100%-os cseresznyelevet, 3 liter 12%-os sárgabaracklevet. Az alapanyagokat turmixgépben tört jéggel simára turmixoljuk. Hűtött pohárba töltjük, és citromszelettel díszítjük. A koktélban hány % a gyümölcstartalom? Számolás előtt becsüld meg az eredményt!

Megoldás:

Áttekinthetőbbé válik a feladat, ha az adatokat táblázatba foglaljuk.

	Ananászlé	Cseresznyelé	Sárgabaracklé	Apricot Shake koktél
Mennyiség (liter)	2	1	3	2+1+3 = 6
Töménység (%)	40	100	12	x
Oldott anyag	$2\cdot\frac{40}{100}$	$1\cdot\frac{100}{100}$	$3\cdot\frac{12}{100}$	$6\cdot\frac{x}{100}$

$$2\cdot\frac{40}{100}+1\cdot\frac{100}{100}+3\cdot\frac{12}{100}=6\cdot\frac{x}{100}$$

$$2\cdot 40+1\cdot 100+3\cdot 12=6\cdot x$$

$$80+100+36=6x$$

$$216=6x$$

$$36=x$$

Tehát az Apricot Shake koktél gyümölcstartalma 36%.

62. Egy 90 km/h sebességű gyorsvonat az egyik városból a másikba megy. Egy órával később utána indult egy 30 km/h-val nagyobb sebességű InterCity vonat. A két vonat egyszerre érkezik az állomásra. Mekkora a két város távolsága?

Megoldás:

	Gyorsvonat	InterCity
Idő (h)	t	$t-1$
Út (km)	$90t$	$120(t-1)$
Sebesség (km/h)	90	90 + 30 = 120

Mivel mindkét vonat ugyanazt az utat teszi meg, felhasználva, hogy $s = v \cdot t$ *:*

$$90t = 120(t-1)$$

$$4 = t$$

Figyeljünk a feladat kérdésére. A gyerekek sokszor válaszolják, hogy a gyorsvonat 4 óra alatt, míg az InterCity 3 óra alatt érkezett az állomásra, ami helyes megállapítás, de nem ezt kérdezte a feladat.

$$s = 90t = 90 \cdot 4 = 360$$

$$s = 120(t-1) = 120 \cdot 3 = 360$$

Tehát a két állomás 360 km-re van egymástól.

63. Szandi, Ditta és Betti testvérek. Szandi a lakást egyedül 3 óra alatt, Ditta 90 perc alatt, Betti 135 perc alatt takarítja ki. Mennyi idő alatt végeznek együtt? Szerinted be tudják fejezni a takarítást még mielőtt a szüleik hazaérnek, ha a szülők várhatóan fél óra múlva lesznek otthon, és csak most tudják elkezdeni a munkát?

Megoldás:

Gyakori hiba, hogy nem váltják át a mértékegységeket. Órában vagy percben számoljunk.

	Szandi	Ditta	Betti
Egyedül (perc)	180	90	135
1 perc alatt	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{135}$
x perc alatt	$\frac{x}{180}$	$\frac{x}{90}$	$\frac{x}{135}$

$$\frac{x}{180} + \frac{x}{90} + \frac{x}{135} = 1$$

Szorozzunk a közös nevezővel: $[180;90;135]=540$

$3x+6x+4x=540$

$13x=540$

$x=\dfrac{540}{13}=41{,}5$

Hárman együtt 41,5 perc alatt végeznek. Ha ennyire későn kezdik el a takarítást a lányok, akkor nem tudják befejezni, mielőtt a szüleik hazaérnek.