I. Ismétlő feladatok

Módszertani megjegyzés: Várhatóan egyes tanulók általános iskolából hiányosságokkal érkeznek a középiskolába az algebrai kifejezések alkalmazása terén. Az I. fejezet valójában hiánypótlást segítő segédanyag, amelynek végén diagnosztika található a szükséges előismeretekkel. Javasoljuk, hogy ha a diagnosztika megíratása után szükséges, felzárkóztatáshoz használjuk ezt a segédanyagot egyéni foglalkozásokon, felzárkóztatókon.
A tanári modul végén található „Vegyes feladatok” csak részben gyakorlófeladatok. Ezek között akadnak a középszintű érettségi követelményrendszerén túlmutató példák is.

Sokszor előfordul a mindennapok során, hogy valamit tervezünk, de konkrét adataink még nincsenek. Például vásárláskor bemegyünk 1-2 boltba körülnézni, utána kivesszünk pénzt az automatából. Hogy mennyi pénzt veszünk ki, az több dologtól is függhet: milyenek az igényeink, mennyi pénz van a számlán, sikerült-e akciót kifogni. A fizikában az összefüggéseket képletek írják le, amelyekben állandók (például $g \approx 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), mennyiségek jelei (pl. *t*: idő) és műveletek találhatók: $s = \frac{g}{2}t^2$.

A betűk használatát már megszoktuk a matematikában is (gondoljunk például a területképletekre). A számokat, betűket és műveleteket tartalmazó képleteket **kifejezéseknek** nevezzük. Amikor a betűknek értéket adunk, akkor a kifejezés **helyettesítési értékét** számoljuk ki (például a kerület nagyságát, ha adottak az oldalak). Bonyolultabb kifejezéseket egyszerűbbé is tehetünk, ha azokat a szabályok alapján átalakítjuk. Ezekkel az alapszabályokkal foglalkozunk ebben a modulban. Megismerkedünk a nevezetes azonosságokkal, amelyek alkalmazásával sok feladat megoldása leegyszerűsödik. Az egyenletek megoldása szinte lehetetlen nélkülük.

A műveleteknek van három tulajdonsága, amelyekkel a valós számkör tárgyalásakor (4. modul) már találkoztunk. Ezek a **kommutativitás**, az **asszociativitás** és a **disztributivitás**.

Az összeadás és a szorzás kommutatív műveletek. *A kommutativitás felcserélhetőséget jelent*: tetszőleges sorrendben adhatjuk, illetve szorozhatjuk össze a számokat, betűket. Összeadáskor a tagok, szorzáskor pedig a tényezők sorrendje felcserélhető.

Kommutativitás: $a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$
$a, b \in \mathbf{R}$

Az összeadás és a szorzás egy másik tulajdonsága az asszociativitás. *Az asszociáció szó társítást, összekapcsolást, képzettársítást jelent.* Az elemeket (tagokat, tényezőket) tetszőlegesen csoportosíthatjuk, zárójelezhetjük. Ne felejtsük el, hogy a zárójel a műveleti sorrend kijelölésére szolgál!

Asszocativitás: $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$

$a,b,c\in \mathbf{R}$

A harmadik tulajdonság a disztributivitás, ami *elosztást, felosztást, osztályozást jelent*, de ez a szó nem fejezi ki a tulajdonság lényegét. A szabályon kívül azt érdemes megjegyezni, hogy ez a tulajdonság egyik irányban kiemelésről, másik irányban zárójelfelbontásról szól, és összekapcsolja az összeadást és a szorzást.

kijelölt szorzás elvégzése →

Disztributivitás: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

$a,b,c\in \mathbf{R}$ ← kiemelés

A következő feladatokkal felelevenítjük a tanultakat a kifejezésekről, törtekről, műveletekről.

Feladatok

1. Végezd el a következő műveleteket!

a) $2(a+b)$; b) $c(2+a)$; c) $2x(x-3y)$; d) $(3a-b)c$; e) $-3x(-2x-5)$;

f) $(-3)\cdot d\cdot(5d+4)$.

Megoldás: a) $2a+2b$; b) $2c+ca$; c) $2x^2-6xy$; d) $3ac-bc$; e) $6x^2+15x$; f) $-15d^2-12d$.

2. Végezd el a kijelölt műveleteket és a lehetséges összevonásokat!

a) $2(2x+6)-14-4x$; b) $6x-3(x+2)$; c) $-2-3(5a-2b)+7a$;

d) $(2-5d)d+4d^2$; e) $(3d-4)\cdot(-9)+9$.

Megoldás: a) -2; b) $3x-6$; c) $-2-8a+6b$; d) $2d-d^2$; e) $-27d+45$.

Összevonni csak egynemű tagokat lehet.

Egyneműek azok a tagok, amelyek legfeljebb együtthatóikban különböznek.

3. Keress egynemű tagokat a következő kifejezések között!

a) $2x; -4x;\ az;\ 5y; -4xy;\ -by;\ ax^2;\ (2a-1)x;\ (3a+b)x;\ x(4a-y);$

b) $4{,}7x^2; 5bxy; -4ax^2; 2(b-2a)x^2;$

c) $3x^2y; -10xy; -5{,}4x^2x;\ axy^2; -2b(a+4)x^2y; 100yx; -3ayx^2; (2-a)by; (2-a)byx^2$.

4. Vond össze a következő kifejezéseket!

a) $12a-(2+5a)+20a-6$;

b) $-(3x^2y+2xy)+24yx^2+2xy$;

c) $-[(4a-5b+6c)-(2a+3b)]+4a-2c$;

d) $\frac{3}{2}a-a$;

e) $\frac{2}{5}x-\left(-\frac{2}{3}x+2\right)$.

Megoldás: a) $27a-8$; b) $21x^2y$; c) $2a+8b-8c$; d) $\frac{1}{2}a$; e) $\frac{16}{15}x-2$.

5. Végezd el a kijelölt műveleteket, a kijelölt szorzásokat és a lehetséges összevonásokat!

a) $4+4b-5a-2\cdot(2a+3b)$;

b) $3b+7a-(-2a)-12\cdot(-a)+5a-2b$;

c) $8a-[6b-(4a-2b)-4a]-5b$;

d) $3(x+y)+5(x-y)$;

e) $9a-(2b+3a)\cdot(-3)+(-9b+6a-4)\cdot(-5)$;

f) $-4(5-2x)+5(x-1)-(3x-5)$.

Megoldás:

a) $4-9a-2b$; b) $26a+b$; c) $16a-13b$; d) $8x-2y$; e) $-12a+51b+20$; f) $10x-20$.

6. A következő kifejezésekben végezd el a lehetséges kiemeléseket!

a) $2a+40$ b) $2y+12-2y$; c) $-6x^2+9x+3$; d) $10a-20b+5$;

e) a^2b+2a; f) $6ax^2y^2-3xy^2$; g) $-4x^2y+8xy^2$;

h) $4a^4-12a^2$; i) $12d^5+4a^2$.

Megoldás:

a) $2(a+20)$; b) $2(x+6)-y$; c) $(-2x^2+3x+1)$; d) $5(2a-4a+1)$; e) $a(ab+2)$;

f) $3xy^2(2ax-1)$; g) $4xy(2y-x)$; h) $4a^2(a^2-3)$; i) $4(3d^5+e^2)$.

7. Egészítsd ki a bővítést a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\frac{2a}{5}=\frac{\quad}{10}$ b) $\frac{4}{6x}=\frac{\quad}{6x^2}$ c) $\frac{2-3a}{7}=\frac{\quad}{21}$ d) $\frac{5x-y}{3}=\frac{\quad}{6y}$

e) $\frac{4x-2y}{3}=\frac{\quad}{9x^2}$

Megoldás: a) $4a$; b) $4x$; c) $6-9a$; d) $10yx-2y^2$; e) $12x^3-6x^2y$.

A törtekkel való számolás során nagyon kell figyelni az **egyszerűsítésre**.

Módszertani megjegyzés: Gyakori hiba, hogy ha a számlálóban vagy a nevezőben összeg, illetve különbség szerepel, akkor nem egyszerűsítenek minden tagot. Íme egy példa:
Rossz egyszerűsítés: $\frac{3ab-6}{3}=ab-6$ Jó egyszerűsítés: $\frac{3ab-6}{3}=ab-2$

Könnyen megérthető a helyes egyszerűsítés, ha megjegyzed a következő szabályt:

Egyszerűsíteni csak azzal a kifejezéssel lehet, ami a számlálóban és a nevezőben egyaránt kiemelhető.

Ezért a fenti példát így is fel lehet írni: $\frac{3ab-6}{3}=\frac{\cancel{3}(ab-2)}{\cancel{3}}=ab-2$.

Az esetek többségében a törteket azért célszerű egyszerűsíteni, hogy könnyebb legyen velük számolni. A feladatok végeredményében lehetőleg mindig leegyszerűsített törtek álljanak!

A törtek összeadásakor vagy kivonásakor az egyszerűsítést a műveletek elvégzése közben akkor nem szoktuk végrehajtani, ha a bővített alakkal könnyebb számolni. Például

$$\frac{3-9a}{3a}+\frac{4}{3}=\frac{3-9a+4a}{3a}=\frac{3-5a}{3a}$$

A következő feladatokban olyan törtek is előfordulnak, amelyek nevezőjében betű (változó) is található. Ilyen esetben figyelni kell arra, hogy **a nevező nem lehet nulla**.

Módszertani megjegyzés:
A következő feladatok megbeszélésekor az egyszerűbb esetekben beszéljük meg a tanulókkal a nevező 0 kikötés következményeit.

Feladatok

8. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket!

a) $\frac{3ab^2}{9b}$; b) $\frac{4x-16}{8}$; c) $\frac{4ab^2-2ac}{2ac}$; d) $\frac{5a}{5a-10b}$;

e) $\frac{12a-4b+8x}{4a}$; f) $\frac{6a-3}{3}-\frac{2+a^2}{3a}$.

Megoldás: a) $\frac{ab}{3}$; b) $\frac{x-4}{2}$; c) $\frac{2b^2-c}{c}$; d) $\frac{a}{a-2b}$; e) $\frac{3a-b+2x}{a}$; f) $2a-1-\frac{2+a^2}{3a}$.

9. Végezd el a következő műveleteket, figyelj a törtekre!

a) $\frac{5}{3}+\frac{3}{a}+3+\frac{7}{b}$ b) $\frac{5a-10}{6}-\frac{2a+8}{10}$ c) $\frac{a}{3}\cdot 5-\frac{b}{6}\cdot 12+\frac{6}{4}\cdot\left(\frac{3b-2a}{9}\right)$

Megoldás: a) $\frac{14ab+9b+21a}{3ab}$; b) $\frac{19a-74}{30}$; c) $\frac{8a-9b}{6}$.

10. Végezd el a következő műveleteket, ahol lehet, egyszerűsíts!

a) $\frac{2x}{3y}:\frac{6x^2}{y^2}$; b) $15b^2:\frac{2b}{10a}$; c) $\left(-\frac{3x^2}{4y}\right):\frac{6x}{4y^3}$; d) $16a^2b:\left(-\frac{8b}{32a}\right)$;

e) $\frac{3a}{4b}:6a$; f) $6x^2y:\frac{2xy^3}{3x^2y}$; g) $\frac{18a^2b^3-6b^2}{3b^2}$;

h) $\frac{12x^3-6x^2}{9}:\frac{2x^2}{3}$; i) $\frac{3x^2y}{a^3}\left(\frac{4x}{ay^2}-\frac{2x^5y}{15ab}\right)$

j) $\frac{3a}{b^3}+\frac{3b}{a}\left(\frac{a^2}{3b}-\frac{2a}{3b^2}\right)$

Megoldás:

a) $\frac{y}{9x}$; b) $75ab$; c) $-\frac{xy^2}{2}$; d) $-64a^3$; e) $\frac{1}{8b}$; f) $\frac{9x^3}{y}$; g) $6a^2b-2$; h) $2x-1$;

i) $\frac{60bx^3-2x^7y^3}{5a^4by}$; j) $\frac{3a+ab^3-2b^2}{b^3}$.

11. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(p-2)(p-2)$; b) $(x+2)(x-7)$; c) $(p-1)(p+1)$;

d) $\left(\frac{1}{3}a-6\right)\left(3-\frac{3}{4}a\right)$; e) $(2x+3)(1-x)$; f) $(2a+1)(2a+1)$;

g) $(2d-1)(d-1)$.

Megoldás:

a) p^2-4p+4; b) $x^2-5x-14$; c) p^2-1; d) $\frac{11}{2}a-18-\frac{1}{4}a^2$; e) $-2x^2-x+3$;

f) $4a^2+4a+1$; g) $2d^2-3d+1$.

12. Végezd el a következő műveleteket!

a) $4a^2(2-3a^2)-2a^2(4+3a)+3a(2a^2-1)$;

b) $x(2x^2-3x+6)+8x^2(2x-3)-(4x^2+x+4)$;

c) $-\frac{a}{2}\left(\frac{2}{3}a^2+3a\right)+7a\left(\frac{2}{9}-3a\right)$.

Megoldás: a) $-12a^4-3a$; b) $18x^3-31x^2+5x-4$; c) $-\frac{a^3}{3}-22\frac{1}{2}a^2+\frac{9}{4}a$.

Mintapélda₁

Hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket, és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $\frac{2x+y}{5}-\frac{x-5y}{4}+2x$ b) $\frac{7x-3y+5}{6}-\frac{5x-2y}{4}-1$ c) $\frac{-5x-2y}{3}-\frac{3x-6y}{6}$

Megoldás: a) $\frac{43x+29y}{20}$; b) $\frac{-x+10}{12}$; c) $\frac{-13x+2y}{6}$.

Feladatok

13. Hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket, és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $\frac{x-3y}{5}-\frac{2y+5x}{4}$; b) $\frac{8x-3y}{4}-\frac{7y-3x}{5}$; c) $\frac{5x-2x}{8}-\frac{x-8y}{9}$;

d) $\frac{3y-2x+5}{7}+\frac{-3x+4y-3}{4}$.

Megoldás: a) $\frac{-21x-22y}{20}$; b) $\frac{52x-43y}{20}$; c) $\frac{19x+64y}{72}$; d) $\frac{40y-29x-1}{28}$.

14. Hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket, és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $\dfrac{3(x-2)}{4}+\dfrac{4-5x}{10}+2x$; b) $3x-\dfrac{3x-3}{4}+\dfrac{4-4x}{6}$; c) $\dfrac{3-2y}{6}+\dfrac{3y-2}{18}$.

Megoldás: a) $\dfrac{-45x-22}{20}$; b) $\dfrac{19x+17}{12}$; c) $\dfrac{7-3y}{18}$.

Mintapélda$_2$

Hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket, és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $\dfrac{4(a+4b)}{5b}-\dfrac{4a-9b}{5b}$; b) $\dfrac{x+2y}{2xy}+\dfrac{2x-y}{2xy}+\dfrac{7x-3y}{2xy}$; c) $\dfrac{2(a-1)}{a+7}-\dfrac{5(3-2a)}{a+7}$;

d) $\dfrac{3(x-4)}{4x-10}+\dfrac{3x-4}{2(5-2x)}$.

Megoldás: a) 5; b) $\dfrac{5x-y}{xy}$; c) $\dfrac{12a-17}{a+7}$; d) $\dfrac{2}{5-2x}$.

Feladatok

15. Végezd el a műveleteket, és hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket (az egész számokat is)!

a) $4x^2y^2\left(\dfrac{9}{2x}-\dfrac{3}{y^2}+\dfrac{x}{2y^3}\right)$; b) $2ab\left(\dfrac{a-b}{a^2b^2}-\dfrac{ab}{2}\right)$; c) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{6xy}-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 3x$;

d) $\left(\dfrac{1}{3a+b}+\dfrac{2}{3a-b}\right)\cdot 3ab$; e) $\dfrac{4d-1}{2d}-\dfrac{6d+1}{3d}$.

Megoldás:

a) $\dfrac{18xy^3-12x^2y+2x^3}{y}$; b) $\dfrac{2a-2b-a^3b^3}{ab}$; c) $\dfrac{x^2+y^2-2xy}{2y}$; d) $\dfrac{27a^2b+3ab^2}{9a^2-b^2}$;

e) $-\dfrac{5}{6d}$.

16. Végezd el a műveleteket, és hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket (az egész számokat is)! a) $3-\dfrac{1}{x+5}$; b) $\dfrac{2}{3-x}+2$; c) $\dfrac{3a}{3a-5}-1$.

Megoldás: a) $\dfrac{3x+14}{x+5}$; b) $\dfrac{8-2x}{3-x}$; c) $\dfrac{5}{3a-5}$.

Mintapélda₃

$a = 1$ és $b =$ 3 esetén mennyi a következő kifejezések helyettesítési értéke:

a) $2a - 3b$ Az érték $2 \cdot 1 \quad 3 \cdot (\quad 3) = 2 + 9 = 11$.

b) $\dfrac{6a + 2b - 10}{4}$ Egyszerűsíthetünk, mert a számlálóból és a nevezőből is

kiemelhető a 2: $\dfrac{6a + 2b - 10}{4} = \dfrac{2 \cdot (3a + b - 5)}{2 \cdot 2} = \dfrac{3a + b - 5}{2} = \dfrac{3 \cdot 1 + (-3) - 5}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

Feladatok

17. Mennyi a következő kifejezések helyettesítési értéke, ha

a) $x = 1$; $\dfrac{x + 2}{x - 3} - \dfrac{6 - 3x}{2x - 6}$; b) $y = 5$; $\dfrac{2}{3y} - \dfrac{4}{y}$;

c) $z = -2$; $y = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3z + 1}{2y} - 3 \cdot \dfrac{2(4 - y) - 2y}{8y}$; d) $a = 3$; $b = -5$; $\dfrac{3a - 2}{ab} - \dfrac{5a^2 - 2a - 1}{ab^2}$.

Megoldás: a) $-\dfrac{3}{4}$; b) $-\dfrac{2}{3}$; c) $-9{,}5$; d) $-\dfrac{73}{75}$.

18. Írd fel változókat tartalmazó kifejezésekkel a következőket:

a) x-nek a $\dfrac{4}{9}$-e; b) y-nak a 30 %-a; c) a + (a-nak a 20 %-a);

d) a-ból az a 15 %-a; e) x kétharmadából az x 20%-a.

Megoldás: a) $\dfrac{4}{9}x$; b) $0{,}3x$; c) $1{,}2a$; d) $0{,}85a$; e) $\dfrac{7}{15}x$.

Módszertani megjegyzés: Diagnosztikai teszt
Tétje: nem osztályzat, hanem további, kötelező szintre hozó feladatok megoldása. A jó eredményt elérő tanulókat célszerű jutalmazással motiválni. A tesztre kb. 10 percet érdemes szánni.
A teszt eredményéből leszűrhető, hogy melyik gyereknek milyen hiányosságai vannak, és miket kell még gyakorolnia az 1. fejezet példáiból. Egyénre szabott differenciálási lehetőséggel élhet a pedagógus. Az egyes feladatok témája:

1 Műveleti sorrend, közös nevezőre hozás, vegyes törtek kezelése, törtekkel való műveletek;
2 a) zárójelfelbontás, összevonás, szorzattá alakítás;
  b) egy tag szorzása több taggal;
  c) több tag szorzása több taggal, kiemelés;
3 egyszerűsítés;
4 törtek osztása, szorzása, algebrai törtek közös nevezőre hozása.

A diagnosztikának az a célja, hogy a hiánypótlást az 1. fejezet feladatainak segítségével irányítsa és ellenőrizze a pedagógus. A korrepetálás nem a tanóra feladata, de azért került az 1. fejezetbe a sok ismétlő feladat, mert így az ismétlés egyéni és csoportos feldolgozásra is alkalmas. A diagnosztikában minden elem többször előfordul: ez mutatja azt, hogy a tanuló csak számolási hibát vétett, vagy rosszul rögzült a megoldás módszere.

Javasolt feladatok a feladatlaphoz:

A csoport	**B csoport**
1. Közelítő számolás és zsebszámológép használata nélkül határozd meg a következő kifejezés pontos értékét:	
$3\frac{1}{2}:\frac{7}{3}-\left(\frac{11}{6}-2\frac{1}{3}\right)$	$\left(2\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right):\frac{17}{3}+\frac{3}{16}$
Megoldás: 2	*Megoldás*: $\frac{7}{16}$
2. Végezd el a következő műveleteket, majd alakítsd szorzattá a kifejezést:	
a) $a^2-2ab-b^2-(3a^2+2ab-b^2)$	a) $2a^2-(b^2+2ab-a^2)+b^2+3ab$
Megoldás: $-2a(a+2b)$	*Megoldás*: $a(3a+b)$
b) $2x(x+3)-10(x-2x)$	b) $-2x(4-3x)-3(x^2-3x)-7x$
Megoldás: $2x(x+8)$	*Megoldás*: $3x(x-2)$
c) $(2a+3)(1-a)-3$	c) $(3x-2)(1-2x)-4x+2$
Megoldás: $-a\cdot(2a+1)$	*Megoldás*: $3x(1-2x)$
3. Karikázd be a helyes egyszerűsítés betűjelét!	
a) $\frac{2x-4}{2}=x-2$	a) $\frac{3x+9}{3}=x+3$
b) $\frac{2x-4}{2}=x-4$	b) $\frac{3x+9}{3}=3x+3$
c) $\frac{2x-4}{2}=2x-2$	c) $\frac{3x+9}{3}=x+9$
4. Végezd el a következő szorzást és osztást! A végeredményt úgy add meg, hogy tovább már ne lehessen egyszerűsíteni!	
$\frac{3x}{x+1}\cdot\frac{5}{6}-2:\frac{x+1}{3x-1}$	$\frac{2x+3}{6}\cdot\frac{3}{2}-3:\frac{2}{2x+3}$

A feladatlap nyomtatható formában:

A csoport

1. Közelítő számolás és zsebszámológép használata nélkül határozd meg a következő kifejezés pontos értékét: $3\frac{1}{2}:\frac{7}{3}-\left(\frac{11}{6}-2\frac{1}{3}\right)$

2. Végezd el a következő műveleteket, majd alakítsd szorzattá a kifejezést:

a) $a^2-2ab-b^2-(3a^2+2ab-b^2)$; b) $2x(x+3)-10(x-2x)$; c) $(2a-3)(1-a)-3$.

3. Karikázd be a helyes egyszerűsítés betűjelét!

a) $\frac{2x-4}{2}=x-2$; b) $\frac{2x-4}{2}=x-4$; c) $\frac{2x-4}{2}=2x-2$.

4. Végezd el a következő szorzást és osztást: $\frac{3x}{x+1}\cdot\frac{5}{6}-2:\frac{x+1}{3x-1}$

A végeredményt úgy add meg, hogy tovább már ne lehessen egyszerűsíteni!

B csoport

1. Közelítő számolás és zsebszámológép használata nélkül határozd meg a következő kifejezés pontos értékét: $\left(2\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right):\frac{17}{3}+\frac{3}{16}$

2. Végezd el a következő műveleteket, majd alakítsd szorzattá a kifejezést:

a) $2a^2-(b^2+2ab-a^2)+b^2+3ab$; b) $-2x(4-3x)-3(x^2-3x)-7x$;

c) $(3x-2)(1-2x)-4x+2$.

3. Karikázd be a helyes egyszerűsítés betűjelét!

a) $\frac{3x-9}{3}=x+3$; b) $\frac{3x+9}{3}=3x+3$; c) $\frac{3x+9}{3}=x+9$.

4. Végezd el a következő szorzást és osztást: $\frac{2x+3}{6}\cdot\frac{3}{2}-3:\frac{2}{2x+3}$

A végeredményt úgy add meg, hogy tovább már ne lehessen egyszerűsíteni!

II. Törtes kifejezések értelmezési tartománya

A kifejezéseket mindig az **alaphalmazukon** értelmezzük, amelyet a feladat szövege határoz meg. Ha az alaphalmaz meghatározása hiányzik, akkor a valós számok (**R**) halmaza az alaphalmaz. A „tiltott” műveletek általában kizárják az alaphalmaz egyes elemeit, és az ezekkel **szűkített alaphalmazt a kifejezés értelmezési tartományának nevezzük.**

Módszertani megjegyzés: A nullával való osztás tiltására a következő kérdéssel vezetjük rá a tanulókat: Válasszátok ki, hogy mely törtek „problémásak” a következők közül:

$$\frac{2}{3};\ -\frac{0}{6};\ \frac{6}{0};\ \frac{3}{x-2},\text{ahol } x=2;\ -\frac{x+5}{3},\ \text{ahol } x=-5$$

Régen megtanultuk a szigorú tiltást: **nullával nem lehet osztani, mert ez a művelet nem értelmezhető. A törtekre nézve ez azt jelenti, hogy amennyiben a nevező tartalmaz változót, ki kell kötni, hogy a nevező nem lehet nulla, majd meg kell határozni, hogy mi NEM lehet a változó értéke**

Mintapélda$_4$

Mi a következő kifejezés értelmezési tartománya, ha alaphalmaza a valós számok halmaza:

$$\frac{7}{3x-5}$$

Megoldás: A nevező nem lehet 0, ezért $3x-5\neq 0$ $3x\neq 5$ $x\neq\frac{5}{3}$.

Tehát a feladat megoldása: $x\in$ **R és** $x\neq\frac{5}{3}$, amit így is szoktunk írni: $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

Feladatok

19. Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\frac{2}{x-1}$; b) $\frac{4y}{2-y}$; c) $\frac{x+2}{x+3}$; d) $\frac{2x-5}{3x+5}$;

e) $\frac{3}{y}$; f) $\frac{a}{3a-1}$; g) $\frac{-5}{-5+5x}$.

Megoldás: a) **R**\{1}; b) **R**\{2}; c) **R**\{-3}; d) **R**\{$-\frac{5}{3}$}; e) **R**\{0}; f) **R**\{$\frac{1}{3}$}; g) **R**\{1}.

20. Írj fel olyan kifejezéseket, amelyek nem értelmezhetők a következő számokra:

a) 3; b) 0; c) 2,5; d) $\frac{2}{3}$; e) $-0{,}6$;

f) $-\frac{1}{2}$; g) 1 és – 1; h) 0 és 2; i) – 2, 3 és $\frac{2}{3}$.

Ha több változó is van a nevezőben, a kikötést ezek kapcsolataként írjuk le.

Például: $\frac{2+x}{2x-y}$ esetén a nevező nem lehet nulla, így $2x-y\neq 0$, vagyis $2x\neq y$.

Ha több tört is van egy kifejezésben, akkor összevonjuk a kikötéseket, hiszen egyik nevező sem lehet 0. Például $\frac{3}{a}-\frac{3}{a-1}$ esetén $a\neq 0$ **és** $a\neq 1$, az értelmezési tartomány: **R** \ {0; 1}.

Vizsgáljuk meg azt az esetet is, amikor a nevezőben szorzat áll, vagy ha a nevező szorzattá alakítható. Tudjuk, hogy **egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla**. Ezt használjuk ki.

Mintapélda₅

Határozzuk meg az $\frac{1}{x(x-1)}$ kifejezés értelmezési tartományát!

Megoldás: $x\cdot(x-1)=0$, amiből $x=0$ **vagy** $x=1$.

Ennek tagadása: $x\neq 0$ **és** $x\neq 1$, vagyis az értelmezési tartomány: **R** \ {0; 1}.

Feladatok

21. Határozd meg, hogy milyen kikötéseket kell tenni a következő kifejezések esetében! A feladatokban írd fel a kifejezések értelmezési tartományát is, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

a) $\frac{4y}{x^2+3x}$; b) $\frac{-4}{-2a}-\frac{a-1}{a+1}$; c) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{6-3x}{2x-6}$; d) $\frac{2}{4x^2-6x}+\frac{3x}{x-1}$.

Megoldás:

a) $x^2\neq -3x$; b) $a\neq 0;-1$; **R**\{0;–1}; c) $x\neq 3$; **R**\{3}; d) $x\neq 0;0;1{,}5$; **R**\{0;1;1,5}.

22. Határozd meg, hogy milyen kikötéseket kell tenni a következő kifejezések esetében! A feladatokban írd fel a kifejezések értelmezési tartományát is, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

a) $\frac{2x+1}{2x+y}$; b) $\frac{3-x}{y-4x}$; c) $\frac{3z}{2s}+\frac{3}{4z}$; d) $\frac{-4}{5a+2}-\frac{a-1}{a+1}$;

e) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$; f) $\frac{3x}{x^2-1}$; g) $\frac{3x}{x^2-3x}$; h) $\frac{3x-1}{3x+1}-\frac{3x-2}{9x+3}$.

Megoldás:

a) $y \neq -2x$; b) $y \neq 4x$; c) $s \neq 0;\ z \neq 0$; d) $a \neq -1; -\frac{2}{5}$; $R\backslash\{-1; -\frac{2}{5}\}$;

e) $x \neq \pm 1$; $R\backslash\{1; -1\}$; f) $x \neq \pm 1$; $R\backslash\{1; -1\}$; g) $x \neq 0; 3$; $R\backslash\{0; 3\}$; h) $x \neq -\frac{1}{3}$; $R\backslash\{-\frac{1}{3}\}$.

23. Végezd el a következő műveleteket! Állapítsd meg a változók értelmezési tartományát is!

a) $\frac{2x}{x-y}\cdot\frac{5x-5y}{3xy}$; b) $\frac{7(a-1)}{4a+12}\cdot\frac{2a+6}{3a-3}$; c) $\frac{5a+10}{6a-9}\cdot\frac{2a^2-3a}{a^2+2a}$;

d) $\frac{10a-5b}{6b-8a}:\frac{6b-12a}{24a-18b}$; e) $\frac{4x-8y}{5x+15y}:\frac{3x-6y}{9y+3x}$;

f) $(x-2)(x+3)+(x+2)(x-3)$; g) $\left(\frac{1}{2}d-2\right)\left(4+\frac{d}{2}\right)+\frac{3}{2}d\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}d\right)$.

Megoldás: a) $\frac{10}{3y}$; b) $\frac{7}{6}$; c) $\frac{5}{3}$; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{4}{5}$; f) $2x^2-12$; g) $-8+\frac{17}{8}d-\frac{d^2}{2}$.

III. Polinomok

Módszertani megjegyzés: A következő elnevezéseket nem kell „bemagoltatni" a gyerekekkel. Itt azért szerepelnek, hogy az esetleges pontatlanságokat eloszlassák.

Néhány elnevezés

Ha számok és számokat helyettesítő betűk egész kitevőjű hatványát és gyökét a négy alapműveletet véges számú alkalmazásával kapcsoljuk össze, *algebrai kifejezést* kapunk. A *polinomok* olyan algebrai kifejezések, amelyekben nem fordul elő gyökvonás és változót tartalmazó kifejezéssel való osztás. A polinom másik neve: *racionális egész kifejezés*. Ha legalább elsőfokú polinommal való osztás is szerepel a kifejezésben, akkor *racionális törtkifejezésről* beszélünk.

A feladatokban sokszor találkozhatunk ilyen jellegű kifejezésekkel:

Egytagú kifejezések: $3a$, 5, $4x$, $\frac{2}{3}$, $6\cdot 7$, $\frac{4}{5}x$.

Kéttagú kifejezések: $2x - 4$, $3a - 2b$, $\frac{2}{3}x + 5$.

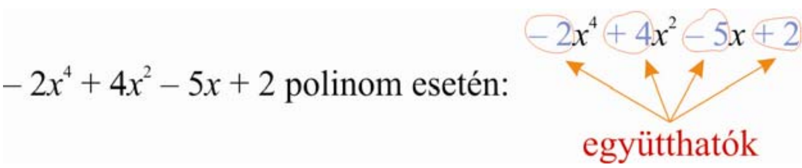
Kétváltozós hetedfokú polinom: $9x^3 - 3x^5y^2 + y + 13$.

Az előforduló legmagasabb kitevő: 5 + 2 = 7.

Egy változós, negyedfokú polinom: $-2x^4 + 4x^2 - 5x + 2$.

Az előforduló legmagasabb kitevő: 4.

Együtthatók: A negyedfokú polinomban az x^4-es tagé 2, az x^3-os tagé 0, az x^2-es tagé 4, az x-es tag együtthatója 5, a *konstans* pedig 2 (szintén együttható, az 1-nek, azaz a nulladfokú tagnak az együtthatója). x-et változónak vagy ismeretlennek nevezzük.



Az **együtthatók** az előjeleiket is tartalmazzák.
Egy **polinom fokszámát** úgy határozzuk meg, hogy előbb maghatározzuk az egyes tagok fokát (összeadjuk a tagjaiban található ismeretlenek kitevőit), majd ezekből a legnagyobbat vesszük.

Módszertani megjegyzés: Gyakori hiba, hogy a tanulók a racionális törtkifejezéssel végzett műveletek során beszorozzák a kifejezést a nevezővel, mire az eltűnik és így a törtből egész kifejezést csinálnak. Értessük meg velük, hogy a kifejezések esetében egyenlőségláncolatról van szó. Tegyünk határozott különbséget kifejezés és egyenlet között. A kifejezéssel csak olyan műveletet végezhetünk, ami annak értékét nem változtatja meg! Az osztás és egyszerűsítés műveleteit is gyakran keverik szóhasználatukban.

Óriási könnyebbséget jelentett az algebrai leírásokban a XIX. század végére kialakult, mai algebrai jelölésmód. René Descartes (1596 – 1650) javasolta először a változó mennyiségek bevezetését, korábban az ismeretlent nem jelölték külön betűvel. Descartes nevét őrzi egyébként a derékszögű koordináta-rendszer is. A középkori matematikusok a latin szavak rövidítéseit és ma már szokatlan jelöléseket használtak a problémák leírására. Pl.:

$6x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = -5$ régen így nézett ki: $6^3\ \tilde{\mathrm{p}}\ 4^2\ \tilde{\mathrm{m}}\ 2^1\ \tilde{\mathrm{p}}\ 3^0$ egaulx $\tilde{\mathrm{m}}\ 5^0$;

a $\dfrac{D^2 - B}{2D} = E$ egyenlet őse: $\left\{ \dfrac{\left[\text{D quadratum}\right] - \text{B planum}}{\left[\text{D bis}\right]} \right\}$ aequabitur E;

a $2x^3 - 3Bx^2 = C$ egyenlet akkori alakja:

A2 cubus – B latus in A3 quadratum aequatur C solido

Feladatok

24. Határozd meg a következő polinomok fokszámát!

a) $2a + \dfrac{4}{5}ab + 1$; b) $3a^2b + 2ab - b^4$; c) $-4pq + p^3 + \dfrac{2}{3}p^2q$.

Megoldás: 2, 4, 3.

25. Rendezd fokszám szerint csökkenő sorrendbe a következő polinomokat!

a) $6x^3 + 4x^2 - 2x + 3$; b) $12ab^5 - 3$; c) $2a^2 + \dfrac{1}{4}b^3a$; d) $12x + 2$.

Megoldás: b, c, a, d.

26. Végezd el a kijelölt műveleteket és a lehetséges összevonásokat, majd rendezd csökkenő fokszám szerint a polinomokat! Számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét is a megadott értékek mellett!

a) $(x^2 - x + 1)x$; $x = 3$

b) $2x(5 - 3x^2 - x)$; $x = -10$

c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^3 - 2x + 2)$; $x = 2{,}4$

d) $(-3x + 3)2x + 8(3 - x) - 5x(x - 5)$; $x = \frac{2}{3}$

e) $\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right)12a - \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)6a$; $a = -2$; $b = 3$.

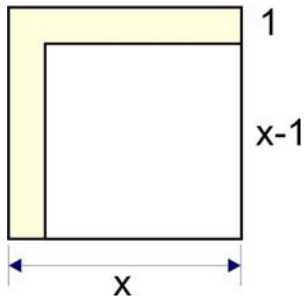
Megoldás:

a) $x^3 - x^2 + x$; 21; b) $10x - 6x^3 - 2x^2$; 5700; c) $-2x^5 + x^3 - x^2$; $-151{,}2$;
d) $-11x^2 + 23x + 24$; 34,44; e) $2a^2 - 9ab$; 62.

IV. Nevezetes azonosságok

Mintapélda$_6$

Négyzet alapú irodába 1m mélységű vitrines sarokszekrényt hoztak, ami teljes két falat (és három sarkot) elfoglal. Így az iroda alapterülete 15 m^2-rel csökkent. Mekkora az iroda falának hossza?



Megoldás:

Jelölje x az iroda eredeti falának hosszát. A vitrin elhelyezése előtt az alapterület x^2 volt, utóbb ez $(x-1)^2$-re csökkent. Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$x^2-(x-1)^2=15$$

A megoldáshoz el kell végezni az $(x-1)(x-1)$ szorzást:

$$(x-1)(x-1)=x^2-x-x+1=x^2-2x+1$$

$$x^2-\left(x^2-2x+1\right)=15$$

$$x^2-x^2-2x-1=15$$

$$2x=16$$

$$x=8$$

Ellenőrzés: $8^2 = 64$; $7^2 = 49$; $64 - 49 = 15$.

Az iroda fala 8 méter hosszú.

A számolást meggyorsíthatjuk, ha begyakoroljuk a **nevezetes azonosságok** használatát. Ezek közül leggyakrabban a következő három fordul elő

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

a, *b* **R**

Ezeket legegyszerűbben a „több tag szorzása több taggal” műveleti szabályai szerint bizonyíthatjuk:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ba+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ba-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2+ba-ab-b^2=a^2-b^2$$

Szavakkal megfogalmazva:

Két tag összegének négyzete a két tag négyzetének összege, hozzáadva a két tag kétszeres szorzatát, vagy első tag négyzete + az első és második tag kétszeres szorzata + a második tag négyzete.

Két tag különbségének négyzete a két tag négyzetének összege, kivonva a két tag kétszeres szorzatát.

Két tag összegének és különbségének szorzata egyenlő a kisebbítendő négyzetének és a kivonandó négyzetének különbségével.

Mintapélda$_7$

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(x+3)^2$; b) $(x-4)^2$; c) $(ax+b)^2$; d) $(b-3ax)^2$;

e) $(2x-1)^2$; f) $(7-4x)^2$; g) $(x+1)(x-1)$; h) $(1-2a)(1+2a)$;

i) $(a+b+c)^2$; j) $(2x-3-y)^2$; k) $(-3x+2y-z)^2$; l) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.

Megoldás:

a) x^2-6x+9; b) $x^2-8x+16$; c) $a^2x^2+2abx+b^2$; d) $b^2-6abx+9a^2x^2$;

e) $4x^2-4x+1$; f) $49-56x+16x^2$; g) x^2-1; h) $1-4a^2$;

i) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$; j) $4x^2+9+y^2-12x-4xy+6y$;

k) $9x^2+4y^2+z^2-12xy+6xz-4yz$; l) $x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

Mintapélda$_8$

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(3x-2)^2-(3x+2)^2$; b) $(p^2+q)^2+2(p^2-q)^2$; c) $\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$.

Megoldás:

a) $(3x-2)^2-(3x+2)^2=9x^2-12x+4-(9x^2+12x+4)=-24x$;

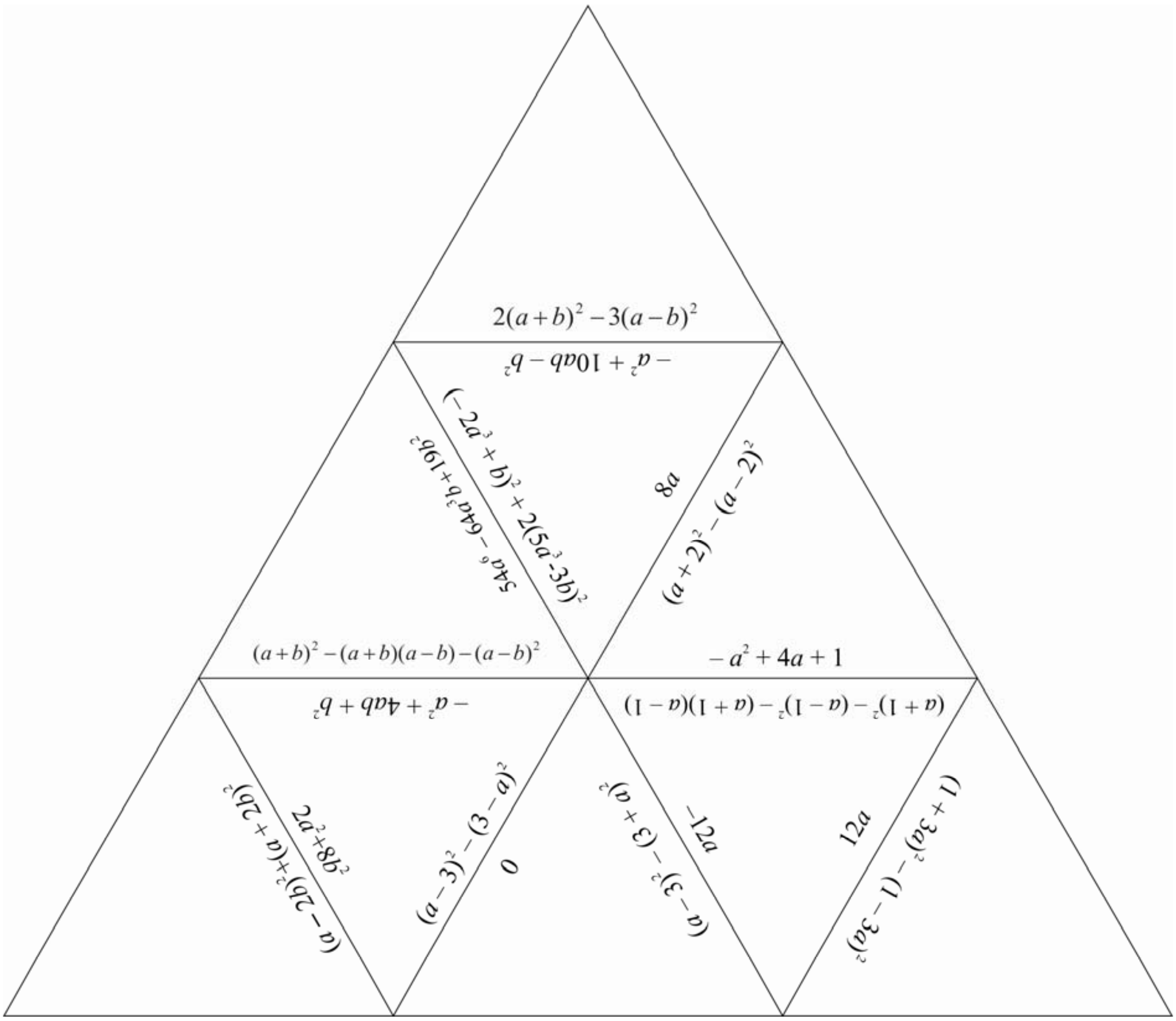
b) $(p^2+q)^2+2(p^2-q)^2=\left(p^2\right)^2+2p^2q+q^2+2\left[\left(p^2\right)^2-2p^2q+q^2\right]=3p^4-2p^2q+3q^2$;

c) $\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=b^2+2\cdot b\cdot\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{b}\right)^2=b^2+2+\frac{1}{b^2}$.

Feladatok

A 16.4 triminó alkalmazása

Módszertani megjegyzés: Gyakoroljunk 16.4. triminó segítségével! A feladatok a tanári modul végén, a vegyes feladatok között is megtalálhatók.



27. Végezd el a következő műveleteket:

a) $(2a-1)^2-3(3a-2)^2+2(a+1)(a-1)$; b) $(3a+2)^2-(6a-1)^2-(2a+3)(2a-3)$;

c) $\left(s+\frac{1}{s}\right)^2-\left(s-\frac{1}{s}\right)^2$.

Megoldás: a) $-21a^2+32a-13$; b) $-a^2+10ab-b^2$; c) $-31a^2+24a+12$; l) 4.

28. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\left(\frac{3}{2}a+4\right)^2-\left(\frac{1}{4}+2a\right)^2$; b) $(a-3b)^2-\left(2a-\frac{b}{2}\right)^2$;

c) $\left(\frac{3}{5}a+\frac{2}{3}b\right)^2+3\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{5}b\right)^2$; d) $\left(\frac{2x}{3}-3y\right)^2-\left(\frac{4}{3}y-4x\right)^2$;

e) $\left(a^n-b^n\right)^2$; f) $\left(2x^n+x^{n+1}\right)^2$.

Megoldás:

a) $\frac{7}{4}a^2+11a+\frac{255}{16}$; b) $-3a^2-4ab+\frac{35}{4}b^2$; c) $\frac{127}{75}a^2-\frac{8}{5}ab+\frac{343}{225}b^2$;

d) $-\frac{140}{9}x^2+\frac{20}{3}xy+\frac{65}{9}y^2$; e) $a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n}$; f) $4x^{2n}+4x^{2n+1}+x^{2n+2}$

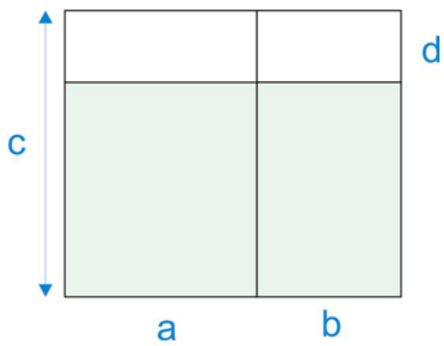
29. Párosítsd az azonosságokhoz a megfelelő ábrákat!

a) $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$; b) $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$;

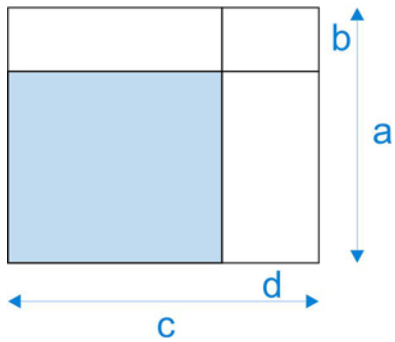
c) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; d) $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$;

e) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; f) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

1.

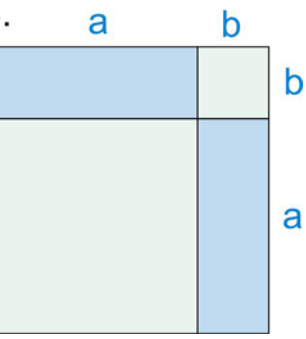


2.

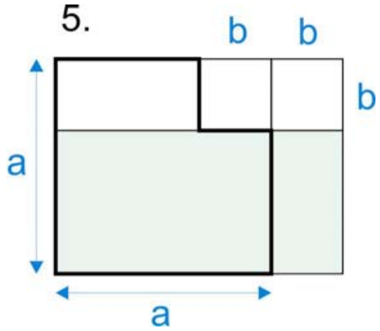


3.

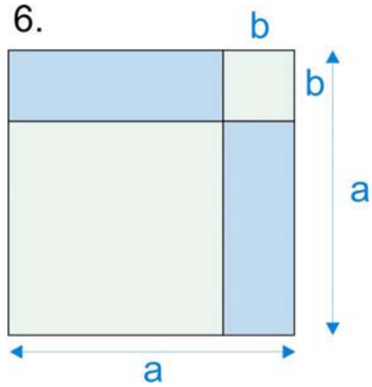
4.



5.



6.



Megoldás: a–3; b–1; c–4; d–2; e–5; f–6.

30. Egészítsd ki a következő kifejezéseket úgy, hogy az két tag összegének vagy különbségének négyzetét adja!

a) $9a^2 + \ldots + 49$; b) $36x^2 - 48x + \ldots$; c) $4d^2 + 32d + \ldots$;

d) $\ldots + 180y + 100$; e) $36a^2 - 24a + \ldots$; f) $\ldots - 130t + 169$;

g) $(3x + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 49$; h) $(\ldots - 4)^2 = \ldots - 48d + \ldots$;

i) $(\ldots + \ldots)^2 = 4s^2 + 32s + \ldots$; j) $(3a - \ldots)^2 = \ldots - 48a + \ldots$

Megoldás:

a) $42a$; b) 16; c) 64; d) $81y^2$; e) 4; f) $25t^2$; g) 7; $9x^2$;$42x$;

h) $6d$; $36d^2$; 16; i) $2s$; 8; 64; j) 8; $9a^2$; 64.

16.1 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani megjegyzés: Gyakoroljuk a nevezetes azonosságok használatát a 16.1 kártyakészlet segítségével, diákkvartett módszerrel. Minden csapat 15 kártyát kap, amelyekből 3 háttere színes. A kártyák közül ki kell választani azokat, amelyeken a színes kártyákon található kifejezésekkel egyenértékűek vannak. A kártyákat elosztják egymás között, elvégzik a műveleteket, majd összevetik az eredményeket. Az értékelés történhet az összeválogatás gyorsasága szerint, de mindenképpen ellenőrizzük, hogy minden csapattag képes-e elvégezni a műveleteket. A feladatok a tanári modulban, a vegyes feladatok között is megtalálhatók.

Megoldás: A sárgához $2[(x-1)^2 + x^2] - 1$ és $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, a piroshoz $(x-3y)^2 + 3y$, a kékhez $16\left[(a+1)^2 - \frac{1}{2}(a+1)\right] + 1$ társítható.

$(2x-1)^2$	$(3x+y)^2-(x+3)(y+3)+(x+3)^2$	$(x+3y)^2$
$(2x+3)^2-3(x+y)^2+3y^2$	$\frac{1}{2}[2(x+3)^2-18(1-y^2)]$	$4(a+3)^2+4a^2$
$(x-3y)^2+3y$	$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$	$(4a+2)^2+1$
$2[(x-1)^2+x^2]-1$	$(4a+3)^2$	$4(a+3)^2+48a$
$2(x-1)^2-8$	$2(x-1)^2-6x$	$16\left[(a+1)^2-\frac{1}{2}(a+1)\right]+1$

V. Kifejezések szorzattá alakítása

A matematikai problémák kezelése során többször találkozunk azzal, hogy az összegek, különbségek szorzattá alakítása egyszerűsíti a feladat megoldását. Többször előfordul, hogy szorzattá alakítás nélkül nem is jutunk végeredményre. Ilyenkor, ha sikerül szorzattá alakítanunk az egyenletben szereplő kifejezéseket, meg tudjuk oldani az egyenletet. Néhány példa, amikor segíthet a szorzattá alakítás:

$\frac{x^2+2x-3}{x-1}=2$ egyenletet (ahol $x \neq 1$) a nevezőjével szorozva másodfokú egyenletet kapnánk, amelyet 10. évfolyamon tanulunk megoldani. Azonban ha észrevesszük, hogy $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, akkor egyszerűsíthetünk:

$$\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=2$$

$$x+3=2$$

$$x=-1$$

-1 esetén a nevező nem válik nullává és visszahelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy valóban megoldás.

$x^5-5x^4=0$ egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$x^4(x-5)=0$. Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, ezért vagy x^4 nulla (és ekkor $x = 0$), vagy $(x - 5) = 0$, ekkor $x = 5$. Vagyis két megoldást kaptunk: $x_1 = 0$ és $x_2 = 5$.

A példákból látható, hogy a szorzattá alakításnak valóban nagy jelentősége lehet a feladatok megoldásában. A szorzattá alakítás három módszerével ismerkedünk meg:

Mintapélda₉

Alakítsuk szorzattá következő kifejezéseket a megadott módszerekkel!

a) Kiemeléssel:

$x^4 - 3x^2 - 5x = x(x^3 - 3x - 5)$;

$a(b-4) - 2(4-b) = a(b-4) + 2(b-4) = (a+2)(b-4)$.

b) Csoportosítással:

$x^2 + yx + 2y + 2x = x(x+y) + 2(x+y) = (x+2)(x+y)$.

A csoportosítás tulajdonképpen nem más, mint többszöri kiemelés.

Módszertani megjegyzés: Ezeket a módszereket 9-edik osztályban csak a gyorsabban haladóknak szoktuk megmutatni. A következő két példa és a hozzájuk kapcsolódó feladatok 10. évfolyamon bukkannak fel, amikor a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjával foglalkozunk. Ehelyütt úgy érdemes megemlíteni, mint a szorzattá alakítás speciális esete.

$$x^2 + 3x - 10 = x^2 - 2x + 5x - 10 = x(x-2) + 5(x-2) = (x+5)(x-2)$$

$$3x - x^2 + 10 = -(x^2 - 3x - 10) = -(x-5)(x+2) = (5-x)(x+2)$$

c) Nevezetes azonosságokkal:

$16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = (4x-3)(4x+3)$

$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = (3-x)^2$

$9x^2 + 42x + 49 = (3x+7)^2 = (-3x-7)^2$

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokhoz javasolt kooperatív módszer: ellenőrzés párban.

31. Alakítsd szorzattá kiemeléssel a következő kifejezéseket:

a) $x^2 - 2x$; b) $4x^3 - 6x$; c) $\frac{2}{3}a^5 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{a}{3}$;

d) $a(x+2) + b(x+2)$; e) $2a(x-y) - (y-x)$; f) $3a(d-1) + (1-d)$;

g) $a(b-5) + 2(5-b)$; h) $-3x^2y - 6x^3y^3 + 9x^2y^4$; i) $d^3 + 2d^2 - d$.

Megoldás:

a) $x(x-2)$; b) $2x(2x^2-3)$; c) $\frac{1}{3}a(2a^4 - 4a + 1)$; d) $(a+b)(x+2)$; e) $(2a+1)(x-y)$;

f) $(3a-1)(d-1)$; g) $(a-2)(b-5)$; h) $3x^2y(3y^3 - 1 - 2xy^2)$; i) $d(d^2 + 2d - 1)$.

32. Alakítsd szorzattá csoportosítással a következő kifejezéseket!

a) $2a(x+y)+x+y$; b) $2xy-2y^2-ax+ay$; c) $x+x^2-x^3-x^4$;

d) $d^2+2d-2s-sd$.

Megoldás:

a) $(2a+1)(x+y)$; b) $(2y-a)(x-y)$; c) $x(1-x)(1+x^2)$; d) $(d-s)(d+2)$.

16.2 triminó alkalmazása

Módszertani megjegyzés: A 16.2 triminó segítségével gyakoroljuk a szorzattá alakítást nevezetes azonosságok felhasználásával. A következő feladat számításait a triminó is tartalmazza.

33. Alakítsd szorzattá nevezetes azonosságok felhasználásával a következő kifejezéseket!

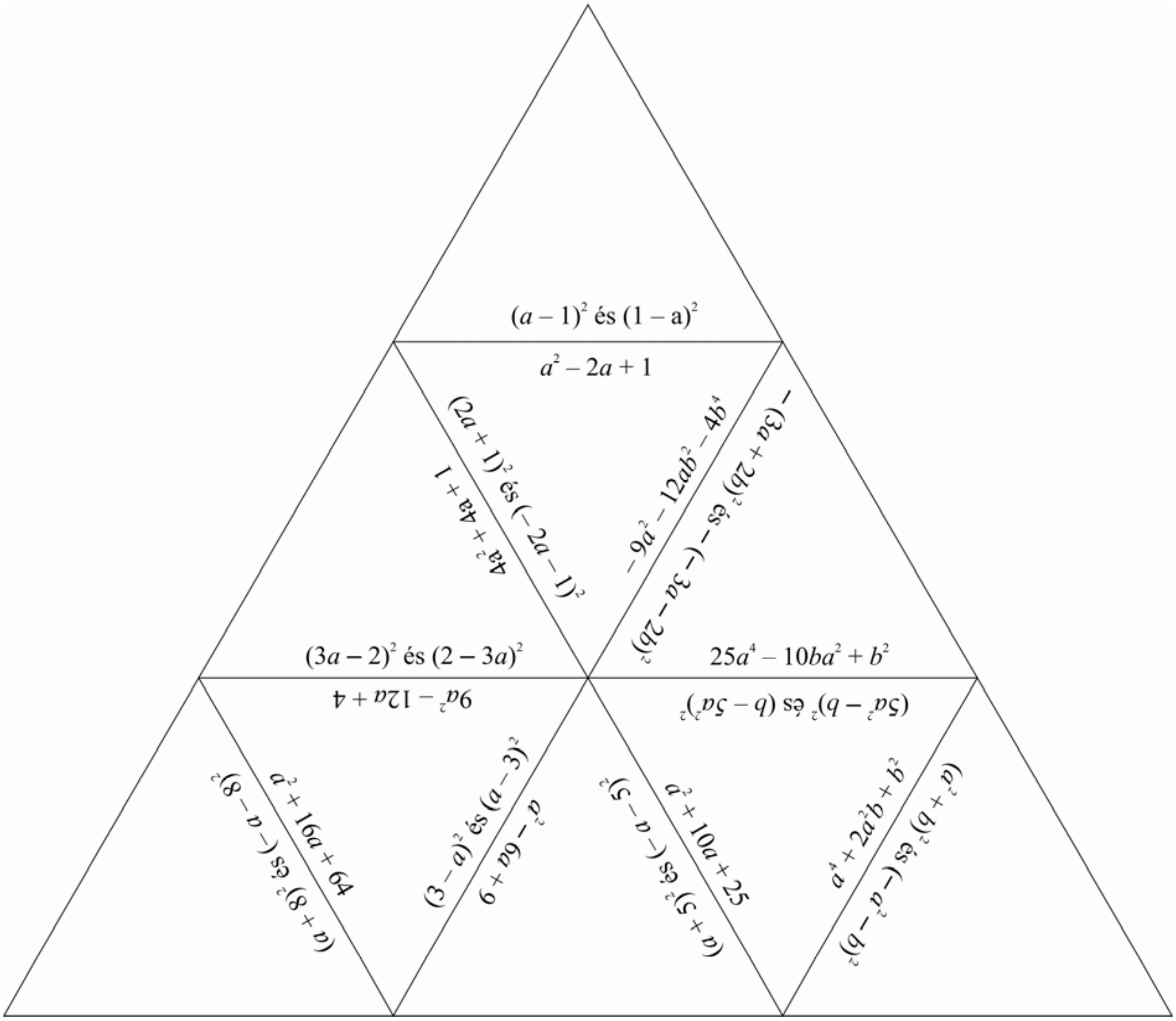
a) $a^2+16a+64$; b) p^2-6p+9; c) x^2-2x+1;

d) $d^2+10d+25$; e) $4a^2+4a+1$; f) $9x^2-12x+4$.

Megoldás:

a) $(a+8)^2$ és $(-a-8)^2$; b) $(p-3)^2$ és $(3-p)^2$; c) $(x-1)^2$ és $(1-x)^2$;

d) $(d+5)^2$ és $(-d-5)^2$; e) $(2a+1)^2$ és $(-2a-1)^2$; f) $(3x-2)^2$ és $(2-3x)^2$.



Módszertani megjegyzés: A következő feladatokhoz javasolt kooperatív módszer: ellenőrzés párban.

34. Alakítsd szorzattá nevezetes azonosságok felhasználásával a következő kifejezéseket!

a) $x^2 - 1$ b) $\frac{1}{4}a^2 - 4s^2$ c) $9s^2 - \frac{1}{9}t^2$ d) $16 - x^2y^2$

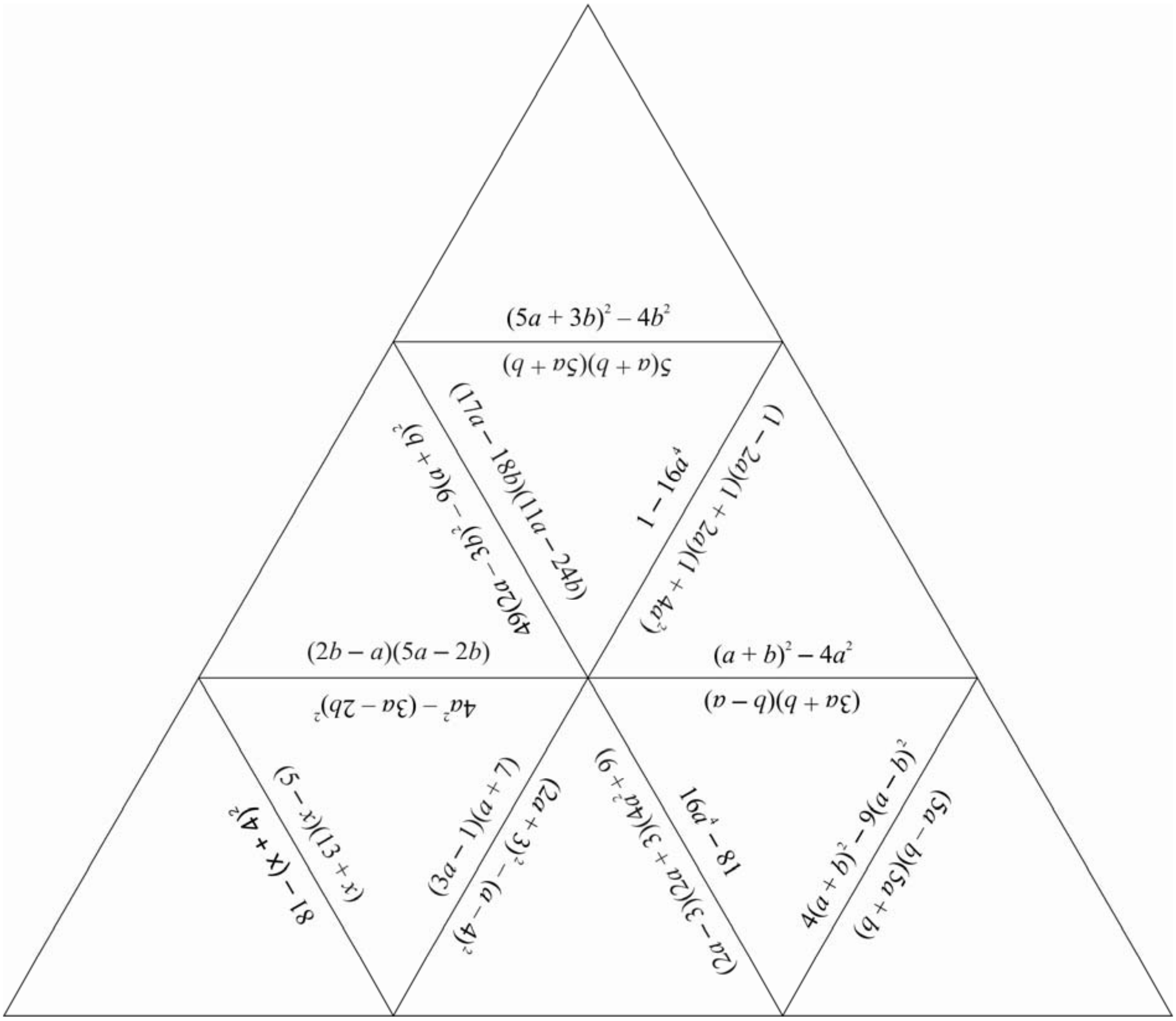
e) $a^2x^2 - 9a^2$.

Megoldás: a) $(x+1)(x-1)$; b) $\left(\frac{1}{2}a-2s\right)\left(\frac{1}{2}a+2s\right)$; c) $\left(3s-\frac{1}{3}t\right)\left(3s+\frac{1}{3}t\right)$;

d) $(4+xy)(4-xy)$; e) $a^2(x+3)(x-3)$.

16.3 triminó alkalmazása

Módszertani megjegyzés: Gyakoroljuk a szorzattá alakítást a 16.3 triminó segítségével! A triminó néhány feladata megtalálható a következő feladatban is.



35. Alakítsd szorzattá nevezetes azonosságok felhasználásával a következő kifejezéseket!

a) $(a+b)^2-4a^2$; b) $4(x+y)^2-9(x-y)^2$; c) $(5x+3y)^2-4y^2$;

d) $49(2d-3c)^2-9(d+c)^2$; e) $4a^2-(3a-2b)^2$; f) $(x^2+1)^2-4x^2$;

g) $(a^2+4b)^2-16b^2$; h) $4x^2-20xy+25y^2-36$; i) a^4-81;

j) $16x^4-81$; k) $\frac{16}{81}a^4-\frac{1}{16}$; l) $16x^4-\frac{1}{16}y^4$.

Megoldás:

a) $(b-a)(3a+b)$; b) $(5y-x)(5x-x)$; c) $5(x+y)(5x+y)$;

d) $(17d-81c)(11d-24c)$; e) $(2b-a)(5a-2b)$; f) $(x+1)^2(x-1)^2$; g) $a^2(a^2+8b)$;

h) $(2x-5y-6)(2x-5y+6)$; i) $(a+3)(a-3)(a^2+9)$; j) $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)$;

k) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{4}\right)$; l) $\left(2x+\frac{y}{2}\right)\left(2x-\frac{y}{2}\right)\left(4x^2+\frac{y^2}{4}\right)$.

36. Alakítsd szorzattá tetszőleges módszerrel a következő kifejezéseket!

a) $2x(y-1)+y-1$; b) $d(2-d)+d-2$; c) $s^2-4s+4-s$;

d) $t^2-5a+at-5t$; e) $2s^2-3d-s^2d+6$; f) $0{,}09-0{,}25d^2$;

g) $27p^2-12q^2$; h) $20a^2-45b^2$; i) $\frac{9}{16}x^2-\frac{4}{9}y^2$;

j) $4-0{,}01d^2$; k) $36x^2-(x^2+9)^2$; l) $1-x^2-2xy-y^2$;

m) x^2-y^2-x-y; n) x^4-y^4.

Megoldás:

a) $(2x+1)(y-1)$; b) $(d-1)(2-d)$; c) $(s-1)(s-4)$; d) $(t-5)(a+t)$;

e) $(s^2+3)(2-d)$; f) $(0{,}3+0{,}5d)(0{,}3-0{,}5d)$; g) $3(3p+2q)(3p-2q)$;

h) $5(2a+3b)(2a-3b)$; i) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}y\right)$; j) $(2-0{,}1d)(2+0{,}1d)$;

k) $-(x-3)^2(x+3)^2$; l) $(1+x+y)(1-x-y)$; m) $(x+y)(x-y-1)$;

n) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$.

37. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) x^2-5x+6; b) x^2+5x+6; c) a^2-a-12; d) $d^2-2d-15$;

e) m^8-4m^4-5; f) x^4-7x^2+12; g) $2+x-x^2$; h) $-4x+21-x^2$;

i) $\frac{9}{2}x-\frac{3}{4}x^2-6+x$.

Megoldás:

a) $(x-2)(x-3)$; b) $(x+2)(x+3)$; c) $(a-4)(a+3)$; d) $(d+3)(d-5)$;

e) $(m^4-5)(m^4+1)$; f) $(x^2-3)(x^2-4)$; g) $-(x-2)(x+1)$; h) $-(x+7)(x-3)$;

i) $\left(\frac{3}{4}x-1\right)(6-x)$.

VI. Algebrai műveletek alkalmazásai

Mintapélda$_{10}$

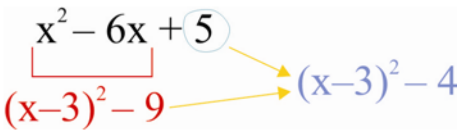
Egészítsd ki teljes négyzetet tartalmazó kifejezéssé a következő kifejezést: $x^2 - 6x + 5$, azaz a kifejezésben egy két tagú összeg (vagy különbség) négyzete, és egy állandó tag szerepeljen!

Megoldás:

Két tag összegének és különbségének négyzetre emelésekor a kétszeres szorzat jelenik meg: $(x \pm a)^2 = x^2 + a^2 \pm 2ax$, ezért az elsőfokú ($x$-es) tagból indulunk ki: megfelezzük az együtthatóját (-6-ot).

$$x^2 - 6x + 5 = \overset{x^2-6x+9}{(x-3)^2} - 4$$

Felírjuk a kifejezés négyzetét, és **korrigálunk** (+ 9 helyett nekünk + 5-re van szükségünk, ezért elveszünk 9-ből 4-et).



Módszertani megjegyzés:
A teljes négyzetté kiegészítés idő hiányában 10. évfolyamon, a másodfokú egyenletek kapcsán is átvehető. Középszintű érettségihez is szükséges (például a másodfokú függvények ábrázolásakor, a kör koordinátageometriájában és szélsőérték-feladatokban).

Mintapélda$_{11}$

Módszertani megjegyzés: szélsőérték-feladat, jobb képességű tanulóknak ajánlott.

Határozd meg az $x^2 + 8x - 12$ kifejezés minimális értékét és azt is, hogy milyen x érték esetén veszi azt fel!

Megoldás:

A kifejezést teljes négyzetet tartalmazó kifejezéssé alakítjuk:

$$x^2 + 8x - 12 = (x+4)^2 - 28$$

A kapott alakból kiolvasható a megoldás.

A kifejezés értéke x értékétől függ. Az x egy változó: ha változik, nyilván az egész kifejezés értéke is változni fog.

$x = -4$ esetén $(x+4)$ értéke nulla, így $(x+4)^2$ is nulla. Ekkor a legkisebb a kifejezés értéke, ugyanis ha x nem -4, akkor $(x+4)^2$ értéke pozitív (nullánál nagyobb).

Tehát az átalakított kifejezésből megállapítható, hogy az $x^2+8x-12$ kifejezés a legkisebb értékét $x=-4$ esetén veszi fel, és ez az érték – 28.

Az előbbi feladathoz hasonlóan lehet megállapítani azt, hogy a $-(x+3)^2+2$ kifejezés **legnagyobb** értéke (maximuma) + 2, és ezt $x=-3$ esetén veszi fel.

Azokat a feladatokat, amelyekben egy kifejezés legnagyobb vagy legkisebb értékét kell megállapítani, **szélsőérték-feladatoknak** nevezzük. A másodfokúra visszavezethető szélsőérték-feladatok megoldásának egyik módja a teljes négyzetet tartalmazó kifejezéssé alakítás.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokhoz javasolt kooperatív módszer: ellenőrzés párban.

38. Egészítsd ki teljes négyzetet tartalmazó kifejezéssé a következő kifejezéseket! Határozd meg legnagyobb, illetve legkisebb értéküket is!

a) x^2+8x+2; b) $a^2-14a+20$; c) $-x^2+4x-6$; d) $-s^2-12s+5$;

e) x^2-5x+2; f) $a^2+7a+\frac{19}{4}$; g) $2x^2-12x+10$; h) $-2x^2-8x-10$;

i) x^2-6x; j) x^2-4x.

Megoldás:

a) $(x+4)^2-14$; b) $(a-7)^2-29$; c) $-(x-2)^2-2$; d) $-(s+6)^2+41$;

e) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$; f) $\left(a+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{15}{2}$; g) $2(x-3)^2-8$; h) $-2(x+2)^2-2$;

i) $(x-3)^2-9$; j) $(x-2)^2-4$.

39. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $(4x-3y)^2-(-2x-y)^2$; b) $(-2x+7y)^2-(3x-5y)^2$;

c) $(2p-3)^2-(p-4)(p+4)-2p(p+2)$;

d) $(5x+2y)^2-(3x+y)(3x-y)+(-2y-x)^2$.

Megoldás:

a) $12x^2-20xy+8y^2$; b) $-5x^2+2xy+24y^2$; c) $p^2-16p+25$; d) $17x^2+24xy+9y^2$.

Mintapélda$_{12}$

Végezzük el a következő műveleteket és határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$; b) $\dfrac{4x-1}{3x+3}-\dfrac{1-2x}{x^2-1}$; c) $\left(\dfrac{4y}{2y-5}-2\right):\dfrac{5}{4y^2-25}$.

Megoldás:

a) Egyik nevező sem lehet nulla, ezért $a \neq \pm b$. A nevezők különbözőek, ezért a megoldást közös nevezőre hozással kezdjük:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

b) A nevezők szorzattá alakíthatók:

$\dfrac{4x-1}{3x+3}-\dfrac{1-2x}{x^2-1}=\dfrac{4x-1}{3(x+1)}-\dfrac{1-2x}{(x+1)(x-1)}$. Egyik nevező sem lehet nulla, ezért $x \neq \pm 1$.

A közös nevező a nevezők legkisebb közös többszöröse: $3(x+1)(x-1)$. A közös nevezőre hozás után a számlálóban alakítjuk a kifejezést:

$$\frac{4x-1}{3x+3}-\frac{1-2x}{x^2-1}=\frac{4x-1}{3(x+1)}-\frac{1-2x}{(x+1)(x-1)}=\frac{(4x-1)(x-1)-3(1-2x)}{3(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{4x^2-x-4x+1-3+6x}{3(x+1)(x-1)}=\frac{4x^2+x-2}{3(x^2-1)}.$$

c) Szorzattá alakítás és kikötés meghatározása után közös nevezőre hozunk a zárójelben: $y \neq \pm\dfrac{5}{2}$;

$$\left(\frac{4y}{2y-5}-2\right):\frac{5}{4y^2-25}=\frac{4y-2(2y-5)}{2y-5}:\frac{5}{(2y+5)(2y-5)}=$$

$$=\frac{4y-4y+10}{2y-5}\cdot\frac{(2y+5)(2y-5)}{5}=\frac{10(2y+5)(2y-5)}{5(2y-5)}=2(2y+5)=4y+10.$$

Módszertani megjegyzés: A következő 3 feladat feldolgozását a „Dobj egy kérdést” módszerrel javasoljuk. A csapatok az a) – d) feladatok közül kettőt jelölnek ki egy másik csapatnak, akik azt „ellenőrzés párban” módszerrel oldják meg. A feladatküldést úgy szervezzük, hogy minden csapatnak az általa küldött 2 feladatot és a kapott 2 feladatot egyaránt meg kell oldania, mert az elküldött feladatok ellenőrzését a küldő csoport végzi.

Feladatok

40. Végezd el a következő műveleteket és határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\dfrac{y}{y+2}+\dfrac{2y+1}{y-2}$; b) $\dfrac{p+1}{p+2q}+\dfrac{p-1}{p-2q}$; c) $\dfrac{10}{x^2-1}+\dfrac{5}{x+1}$;

d) $\dfrac{a^2+1}{a^2-4}-\dfrac{a-1}{a+2}$; e) $\dfrac{4x-1}{3x+3}-\dfrac{1-2x}{x^2-1}$; f) $\dfrac{y+2}{4y^2-9}+\dfrac{3-2y}{6y-9}$;

g) $\dfrac{1}{a^2-a}+\dfrac{1}{a^2+a}$; h) $\dfrac{5}{2x^2+6x}-\dfrac{4-3x^2}{x^2-9}-3$.

Megoldás:

a) $\dfrac{3y^2+3y+2}{y^2-4}$; b) $2\dfrac{p^2-2q}{p^2-4q^2}$; c) $\dfrac{5}{x-1}$; d) $\dfrac{3a-1}{a^2-4}$; e) $\dfrac{4x^2+x-2}{3(x^2-1)}$;

f) $\dfrac{-4y^2+11+y}{3(4y^2-9)}$; g) $\dfrac{3(17x-5)}{2x(x+3)(x-3)}$.

41. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\left(\dfrac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3x^2}{1-x^2}\right)$; b) $\left(\dfrac{2d+1}{2d-1}-\dfrac{2d-1}{2d+1}\right):\dfrac{4d}{10d-5}$;

c) $\left(\dfrac{3}{a-5}-\dfrac{3}{a+5}-\dfrac{29}{a^2-25}\right)\cdot\left(a^2-25\right)$; d) $\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{2b}{2a+b}\right):\dfrac{2b^2}{4a^3-ab^2}$;

e) $\left(\dfrac{x}{y-2x}-\dfrac{x}{y}\right):\dfrac{4x^2}{y^3-4yx^2}$; f) $\left(\dfrac{11x}{10x+2}-1\right)\dfrac{10x+2}{x^2-4}$.

Megoldás: a) $\dfrac{1-x}{1-2x}$; b) $\dfrac{10}{2d+1}$; c) 1; d) $\dfrac{2a-b}{2}$; e) $\dfrac{y+2x}{2}$; i) $\dfrac{1}{x+2}$.

42. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\dfrac{a^2-25}{a-3}:\dfrac{a^2+5a}{a^2-9}$; b) $\dfrac{3x^2-3y^2}{x^2+5x}-\dfrac{6x-6y}{x+5}$;

c) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\cdot\dfrac{x^4}{x^2+2xy+y^2}$; d) $\dfrac{(5a+3)^2}{25a^2-9}$;

e) $\dfrac{5-c}{(6c-6)(c^2+c)}\cdot\left(4c^2-4\right)$; f) $\dfrac{q-2p}{q+2p}:\dfrac{q^2-4p^2}{(q+2p)^2}$;

g) $\dfrac{4y^2-12xy+9x^2}{2}:\dfrac{3x-2y}{4}$; h) $\left(4y^2-24y+36\right):\dfrac{y-3}{4}$.

Megoldás:

a) $\dfrac{a^2-2a-15}{a}$; b) $\dfrac{-3(x-y)^2}{x(x+5)}$; c) $\dfrac{x^2(x-y)}{x+y}$; d) $\dfrac{5a+3}{5a-3}$; e) $\dfrac{10-2c}{3c}$;

f) 1; g) $6x-4y$; h) $16(y-3)$.

43. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}$;

b) $\dfrac{7}{2x-4}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$;

c) $\dfrac{5}{a-3}-\dfrac{a-2}{a^2-9}+\dfrac{a-1}{2a+6}$;

d) $\left(\dfrac{25}{d^2-9}-\dfrac{4}{d-3}+\dfrac{4}{d+3}\right)\cdot\left(d^2-9\right)$;

e) $\dfrac{a^2-6a+8}{a^2+4a+3}:\dfrac{a^2-4a+4}{5a+15}$;

f) $\dfrac{a^2-a-2}{a^2+5a+4}\cdot\dfrac{a^2+3a-4}{a^2-3a+2}$;

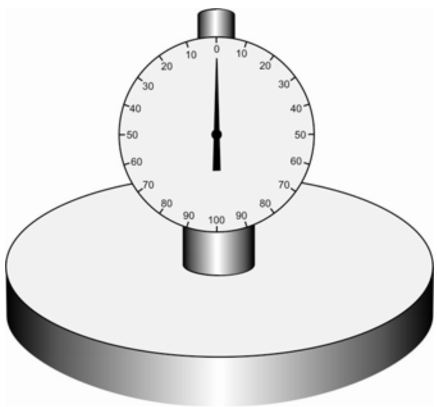
g) $\dfrac{a^2-10a+25}{5-a}-\dfrac{a^2-14a+49}{7-a}$.

Megoldás:

a) $\dfrac{2-x}{x^2-1}$; b) $\dfrac{1}{2(x-2)}$; c) $\dfrac{a^2+4a+37}{2(a-3)(a+3)}$; d) 1; e) $\dfrac{5(a-4)}{(a+1)(a-2)}$;

f) $1-x$; g) -2.

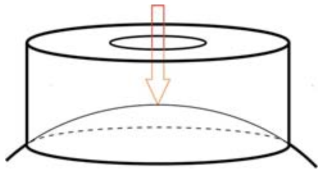
Mintapélda$_{13}$



A szferométer (gömbmérő) olyan műszer, mellyel vékony lemezek, drótok, üveglencsék görbületi sugarát, gömbfelületsugarát lehet meghatározni. A hengeres szferométer egy körhengerrel összekötött mikrométercsavar. Pontos illesztéssel ráhelyezik a görbe felületre és a csavart addig tekerik a henger alapsíkja felé, amíg vége a felületet el nem éri. A műszer alapsíkja és az alaphenger tengelyében elhelyezkedő csavar végének síkja közötti távolságot a mikrométercsavarhoz kapcsolódó skálán olvassák le és ebből számítható ki például egy gömbfelület sugara.

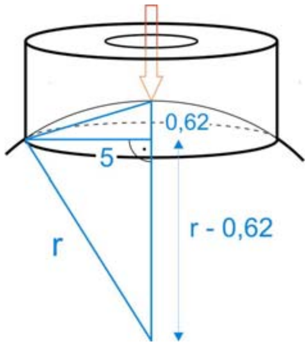
János édesapja hazahozott a műhelyből egy hengeres szferométert, melynek alapköre 5 cm sugarú. Meghatározták János földgömbjének sugarát. Mennyit kaptak eredményül, ha a szferométer skálája 6,2 mm-t mutatott?

Megoldás:



A megoldás kulcseleme a megfelelő ábra elkészítése.

r a gömb sugara. Az ábrán látható derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva kapjuk az alábbi egyenletet:



$r^2 = 5^2 + (r - 0{,}62)^2$. Négyzetre emelés és összevonás után

$$r^2 = 5^2 + r^2 - 1{,}24r + 0{,}62^2$$
$$1{,}24r = 25{,}3844$$
$$r = 20{,}47 \approx 20\ cm$$

A gömb sugara 20 cm.

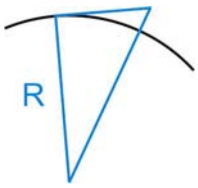
Módszertani megjegyzés: A következő geometriai feladatokban olyan egyenleteket írunk fel, amelyek megoldása során másodfokú nevezetes azonosságokat alkalmazunk. Minden feladat megoldása elsőfokú egyenletre vezethető vissza.

Feladatok

44. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm-rel hosszabb az egyik befogójánál. A másik befogó hossza 30 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás: 40 és 50 cm.

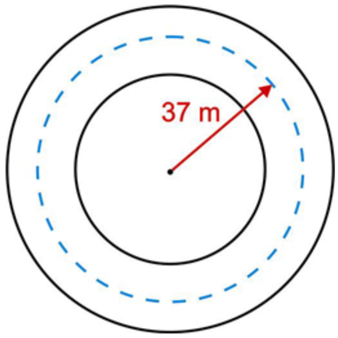
45. Naomi az egyenlítőn él. Egy legenda szerint ősei nagyon régen kiszámolták a Föld sugarát. Utánajárt a számításnak, és elvégezte a hozzá tartozó kísérletet (persze mai eszközökkel): a víz felszínétől 15 méter magasban egy nagy hajóról nézte távcsővel, hogy mikor tűnik el az a csónak, amely az egyenlítő mentén távolodott az ő hajójuktól. Amikor eltűnt a horizonton, a távolságmérős távcső 13,82 km-t mutatott. Mekkorának számította Naomi a Föld sugarát?



Megoldás:

$R^2 + 13{,}82^2 = (R + 0{,}015)^2$ megoldása után 6366,4 km-nek, ami nincs messze a 6370 km-es valódi sugártól.

46. A planetárium körfolyosójának középvonala a középponttól mérve 37 méter sugarú kör, a körfolyosó területe 1394 m^2. Mekkora a terem és a külső fal köreinek sugara?



Megoldás:

$(37+x)^2\pi-(37-x)^2\pi=1394$ megoldásaként (x a folyosó szélességének fele): közelítőleg 31 és 43 méter.

47. Sok középkori monostorban építettek kerengőt: kis belső kertet körbevevő, árkádos folyosót. Mekkora területű négyzet alapú udvart vesz körül az a kerengő, amelynek szélessége 2,8 méter, területe 165,76 m^2 ?

Megoldás:

A területek különbségét kell felírni: $(x+5{,}6)^2-x^2=165{,}76$. Megoldása után: 12 méter az oldalhossz, 144 m^2 a terület.

48. Egy körgyűrű belső és külső sugarának összege 22 cm, a körgyűrű területe 44π . Mekkora a két sugár?

Megoldás:

A területek különbségének felírása után: $(R^2-r^2)\pi=44\pi \;\Rightarrow\; R^2-r^2=44$.

$R^2-r^2=(R+r)(R-r)=22(R-r)=44 \;\Rightarrow\; R-r=2$.

$$\left.\begin{array}{l} R-r=2 \\ R+r=22 \end{array}\right\} \textit{összeadva}\;\; 2R=24 \;\Rightarrow\; R=12;\; r=10$$

49. Egy kör alakú rét egyik átmérőjének két végpontjához érkezik egy darázs és egy méhecske. Észrevesznek a rét szélén egy színpompás virágot, és egyszerre indulnak el feléje. A méhecske sebessége 6,8 m/s, a darázsé 8 m/s. A darázs útja a virágig 78,46 méter, a méhecske útja a rét átmérőjénél 38 méterrel kevesebb. Melyikük ér előbb a virághoz?

Megoldás:

Thalész és Pitagorasz tételét felhasználva $d^2=78{,}46^2+(d-38)^2$. Ezt megoldva d = 100 m adódik. A darázs az útját 9,8 s alatt, a méhecske pedig 9,1 s alatt teszi meg, vagyis a méhecske ér oda először.

Számelméleti feladatok

A 4. modulban már találkoztunk az osztó, a többszörös, a prímek és az összetett számok fogalmával, valamint a legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös és a relatív prímek definíciójával. A következő feladatokban – többek között – ezeket alkalmazzuk.

Mintapélda$_{14}$

Három egymást követő természetes szám összege 1998. Mekkora közülük a legnagyobb szám?

Megoldás:

Jelölje x a középső számot. Ekkor

$$
\begin{aligned}
(x-1)+x+(x+1) &= 1998 \\
3x &= 1998 \\
x &= 666
\end{aligned}
$$

A legnagyobb szám: $x+1=667$

Megjegyzés: A feladat akkor is megoldható, ha nem a középső számot vesszük ismeretlennek. Azonban ez az ötlet leegyszerűsítheti a feladatok megoldását, érdemes megjegyezni.

Módszertani megjegyzés:
Az ellenőrzést minden esetben hajtsák végre, mert az egyenlettel megoldott feladatok megoldásainak helyességét ellenőrizni kell. Az ellenőrzést a szövegbe visszahelyettesítve kell elvégezni.

50. Három egymást követő páros szám összege 1998. Mekkora közülük a legnagyobb szám?

Megoldás: A legnagyobb szám 668.

51. Négy egymást követő természetes szám összege 2002. Melyik közülük a legnagyobb szám?

Megoldás: Jelölje x a négy szám közül a legnagyobbat.

$$
\begin{aligned}
x+(x-1)+(x-2)+(x-3) &= 2002 \\
4x-6 &= 2002 \\
4x &= 2008 \\
x &= 502
\end{aligned}
$$

A legnagyobb szám: 502. Az eredmény megfelel a feladat szövegének.

52. Írj fel olyan számokat, amelyek 4-gyel osztva 3 maradékot adnak. Írd fel ezek általános alakját!

Megoldás: Például: 7, 11, 15, 19, 23, 27,… Általánosan: $4k+3$, ahol k egész szám.

Mintapélda$_{15}$

Ha egy pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor milyen maradékot ad 3-mal osztva a 4-szerese?

Megoldás: $4(3k+1)=12k+4=3(4k+1)+1$ azaz 3-mal osztva 1 maradékot ad.

Feladatok

53. Ha egy pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor milyen maradékot ad 3-mal osztva a négyzete?

Megoldás: $(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$ azaz 3-mal osztva 1 maradékot ad.

54. Ha egy pozitív egész szám 5-tel osztva 3 maradékot ad, akkor milyen maradékot ad 5-tel osztva a négyzete?

Megoldás: $(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$ azaz 5-tel osztva 4 maradékot ad.

55. Ha egy pozitív egész szám 5-tel osztva 3 maradékot ad, akkor milyen maradékot ad 5-tel osztva a 4-szerese?

Megoldás: $4(5k+3)=20k+12=5(4k+2)+2$ azaz 5-tel osztva 2 maradékot ad.

Módszertani megjegyzés: A következőkben a modul különböző feladattípusaiból állítottunk össze válogatást. Akadnak közöttük nehéz feladatok és gyakorló feladatok egyaránt. Ezt a részt csak a tanári modulban találjuk meg.

VII. Vegyes feladatok

56. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket és számítsd ki a helyettesítési értékeket!

a) $\left(2\frac{1}{3}x-3\frac{2}{5}y\right)1\frac{1}{4}x-\left(3\frac{1}{6}x-2\frac{1}{4}y\right)\frac{3}{4}y$; $x=6$; $y=15$;

b) $2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}b-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}b\right)$; $b=\frac{8}{9}$.

Megoldás: a) $\frac{35}{12}x^2-\frac{53}{8}xy+\frac{27}{16}y^2; -111{,}5625$; b) $\frac{41}{24}b-\frac{29}{30}; \frac{149}{270}$.

57. Végezd el a következő műveleteket!

a) $-4a^3(a-2)+a(3-a+a^2)-4(a+1)$; b) $\frac{2}{3}a(2a^3-2)-\frac{5}{6}(3+a^2)$.

Megoldás: a) $-4a^4+9a^3-a^2-a-4$; b) $\frac{4}{3}a^4-\frac{5}{6}a^2-\frac{4}{3}a-\frac{5}{2}$.

58. Végezd el a következő műveleteket! Állapítsd meg a változók értelmezési tartományát is!

a) $\frac{3d-21}{8d-16}\cdot\frac{5d-10}{28+4d}$;

b) $\frac{16w-24}{45-27w}:\frac{8w-12}{15+9w}$;

c) $\frac{6a+3}{2a-6}:\frac{6a+12}{5a-15}$;

d) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y+3\right)\left(\frac{2}{3}x-2\right)$.

Megoldás: a) $\frac{15}{32}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{5(2a+1)}{a+2}$; d) $\frac{1}{3}x^2+x-\frac{4}{9}xy+\frac{4}{3}y-6$.

59. Hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket, és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $\frac{6a+2b-5}{5}-\frac{4a+6b}{2}$; b) $8-\frac{3a-6b}{9}+\frac{4a-b}{3}$; c) $\frac{3a+2b}{2}-\frac{2a+3b}{6}-4$.

Megoldás: a) $\frac{-4a-13b-5}{5}$; b) $8+a-\frac{b}{3}$; c) $\frac{7a+3b-24}{6}$.

60. Hozd közös nevezőre az alábbi kifejezéseket, és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $\frac{2x+3y}{3x}-\frac{3x-4y}{3x}$;   b) $\frac{a+3}{a-5}+\frac{a-7}{5-a}$;   c) $\frac{4t}{t+3}+\frac{5t}{t+3}-\frac{9t-4}{t+3}$.

Megoldás: a) $\frac{7y-x}{3x}$; b) $\frac{10}{a-5}$; c) $\frac{4}{t+3}$.

61. Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\frac{3+x}{4y}$;   b) $\frac{5x}{-3x-4}$;   c) $\frac{8}{4-2x}$.

Megoldás: a) $\mathbf{R}\backslash\{0\}$;   b) $\mathbf{R}\backslash\{-\frac{4}{3}\}$;   c) $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.

62. Végezd el a következő műveleteket!   a) $(x-2y-3z)^2$;   b) $\left(3a+\frac{3}{a}\right)^2$.

Megoldás: a) $x^2+4y^2+9z^2-4xy-6xz+12yz$; b) $9a^2+18+\frac{9}{a^2}$.

63. Végezd el a következő műveleteket: $\left(\frac{5}{6}d^2t-\frac{5}{3}dt\right)^2+3\cdot\left(\frac{d^2t}{3}-\frac{5}{9}dt\right)^2$.

Megoldás: $\frac{37}{36}d^4t^2-\frac{55}{9}d^3t^2+\frac{100}{27}d^2t^2$.

Módszertani megjegyzés: A következő két feladat kártyakészlet részeként is szerepel korábban a tanári modulban.

64.. Az alábbi kifejezések közül melyik egyenértékű a $(2x-1)^2$ kifejezéssel?

a) $2(x-1)^2-6x$;   b) $2(x-1)^2-8$;

c) $2[(x-1)^2+x^2]-1$;   d) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

Megoldás: c), d).

65. Az alábbi kifejezések közül melyik egyenértékű a $(x+3y)^2$ kifejezéssel?

a) $\frac{1}{2}\left[2(x+3)^2-18\left(1-y^2\right)\right]$; b) $(x-3y)^2+3y$;

c) $\left(3x+y\right)^2-(x+3)(y+3)+(x+3)^2$; d) $(2x+3)^2-3(x+y)^2+3y^2$.

Megoldás: d).

66. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(a+b)^2-(a+b)(a-b)-(a-b)^2$; b) $(x+1)^2-(x-1)^2-(x+1)(x-1)$;

c) $2(a+b)^2-3(a-b)^2$; d) $(-2a^3+b)^2+2(5a^3-3b)^2$;

e) $(a+2)^2-(a-2)^2$; f) $(x-2y)^2+(x+2y)^2$;

g) $(1+3x)^2-(1-3x)^2$; h) $(m-3)^2-(3-m)^2$;

i) $(n-3)^2-(n+3)^2$.

Megoldás:

a) $-a^2+4ab+b^2$; b) $-x^2+4x+1$; c) $-a^2+10ab-b^2$; d) $54a^6-64a^3b+19b^2$;

e) $8a$; f) $2x^2+8y^2$; g) $12x$; h) 0; i) $-12n$.

Módszertani megjegyzés: A 67. feladat példái megtalálhatók egy korábban alkalmazott triminón is.

67. Alakítsd szorzattá csoportosítással a következő kifejezéseket!

a) $3t-1+6st-2s$; b) $12d^2+8-6d^2e^2-4e^2$; c) $a^2b^3-b^3+1-a^2$.

Megoldás: a) $(1+2s)(3t-1)$; b) $2(3d^2+2)(2-e^2)$; c) $(b^3-1)(a^2-1)$.

68. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $81-(x+4)^2$; b) $(2a+3)^2-(a-4)^2$; c) $9-a^2+2ab-b^2$;

d) $25p^2-4p^2+12pq-9q^2$; e) $1-16x^4$.

Megoldás:

a) $(5-x)(13+x)$; b) $(3a-1)(a+7)$; c) $(3-a+b)(3+a-b)$;

d) $3(7p-3q)(p+q)$; e) $(1-2x)(1+2x)(1+4x^2)$.

69. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $a^2-8a+15$; b) y^6+2y^3-3; c) $-x^2+x+2$;

d) $-x^2-7x-12$; e) $6x-3+3x-6x^2$; f) $-10x^3-5x^2+4+8x$.

Megoldás:

a) $(a-5)(a-3)$; b) $(y^3+3)(y^3-1)$; c) $-(x-2)(x+1)$; d) $-(x+4)(x+3)$;

e) $3(1-x)(2x-1)$; f) $(4-5x^2)(2x+1)$.

70. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{3}{x+2}+\frac{x+1}{x^2-9}-\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}$; b) $\frac{a^2-4b^2}{\frac{a-2b}{2}}$;

c) $\left(\frac{b}{a}-\frac{2b}{2a+b}\right):\frac{2b^2}{4a^3-ab^2}$; d) $\frac{5y+2}{3y^2-9y}\cdot(3-y)$;

e) $\frac{4x^2-9y^2}{3x-5y}:\frac{2x+3y}{9x^2-25y^2}$; f) $\left(\frac{3a}{1-3a}+\frac{2a}{3a+1}\right):\frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$;

g) $\frac{x^2-8x+16}{4-x}$.

Megoldás:

a) $\frac{3x^2+7x-28}{(x+2)(x+3)(x-3)}$; b) $2(a+2b)$; c) $\frac{2a-b}{2}$; d) $-\frac{5y+2}{3y}$;

e) $6x^2+xy-15y^2$; f) $\frac{1-3a}{2(1+3a)}$; g) $4-x$.

71. Lehet-e három egymást követő páratlan szám összege 2006?

Megoldás: nem, mert három páratlan szám összege biztosan páratlan.

72. Melyik négy egymást követő páratlan szám összege a 2000?

Megoldás: Jelölje x a négy szám közül a legkisebbet.

$$\begin{aligned} x+(x+2)+(x+4)+(x+6)&=2000\\ 4x+12&=2000\\ 4x&=1988\\ x&=497 \end{aligned}$$

A négy egymást követő páratlan szám: $x=497$, $x+2=499$, $x+4=501$, $x+6=503$.

Az eredmény megfelel a feladat szövegének.

73. Öt egymást követő természetes szám összege 2000. Melyik közülük a legnagyobb szám?

Megoldás: 402.

74. Igaz-e, hogy ha x nem osztható 3-mal, akkor $x^2 - 1$ osztható lesz 3-mal?

Megoldás: Ha x nem osztható 3-mal, akkor vagy $3k + 1$, vagy $3k + 2$ alakú.

$x^2 - 1 = (3k+1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 9k^2 + 6k$, ami osztható 3-mal.

$x^2 - 1 = (3k+2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 9k^2 + 12k + 3$, ami osztható 3-mal.

$(3k+2)^2$ helyett használhatunk $(3k-1)^2$ alakot is.

75. Igazold, hogy az $x^5 - 5x^3 + 4x$ kifejezés osztható 120-szal, ha x természetes szám!

Megoldás: A szorzattá bontás módszerével dolgozunk:

$$x^5 - 5x^3 + 4x = x\left(x^4 - 5x^2 + 4\right) = x\left(x^4 - x^2 - 4x^2 + 4\right) = x\left[x^2\left(x^2-1\right) - 4\left(x^2-1\right)\right] =$$
$$x\left[\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)\right] = x\left[(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)\right] = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2),$$

ez 5 egymást követő egész szám szorzata.

Legalább két tényező páros, egyikük biztosan osztható 4-gyel, van közöttük 3-mal és 5-tel osztható szám is, így a szorzat osztható $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$-szal.

Kislexikon

Alaphalmaz: az a számhalmaz, amelyet a feladat szövege ad meg, ennek hiányában a valós számok (**R**).

Bővítés: törtekkel végezhető művelet, a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a számmal vagy kifejezéssel szorozzuk (a szám illetve a kifejezés értéke nem lehet nulla). Több tagú számláló illetve nevező esetén bővítéskor minden tagot megszorzunk. A bővítés ellentéte az egyszerűsítés.

Egyneműek tagok: legfeljebb együtthatójukban különböznek.

Egyszerűsítés: törtekkel végezhető művelet, a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző számmal vagy kifejezéssel osztjuk. Több tagú számláló illetve nevező esetén egyszerűsíteni csak azzal a kifejezéssel vagy számmal lehet, ami kiemelhető a számláló illetve a nevező minden tagjából.

Kifejezés értelmezési tartománya: kikötésekkel szűkített alaphalmaz.

Kifejezés helyettesítési értékét úgy kapjuk, hogy a betűknek értéket adunk.

Nevezetes másodfokú azonosságok: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, ahol $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$.

Polinom: olyan algebrai kifejezés, amelyekben nem szerepel gyökvonás és változót tartalmazó kifejezéssel való osztás. A polinom másik neve: *racionális egész kifejezés*.

Polinom fokszáma: a legmagasabb fokú tagjának foka.