I. A geometriai transzformáció fogalma

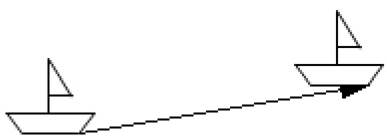
Kártyakészlet a geometriai transzformációkhoz

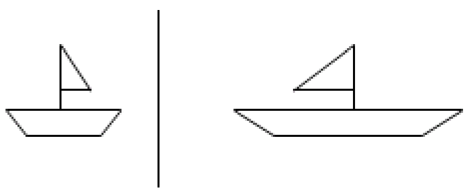
Módszertani megjegyzés:

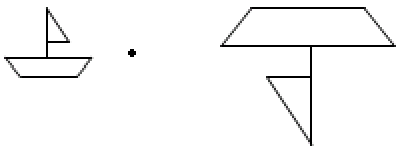
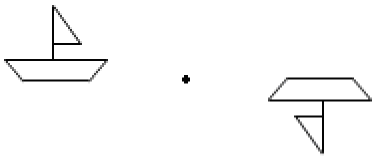
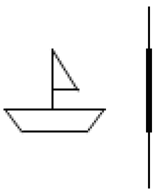
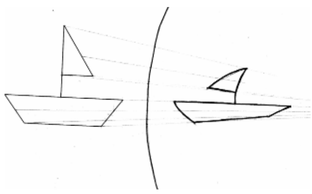
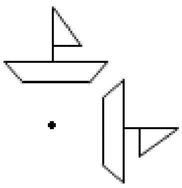
Ezeket a kártyákat a csoportok számának megfelelő mennyiségben, minden csoportnak másmás színű papírra, feldarabolva kell elkészíteni.

Minden csoport kap egy kártyakészletet. A képeslapokat szétterítik az asztalon, a szövegeseket lehetőleg egyenlően elosztják egymás között. A szóforgó szabályának megfelelően felváltva felolvasnak egy-egy szöveget, és megkeresik a hozzá tartozó képet.

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy az utasítás a sík minden pontjára vonatkozik (mint ahogy később a hozzárendelés esetén is), ám mi csak a feketére színezett pontok mozgását tudjuk követni.

1 	**C** Megadtam egy egyenest. Sík pontjai figyelem! Minden pont a lehető legrövidebb úton menjen a megadott egyeneshez, és ugyanabba az irányba haladjon tovább annyit, mint amekkora utat az egyenesig megtett!
2 	**D** Sík pontjai figyelem! Minden pont mozduljon el azonos irányba ugyanakkora távolsággal!

3 	**B** Megadtam egy egyenest. Sík pontjai figyelem! Minden pont a lehető legrövidebb úton menjen a megadott egyeneshez, és ugyanabba az irányba haladjon tovább kétszer annyit, mint amekkora utat az egyenesig megtett!

4		**G** Megadtam egy pontot. Sík pontjai figyelem! Minden pont a lehető legrövidebb úton szaladjon a megadott ponthoz, és ugyanabba az irányba haladjon tovább még kétszer annyit, mint amekkora utat a pontig megtett!
5		**A** Megadtam egy pontot. Sík pontjai figyelem! Minden pont a lehető legrövidebb úton menjen a megadott ponthoz, és ugyanabba az irányba haladjon tovább ugyanannyit, mint amekkora utat a pontig megtett!
6		**F** Megadtam egy egyenest. Sík pontjai figyelem! Minden pont a lehető legrövidebb úton menjen a megadott egyeneshez, és maradjon ott!
7		**H** Megadtam egy körívet. Sík pontjai figyelem! Minden pont a lehető legrövidebb úton menjen a körívez, és ugyanabba az irányba haladjon tovább annyit, amekkora utat a körívig megtett!
8		**E** Megadtam egy pontot. Sík pontjai figyelem! Minden pont forduljon el a megadott pont körül 90˚-kal!

Megoldókulcs:

1 – C	2 – D	3 – B	4 – G
5 – A	6 – F	7 – H	8 – E

Geometriai transzformációk

A **geometriai transzformációk** olyan függvények, melyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

Ebben a fejezetben az értelmezési tartomány és az értékkészlet is egy sík, illetve annak egy része.

Hozzárendelési szabályok:

1. Tengelyes tükrözés:

Adott egy *t* egyenes, a tengely, melynek minden pontjához önmagát rendeljük. A *t* egyenesre nem illeszkedő *P* ponthoz azt a *P’* pontot rendeljük, amelyre igaz, hogy a tengely merőlegesen felezi a *PP’* szakaszt.

2. Középpontos tükrözés:

Adott egy *O* pont, a középpont, melynek képe önmaga. A sík *O*-tól különböző *P* pontjához azt a *P’* pontot rendeli, amely az *OP* egyenesen van, és az *O* felezi a *PP’* szakaszt.

3. Eltolás:

Adott egy **v** vektor, azaz irányított szakasz. A sík egy adott *P* pontjának képe az a *P’* pont, amelyre igaz, hogy a $\overrightarrow{PP'}$ irányított szakasz egyenlő a megadott **v** vektorral.

4. Merőleges vetítés:

Adott a síkban egy *e* egyenes (tengely), melynek minden pontjához önmagát rendeljük. Az *e* egyenesre nem illeszkedő bármely *P* pont képe (vetülete) a *P* pontból az *e* egyenesre bocsátott merőleges *P’* talppontja.

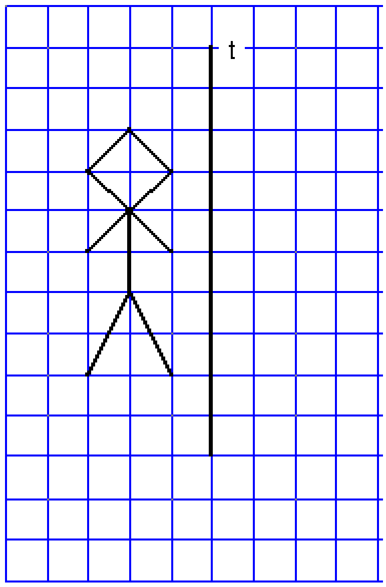
5. Identitás (azonos leképezés):

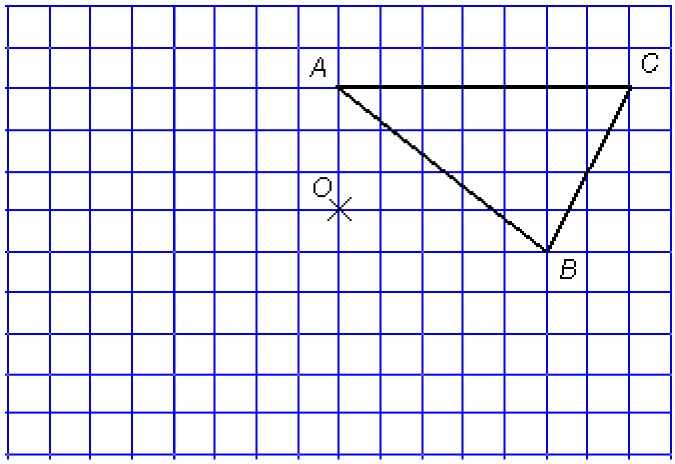
Minden ponthoz önmagát rendeli. Ilyen például a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vektorral való eltolás.

A középpontos hasonlóság, a merőleges affinitás és a körre vonatkozó tükrözés hozzárendelési szabályát nem kell tudni. Az ügyesebbek a tapasztalat és a szemlélet alapján ezeket is megfogalmazhatják.

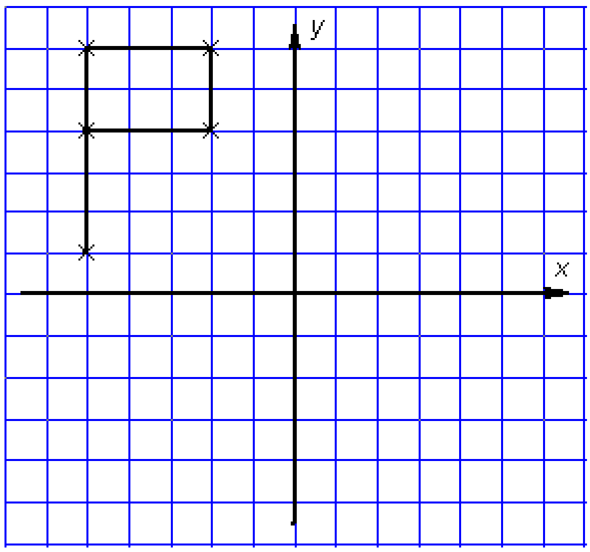
Feladatok

1. Végezd el a tengelyes és a középpontos tükrözést a négyzetrács segítségével!





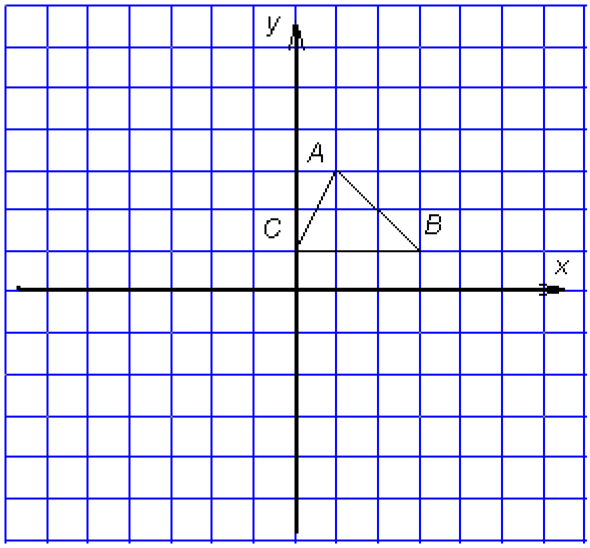
2. Legyen a hozzárendelés szabálya: $(x; y) \mapsto (x + 5; y - 2)$! Ábrázold az így kapott zászló képét! Melyik geometriai transzformációt adtuk meg?



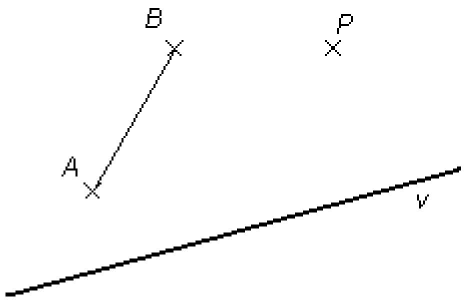
Megoldás: Az (5; – 2) vektorral történő eltolást.

3. Legyen a hozzárendelés szabálya: $(x; y) \mapsto (-2x; -2y)$! Ábrázold az így kapott háromszög képét! Milyen geometriai transzformációt végeztél?

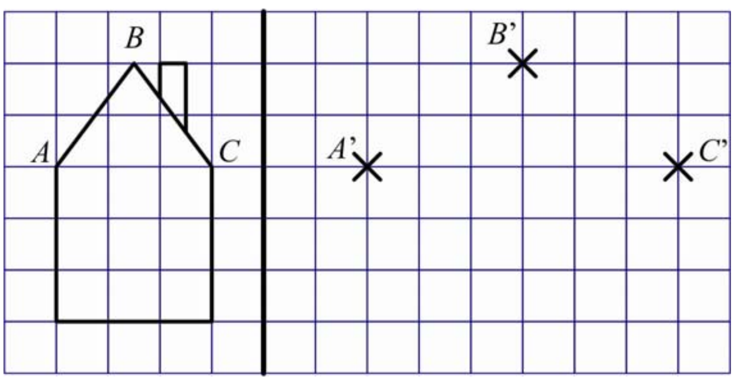
Megoldás: Középpontos hasonlóság, kétszeres nagyítás



4. Vetítsd merőlegesen a v egyenesre a P pontot és az AB szakaszt!

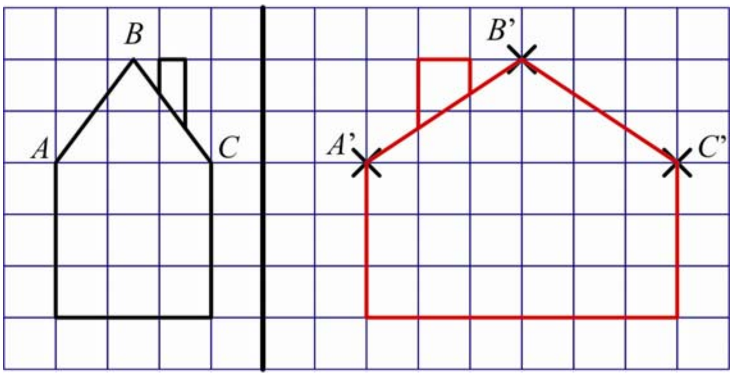


5. Adott a házikó három pontjának képe. Találd ki a hozzárendelés szabályát és rajzold meg a teljes alakzat képét! Fogalmazd meg a hozzárendelés szabályát!

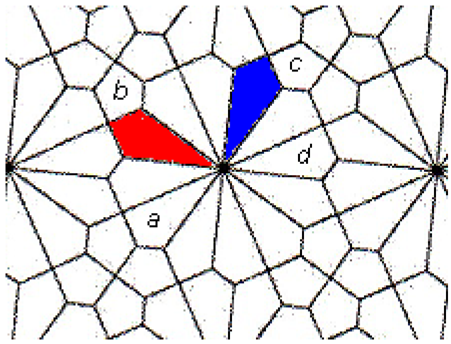


Megoldás:

Adott egy tengely, a tengely minden pontjának képe önmaga. A tengelyen kívüli P ponthoz azt a P' pontot rendeltük, melyre a PP' szakasz merőleges a tengelyre, és a P' kétszer olyan távol van a tengelytől, mint a P.



6. Egy geometriai transzformáció a piros négyszöget a kékbe viszi. Keresd meg a betűkkel jelölt mozaiklapok képét!
Milyen transzformációt végeztél?



Megoldás: Pont körüli, – 90˚-os elforgatást.

II. Transzformációk rendszerezése

A geometriai transzformációk tulajdonságai

Egy geometriai transzformáció **egyenestartó**, ha bármely egyenes képe is egyenes.

Távolságtartó az olyan geometriai transzformáció, amelynél bármely szakasz és képének a hossza egyenlő. Az ilyen transzformációkat **egybevágósági transzformációknak** nevezzük.

Egy geometriai transzformáció **szögtartó**, ha bármely szög és képe egyenlő nagyságú.

Megfordíthatónak mondjuk a geometriai transzformációt, ha az eredeti alakzat a hozzárendelési szabály és a kép ismeretében egyértelműen előállítható.

A **hasonlósági** transzformációk esetében az alakzatok formája változatlan marad, csak a méretük változik.

Körüljárási irányt megtartó vagy **körüljárási irányt megváltoztató** egy geometriai transzformáció aszerint, hogy alakzatnak és képének körüljárási iránya azonos vagy ellentétes.

Azokat a geometriai transzformációkat, amelyeknél nemcsak az alakzat mérete, hanem formája is megváltozik **„torzítónak”** mondjuk.

Egy geometriai transzformáció **fixpontjának** nevezzük azt a pontot, amelynek képe önmaga.

Fixalakzatnak az olyan alakzatot mondjuk, amelynek minden pontja fixpont.

Azokat az alakzatokat, melyeknek képe önmaga, **invariáns alakzatoknak** nevezzük. Az invariáns alakzatnak nem feltétlenül minden pontja fixpont.

Egybevágósági transzformációk tulajdonságai

1. Tengelyes tükrözés:

Távolságtartó, szögtartó. A tengely pontjai fixpontok, a tengely fixalakzat. A tengelyre merőleges egyenesek invariáns alakzatok. Az alakzatok körüljárási iránya megváltozik.

2. Középpontos tükrözés:

Távolságtartó, szögtartó. A középpont fixpont. A középponton áthaladó egyenesek invariáns alakzatok. A középponton át nem haladó egyenes és képe párhuzamos egymással. Az alakzatok körüljárási iránya nem változik.

3. Eltolás:

Távolságtartó, szögtartó. Az eltolás vektorával párhuzamos egyenesek invariáns alakzatok. Bármely egyenes és képe párhuzamos egymással. Az alakzatok körüljárási iránya nem változik. Amennyiben az eltolás vektora **0** (nullvektor), akkor minden pontja fixpont, más esetben nincs fixpontja.

4. Identitás (azonos leképezés):

Minden pontja fixpont.

Nem egybevágósági transzformációk tulajdonságai

1. Merőleges vetítés:

Nem távolságtartó és nem szögtartó. A tengely pontjai fixpontok, az egyenes maga fixalakzat. Nem egyenestartó, mert a tengelyre merőleges egyenes képe egy pont. Torzító transzformáció. Nem megfordítható.

2. Középpontos hasonlóság:

Nem távolságtartó, de szögtartó geometriai transzformáció. Fixpontja a középpont. A középponton áthaladó egyenesek invariáns alakzatok. A középponton át nem haladó egyenes és képe párhuzamos egymással. Megfordítható hozzárendelés. Az alakzatok körüljárási iránya nem változik.

Módszertani megjegyzés: Annyi csoportot szervezve, ahány transzformációt tanítani akarunk, a diákokkal plakátot készíttethetünk egy-egy transzformációról megadott szempontok alapján. A plakátokat forgószínpadszerűen bemutathatják a csoportok.

Kérdések a diákkvartetthez

Módszertani megjegyzés:
A feladatsor a transzformációk tulajdonságainak elsajátítását méri fel. A válaszokat a csoportok közösen beszéljék meg!
Igyekezzenek az összes megoldást megtalálni!

Melyik geometriai transzformációra igazak az állítások?

1. Szakasz és képe ugyanolyan hosszú (távolságtartó)

   Tengelyes és középpontos tükrözés, eltolás, pont körüli elforgatás, identitás.

2. Egyenes képe egyenes (egyenestartó)

   Tengelyes és középpontos tükrözés, eltolás, pont körüli elforgatás, identitás, középpontos hasonlóság, merőleges affinitás.

3. Szög és képe ugyanolyan nagyságú (szögtartó)

   Tengelyes és középpontos tükrözés, eltolás, pont körüli elforgatás, identitás, középpontos hasonlóság.

4. Mozgatással át lehet vinni az alakzatot a képbe

   Tengelyes (térbeli mozgatással) és középpontos tükrözés, eltolás, pont körüli elforgatás, identitás.

5. Bármely alakzat és képe formára és méretre ugyanolyan (egybevágóság)

   Tengelyes és középpontos tükrözés, eltolás, pont körüli elforgatás, identitás.

6. Minden alakzat formája ugyanolyan marad, csak a mérete változik. (hasonlóság)

   Középpontos hasonlóság.

7. „Eltorzul" az alakzat

   Merőleges vetítés, Merőleges affinitás, körre vonatkozó tükrözés. (A tanultak közül.)

8. Van fixegyenese

   Tengelyes tükrözés, merőleges affinitás, merőleges vetítés

9. Nincs fixpontja

   Eltolás.

10. Egyetlen egy fixpontja van

    Középpontos tükrözés, középpontos hasonlóság.

11. Az utasítás végrehajtása után van olyan pont, ami több eredetinek is képe

    Merőleges vetítés.

12. A kép és az utasítás ismeretében, előállítható az eredeti alakzat (megfordítható)

    Tengelyes és középpontos tükrözés, eltolás, pont körüli elforgatás, identitás, középpontos hasonlóság, merőleges affinitás.

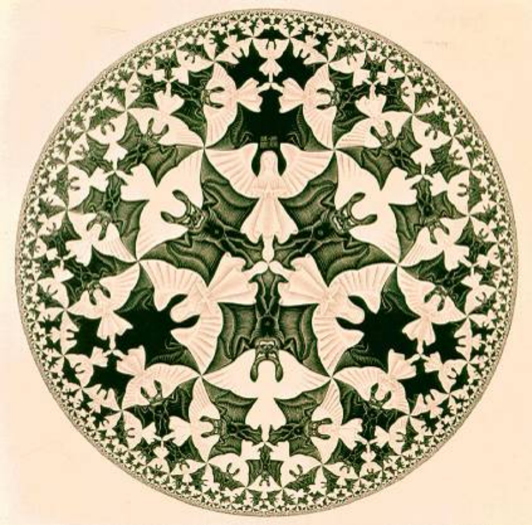
13. Teljesül, hogy ha A képe A', akkor az A' képe A (Vagyis a transzformációt kétszer egymásután elvégezve visszajutunk az eredeti alakzathoz.)

    Középpontos és tengelyes tükrözés, identitás.

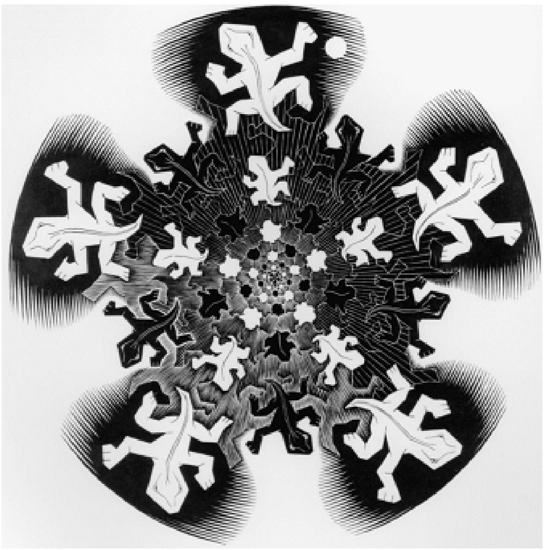
III. Elforgatás

Módszertani megjegyzés: Az alábbi képeket M. C Escher holland művész készítette, a képek letölthetők a www.mcescher.com Picture Gallery részéből. Tudjanak meg minél többet Escherről a gyerekek az internetről!
A képeket a csoportok számának megfelelő példányban kell elkészíteni. Minden csoport négy különböző képet kap, páronként két-két darabot. Feladatuk, hogy meghatározzák, mekkora szöggel lehet elforgatni a képeket úgy, hogy önmagukba menjenek át! (Több megoldást is keressenek!) Ha a párok elkészültek a két képpel, cserélnek a másik csoport párjával.

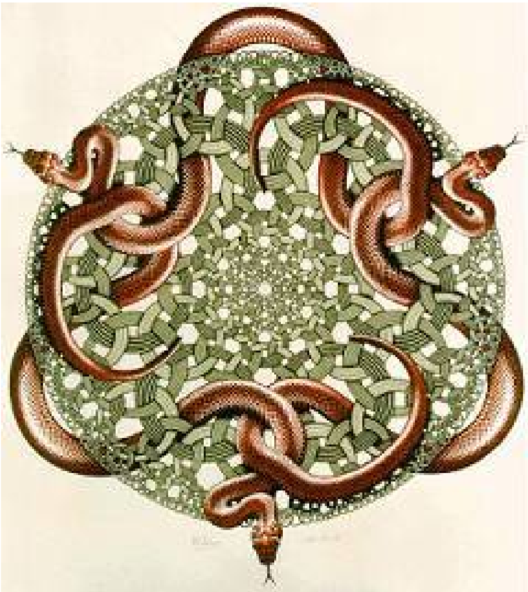
A



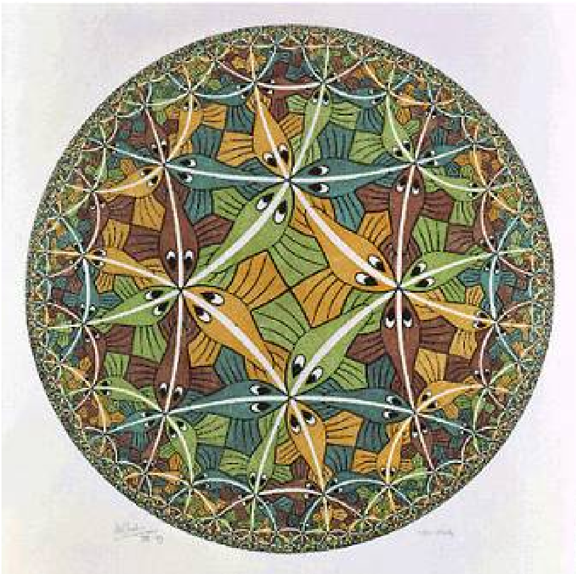
B



C



D



A: 120˚, ill 240˚ B: 72˚, 144˚, 216˚ és 288˚ C: 120˚, ill 240˚ D: 90˚, 180˚ és 270˚.

A pont körüli elforgatás

Hozzárendelési szabály:

Adott egy O pont, **a középpont**, valamint az **elforgatás szöge** (nagysággal és iránnyal).

Az O pont képe önmaga.

A sík O-tól különböző bármely P pontjához azt a P' pontot rendeljük, amelyre $OP = OP'$ és a POP' szög nagysága és iránya az elforgatás

Tulajdonságok:

– Távolságtartó (egybevágósági transzformáció)

– Szögtartó

– A középpont fixpont

– Megfordítható

– Alakzat és képe azonos körüljárási irányú

– Hegyesszögű vagy derékszögű elforgatáskor bármely egyenes és képe az elforgatás szögével azonos szöget zár be

– A 0°-kal, 360°-kal vagy egész számú többszörösével történő elforgatás azonos leképezés

Módszertani megjegyzés:
Minden csoportnak adjunk egy A4- es papírt, a tetején a következő szöveggel:

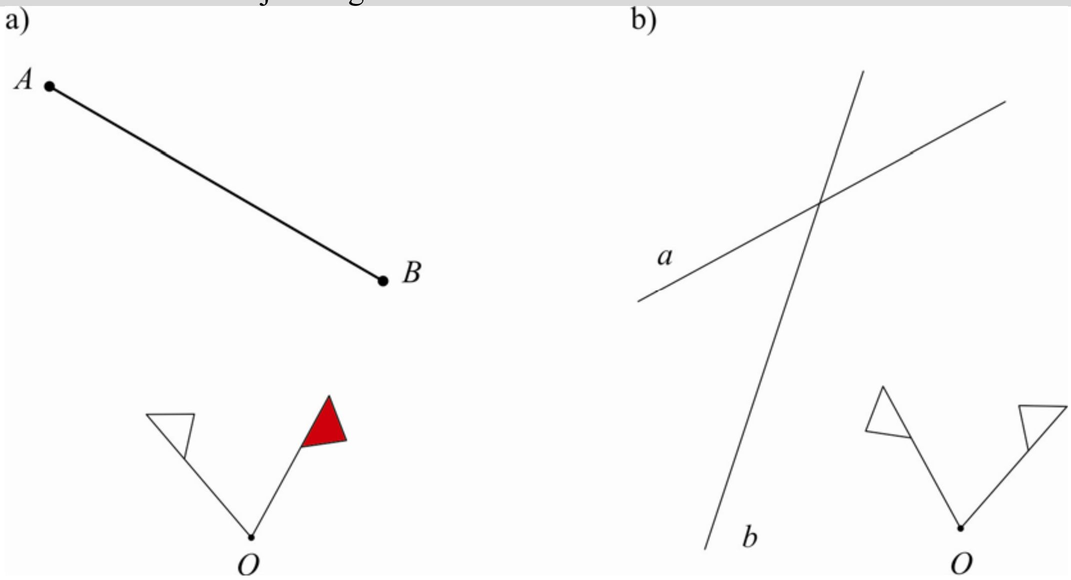
Gyűjtsétek össze ezen a lapon a pont körüli elforgatás tulajdonságait úgy, hogy a csoport tagjai egymás után írnak egy-egy tulajdonságot, majd továbbadják a lapot! („kerekasztal”)

Addig járjon körbe a lap, amíg tudnak új tulajdonságot írni. A csoportok szóvivői felváltva felolvassák az összegyűjtött tulajdonságokat.

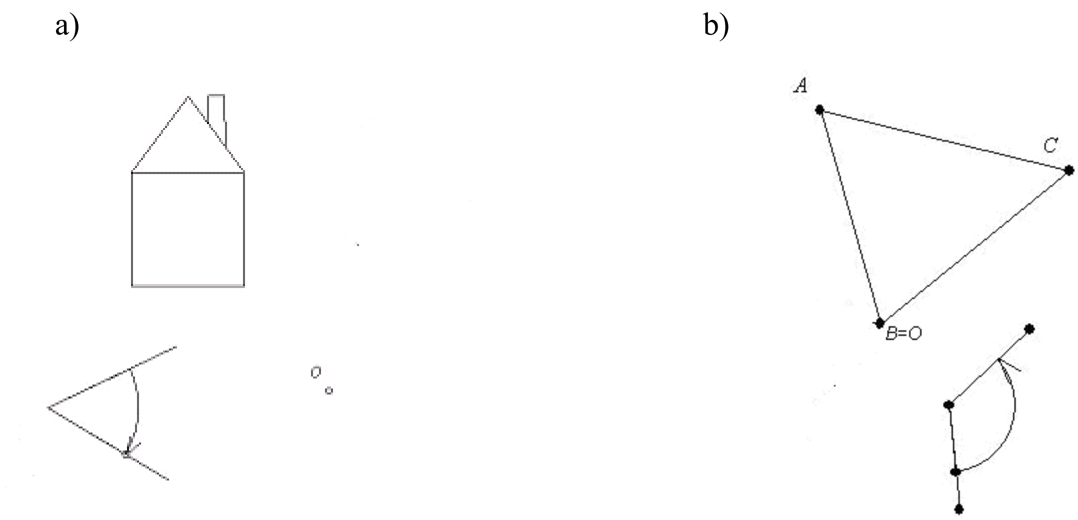
Feladatok

7. Végezd el az *O* pont körüli elforgatást másolópapír segítségével a zászlós mutató szerint!

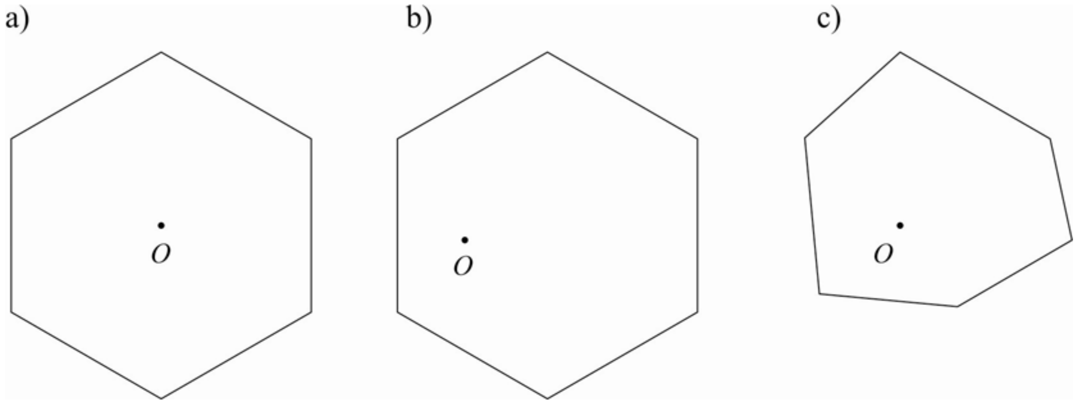
Módszertani megjegyzés: A tanár ismertesse a másolópapírral történő elforgatást, felhívja a figyelmet a megfelelő irány megválasztására (írásvetítőn is bemutathatja). Ezután a gyerekek a feladatokat önállóan oldják meg.



8. Forgasd el az alakzatokat az *O* középpont körül a megadott forgásszöggel! Színezz egymásnak megfelelő szakaszokat illetve szögeket a képen!



9. Forgasd el az ábrán látható hatszögeket az *O* pont körül + 60°-kal másolópapír segítségével!



IV. Elforgatást, szimmetriát alkalmazó feladatok

Módszertani megjegyzés: Ráhangolódásként "füllentős" játékkal kezdhetjük az órát: a csoportok két igaz és egy hamis állítást fogalmaznak meg, az előző órán általuk feldolgozott transzformációval kapcsolatosan.
Valamely csoport szóvivője felolvassa a három állítást, és a csoportok megbeszélik, hogy melyik a hamis Adott jelre minden csoport szóvivője felmutatja a hamisnak vélt állítás sorszámát. A tanár a táblánál nyilvántartja a csoportok eredményét.

A pont körüli elforgatás lépései:

Az elforgatandó pontot (P) összekötjük a középponttal.

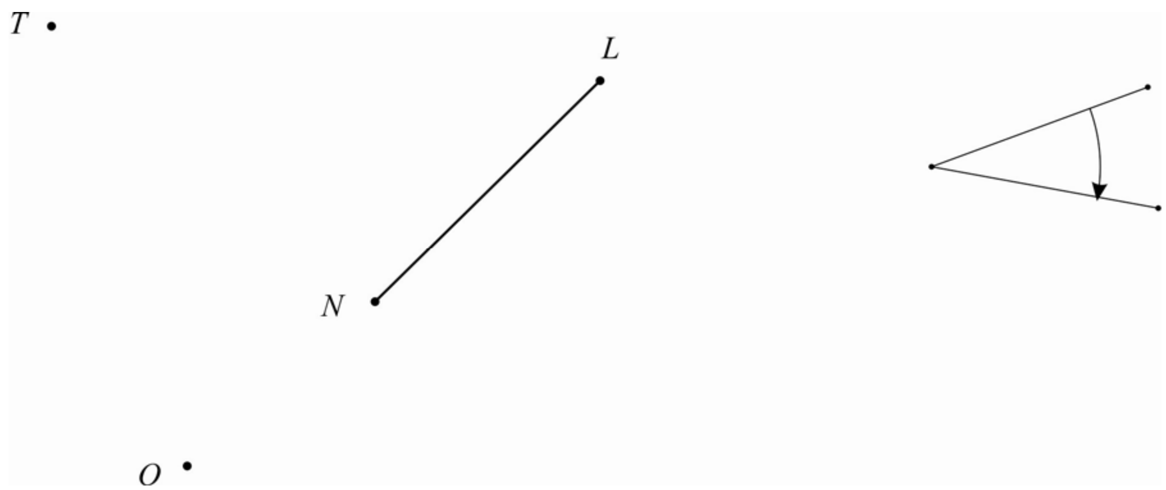
Az OP szakaszra O középponttal a megfelelő forgásirányra ügyelve megszerkesztjük vagy másoljuk a szöget. (Pozitív az óramutató járásával ellentétes, negatív az óra mutató járásával egyező forgásirány)

A keletkezett szögszáron kijelöljük az O-tól OP távolságra levő pontot. Ez lesz a P'.

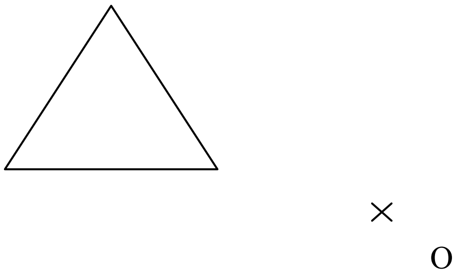
Ezt a lépéssorozatot táblánál vagy írásvetítőn demonstrálja a tanár.
A következő feladatok lépéseit a csoportok megbeszélhetik egymás között.

Feladatok

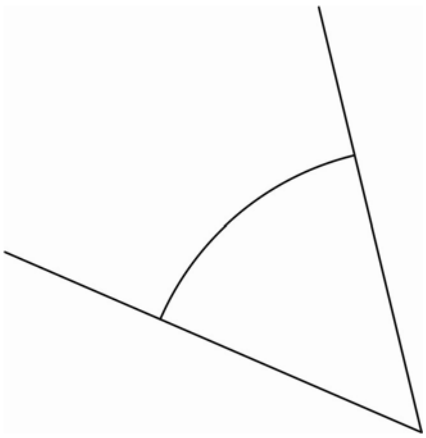
10. Forgasd el a megadott irányban az O pont körül a T pontot és az NL szakaszt a megadott szöggel a megadott irányban!



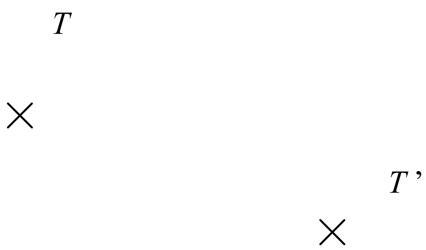
11. Forgasd el a szabályos háromszöget az *O* pont körül – 45°-kal!



12. Forgasd el a szöget a csúcsa körül – 90°-kal! Figyeld meg a szögszárakat! Milyen szögpárfajtát látsz? Mire emlékszel ezzel kapcsolatosan?

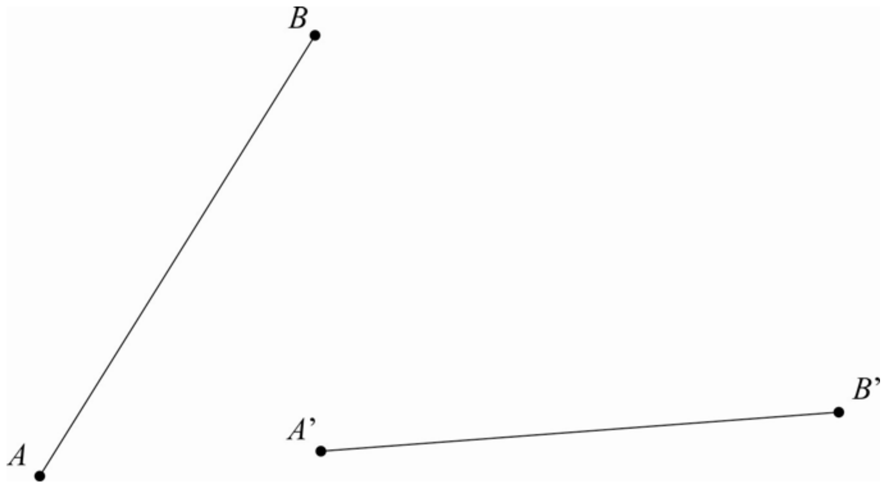


13. Valamilyen pont körüli elforgatás a *T* pontot a *T* ’-be vitte. Hol lehet a forgatás középpontja?



Megoldás: A *TT’* szakasz szakaszfelező merőlegesén.

14. Az *AB* szakasz elforgatott képe *A’B’*. Szerkeszd meg az elforgatás középpontját, és határozd meg az elforgatás szögét!



Megoldás: A középpont az *AA’* és *BB’* szakaszok szakaszfelező merőlegeseinek metszéspontja, az elforgatás szöge az *AOA*’ szög (kb. 54°).

Házi feladat javaslat: A tanulók hozzanak a következő órára olyan alakzatokat, amelyek valamilyen pont körül önmagukba forgathatóak (nem 360°-kal). A képek lehetnek művészeti, építészeti vagy természeti témájúak. Kereshetnek folyóiratokban, könyvekben és az inteneten, ajánlható a **www.google.com** lapon a képek keresésének használata. Kulcsszavak pl. ornamentika, Escher, virág, keresztszemes, hajfonatkorong, templom, logó, címer, pajzs…. Lehet keresni tetoválás minták és mandalák között is.

Fontos, hogy papíron elkészített rajzokat hozzanak, lehet fénymásolva, nyomtatva, de szabadkézi rajzzal másolva vagy fantázia alapján elkészítve is. Az a legjobb, ha pár rajzot kinyomtatnak átlátszó fóliára és papírra egyaránt.

V. Forgásszimmetrikus alakzatok

A házi feladatként gyűjtött képekből csomagolópapírral, ragasztóval közös kiállítást készítenek a tanulók csoportmunkában

Egy alakzat **forgásszimmetrikus**, ha létezik olyan 0°-tól különböző szögű pont körüli elforgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át.

A **forgásszimmetria rendjét** az határozza meg, hogy hány olyan szög van a $0° < \alpha \le 360°$ tartományban, melyre nézve az alakzat forgásszimmetrikus. A szabályos hatszög például hatodrendben, míg a szabályos háromszög harmadrendben forgásszimmetrikus.

Módszertani megjegyzés:
Szakértői mozaik: Minden csoportban **A**, **B**, **C** és **D** jelű diákok vannak (a feladatok különböző nehézségűek ebben a sorrendben). Összegyűlnek egy helyre az A jelűek, egy másikra a B jelűek … Minden csoport együtt megoldja a saját betűjelének megfelelő feladatot, a megoldást mindenkinek le kell írni. A megértés is fontos, mert ezt a feladatot az eredeti csoportban ismertetni és magyarázni kell! A megoldásra szánt idő elteltével visszarendeződnek az eredeti csoportok és mindenki megtanítja a feladata megoldását a csoport többi tagjának.
A tanár irányítja a szakértői csoportok megalakulását, segíti a csoportok munkáját. Körbejárva ellenőrzi, hogy minden diáknak mind a négy feladat megoldásmenete kerüljön a füzetébe.

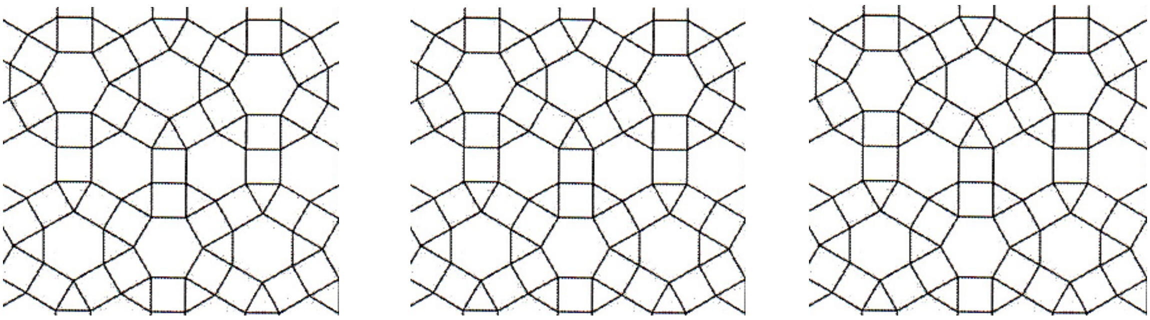
A feladata:
Add meg az alábbi alakzatok, illetve minták forgásszimmetriájának rendjét, és azokat a szögeket, amivel elforgatva önmagukba mennek át!





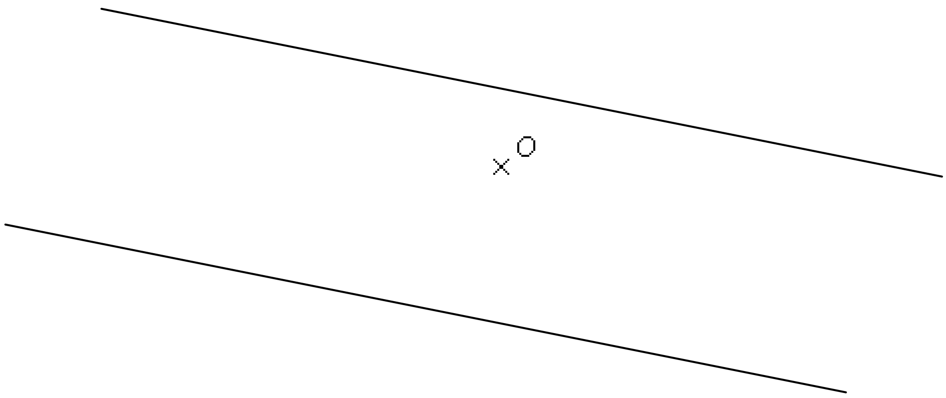
B feladata:

Színezd a parkettát úgy, hogy forgásszimmetrikus legyen! Keress több megoldást! Add meg a szimmetria rendjét is!



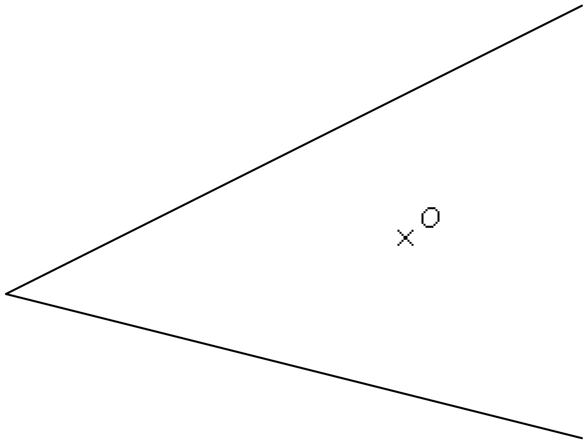
C feladata:

Szerkessz négyzetet, melynek középpontja *O* és két szomszédos csúcsa rajta van egy-egy egyenesen! Használj másolópapírt!



D feladata:

Szerkessz szabályos háromszöget, ha középpontja *O* és két csúcs rajta van a szög egy-egy szárán! Használj másolópapírt!



Megoldás:

A **c)** feladat megoldása: Valamelyik egyenest az *O* pont körül 90°-kal elforgatjuk. A másik egyenes és az elforgatott egyenes metszéspontja lesz a négyzet egyik csúcsa.

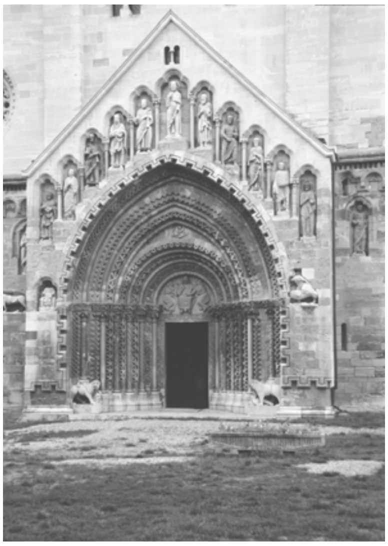
A **d)** feladat megoldása: Valamelyik szögszárat az *O* pont körül 120°-kal elforgatjuk. A másik szögszár és az elforgatott szögszár metszéspontja lesz a háromszög egyik csúcsa.

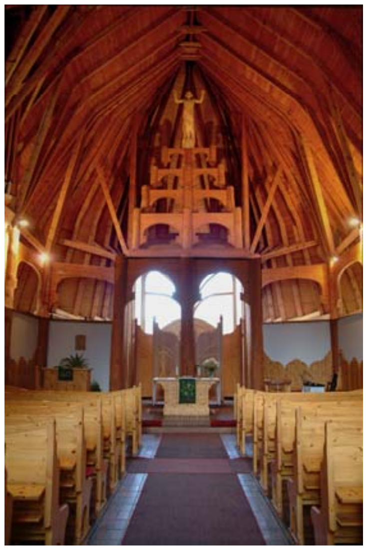
VI.Térbeli transzformációk, szimmetriák

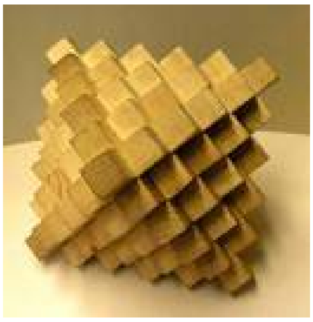
Játék: A tanár mond egy szöget, ami valahányadrendű forgásszimmetriát jelent (pl.: 90° – negyedrendű) – ekkor a diákoknak négyfős csoportokba kell rendeződni, forgásszimmetrikus alakzatot alkotva.

Feladatok

15. Geometriai transzformációt értelmezhetünk a tér pontjaira is. A térben tükrözhetünk síkra, egyenesre vagy pontra. Emiatt térbeli alakzatok is lehetnek szimmetrikusak (síkra, egyenesre vagy pontra). Állapítsd meg, mire szimmetrikusak az alábbi testek!

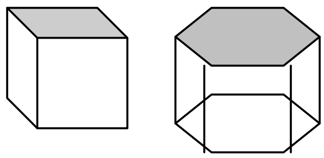






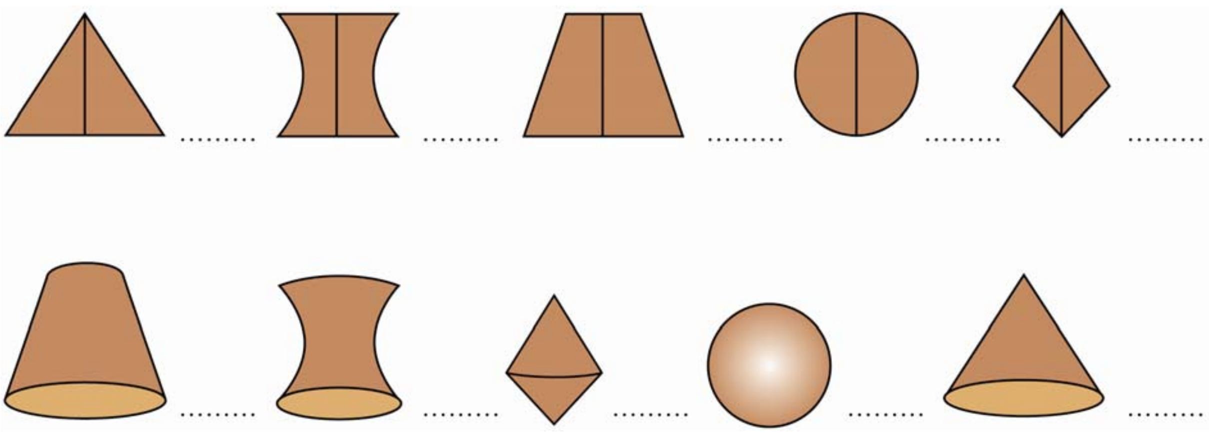
16. Páros munka: Tartsátok úgy egy-egy kezeteket, hogy egyik a másiknak tükörképe legyen! Használjátok ehhez mindkettőtök bal kezét, majd egy jobb és egy bal kezet!

17. Egy térbeli alakzat forgásszimmetrikus, ha létezik olyan tengely körüli forgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át. Ilyen például a kocka vagy a szabályos sokszög alapú egyenes hasáb.



Keress forgásszimmetrikus alakzatokat a környezetedben! Határozd meg, milyen tengely körül, és hány fokos szöggel kell elforgatni őket, hogy önmagába menjenek át!

18. A felső sorban szereplő síkidomok elforgatásával testek származtathatók. Párosítsd össze a testet a hozzá tartozó síkidommal!



Keress forgatással származtatható testeket! Rajzold le, milyen síkidomból származtathatók!

Térbeli szimmetriák

A geometriai transzformációk értelmezhetők a tér pontjain is. Ilyenek például a síkra vonatkozó tükrözés, az egyenesre való térbeli tükrözés és az egyenes körüli elforgatás is.

Egy térbeli alakzat **síkszimmetrikus**, ha van olyan sík, amelyre tükrözve, az alakzat képe önmaga.

Például a kocka és a gömb síkszimmetrikus testek.

Egy térbeli alakzat **forgásszimmetrikus**, ha létezik olyan tengely körüli forgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át.

A négyzetes oszlop, a körhenger és a forgáskúp forgásszimmetrikus testek.

Geometriai transzformációk szorzata

Két geometriai transzformáció egymás utáni elvégzését a két **transzformáció szorzatának** nevezzük.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok transzformációk egymásutánjára, azaz transzformációk szorzatára vonatkoznak. Beszéljük meg a tapasztalatokat!

19. Rajzolj egy háromszöget és két egymással párhuzamos egyenest! Tükrözd egymás után a háromszöget a két egyenesre. Mit tapasztalsz? (Lehet-e helyettesíteni a két tükrözést egyetlen transzformációval?

20. Rajzolj egy téglalapot! Forgasd el valamely csúcsa körül először 45˚-kal, majd 30˚-kal! Milyen transzformációval helyettesíthető a két elforgatás?

21. Rajzolj egy kört! Told el először az **a** majd a **b** vektorral! Tudnád-e egyetlen transzformációval helyettesíteni a két eltolást?

22. Rajzolj egyenlőszárú háromszöget és két, egymást metsző egyenest! Tükrözd a háromszöget egymás után a két egyenesre tengelyesen! Helyettesítsd a két transzformációt egyetlennel!

Kislexikon

A **geometriai transzformációk** olyan függvények, melyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

Két geometriai transzformáció elvégzését egymás után a két **transzformáció szorzatának** nevezzük.

Egybevágósági transzformációk:

Tengelyes tükrözés:

Adott egy *t* egyenes, a tengely, melynek minden pontjához önmagát rendeljük. A *t* egyenesre nem illeszkedő *P* ponthoz azt a *P'* pontot rendeljük, amelyre igaz, hogy a tengely merőlegesen felezi a *PP'* szakaszt

Középpontos tükrözés:

Adott egy *O* pont, a középpont, melynek képe önmaga. A sík *O*-tól különböző *P* pontjához azt a *P'* pontot rendeli, amely az *OP* egyenesen van, és az *O* felezi a *PP'* szakaszt.

Eltolás:

Adott egy **v** vektor, azaz irányított szakasz. A sík egy adott *P* pontjának képe az a *P'* pont, amelyre igaz, hogy a $\overrightarrow{PP'}$ irányított szakasz egyenlő a megadott **v** vektorral.

Pont körüli elforgatás:

A pont körüli elforgatásnál adott egy *O* pont, **a középpont**, valamint az **elforgatás szöge** (nagysággal és iránnyal). Az *O* pont képe önmaga.
A sík *O*-tól különböző bármely *P* pontjának a képe az a *P'* pont, amelyre $OP = OP'$ és a POP' szög nagysága és iránya az elforgatás szöge.

Identitás (azonos leképezés):

Minden ponthoz önmagát rendeli. Ilyen például a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vektorral való eltolás.

Nem egybevágósági transzformációk például: merőleges vetítés, középpontos hasonlóság.

Egy síkbeli alakzat **forgásszimmetrikus**, ha létezik olyan 0°-tól különböző szögű pont körüli elforgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át.

Egy térbeli alakzat **forgásszimmetrikus**, ha létezik olyan tengely körüli forgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át.

Egy térbeli alakzat **síkszimmetrikus**, ha van olyan sík, amelyre tükrözve, az alakzat képe önmaga.