I. A másodfokú alapfüggvény definíciója, grafikonja és tulajdonságai

Módszertani megjegyzés:
Csoportok kialakítása:
A tanár véletlenszerűen kiosztja az 13.1 kártyakészletben található kártyákat. Minden csoportnak ad egy betűt is, ezzel tud a csoportra hivatkozni, illetve a csoport tagjainak sorszámot. Ezeket a 13.2. kártyakészletben találja meg. A tanulók a kártyák alapján megkeresik egymást, majd helyet foglalnak 1–1 asztalnál.
A tanár adhat segítséget is a kereséshez: Azok alkotnak egy csoportot, akiknél

a kártyán számpárok szerepelnek, melynek első tagja egy szám, második tagja pedig annak négyzete. Ezen belül azok alkotnak egy csoportot, akiknél az első tag tizedestört vagy negatív szám, vagy pozitív egész vagy tört.

a hatványozás azonosságait használva ugyanaz a végeredmény

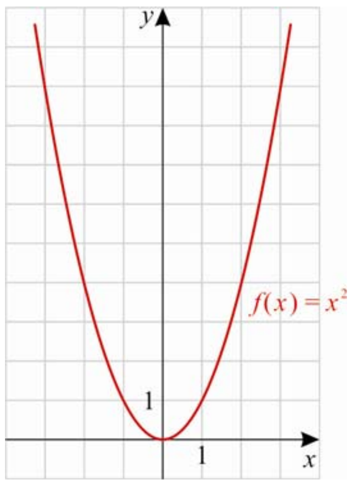
Ennek a csoportképzésnek a célja a négyzetre emeléssel kapcsolatos eddigi ismeretek felelevenítése.
A tanár először elmondja a másodfokú alapfüggvény definícióját, majd minden csoportban kiosztja az 13.11 szakértői mozaikot. A másodfokú alapfüggvény definiálásához felhasználhatja az 13.8 fóliát.
Egy csoporton belül a tanulók a saját sorszámuknak megfelelő anyagrészt elolvassák, és értelmezik. Majd mindenki elmagyarázza a csoport többi tagjának a saját részét.

A másodfokú alapfüggvény

Minden valós számhoz rendeljük hozzá a négyzetét! Ekkor a hozzárendelési utasítás $f(x) = x^2$ alakban írható fel. Néhány értékpár:

x	-16	$-10{,}5$	-5	-4	$-\frac{3}{2}$	-1	$-0{,}63$	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	$11{,}3$
$f(x)$	256	$110{,}25$	25	16	$\frac{9}{4}$	1	$0{,}3969$	0	1	$\frac{4}{9}$	4	9	$127{,}69$

Mivel minden szám négyzete nemnegatív, ezért az $f(x) = x^2$ függvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza. Ha koordináta-rendszerben ábrázoljuk az összes olyan értékpárt, amelynek első tagja egy tetszőleges valós szám, második tagja pedig annak négyzete, a következő görbét kapjuk:



Ennek a görbének a neve **parabola**. Az ábrán látható, hogy a másodfokú függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. A parabola szimmetria tengelyén lévő pontját **tengelypontnak** nevezzük.
Másodfokú hozzárendelési utasítással találkozhatunk az a oldalú négyzet területének, ill. az a oldalú kocka felszínének kiszámításakor, de a fizikában is találkozunk vele a szabadesés és az egyenletesen gyorsuló test mozgását leíró út–idő kapcsolatnál.

A másodfokú alapfüggvény tulajdonságai

Monotonitás:

– Ha $x \leq 0$, akkor növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Ezért a függvény ezen a tartományon **szigorúan csökkenő**.

– Ha x 0, akkor növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvényt ezen a tartományon **szigorúan növekvőnek** nevezzük.

Zérushely:

Az értelmezési tartománynak azon eleme, ahol a függvényérték 0.

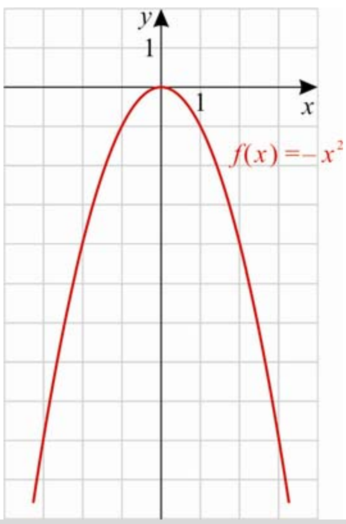
Az $f(x) = x^2$ függvénynek az $x = 0$ helyen **zérushelye** van. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ezen a helyen közös pontja van az x tengellyel.

Szélsőérték:

Az $f(x) = x^2$ függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen pozitív. Ezért az f függvénynek az x = 0-ban szélsőértéke, nevezetesen **minimuma** van. Másképp: az f függvény az értelmezési tartományának x = 0 helyén veszi fel a legkisebb függvényértékét.

Tekintsük a $g(x) = -x^2$ függvényt! Néhány értékpár:

x	–16	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	–0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,3
$g(x)$	–256	–110,25	–25	–16	$-\frac{9}{4}$	–1	–0,3969	0	–1	$-\frac{4}{9}$	–4	–9	–127,69



A g függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen negatív. Ezért a g függvénynek az $x = 0$ helyen szélsőértéke, nevezetesen **maximuma** van. (Látható, hogy a g függvény nem pozitív x-ek esetén szigorúan növekvő, nemnegatív x-ekre pedig szigorúan csökkenő.)
Másképp: a g függvény az $x = 0$ helyen veszi fel a legnagyobb értékét.

Megjegyzés: A függvényértékek számának tippeléséhez felhasználhatják az eddig átvett anyagot, az értékkészletre vonatkozó ismereteiket. (Azért hangsúlyozzuk az x helyek számára történő becslést, mert a hatvány-, exponenciális- és a trigonometrikus függvényeknél számtalanszor felmerülnek ezzel kapcsolatban problémák:

– Hány megoldásra számítasz? (ezzel a kérdéssel geometriai szerkesztéseknél is találkozunk)
– A kapott megoldások közül melyik vezet ellentmondáshoz, melyik helyes?

Feldolgozási javaslat az 1. és a 2. feladatokhoz: A tanár frontálisan elmagyarázza a mintapéldát. Ezek után a tanulók két fős csoportokban a saját füzetükben dolgoznak. A tanár kijelöl 3-3 feladatot Például az egyik tanulónak: 1.c), g) és a 2.a) feladatokat, a másik tanulónak pedig az 1.d), f) és a 2.b) feladatokat. Ha mindenki megoldotta saját részét, akkor kicserélik a füzeteket, s kijavítják egymását. Majd megbeszélik a javítást.

Mintapélda₁

Az $f(x)=(x-3)^2+2$ hozzárendelési utasítás alapján töltsük ki az értéktáblázatot, illetve használjuk a tanult jelöléseket! Figyeljünk arra, hogy a függvény egy adott függvényértéket 0, 1 vagy 2 helyen is felvehet. Számítás előtt tippeljük meg az adott függvényértékhez tartozó *x* helyek számát!

a)

x	0	2	–3	4,5	6
$f(x)$					

b)

x					
$f(x)$	1	2	4,25	3	6

Megoldás:

a) A függvényértékek kiszámítása:

$$f(0)=(0-3)^2+2=(-3)^2+2=9+2=11$$

$$f(4{,}5)=(4{,}5-3)^2+2=(1{,}5)^2+2=2{,}25+2=4{,}25$$

A többi függvényértéket is hasonlóan kell kiszámítani. Az eredmények:

x	0	2	–3	4,5	6
$f(x)$	11	3	38	4,25	11

b) *x* értékek kiszámítása:

f(x) = 1 Tipp az *x* helyek számára: 0

Gondolkozzunk! Az $(x-3)^2$ előjele pozitív, ezért a függvény grafikonja felfelé nyílik. Ezt mutatja, hogy minimuma van. Az utána következő +2 miatt ez a minimumérték +2, tehát ennél kisebb értéket nem vehet fel. Így a 2 függvényértéket egyetlen helyen fogja felvenni, a többit két helyen.

$$(x-3)^2+2=1$$

$(x-3)^2=-1$ Nincs ilyen *x*, mert egy szám négyzete 0 vagy pozitív. Ez azt jelenti, hogy a függvény az 1 értéket sehol nem veszi fel.

f(x) = 2 A fenti tipp ellenőrzése

$$(x-3)^2+2=2$$

$(x-3)^2=0$ 0 egy számnak, 0-nak a négyzete.

$$x-3=0$$

$$x=3$$

$f(x) = 3$ A fenti tipp ellenőrzése

$(x-3)^2 + 2 = 3$

$(x-3)^2 = 1$ Két olyan szám is van, aminek a négyzete 1: az 1 és a –1. Esetszétválasztást végzünk.

$$(x-3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3=1 & \rightarrow x_1 = 4 \\ x-3=-1 & \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

A további x-eket is hasonlóan lehet kiszámítani. Az eredmények:

x		0	1,5; 4,5	4; 2	5; 1
$f(x)$	1	2	4,25	3	6

Feladatok

A 2. és a 3. feladatban figyelj arra, hogy a függvény egy adott függvényértéket 0, 1 vagy 2 helyen is felvehet. Számítás előtt tippeld meg az adott függvényértékhez tartozó x helyek számát! Számításodat grafikonon ellenőrizheted.

1. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot, illetve a tanult jelöléseket használva számítsd ki a függvényértékeket a megadott helyeken!

a) $a(x) = -x^2 + 3$

x	–6	–5	–2	0	1
$a(x)$					

b) $b(x) = (x-4)^2 + 3$

x	0	2	4	4,5	6
$b(x)$					

c) $c(x) = 2x^2 - 8$

$c(-2) = ?;\; c\left(-\frac{1}{2}\right) = ?;\; c\left(\frac{3}{2}\right) = ?;\; c(1) = ?;\; c(2) = ?$

d) $d(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$

$d(-1) = ?;\; d(0) = ?;\; d(2) = ?;\; d\left(\frac{1}{2}\right) = ?;\; d(4) = ?$

e) $e(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

$e(-\ 2) = ?;\; e(0) = ?;\; e(1{,}24) = ?$

f) $f(x)=3(x+2)^2$

$f\left(-2\frac{2}{3}\right)=?;\ f(0)=?;\ f(0{,}1)=?$

g) $g(x)=-(x+3)^2$

$g(-6)=?;\ g(-5)=?;\ g(-2)=?;\ g(0)=?;\ g(1)=?$

h) $h(x)=-\frac{1}{3}(x+3)^2$

$h(-6)=?;\ h(-5)=?;\ h(-2)=?;\ h(0)=?;\ h(1)=?$

i) $k(x)=(x-4)^2-5$

$k(-8)=?;\ k(-2)=?;\ k(3)=?$

j) $l(x)=-(x+1)^2+1$

$l(-3)=?;\ l(0)=?;\ l(1{,}75)=?$

Megoldás:

a) $a(x)=-x^2+3$

x	–6	–5	–2	0	1
$a(x)$	–33	–22	–1	3	2

b) $b(x)=(x-4)^2+3$

x	0	2	4	4,5	6
$b(x)$	19	7	3	3,25	7

c) $c(-2)=0;\ c\left(-\frac{1}{2}\right)=-7{,}5;\ c\left(\frac{3}{2}\right)=-7{,}5;\ c(1)=-6;\ c(2)=0$

d) $d(-1)=-1{,}75;\ d(0)=-2;\ d(2)=-1;\ d\left(\frac{1}{2}\right)=-1{,}9375;\ d(4)=2$

e) $e(-2)=2;\ e(0)=4;\ e(1{,}24)=3{,}2312$

f) $f\left(-2\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3};\ f(0)=12;\ f(0{,}1)=13{,}23$

g) $g(-6)=-9;\ g(-5)=-4;\ g(-2)=-1;\ g(0)=-9;\ g(1)=-16$

h) $h(-6)=-3;\ h(-5)=-\frac{4}{3};\ h(-2)=-\frac{1}{3};\ h(0)=-3;\ h(1)=-\frac{16}{3}$

i) $k(-8)=139;\ k(-2)=31;\ k(3)=-4$

j) $l(-3)=-3;\ l(0)=0;\ l(1{,}75)=-6{,}5625$

2. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot, illetve a tanult jelöléseket használva számítsd ki a függvényértékekhez tartozó x helyeket!

a) $a(x)=-x^2+3$

x					
$a(x)$	0	–2	4	3	–6

b) $b(x)=(x-4)^2+3$

x					
$b(x)$	1	2	3	4,25	6

c) $c(x)=2x^2-8$ x = ?, ha $c(x)$ = 0; –10; –8; 4,5; –9

d) $d(x)=\frac{1}{4}x^2-2$ x = ?, ha $d(x)$ = 0; –4; –2; $-\frac{31}{16}$; –1

e) $e(x)=-\frac{1}{2}x^2+4$ x = ?, ha $e(x)$ = 5; 4; $\frac{3}{2}$; 0; –0,5

f) $f(x)=-(x+3)^2$ x = ?, ha $f(x)$ = –5; –3; 0; 1; $\frac{2}{3}$

g) $g(x)=3(x+2)^2$ x = ?, ha $g(x)$ = $3\frac{1}{3}$; 3; $\frac{4}{3}$; 0; –0,5

h) $h(x)=-\frac{1}{3}(x+3)^2$ x = ?, ha $h(x)$ = 3; 0; $-\frac{1}{9}$; –1; $-\frac{5}{3}$

i) $k(x)=(x-4)^2-5$ x = ?, ha $k(x)$ = 4; 0; –1; –5; –6

j) $l(x)=-(x+1)^2+1$ x = ?, ha $l(x)$ = 2; 1; $\frac{3}{2}$; 0; –4

Megoldás:

a) $a(x) = -x^2 + 3$

x	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{5}$	—	0	± 3
$a(x)$	0	–2	4	3	–6

b) $b(x) = (x - 4)^2 + 3$

x	—	—	1	$4\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$	$4\pm\sqrt{3}$
$b(x)$	1	2	3	4,25	6

c) $c(x) = 2x^2 - 8$

$c(x) = 0$; $x_{1,2} = \pm 2$ $c(x) = -10$; nincs ilyen x $c(x) = -8$; $x = 0$

$c(x) = 4{,}5$; $x_{1,2} = \pm 2{,}5$ $c(x) = -9$; nincs ilyen x

d) $d(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$

$d(x) = 0$; $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$ $d(x) = -4$; nincs ilyen x $d(x) = -2$; $x = 0$

$d(x) = -\frac{31}{16}$; $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ $d(x) = -1$; $x_{1,2} = \pm 2$

e) $e(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

$e(x) = 5$; nincs ilyen x $e(x) = 4$; $x = 0$ $e(x) = \frac{3}{2}$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

$e(x) = 0$; $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$ $e(x) = -0{,}5$; $x_{1,2} = \pm 1$

f) $f(x) = -(x + 3)^2$

$f(x) = -5$; $x_{1,2} = -3\pm\sqrt{5}$ $f(x) = -3$; $x_{1,2} = -3\pm\sqrt{3}$ $f(x) = 0$; $x = -3$

$f(x) = 1$; nincs ilyen x $f(x) = \frac{2}{3}$, nincs ilyen x

g) $g(x) = 3(x + 2)^2$

$g(x) = 3\frac{1}{3}$; $x_{1,2} = -2\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$ $g(x) = 3$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ $g(x) = \frac{4}{3}$; $x_{1,2} = -2\pm\frac{2}{3}$

$g(x) = 0$; $x = -2$ $g(x) = -0{,}5$; nincs ilyen x

h) $h(x) = -\frac{1}{3}(x+3)^2$

$h(x) = 3$; nincs ilyen x $\quad h(x) = 0$; $x = -3$ $\quad h(x) = -\frac{1}{9}$; $x_{1,2} = -3 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$h(x) = -1$; $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3}$ $\quad h(x) = -\frac{5}{3}$; $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5}$

i) $k(x) = (x-4)^2 - 5$

$k(x) = 4$; $x_1 = 7$, $x_2 = 1$ $\quad k(x) = 0$; $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{5}$ $\quad k(x) = -1$; $x_1 = 6$, $x_2 = 2$

$k(x) = -5$; $x = 4$ $\quad k(x) = -6$; nincs ilyen x

j) $l(x) = -(x+1)^2 + 1$

$l(x) = 2$; nincs ilyen x $\quad l(x) = 1$; $x = -1$ $\quad l(x) = \frac{3}{2}$; nincs ilyen x

$l(x) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ $\quad l(x) = -4$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$

3. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot

a) $f(x) = (-2x)^2 - 1$

x	-2	0	4					
$f(x)$				0	-2	-1	4	1

b) $g(x) = \frac{2}{3}(x-3)^2$

x	$-\frac{6}{5}$	0	$0{,}75$					
$g(x)$				-1	0	$\frac{5}{3}$	3	$\frac{10}{3}$

Megoldás:

a) $f(x) = (-2x)^2 - 1$

x	-2	0	4	$\pm\frac{1}{2}$	—	0	$\frac{\pm\sqrt{5}}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$

f(x)	*15*	*–1*	*63*	*0*	*–2*	*–1*	*4*	*1*

b) $g(x)=\frac{2}{3}(x-3)^2$

x	$-\frac{6}{5}$	*0*	*0,75*	—	*3*	$3\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$	$3\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$	$3\pm\sqrt{5}$
g(x)	$-\frac{294}{25}$	*6*	$\frac{27}{8}$	*–1*	*0*	$\frac{5}{3}$	*3*	$\frac{10}{3}$

A következő feladat csak a tanári kézikönyvben található meg, megoldása nem kötelező.

A tanult jelöléseket használva számítsd ki a függvényértékeket a megadott helyeken! Tippeld meg az adott függvényértékhez tartozó x helyek számát, majd számítsd is ki azokat!

a) $a(x)=(x-2)^2+3$ [–4; 7]

$a(-7) = ?$; $a(1) = ?$; $a(3{,}5) = ?$; $x = ?$, ha $a(x) = 4; 11; 2; 9; 3$

b) $b(x) = |(x+1)^2-2|$

$b(-5) = ?$; $b(-1) = ?$; $b(2) = ?$ $x = ?$, ha $b(x) = -2; -1; 0; 2; 7$

c) $c(x) = |-2x^2+6|$

$c(-1) = ?$; $c(3) = ?$; $c(6) = ?$ $x = ?$, ha $c(x) = 3; 2; -1; 6; 0; 7$

d) $d(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ [–2; 7[

$d(-8) = ?$; $d(1) = ?$; $d(10) = ?$ $x = ?$, ha $d(x) = 12{,}5; -3; 0; 8; 2$

Megoldás:

a) $a(x) = (x-2)^2 + 3$, ahol x [–4; 7]

$a(-7)$ = a –7 nem eleme az értelmezési tartománynak; $a(1) = 4$; $a(3{,}5) = 5{,}25$

$a(x) = 4$ TIPP: 2 hely; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

$a(x) = 11$ TIPP: 2 hely; $x_{1,2} = 2 \quad 2\sqrt{2}$

$a(x) = 2$ TIPP: 0 hely; mivel a legkisebb függvényérték a +3.

$a(x) = 9$ TIPP: 2 hely; $x_{1,2} = 2 \quad 2\sqrt{6}$

$a(x) = 3$ TIPP: 1 hely; $x = 2$

b) $b(x) = |\,(x + 1)^2 - 2\,|$

$b(-5) = 14$; $b(-1) = 2$; $b(2) = 7$

$b(x) = -2$ TIPP: 0 hely; mivel a legkisebb függvényérték a 0.

$b(x) = -1$ TIPP: 0 hely; mivel a legkisebb függvényérték a 0.

$b(x) = 0$ TIPP: 2 hely; $x_{1,2} = -1 \quad \sqrt{2}$

$b(x) = 2$ TIPP: 3 hely; $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$

$b\,(x) = 7$ TIPP: 2 hely; $x_1 = 2$, $x_2 = -4$

c) $c(x) = |\,-2x^2 + 6|$

$c\,(-1) = 4$; $c(3) = 12$; $c(6) = 66$

$c(x) = 3$ TIPP: 4 hely; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $x_{3,4} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$c(x) = 2$ TIPP: 4 hely; $x_{1,2} = \quad \sqrt{2}$, $x_{3,4} = \quad 2$

$c(x) = -1$ TIPP: 0 hely; mivel a legkisebb függvényérték a 0.

$c(x) = 6$ TIPP: 3 hely; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \quad \sqrt{6}$

$c(x) = 0$ TIPP: 2 hely; $x_{1,2} = \quad \sqrt{3}$

$c(x) = 7$ TIPP: 2 hely; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}$

d) $d(x) = \dfrac{1}{2}(x - 3)^2$, ahol $x \quad [-2; 7[$

$d(-8)$: -8 nem eleme az értelmezési tartománynak; $d(1) = 2$

$d(10)$: 10 nem eleme az értelmezési tartománynak

$d(x) = 12{,}5$ TIPP: 2 hely; $x_1 = 8$, $x_2 = -2$

$d(x) = -3$ TIPP: 0 hely; mivel a legkisebb függvényérték a 0.

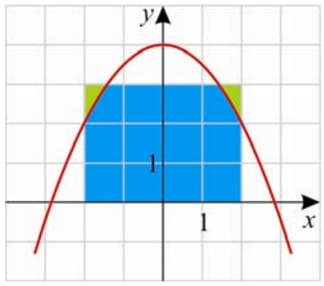
$d(x) = 0$ TIPP 1 hely; $x = 3$

$d(x) = 8$ TIPP: 1 hely; $x = -1$ (a másik megoldás 7 lenne, de az nem eleme az értelmezési tartománynak.)

$d(x) = 2$ TIPP: 2 hely; $x_1 = 1$, $x_2 = 5$

4. Egy 4 m széles, 3 m magas kamion szeretne áthajtani az alagúton, mégpedig az autóút közepén haladva. Az alagút formája követi az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ másodfokú függvény grafikonját, ha az egység mindkét koordinátatengelyen 1–1 méter. Át tud-e menni a kamion az alagúton?

Megoldás:



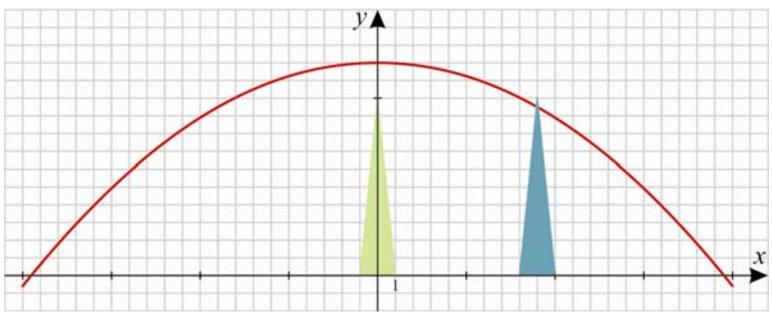
Az alagút 4 méteres belmagassága miatt elképzelhető, hogy a kamion át tudna menni. Az a kérdés, hogy a szélei is beférnek-e az alagútba. Mivel mind a kamion, mind az alagút szimmetrikus, így elegendő, ha a kamion szélességét megfelezve csak a +2 helyen számoljuk ki az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ függvény helyettesítési értékét.

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4 = -2 + 4 = 2$$

Mivel a kapott függvényérték kisebb, mint a kamion magassága, ezért az nem tud átmenni az alagúton.

5. Egy 10 m magas árbocú vitorlás megkísérelné az átkelést a 38 m széles folyón átívelő híd alatt. A vitorlás szélessége 2 m. A híd íve követi az $f(x) = -\frac{1}{32}x^2 + 12$ másodfokú függvény grafikonját, ha az egység mindkét koordinátatengelyen 1–1 méter. Át tud-e úszni a vitorlás a híd alatt a folyó közepén? Át tud-e kelni a folyó partjától 10 m-re? (A vitorlás árboca 10 m-re van a parttól.)

Megoldás:



Mivel a vitorlás csupán 10 méter magas, a híd pedig a folyó közepén a vízszint fölött 12 méterrel halad, ezért a vitorlás a folyó közepén biztosan át tud kelni.

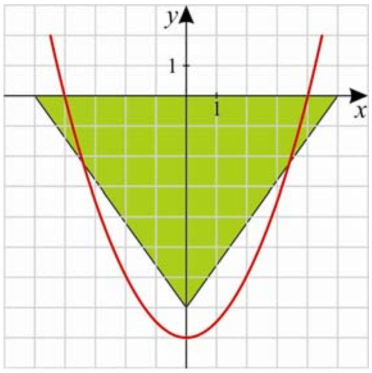
Mivel a híd is és a folyó is tengelyesen szimmetrikusan helyezkedik el, így a parttól 10 méterre levő távolságot elegendő csak az egyik oldalon vizsgálni. A folyó szélessége 19 méter. Tehát a parttól 10 méterre és a folyó közepétől 9 méterre levő pont ugyanaz. Így azt kell kiszámítanunk, hogy a függvény milyen értéket vesz fel a 9 pontban.

$$f(9) = -\frac{1}{32}\cdot 9^2 + 12 = -\frac{81}{32} + \frac{384}{32} = \frac{303}{32} = 9{,}47$$

Mivel a vitorlás magassága 10 méter, így ezen a helyen nem tud átkelni a híd alatt.

6. A Lucullus tengerjáró hajó át szeretne kelni a Seholsincs-szoroson. A hajó 7 méterre süllyed a tenger szintje alá, szélessége pedig 10 m a tengerszinten. Át tud-e kelni a hajó a szoroson, ha a tengerszoros medrének íve követi az $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$ függvény grafikonját, és az egység mindkét koordinátatengelyen 1–1 méter?

Megoldás:



Mivel a hajó alja mindössze 7 méterrel van a víz alatt, így a szoros 8 méteres mélysége miatt biztosan át tudna kelni. Az a kérdés, hogy a szoros elég széles-e ahhoz, hogy a hajó átférjen rajta.

Mivel a hajó és a szoros elhelyezkedése egyaránt tengelyesen szimmetrikus, így elegendő csak a fél távolságokat vizsgálnunk. A hajó esetén ez 5 métert jelent. Ha a szorost jelképező függvény értéke az $x = 5$ helyen negatív, akkor a hajó át tud kelni rajta. Ha nullával egyenlő vagy pozitív, akkor nem.

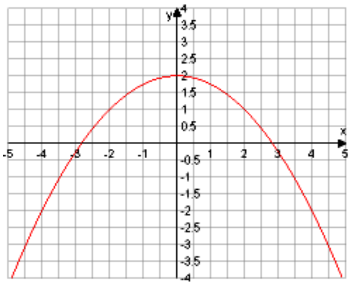
$$f(5) = \frac{1}{2}\cdot 5^2 - 8 = \frac{25}{2} - \frac{16}{2} = \frac{9}{2} > 0$$

Tehát a hajó nem tud átkelni a szoroson.

7. Peti elhajítja a labdáját. A labda mozgásának íve az $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ másodfokú függvény grafikonját követi, és az egység mindkét koordinátatengelyen 1–1 méter. Peti 1,8m magas, és a fejével egy magasságból indítja a labdát, vagyis 1,8 méter magasságból. Hány métert repül előre a labda, amikor ismét olyan magasságba kerül, ahonnét elindult?

Megoldás:

A megoldáshoz ki kell számolnunk, hogy Peti hol állt, amikor a labdát indította.



$$1{,}8 = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

$$-0{,}2 = -\frac{1}{4}x^2$$

$$0{,}8 = x^2 \begin{cases} x_1 = \sqrt{0{,}8} \\ x_2 = -\sqrt{0{,}8} \end{cases}$$

Megkaptuk azt a két helyet, ahol a parabola helyettesítési értéke 1,8. E két érték különbségének abszolútértéke adja meg, hogy hány métert röpült előre a labda:

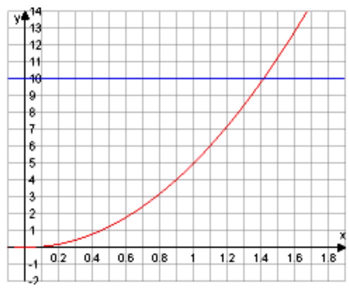
$$|x_1 - x_2| = \left|\sqrt{0{,}8} - \left(-\sqrt{0{,}8}\right)\right| = \left|2\sqrt{0{,}8}\right| = 2\sqrt{0{,}8} \approx 1{,}79\,.$$

Tehát a labda kb. 1,79 métert röpült előre, amikor újra 1,8 m magasságban volt.

8. Egy műugró bajnok 10 m magasból ugrik a vízbe. Hány másodperce van a gyakorlata végrehajtására, mielőtt beleesne a vízbe? ($s = (g / 2) \cdot t^2$, ahol $g = 9{,}81$ m / s^2)

Megoldás:

Itt szintén azokat az x helyeket kell kiszámolni, ahol a függvény felveszi a 10 értéket. A zárójelben megadott képlet alapján $s = 0;\ t = ?$



Ezeket behelyettesítve kapjuk:

$$10 = \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2.$$

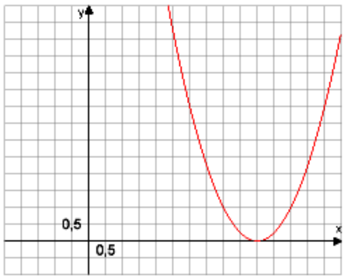
$$2{,}04 = t^2 \begin{cases} t_1 = \sqrt{2{,}04} \\ t_2 = -\sqrt{2{,}04} \end{cases}$$

Mivel eltelt időről van szó, így a negatív érték nem megoldás. Tehát a műugrónak kb. 1,43 másodperce van, hogy elvégezze a gyakorlatát.

9. Egy ember vitorlázórepülővel szeretne leereszkedni a domb tetejéről a völgybe. Milyen magas (km-ben megadva) a domb, ha a domb oldala és a völgy az $f(x)=(x-5)^2$ függvény grafikonját követi, és az egység mindkét koordinátatengelyen 1–1 kilométer? A domb tetőpontjának talppontja (tetőpont x tengelyre való vetülete) és a völgy aljának a távolsága 0,5 km.

Megoldás:

A domb tetőpontja a feladat szövege szerint a parabola tengelypontjától 0,5 egységre van az x tengely mentén. Tehát a magasság megállapításához az $f(x)=(x-5)^2$ függvény helyettesítési értékét kell kiszámolni. Mivel a parabola tengelyesen szimmetrikus, így mindegy, hogy az $x=5-0,5=4,5$ vagy az $x=5+0,5=5,5$ helyen számoljuk ki a helyettesítési értéket. Az eredmény:



$f(4,5)=(4,5-5)^2=0,25$.

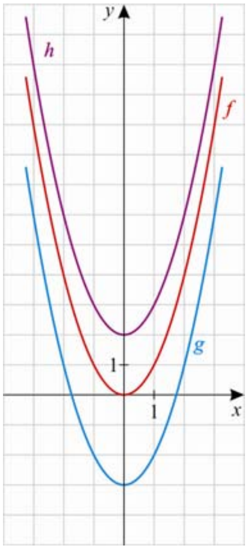
Tehát a domb 0,25 km, azaz 250 m magas.

10. Hányszorosára változik a négyzet területe, ha az oldalait másfélszeresére növeljük? Készíts értéktáblázatot, illetve grafikont a változás mértéke és a terület kapcsolatáról!

II. A másodfokú alapfüggvény transzformációi

A tanulók lehetőség szerint 4 fős csoportokban dolgozzanak. A tanár kiosztja minden csoportnak a 13.12. szakértői mozaikot. Egy csoporton belül az egyik tanuló a másodfokú függvény tulajdonságait, a másik az x tengely menti eltolásokat, a 3. az y tengely menti eltolásokat, a 4. pedig a zsugorítás/nyújtás részt kapja.
Az osztályon belül, akik ugyanazt a témát kapták, közös asztalhoz ülnek. Megbeszélik az anyagot, és vázlatot készítenek a füzetükbe. Ha elkészültek, visszamennek a csoportjukhoz. Mindenki elmagyarázza a saját részét a többieknek, s lediktálja a vázlatát.

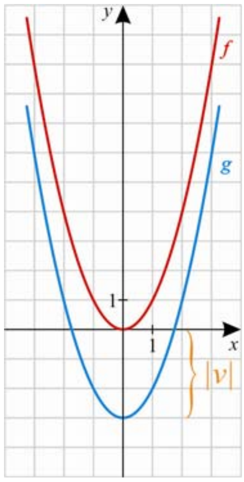
1. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben illetve értéktáblázattal az $f(x) = x^2$, a $g(x) = x^2 - 3$, illetve a $h(x) = x^2 + 2$ függvények grafikonjait! Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot.



Összehasonlítjuk a megfelelő függvényértékeket:

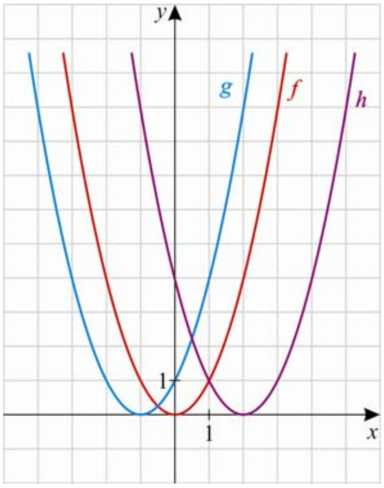
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x)$	13	6	1	–2	–3	–2	1	6	13
$h(x)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Ha az f függvény értékeiből 3-at vonunk ki, akkor a g függvény értékeit kapjuk meg, ha pedig 2-t adunk hozzá, akkor a h függvény lesz az eredmény. Ez egyben a grafikon y tengely menti eltolását is jelent –3, illetve +2 egységgel.



Általánosan: a $g(x) = x^2 + v$ („v" 0-tól különböző, tetszőleges valós szám) függvény grafikonját az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy f grafikonját eltoljuk az y tengely mentén $|v|$ egységgel $v < 0$ esetén lefelé, $v > 0$ esetén felfelé.

2. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben, illetve értéktáblázattal az $f(x) = x^2$, a $g(x) = (x + 1)^2$, illetve a $h(x) = (x - 2)^2$ függvények grafikonjait! Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot.



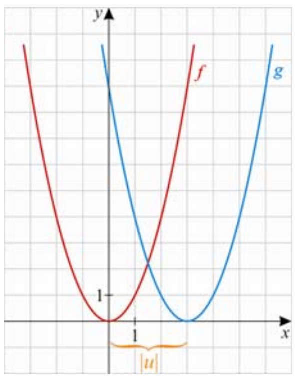
Összehasonlítjuk a megfelelő függvényértékeket:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9	16	25

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$h(x)$	36	25	16	9	4	1	0	1	4

Az értéktáblázatból látható, hogy a g függvény az értékeit 1 egységgel korábban veszi fel, mint az f függvény. Ez azt jelenti, hogy a g függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy azt eltoljuk az x tengely mentén –1 egységgel, másképp fogalmazva negatív irányba 1 egységgel.

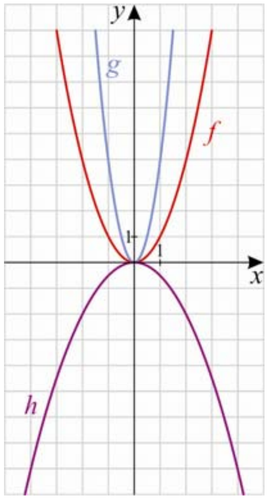
A h függvény az értékeit 2 egységgel később veszi fel, mint az f függvény. A h függvény grafikonját ezért az f függvény grafikonjának x tengely menti 2 egységgel, pozitív irányba történő eltolásával kapjuk meg.



Általánosan: a $g(x) = (x + u)^2$ („u” 0-tól különböző tetszőleges valós szám) függvény grafikonját az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy f grafikonját eltoljuk az x tengely mentén $|\, u \,|$ egységgel „u” előjelével ellentétes irányba: $u < 0$ esetén pozitív, $u > 0$ esetén negatív irányba.

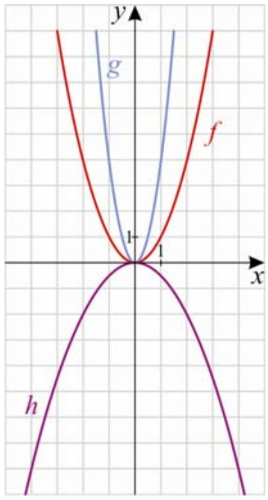
3. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

$f(x)=x^2$; $g(x)=3x^2$; $h(x)=-\frac{1}{2}x^2$.



4. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

$f(x)=(-x)^2$; $g(x)=3(-x)^2$; $h(x)=-\frac{1}{2}(-x)^2$.



Észrevehetjük, hogy

1. az $f(x)=x^2$ és a $f(x)=(-x)^2$ függvények grafikonjai és tulajdonságaik megegyeznek.
2. az f függvény értékeit 3-mal szorozva a g függvény megfelelő értékeit, míg $-\frac{1}{2}$-del szorozva a h függvény megfelelő értékeit kapjuk meg.

<u>Általánosan:</u> a függvény az $f(x)=ax^2$ hozzárendelési utasítással adható meg, ahol a 0 valós számot jelöl. Az $f(x)=x^2$ függvényből a $g(x)=ax^2$ függvényt úgy kapjuk, hogy minden függvényértéket a-szorosára változtatunk.

Szemléletesen: ha az *„a” szorzótényező*

0 és 1 között van, akkor a másodfokú függvény grafikonja szétnyílik,

1-nél nagyobb, akkor a grafikon szűkül.

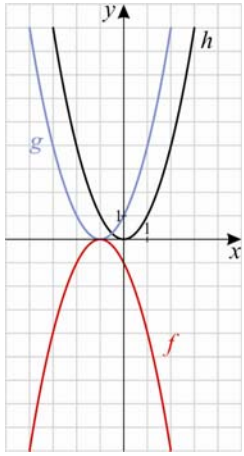
Negatív, akkor a grafikont az x tengelyre tükröznünk is kell.

Megjegyzés: Hozzárendelési utasítás alapján történő grafikon rajzolásánál segíthet, ha a felfelé nyíló parabolát mosolygós parabolának hívjuk, a lefelé nyílót pedig szomorú parabolának. Ezáltal gyerekek általában könnyebben megjegyzik az elnevezés és a főegyüttható közötti összefüggést: pozitív főegyüttható esetén mosolygós a parabola, negatív esetén pedig szomorú.

Mintapélda₂

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x) = -(x+1)^2$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:



A transzformáció lépései:

1. $h(x) = x^2$ alapfüggvény ábrázolása

2. $g(x) = (x+1)^2$ h eltolása az x tengely mentén balra, 1 egységgel

3. $f(x) = -(x+1)^2$ g tükrözése az x tengelyre

Értéktáblázattal:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9	–16	–25

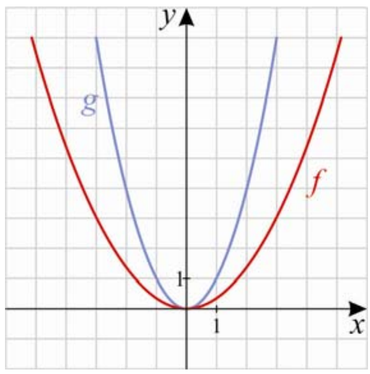
Jellemzés:

- É.T.: x $\mathbf{R}$
- É.K.: $f(x)$ $\mathbf{R}^-$ $\{0\}$ (vagy: a nempozitív számok halmaza)
- Zérushely: $x = -1$
- Monotonitás:
  - ↳ $x \le 0$ esetén szigorúan növekvő
  - ↳ $x \ge 0$ esetén szigorúan csökkenő
- Szélsőérték: $x = -1$ helyen maximuma van. A maximumérték: $f(-1) = 0$

Mintapélda₃

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:



A transzformáció lépései:

1. $g(x) = x^2$ alapfüggvény ábrázolása

2. $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ g minden függvényértékének $\frac{1}{3}$-szorosára változtatása (y tengely menti zsugorítás)

Értéktáblázattal:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{16}{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{16}{3}$

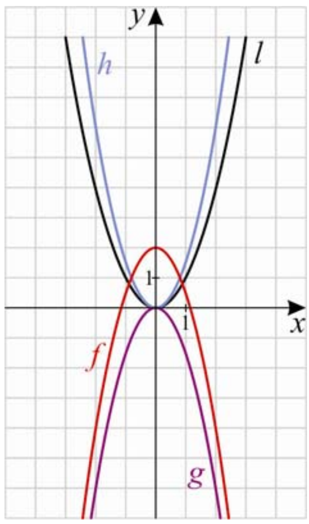
Jellemzés:

- É.T.: x **R**
- É.K.: $f(x)$ **R**: $f(x)$ 0 (vagy $f(x)$ [0; + [ )
- Zérushely: $x = 0$
- Monotonitás:
  - ↳ $x \le 0$ esetén szigorúan csökkenő
  - ↳ $0 < x$ esetén szigorúan növekvő
- Szélsőérték: $x = 0$ helyen minimuma van. A minimumérték: $f(0) = 0$

Mintapélda₄

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:



A transzformáció lépései:

1. $l(x) = x^2$ alapfüggvény ábrázolása

2/a. $h(x) = \frac{3}{2}x^2$ minden függvényértéket $\frac{3}{2}$-szeresére változtatunk. (y tengely menti nyújtás)

vagy

2/b. $h(x) = -x^2$ x tengelyre tükrözés

3. $g(x) = -\frac{3}{2}x^2$ a 2. lépéstől függően a h függvény grafikonját vagy tükrözzük az x tengelyre, vagy $\frac{3}{2}$-szeresére nyújtjuk.

4. $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2$ g függvény grafikonjának eltolása az y tengely mentén pozitív irányba 2 egységgel.

<u>Értéktáblázattal:</u>

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–22	$-\frac{23}{2}$	–4	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	–4	$-\frac{23}{2}$	–22

<u>Jellemzés:</u>

– É.T.: x **R**

– É.K.: $f(x)$ **R**: $f(x)$ 2

– Zérushely: $x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ illetve $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ helyen

– Monotonitás:

↳ $x \le 0$ esetén szigorúan növekvő

↳ $0 \le x$ esetén szigorúan csökkenő

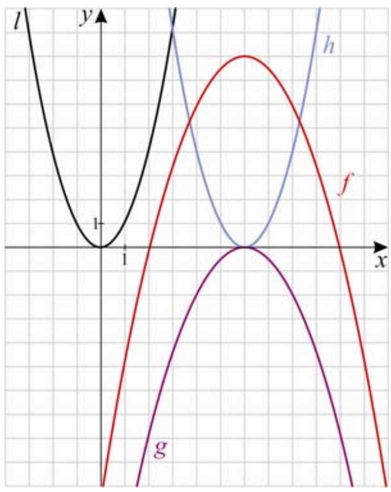
– Szélsőérték: $x = 0$ helyen maximuma van. A maximumérték: $f(0) = 2$

Mintapélda₅

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 8$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:

<u>A transzformáció lépései:</u>



1. $l(x) = x^2$ alapfüggvény ábrázolása

2. $h(x) = (x-6)^2$ az l függvény grafikonjának eltolása x tengely mentén pozitív irányba 6 egységgel.

3. $g(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2$ a h függvény grafikonjának $\frac{1}{2}$ -szeresére változtatása, majd tükrözése az x tengelyre.

4. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 8$ a g függvény grafikonjának eltolása az x tengely mentén 8 egységgel felfelé

<u>Jellemzés:</u>

- É.T.: x **R**
- É.K.: $f(x)$ **R**: $f(x)$ 8
- Zérushely: $x_1 = 2$, illetve $x_2 = 10$
- Monotonitás:
  - ↳ $x \leq 6$ esetén szigorúan növekvő
  - ↳ $6 \leq x$ esetén szigorúan csökkenő
- Szélsőérték: $x = 6$ helyen maximuma van. A maximumérték: $f(6) = 8$

Feldolgozási javaslat a 11. feladathoz: A tanár fölolvassa az első 3 állítást. Hagy egy kis szünetet, hogy a csoportok megbeszélhessék a választ. Ha elkészültek minden csoportból egy tanuló felteszi a kezét. Ha minden csoportból feltette valaki a kezét, a tanár is felteszi, majd elszámol háromig és megmutatja a helyes válasz sorszámát. Ha valamelyik csoport nem ezt mutatta fel, megbeszélik, miért rossz a válasz.

11. Az alábbi csoportokban 3–3 állítást olvashatsz ugyanarról a tulajdonságról vagy transzformációról. Döntsd el, melyik közülük a hamis! Válaszodat indokold!

a) Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt!

1. Az f függvény grafikonját a lineáris függvény grafikonjából, az x tengely alatti részének az x tengelyre történő tükrözésével kapjuk.
2. Az f függvény grafikonját parabolának hívjuk.
3. Az f függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

b) Tekintsük az $f(x) = x^2 + 3$ hozzárendelési utasítással megadott másodfokú függvényt!

1. Az f függvény a 3 értéket pontosan egy helyen, mégpedig az $x = 0$-ban veszi fel.
2. Az f függvény sohasem vehet fel negatív függvényértéket.
3. Az f függvény a 2 értéket pontosan 2 helyen veszi fel.

c) Tekintsük az $f(x) = x^2 + b$ hozzárendelési utasítással megadott másodfokú függvényt!

1. Az f függvénynek pozitív b esetén nincs közös pontja az x tengellyel.

2. Az f függvénynek pozitív b esetén pontosan egy közös pontja van az x tengellyel.

3. Az f függvény negatív b esetén pontosan két közös pontja van az x tengellyel.

d) Tekintsük az $f(x)=x^2$, a $g(x)=(x+5)^2$, illetve a $h(x)=x^2+5$ hozzárendelési utasítással megadott függvényeket!

1. Az g függvényt az f-ből annak x tengely menti +5-tel való eltolásával kapjuk.

2. A h függvényt az f-ből annak y tengely menti, +5-tel való eltolásával kapjuk.

3. Az g függvényt az f-ből annak x tengely menti, –5-tel való eltolásával kapjuk.

e) Tekintsük az $f(x)=(x-3)^2+2$ hozzárendelési utasítással megadott másodfokú függvényt!

1. Az f függvénynek a 3 helyen van szélsőértéke. Az ebben a pontban felvett függvényérték 2.

2. Az f függvénynek a $P(3;2)$ pontban minimuma van.

3. Az f függvénynek a $P(3;2)$ pontban maximuma van.

f) Tekintsük az $f(x)=ax^2$ hozzárendelési utasítással megadott másodfokú függvényt!

1. Az f függvénynek negatív a értékek esetén minimuma van.

2. Az f függvénynek negatív a értékek esetén maximuma van.

3. Az f függvénynek pozitív a értékek esetén minimuma van.

Megoldás:

a) Az első állítás a hamis, mivel az abszolútérték függvény grafikonját kapjuk így, és nem a másodfokúét.

b) A 3. állítás a hamis, mivel a 2 értéket sehol sem veheti fel, ugyanis 3 a minimum értéke.

c) A 2. állítás a hamis, mivel $b=0$ esetén lesz pontosan egy közös pontja az x tengellyel.

d) Az 1. állítás a hamis, mivel –5-tel való eltolásával kapjuk.

e) Az 3. állítás a hamis, mivel a P(3; 2) pontban minimuma van.

f) Az 1. állítás a hamis, mivel negatív c értékek esetén maximuma van.

Feldolgozási javaslat a 12.–14. feladatokhoz: A tanulók kétfős homogén csoportokban dolgoznak. A tanár mindenkinek 3–3 feladatot jelöl ki, amit a tanulók a saját füzetükben megoldanak. Ha készen vannak, kicserélik a füzeteiket, és kijavítják egymás megoldásait, majd megbeszélik a javítást.

Ajánlás:

12. feladatból (alapszint): a), d), i) illetve c), f), h)

13. feladatból (középszint): a), d), g) illetve b), c), h)

14. feladatból (emelt szint): a), b), g) illetve e), f), h)

12. Ábrázold koordináta-rendszerben, és jellemezd az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket! Az ábrázoláshoz használhatsz értéktáblázatot is.

a) $f(x)=x^2+1$ b) $f(x)=x^2-3$ c) $f(x)=-x^2$ d) $f(x)=-(x+3)^2$
e) $f(x)=-x^2+7$ f) $f(x)=(x+5)^2$ g) $f(x)=(x-3)^2$ h) $f(x)=2x^2$
i) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ j) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

Megoldási útmutató: ezek a függvények elemi transzformációkkal ábrázolhatók.

13. Ábrázold koordináta-rendszerben, és jellemezd az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket! Az ábrázoláshoz használhatsz értéktáblázatot is.

a) $f(x)=-(x-3)^2+2$ b) $f(x)=\frac{1}{4}(x-5)^2$ c) $f(x)=(x+3)^2-5$

g) $f(x)=(2x)^2-6$ h) $f(x)=\left(-\frac{1}{2}x+6\right)^2$ i) $f(x)=\left(-\frac{3}{2}x\right)^2+1$

Megoldási útmutató: a) – f) -ig a függvények közvetlenül, a g), h), i) függvények pedig az alábbi átalakítások után ábrázolhatók elemi transzformációkkal.

g) $f(x)=4x^2-6$ h) $f(x)=\frac{1}{4}(x-12)^2$ i) $f(x)=\frac{9}{4}x^2-6$

14. Ábrázold koordináta-rendszerben, és jellemezd az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket! Az ábrázoláshoz használhatsz értéktáblázatot is.

a) $f(x)=-3(x+3)^2+2$ b) $f(x)=\frac{1}{4}(x-5)^2+1$ c) $f(x)=\frac{3}{2}(x+1)^2-6$

d) $f(x)=-\frac{3}{2}(x-4)^2-2$ e) $f(x)=2(x+2)^2-3$ f) $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2+10$

g) $f(x)=|x^2-4|$ h) $f(x)=|x-4|^2$ i) $f(x)=|-x^2+6|$

Megoldási útmutató: a fenti függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók.

Mintapélda$_6$

Állítsuk sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy a

$g(x)=-(x-10)^2+7$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját kapjuk az alapfüggvény grafikonjából!

Megoldás:

Egyik lehetőség:

1. x tengely menti eltolás
2. x tengelyre történő tükrözés
3. y tengely menti eltolás

Másik lehetőség:

1. x tengelyre történő tükrözés
2. x tengely menti eltolás
3. y tengely menti eltolás

Megjegyzés: Az első lehetőség egy általános érvényű sorrend. Ha a behelyettesítési lépések sorrendjét követjük a megfelelő geometriai transzformációban, akkor biztosan jó az eljárás.

Feldolgozási javaslat a 15. feladathoz:

A tanulók párokban, a füzetükben dolgozzanak. Rajzoljanak a füzetükbe egy nagy koordinátarendszert. A tanár vagy kiosztja a másodfokú alapfüggvény grafikonját ábrázoló sablont (füzet-sablon.doc), páronként egyet–egyet, vagy szól a tanulóknak előző órán, hogy készítsék el kartonpapírból. Kijelöl 2-2 függvényt, például a), e), illetve c), f). A tanulók állapítsák meg, hogy mi a geometriai transzformációk helyes sorrendje az alapfüggvény grafikonjából kiindulva. Van ahol több megoldás is lehetséges. A transzformációs lépesek a sablon segítségével követhetők.

15. Állítsd sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy a következő hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját kapjad az alapfüggvény grafikonjából!

Geometriai transzformációk:

x tengely menti eltolás
y tengely menti eltolás
x tengelyre tükrözés
y tengely menti zsugorítás/nyújtás

Függvények:

$a(x) = x^2 - 5$ $\quad$ $b(x) = (x-5)^2$ $\quad$ $c(x) = -x^2 + 3$

$d(x) = 3x^2$ $\quad$ $e(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 6$ $\quad$ $f(x) = -(x+6)^2$

Megoldási útmutató: A 9. mintapélda alapján megoldható.

Mintapélda₇

Állítsuk sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy a

$g(x) = -\frac{2}{3}(x+2)^2 - 6$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját kapjuk az alapfüggvény grafikonjából!

Megoldás:

Első lehetőség: (ez a sorrend általános érvényű)

1. x tengely menti eltolás
2. x tengelyre történő tükrözés
3. y tengely menti zsugorítás, nyújtás (*Megjegyzés:* a sablon használata miatt célszerű előbb tükrözni, s csak utána zsugorítani vagy nyújtani)
4. y tengely menti eltolás

Többi lehetőség: az első három transzformáció sorrendje tetszőlegesen felcserélhető. Ez további 5 lehetséges sorrendet eredményez. ($3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 = 3! - 1 = 5$)

Feldolgozási javaslat a 16. feladathoz:

A tanulók négyfős csoportokban dolgozzanak. A tanár minden csoportnak odaadja a koordináta-rendszert ábrázoló lapot és a másodfokú függvény grafikonját ábrázoló sablont.

Továbbá a

- a 13.4. kártyakészletben található feladatkártyákat. A csoport egyik tagja két kártyát kap: egy transzformációsat és a „Választ” kártyát. Minden csoporttag azért a transzformációért felel, amelyiknek a kártyája éppen nála van. Akinél a „Választ” kártya található, az húz a hátlappal felfelé fordított kártyák közül egyet.
- a 15. feladatban szereplő függvényekből készített kártyákat hátlapjukkal felfelé. (13.5. kártyakészlet)
- Ha az előző már megy és még van idő, akkor rátérhetnek a 11. feladat függvényeire (13.6. kártyakészlet).

A feladat megoldásának menete:

A tanulók transzformációkat úgy tegyék sorrendbe, hogy megkapják a kártyán lévő hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját az alapfüggvény grafikonjából kiindulva. Közben a „Választ” kártya tulajdonosa a transzformációknak megfelelően helyezi el a fóliát vagy a sablont a koordináta-rendszeren.

Ha megtalálták a helyes sorrendet, készítsenek vázlatot a füzetükbe, majd a transzformációs kártyát a balra ülőnek adják tovább, a „Választ” kártyát pedig a jobbra ülőnek.

Addig dolgozzanak, amíg a kártyák egyszer körbe nem érnek.

16. Állítsd sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy a következő hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját kapjad az alapfüggvény grafikonjából!

Geometriai transzformációk:

x tengely menti eltolás

y tengely menti eltolás

x tengelyre tükrözés

y tengely menti zsugorítás/nyújtás

Függvények:

$a(x) = -(x+4)^2 + 7$ $b(x) = (x-2)^2 - 6$ $c(x) = -3x^2 - 1$

$d(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ $e(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 2$ $f(x) = 4(x+2)^2 - 8$

Megoldási útmutató: A 10. mintapélda alapján megoldható.

13.3 kártyakészlet alkalmazása

A feladathoz használjuk a 13.3. kártyakészletet.

Feldolgozási javaslat: A tanulók 4 fős csoportokat alkotnak. A tanár minden asztalra leteszi a 3. kártyakészlet 24 kártyáját hátlappal felfelé, összekeverve.

1. A csoport minden tagja találomra húz belőle 6-ot.
2. A tagoknak össze kell gyűjteniük az összetartozó négyeseket úgy, hogy

a felesleges kártyát csak középre tehetik be;

egymással nem beszélhetnek;

nem nyúlhatnak át a másikhoz a hiányzó kártyáért.

Összetartozó négyesek: hozzárendelési utasítás + grafikon + szélsőérték + monotonitás.

13.7 kártyakészlet alkalmazása

A tanár nyomtatás előtt átszerkeszti a Kirakos.doc nevű állományt. A táblázat minden sorából kitörli két cella tartalmát. (Ilyenkor célszerű más néven elmenteni a változtatásokat.) Az így kapott táblázatot nyomtatja ki annyi példányban, ahány csoportot (3 – 4 fős) képez majd az osztályban.

Az 13.7. kártyakészletben is megtalálható a teljes táblázat. Fénymásolás után innét vágja ki a hiányzó kártyákat, amelyeket a tanulók majd a helyükre tesznek.
Tehát a tanár minden csoportnak ad egy hiányos táblázatot, illetve a hiányzó 12 db kártyát külön. A tanulók (csoporton belül) szétosztják egymás között a kártyákat úgy, hogy mindenkinél ugyanannyi legyen. Megkeresik a kártyájuknak megfelelő sort és oszlopot, és lerakják oda a kártyát.

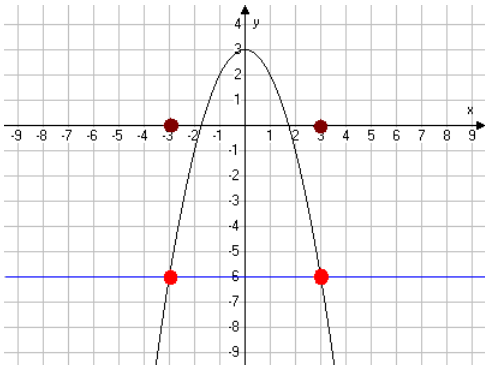
A feladatot lehet könnyíteni úgy, hogy a tanár több kártyát is a helyén hagy. Vagy lehet nehezíteni úgy, hogy a tanár nem ad támpontot, vagyis üres táblázatot ad ki a csoportoknak.
A feladat további könnyítésére/nehezítésére a függvények hozzárendelési utasításának könnyítése/nehezítése ad lehetőséget.

III. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Mintapélda₈

Oldjuk meg grafikusan az $–x^2 + 3 = – 6$ egyenlőséget!

Megoldás:



A megoldások a grafikonról leolvashatók:

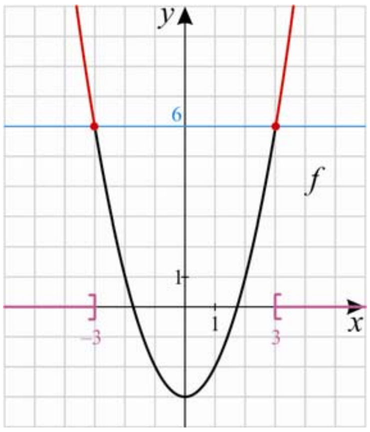
$x_1 = –3$

$x_2 = 3$

Mintapélda₉

Oldjuk meg grafikusan az $x^2 – 3$ $– 6$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:



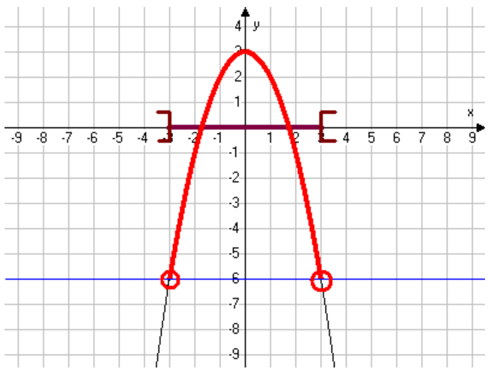
A keresett intervallumok:

$x_1 ≤ –3$ vagy $x_2 ≥ 3$.

Mintapélda₁₀

Oldjuk meg grafikusan a $–x^2 + 3 > – 6$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:



A keresett intervallum:

$–3 < x < 3$

Feldolgozási javaslat a 17. feladathoz:

A tanár először a mintapéldákon keresztül frontálisan bemutatja az abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldását.

A tanulók 3 fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak ad 3 db példányt a **Másodfokú egyenlőtlenségek** c. A4-es lapból. Kijelöl 3 példát a 17. feladatból.

Egy csoporton belül minden tanuló kap egy, a másikétól különböző példát. Felírják a lapjuk tetején lévő rubrikába a példában szereplő egyenlőtlenség jobb, illetve bal oldalát. Így minden lapon különböző feladat lesz, de annak több változatát is meg fogják oldani. Egységesen elkezdik az első oszlop kitöltését a lapon található szempontok szerint. Ha készen vannak, odaadják a lapot a mellettük ülőnek, és a középső relációs jelnek megfelelően oldják meg a feladatot. Majd ismét továbbítják a lapot, és kitöltik az utolsó oszlopot is. Ennek eredményeként mindenki 3 különböző feladatot, 3 különböző relációs jelnek megfelelően oldott meg, de egy lapon csak egy példa szerepel.

Ajánlott példák: b), c), d) A megoldás leolvasható a grafikonról. A pontatlan ábrázolás miatt az eredményt célszerű ellenőrzésképp visszahelyettesíteni az eredeti egyenletbe.

17. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 2 < 2$ b) $-x^2 + 6 \geq -3$ c) $(x + 5)^2 = 1$

d) $-(x - 2)^2 < x - 4$ e) $\frac{1}{2}x^2 - 1 \geq \frac{1}{2}x$

Megoldási útmutató: Az egyenlőtlenségeket egyenlőségként megoldva a következő gyököket kapjuk:

a) $x_{1;2} = \ 2$ b) $x_{1;2} = \ 3$ c) $x_1 = -4$; $x_2 = -6$ d) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

e) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$

Ezek után az ábráról már leolvashatók a keresett intervallumok.

A következő feladatok megoldása nem kötelező. A grafikus megoldás során a metszéspontok x koordinátájának pontos meghatározása haladóknak ajánlott. A megoldást jelentő intervallumokat elegendő a grafikonon jelölni.

Mintapélda$_{11}$

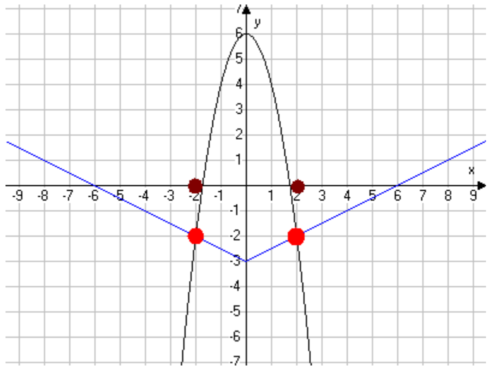
Oldjuk meg grafikusan a $-2\,x^2 + 6 = \frac{1}{2}\,|\,x\,| - 3$ egyenlőséget!

Megoldás:

A megoldások a grafikonról leolvashatók:

$x_1 = -2$

$x_2 = 2$



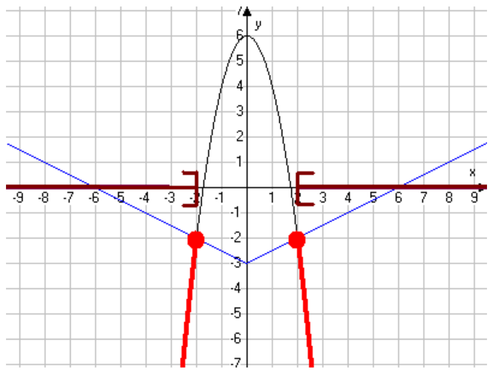
Mintapélda$_{12}$

Oldjuk meg grafikusan a $-2x^2 + 6 \le \frac{1}{2}\,|\,x\,| - 3$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:

A keresett intervallumok:

$x_1 \le -2$ vagy $x_2 \ge 2$



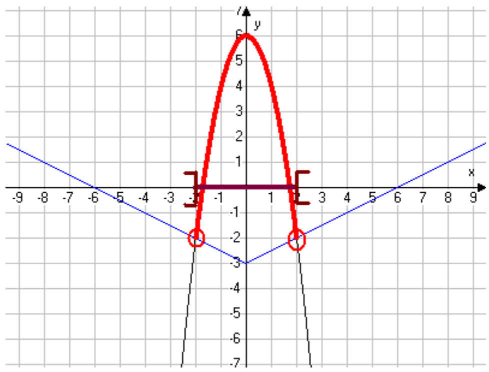
Mintapélda$_{13}$

Oldjuk meg grafikusan a $-2x^2 + 6 > \frac{1}{2}\,|\,x\,| - 3$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:

A keresett intervallum:

$-2 < x < 2$



Feladatok

18. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

a) $(x + 2)^2 + 3 \geq 4x + 8$ b) $\frac{1}{4}(x-1)^2 - 4 < -\frac{1}{2}x - 1{,}5$ c) $-2x^2 + 8 \geq \frac{1}{2}|x| - 1$

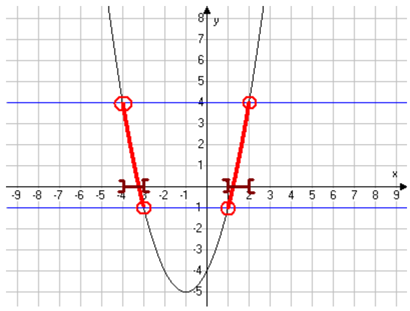
d) $2(x-3)^2 > 2|x-3|$ e) $-1 < (x+1)^2 - 5 < 4$

Megoldási útmutató: Az egyenlőtlenségeket egyenlőségként megoldva a következő gyököket kapjuk:

a) $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ b) $x_1 = -3$; $x_2 = 3$ c) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$ d) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$

Ezek után az ábráról már leolvashatók a keresett intervallumok.

Az e) feladat megoldása: $-4 < x < -3$ vagy $1 < x < 2$

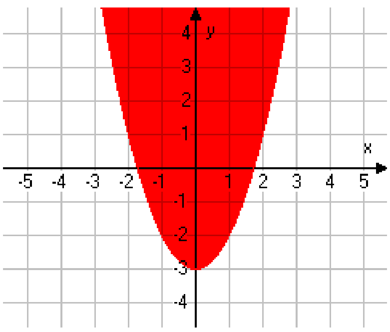


19. Színezd ki a megadott tartományokat úgy, hogy ha az egyenlőség megengedett, akkor a tartomány határa a tartomány színe legyen, mivel a tartomány határvonala is beletartozik a megoldáshalmazba. Ha nem megengedett, akkor eltérő színű legyen!

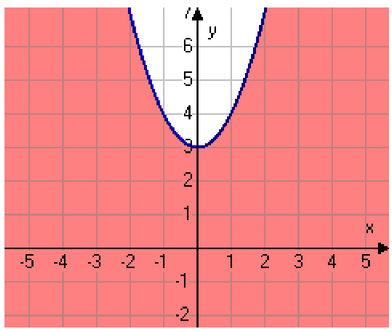
a) $x^2 - 3 \leq y$ b) $x^2 - 3 > y$

Megoldás:

a)



b)

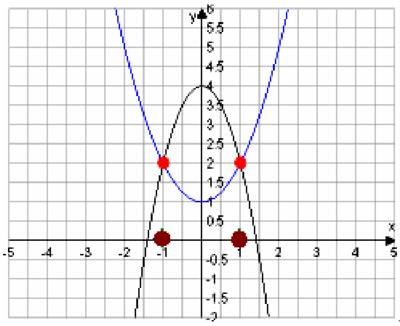


Mintapélda₁₄

Oldjuk meg grafikusan a $-2x^2 + 4 = x^2 + 1$ egyenlőséget!

Megoldás:

a) A megoldás a grafikonról leolvasható: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$



b) Ezt az egyenletet algebrai úton is könnyű megoldani:

átrendezéssel kapjuk: $3 = 3\,x^2$

$$1 = x^2$$

ebből $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

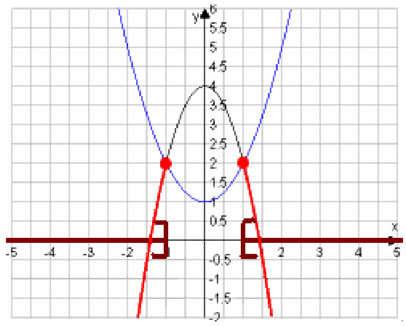
Mintapélda₁₅

Oldjuk meg grafikusan a $-2\,x^2 + 4 \le x^2 + 1$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:

A keresett intervallumok:

$x \le -1$, illetve $x \ge 1$



Szintén jó megoldást kapunk, ha ábrázolás előtt nullára rendezzük az egyenlőtlenséget. Ekkor csak egyetlen másodfokú függvényt kell ábrázolnunk, és azt vizsgáljuk, hogy hol vesz fel nem negatív (pozitív vagy 0) függvényértékeket.

Feladatok

20. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

a) $-(x-4)^2 + 3 \ge -\frac{1}{4}(x-4)^2$ b) $-2x^2 + 6 < x^2 + 3$ c) $(x+2)^2 - 1 = x^2 - 5$

Megoldási útmutató: Az egyenlőtlenségeket egyenlőségként megoldva a következő gyököket kapjuk:

a) $x_1 = 2$; $x_2 = 6$ b) $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ c) $x = -2$

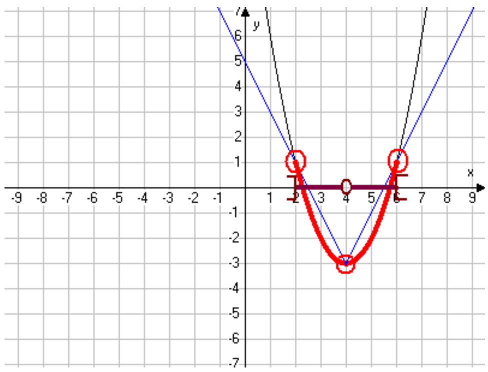
Ezek után az ábráról már leolvashatók a keresett intervallumok.

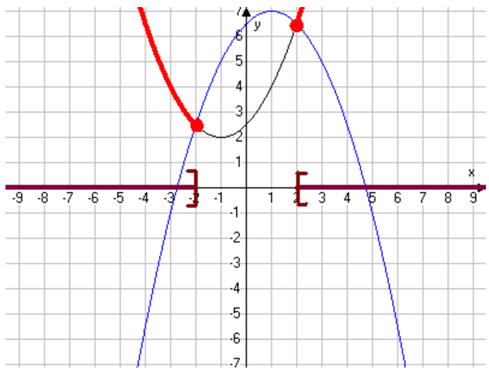
21. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

a) $(x-4)^2-3<2|x-4|-3$ b) $\frac{1}{2}(x+1)^2+2\geq-\frac{1}{2}(x-1)^2+7$

Megoldási útmutató: Az egyenlőtlenségeket egyenlőségként megoldva a következő gyököket kapjuk:

a) $x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $x_3 = 4$ b) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$





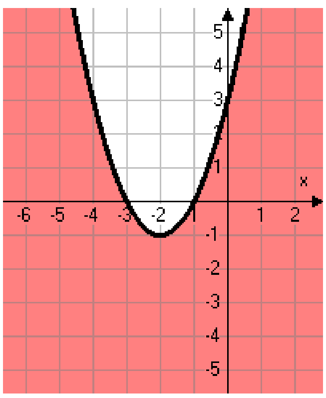
Ezek után az ábráról már leolvashatók a keresett intervallumok.

22. Színezd ki a megadott tartományokat úgy, hogy ha az egyenlőség megengedett, akkor a tartomány határa a tartomány színe legyen, mivel a tartomány határvonala is beletartozik a megoldáshalmazba. Ha nem megengedett, akkor eltérő színű legyen!

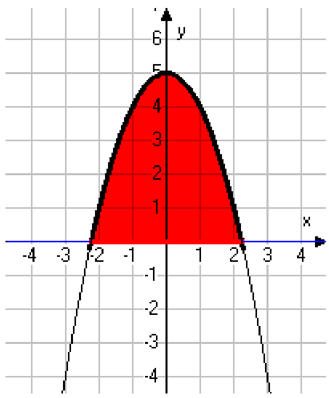
a) $(x+2)^2-1>y$ b) $-x^2+5<y\leq 0$

Megoldás:

a)



b)



Kislexikon

A másodfokú alapfüggvény: Minden valós számhoz rendeljük hozzá a négyzetét! Ekkor a hozzárendelési utasítás $f(x) = x^2$ alakban írható fel.

A kapott görbe neve ***parabola***. Az ábrán látható, hogy a másodfokú függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. A parabola szimmetria tengelyén lévő pontját tengelypontnak nevezzük.

A függvénytranszformációkról általánosan:

Eltolás az *y* tengely mentén:

A $g(x) = f(x - c)$ $(c > 0)$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy a görbét eltoljuk az x tengely mentén c egységgel. (Ha $c > 0$ pozitív irányba, ha $c < 0$, akkor negatív irányba.)

Eltolás az *x* tengely mentén:

A $g(x) = f(x) + \mathrm{c}$ $(c > 0)$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy a görbét eltoljuk az y tengely mentén c egységgel. ($c > 0$ esetén pozitív irányba, $c < 0$ esetén negatív irányba.)

Tükrözés az *y* tengelyre:

A $g(x) = -f(x)$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy a görbét tükrözzük az x tengelyre.

Tükrözés az *y* tengelyre:

A $g(x) = |f(x)|$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy azokat a görbedarabokat, ahol f negatív értéket vesz fel, tükrözzük az x tengelyre.

Nyújtás, zsugorítás:

A $g(x) = c\,f(x)$ $(c > 0)$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy a görbe minden pontjának y koordinátáját c-szeresére változtatjuk.