Módszertani megjegyzés: A tanár először elmondja a definíciókat, majd minden csoportban kiosztja az 12.8 szakértői mozaikot.
A tanulók felosztják egymás között a négy anyagrészt. Elolvassák és értelmezik. Majd mindenki elmagyarázza a csoport többi tagjának a saját részét.

I. Az abszolútérték-függvény definíciója

Pozitív szám **abszolútértéke** maga a szám, negatív szám abszolútértéke a szám ellentettje, ami pozitív szám. |0|=0

$$|a| = \begin{cases} a, & ha \ \ a \geq 0 \\ -a, & ha \ \ a < 0 \end{cases}$$

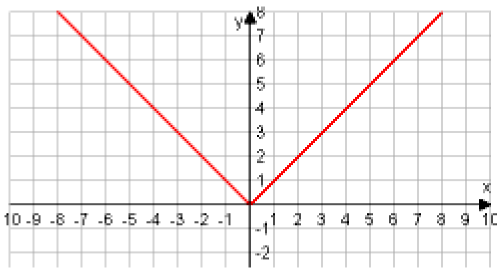
A valós számok halmazán értelmezett **abszolútérték-függvény**t az

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & ha \quad x \geq 0 \\ -x, & ha \quad x < 0 \end{cases}$$

hozzárendelési utasítással definiáljuk.

Az abszolútérték-függvény ($f(x) = |x|$) tulajdonságai

x	–53	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	–0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,36
$f(x)$	53	10,5	5	4	$\frac{3}{2}$	1	0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,36

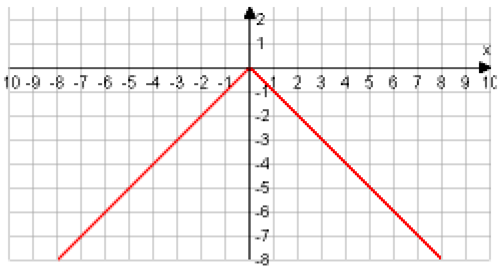


1. <u>Monotonitás</u>
   – Ha $x < 0$, akkor növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Ezért a függvény ezen a tartományon **szigorúan csökkenő.**
   – Ha x 0, akkor növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvényt ezen a tartományon **szigorúan növekvőnek** nevezzük.

2. <u>Zérushely:</u> Az $f(x)=|x|$ függvénynek az $x = 0$ pontban van **zérushelye**. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ebben a pontban van közös pontja az x tengellyel.

3. <u>Szélsőérték</u>
   Az $f(x)=|x|$ függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen pozitív. Ezért az f függvénynek az $x = 0$-ban szélsőértéke, nevezetesen **minimuma** van. (Látható, hogy az f függvény negatív x-ek esetén szigorúan csökkenő, pozitív x-ekre pedig szigorúan növekvő.) Másképp: az f függvény az értelmezési tartományának $x = 0$ helyén veszi fel a legkisebb függvényértékét, ekkor $f(x)=0$.

   A $g(x)=-|x|$ függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen negatív. Ezért a g függvénynek az $x = 0$ -ban szélsőértéke, nevezetesen **maximuma** van. (Látható, hogy a g függvény negatív x-ek esetén szigorúan monoton növekvő, pozitív x-ekre pedig szigorúan monoton csökkenő.) Másképp: a g függvény az értelmezési tartományának $x = 0$ helyén veszi fel a legnagyobb értékét, ekkor $g(x)=0$.

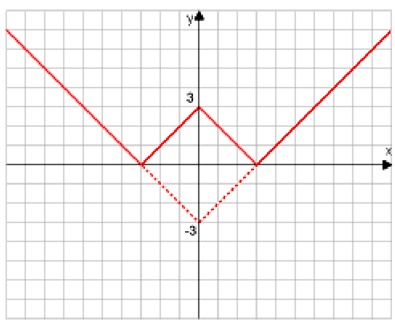


Megállapításainkat értéktáblázattal is alátámasztjuk:

x	–53	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	–0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,36
$g(x)$	–53	–10,5	–5	–4	$-\frac{3}{2}$	–1	–0,63	0	–1	$-\frac{2}{3}$	–2	–3	–11,36

Módszertani megjegyzés: A következő anyagot csak a matematika iránt fogékonyabb csoportban vegyük át.

4. $h(x)=\left||x|-3\right|$. Ennek a függvénynek az $x = 0$-ban **helyi (lokális) maximum**a van, és maximumértéke $h(0)=3$. Ez azt jelenti, hogy az értelmezési tartományának az $x = 0$ hely egy környezetében van olyan valódi részhalmaza, amelyen a h függvény 3–nál nagyobb értékeket nem vesz fel, vagyis $h(0) > h(x)$, de ez a teljes értelmezési tartományra természetesen nem feltétlenül igaz.



x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	3	2	1	0	1	2	3	2	1	0	1	2	3

Módszertani megjegyzés: Ahhoz, hogy meg tudják becsülni, hogy adott függvényértéket hány helyen vesz fel a függvény, használják fel az eddig átvett anyagot, az értékkészletre vonatkozó ismereteiket. (Azért hangsúlyozom az x helyek számára történő becslést, mert eddigi tapasztalataim alapján a hatvány–, exponenciális– és trigonometrikus függvényeknél számtalanszor felmerültek ezzel kapcsolatban problémák:

– Hány megoldásra számítasz? (ezzel a problémával geometriai szerkesztéseknél is találkozunk)
– A kapott megoldások közül melyik vezet ellentmondáshoz, melyik helyes?)

Feldolgozási javaslat: A mintapélda frontális megbeszélése után a tanulók 2 fős csoportokban dolgoznak.
Ajánlott feladatok:
egyik tanuló: 1/a; 2/a;3/a
másik tanuló: 1/b; 2/b; 3/b
A füzetükbe elkezdik megoldani a feladatsoraikat a minta alapján. Ha készen vannak, kicserélik a füzeteket, s kijavítják egymását. Majd megbeszélik a javítást.
Ha marad idő, akkor a tanulók a feladatokban kitöltött értéktáblázat illetve a kiszámított függvényértékek alapján ábrázolhatják a füzetükben a függvények grafikonjait. Az ábra alapján megpróbálhatják jellemezni is a függvényeket.

Mintapélda$_1$

Az $f(x)=-\frac{3}{2}|x|+5$ hozzárendelési szabály alapján töltsük ki az értéktáblázatot, illetve használjuk a tanult jelöléseket! Számítás előtt tippeljük meg az adott függvényértékhez tartozó helyek számát!

x	0	–2	$\frac{4}{9}$		0	$\frac{10}{3}$; $-\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$; $-\frac{14}{3}$
$f(x)$	5	2	$\frac{13}{3}$	6	5	0	–2

Megoldás:

Függvényértékek számítása:

$$f(0)=-\frac{3}{2}\cdot|0|+5=5$$

$$f(-2)=-\frac{3}{2}\cdot|-2|+5=-\frac{3}{2}\cdot 2+5=-3+5=2$$

$$f\left(\frac{4}{9}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\left|\frac{4}{9}\right|+5=-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}+5=-\frac{2}{3}+5=-\frac{2}{3}+\frac{15}{3}=\frac{13}{3}$$

Adott függvényértékek esetén az x értékek számítása:

$f(x)$ = 6 Tipp az x helyek számára: 0

A tipp indoklása: a $-\frac{3}{2}|x|$ sohasem lehet pozitív, így a függvény 5-nél nagyobb értéket nem vehet fel.

$$-\frac{3}{2}|x| + 5 = 6$$

$$-\frac{3}{2}|x| = 1$$

$$|x| = -\frac{2}{3}$$

Ellentmondás, mert az abszolútértékfüggvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza.

***f*(*x*) = 5**

Tipp az x helyek számára: 1

$$-\frac{3}{2}|x| + 5 = 5$$

$$-\frac{3}{2}|x| = 0$$

$$|x| = 0$$

$$x = 0$$

***f*(*x*) = 0**

Tipp az x helyek számára: 2

$$-\frac{3}{2}|x| + 5 = 0$$

$$-\frac{3}{2}|x| = -5$$

$$|x| = \frac{10}{3} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{3} \\ x_2 = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

A többi függvényértékhez tartozó x helye(ke)t is ugyanígy kell kiszámolni.

Feladatok

Az 1., 2., 3., feladatok megoldásánál figyelj arra, hogy a függvény egy adott függvényértéket 0, 1 vagy 2 helyen is felvehet. Számítás előtt próbáld megtippelni az adott függvényértékhez tartozó helyek számát! Számításodat grafikonon ellenőrizheted.

1. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot, illetve használd a tanult jelöléseket!

a) $a(x) = 3|x|$

x	0	–1	$\frac{2}{3}$					
$a(x)$				6	1	0	–3	3

b) $b(x) = -|x| + 4$

x	–2	0	4					
$b(x)$				0	–2	6	4	1

c) $c(x)=|-2x|-1$

x	-2	0	4					
$c(x)$				0	-2	-1	4	1

d) $d(x)=\frac{2}{3}|x-3|$

x	$-\frac{6}{5}$	0	$0{,}75$					
$d(x)$				-1	0	$\frac{5}{3}$	3	$\frac{10}{3}$

Megoldás:

a) $a(x)=3|x|$

x	0	-1	$2/3$	$2; -2$	$\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$	0	—	$1; -1$
$a(x)$	0	3	2	6	1	0	-3	3

b) $b(x)=-|x|+4$

x	-2	0	4	$4; -4$	$6; -6$	—	0	$3; -3$
$b(x)$	2	4	0	0	-2	6	4	1

c) $c(x)=|-2x|-1$

x	-2	0	4	$\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$	—	0	$\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}$	$1; -1$
$c(x)$	3	-1	7	0	-2	-1	4	1

d) $d(x)=\frac{2}{3}|x-3|$

x	$-\frac{6}{5}$	0	$0{,}75$	—	3	$\frac{11}{2}; \frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}; -\frac{3}{2}$	$8; -2$
$d(x)$	$\frac{14}{5}$	2	$\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{5}{3}$	3	$\frac{10}{3}$

2. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot, illetve használd a tanult jelöléseket!

a) $a(x)=\frac{1}{2}|x|-2$ $\qquad a(-8)=?;\quad a(-1)=?;\quad a(4)=?$

$x = ?$, ha $a(x)=4;\ 1;\ 0;\ -2;\ -4.$

b) $b(x)=2|x-3|$ $\quad$ $b(0{,}5)=?;\ \ b(0)=?;\ \ b(5)=?$

$x=?$, ha $b(x)=-3;\ 0;\ \dfrac{1}{2};\ 1;\ 2.$

c) $c(x)=-\dfrac{1}{2}|x|+4$ $\quad$ $c(-2)=?;\ \ c(0)=?;\ \ c(1{,}24)=?$

$x=?$, ha $c(x)=5;\ 4;\ \dfrac{3}{2};\ 0;\ 0{,}5.$

d) $d(x)=|x-4|-5$ $\quad$ $d(-8)=?;\ \ d(-2)=?;\ \ d(3)=?$

$x=?$, ha $d(x)=4;\ 0;\ -1;\ -5;\ -6$

Megoldás:

a) $a(-8)=2;\ \ a(-1)=-\dfrac{3}{2};\ \ a(4)=0;$

$a(x)=4 = \ x=\pm 12;$ $\quad$ $a(x)=1 = \ x=\pm 6;$ $\quad$ $a(x)=0 = \ x=\pm 4;$

$a(x)=-2 = \ x=0;$ $\quad$ $a(x)=-4 =$ nincs ilyen x.

b) $b(0{,}5)=7;\ \ b(0)=6;\ \ b(5)=16;$

$b(x)=-3 =$ nincs ilyen x; $\quad$ $b(x)=0 = \ x=3;$

$b(x)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow\ x_1=-\dfrac{11}{4};\ x_2=-\dfrac{13}{4};$ $\quad$ $b(x)=1 \Rightarrow\ x_1=-\dfrac{5}{2};\ x_2=-\dfrac{7}{2};$

$b(x)=2 = \ x_1=-2;\ x_2=-4.$

c) $c(-2)=3;\ \ c(0)=4;\ \ c(1{,}24)=3{,}38;$

$c(x)=5 =$ nincs ilyen x; $\quad$ $c(x)=4 = \ x=0;$ $\quad$ $c(x)=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=\pm 5;$

$c(x)=0 = \ x=\pm 8;$ $\quad$ $c(x)=-0{,}5 = \ x=\pm 9.$

d) $d(-8)=7;\ \ d(-2)=1;\ \ d(3)=-4;$

$d(x)=4 = \ x_1=13;\ x_2=-5;$ $\quad$ $d(x)=0 = \ x_1=9;\ x_2=-1;$

$d(x)=-1 = \ x_1=8;\ x_2=0;$ $\quad$ $d(x)=-5 = \ x=4;$ $\quad$ $d(x)=6 =$ nincs ilyen x.

3. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot, illetve használd a tanult jelöléseket!

a) $a(x) = -|x-6|+8$ $\quad$ $a(-1)=?;\ \ a(3)=?;\ \ a(10)=?$

$x=?$, ha $a(x)=10;\ 6;\ 4;\ 0;\ –2.$

b) $b(x)=|x+2|-3$ $\quad$ $b(-5)=?;\ \ b(1)=?;\ \ b(13)=?$

$x=?$, ha $b(x)=–4;\ –3;\ 0;\ 2;\ 5.$

c) $c(x)=3|x+2|$ $\quad$ $c\left(-2\frac{2}{3}\right)=?;\ \ c(0)=?;\ \ c(0{,}1)=?$

$x=?$, ha $c(x)=3\frac{1}{3};\ 3;\ \frac{4}{3};\ 0;\ –0{,}5.$

d) $d(x)=-|x+1|+1$ $\quad$ $d(-3)=?;\ \ d(0)=?;\ \ d(1{,}75)=?$

$x=?$, ha $d(x)=2;\ 1;\ \frac{3}{2};\ 0;\ –4.$

Megoldás:

a) $a(-1)=1;\ \ a(3)=5;\ \ a(10)=4;$

$a(x)=10 =$ nincs ilyen x; $\quad a(x)=6 = \ x_1=8;\ x_2=4$; $\quad a(x)=4 = \ x_1=8;\ x_2=4$;

$a(x)=0 = \ x_1=-2;\ x_2=14$; $\quad a(x)=-2 = \ x_1=-4;\ x_2=16$.

b) $b(-5)=0;\ \ b(1)=0;\ \ b(13)=12;$

$b(x)=-4 =$ nincs ilyen x; $\quad b(x)=-3 = \ x=-2$;

$b(x)=0 = \ x_1=-5;\ x_2=1$; $\quad b(x)=2 = \ x_1=-7;\ x_2=3$;

$b(x)=5 = \ x_1=-10;\ x_2=6$.

c) $c\left(-2\frac{2}{3}\right)=4;\ \ c(0)=6;\ \ c(0{,}1)=6{,}3;$

$c(x)=3\frac{1}{3} \Rightarrow \ x_1=-\frac{8}{9};\ x_2=-\frac{28}{9}$; $\quad c(x)=3 = \ x_1=-1;\ x_2=-3$;

$c(x)=\frac{4}{3} \Rightarrow \ x_1=-\frac{22}{9};\ x_2=\frac{14}{9}$; $\quad c(x)=0 = \ x=-2$;

$c(x)=-0{,}5 =$ nincs ilyen x.

d) $d(-3) = -1$; $d(0) = 0$; $d(1{,}75) = -1{,}75$;

$d(x) = 2 =$ nincs ilyen x; $d(x) = 1 = x = -1$; $d(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ nincs ilyen x

$d(x) = 0 = x_1 = -2; x_2 = 0$; $d(x) = -4 = x_1 = -6; x_2 = 0$.

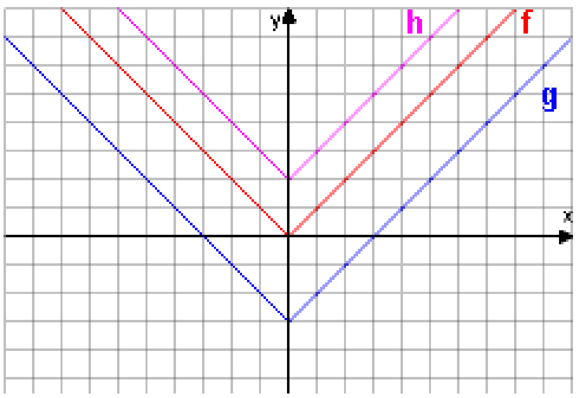
II. Az abszolútérték-függvény transzformálása

Feldolgozási javaslat az elméleti anyaghoz: A tanár kiosztja minden csoportnak a 12.9. szakértői mozaikot. Egy csoporton belül az első gyerek az x tengely menti eltolásokat kapja, a 2. az y tengely menti eltolásokat, a 3. a zsugorítás/nyújtás részt, a 4. pedig az abszolútérték-függvény tulajdonságai részt. Akik azonos témát kaptak, közös asztalhoz ülnek, és feldolgozzák a tananyagot. Ha készen vannak, mindenki visszamegy a csoportjához. És a lapjukon található sorszámnak megfelelő sorrendben elmagyarázzák, amit tanultak.

Az abszolútérték-függvény transzformálása: *y* tengely menti eltolás

Ábrázoljuk közös koordináta–rendszerben az $f(x) = |x|$, az $g(x) = |x| - 3$ illetve a $h(x) = |x| + 2$ hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját! Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot vagy az abszolútérték-függvény definícióját.

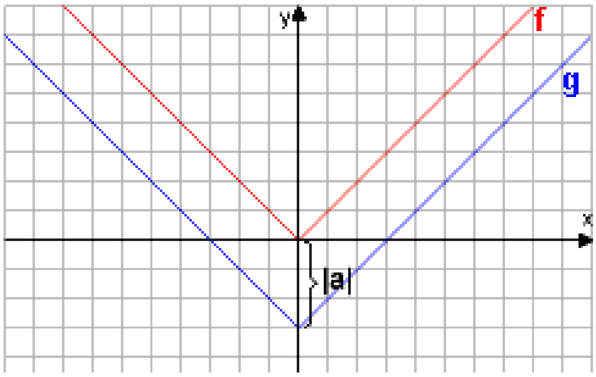
x	–5	–4,3	–3	–2	–1	0	$\frac{2}{3}$	2	3	4	5
$g(x)$	2	1,3	0	–1	–2	–3	$-\frac{7}{3}$	–1	0	1	2
$h(x)$	7	6,3	5	4	3	2	$\frac{8}{3}$	4	5	6	7



$$g(x) = \begin{cases} x-3, & ha\ \ x \ge 0 \\ -x-3, & ha\ \ x < 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x+2, & ha\ \ x \ge 0 \\ -x+2, & ha\ \ x < 0 \end{cases}$$

Ha az *f* függvény értékeiből 3-at vonunk ki, akkor a *g* függvény megfelelő értékeit kapjuk meg, ha pedig 2-t adunk hozzá, akkor a *h* függvény megfelelő értéke lesz az eredmény. Ez a grafikonon az $f(x)$ függvény grafikonjának eltolását eredményezi az *y* tengely mentén –3, illetve +2 egységgel.

Általánosan: a $g(x) = |\,x\,| + a$ („a" 0-tól különböző, tetszőleges valós szám) függvény grafikonját az $f(x) = |\,x\,|$ függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy f grafikonját eltoljuk az y tengely mentén $|a|$ egységgel $a < 0$ esetén lefelé, $a > 0$ esetén felfelé.

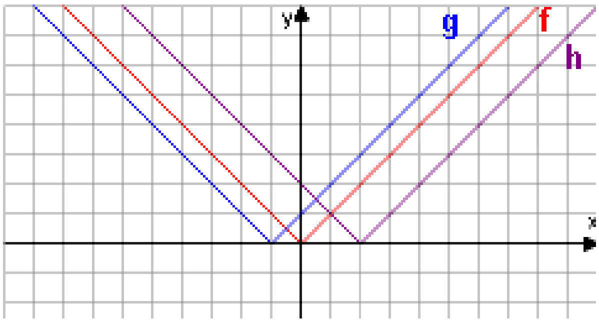


Az abszolútérték-függvény transzformálása: *x* tengely menti eltolás

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $f(x) = |\,x\,|$, az $g(x) = |\,x + 1\,|$, illetve a $h(x) = |\,x - 2\,|$ hozzárendelési utasítással megadott függvények grafikonját! Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot vagy az abszolútérték-függvény definícióját.

x	–5	–4,3	–3	–2	–1	0	1	$\frac{4}{3}$	2	3	4	5
$f(x)$	5	4,3	3	2	1	0	1	$\frac{4}{3}$	2	3	4	5
$g(x)$	4	3,3	2	1	0	1	2	$\frac{4}{3}$	3	4	5	6

x	–5	–4,3	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	$4\frac{3}{5}$	5
$f(x)$	5	4,3	3	2	1	0	1	2	3	4	$4\frac{3}{5}$	5
$h(x)$	7	6,3	5	4	3	2	1	0	1	2	$2\frac{3}{5}$	3



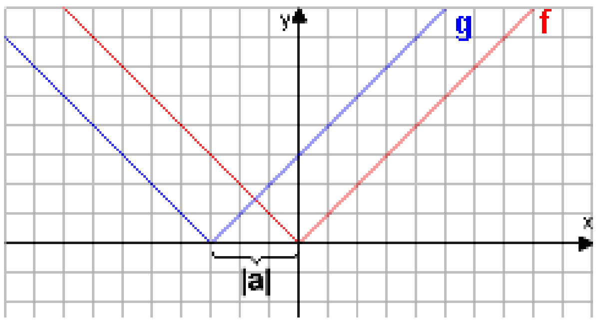
$$g(x) = \begin{cases} x+1 & ,ha\ x \ge -1 \\ -x-1 & ,ha\ x < -1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x-2 & ,ha\ x \ge 2 \\ -x+2 & ,ha\ x < 2 \end{cases}$$

Az értéktáblázatból látható, hogy a g függvény ugyanazokat az értékeit 1 egységgel korábban veszi fel, mint az f függvény. Ez azt is jelenti, hogy a g függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy azt eltoljuk az x tengely mentén –1 egységgel, másképp fogalmazva negatív irányba 1 egységgel.

A h függvény ugyanazokat az értékeit 2 egységgel később veszi fel, mint az f függvény. A h függvény grafikonját pedig az f függvény grafikonjának x tengely menti 2 egységgel, pozitív irányba történő eltolásával kapjuk meg.

Általánosságban: a $g(x) = | x + a |$ („a" 0–tól különböző, tetszőleges valós szám) függvény grafikonját az $f(x) = | x |$ függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy f grafikonját eltoljuk az x tengely mentén $|a|$ egységgel „a" előjelével ellentétes irányba: $a < 0$ esetén pozitív, $a > 0$ esetén negatív irányba.



Az abszolútérték-függvény transzformálása: *y* tengely menti zsugorítás/nyújtás

1. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját:

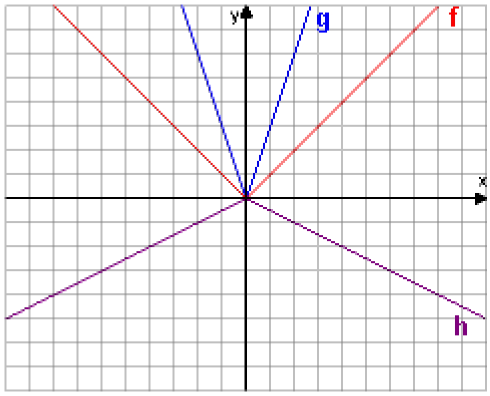
$f(x) = | x |$; $g(x) = 3 | x |$; $h(x) = -\frac{1}{2}|x|$!

Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot vagy az abszolútérték definícióját!

x	–3	–2	–1	0	1,3	2	3
$g(x)$	9	6	3	0	3,9	6	9

x	–3	–2,5	–1	0	1	2	3
$h(x)$	$\frac{3}{2}$	1,25	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

$$g(x)=\begin{cases} 3x & ,ha\ \ x \ge 0 \\ -3x & ,ha\ \ x < 0 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x & ,ha\ \ x \ge 0 \\ \frac{1}{2}x & ,ha\ \ x < 0 \end{cases}$$

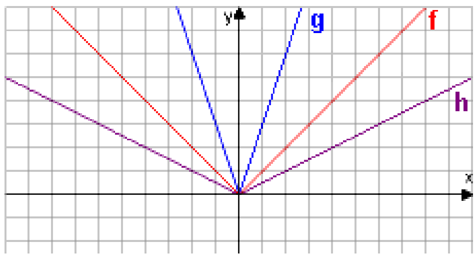


2. Ábrázoljuk közös koordináta–rendszerben a következő függvények grafikonját:

$f(x) = |\,x\,|$; $g(x) = 3\,|-x\,|$; $h(x) = \frac{1}{2}|-x|$!

Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot vagy az abszolútérték definícióját!

x	–3	–2	–1	0	1,3	2	3
$-x$	3	2	1	0	–1,3	–1	–3
$g(x)$	9	6	3	0	3,9	6	9



x	–3	–2,5	–1	0	1	2	3
$-x$	3	2,5	1	0	–1	–2	–3
$h(x)$	$\frac{3}{2}$	1,25	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

$$g(x)=\begin{cases} 3x & ,ha\ \ x \ge 0 \\ -3x & ,ha\ \ x < 0 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & ,ha\ \ x \ge 0 \\ -\frac{1}{2}x & ,ha\ \ x < 0 \end{cases}$$

Észrevehetjük, hogy

1. az $|x|$ és az $|-x|$ függvények grafikonja és tulajdonságaik megegyeznek
2. az f függvény értékeit 3-mal szorozva a g függvény értékeit, míg $\frac{1}{2}$-del szorozva a h függvény értékeit kapjuk meg. A definíciót felhasználva láthatjuk, hogy a megfelelő lineáris függvény meredekségét változtatta meg ez a szorzótényező. Általánosan: az $f(x)=|x|$ függvényből a $g(x)=a|x|$ függvényt úgy kapjuk, hogy minden függvényértéket a-szorosára változtatunk.
3. Ezeknek a függvényeknek a grafikonját megkaphatjuk az abszolútérték definíciójából is két lineáris függvény ábrázolásával.

   Szemléletesen: ha ez a *szorzótényező*

   0 és 1 között van, akkor az abszolútérték-függvény grafikonja szétnyílik,

   1-nél nagyobb, akkor a grafikon meredekebb lesz,

   negatív, akkor a grafikon az x tengelyre is tükröződik.

Megjegyzés: Ezeknek a függvényeknek a grafikonját megkaphatjuk egyetlen lineáris függvényből is a következő módon: először a lineáris függvény grafikonját nyújtjuk vagy zsugorítjuk, majd az x tengely alatti (ahol a függvény negatív értékeket vesz fel) részt tükrözzük az x tengelyre. Ezek a transzformációk megjelennek a lineáris függvényeknél is.

4. Válaszolj a következő kérdésekre!

Módszertani megjegyzés: (Diákkvartett módszerrel) A tanár szétosztja az 12.1 kártyakészletet. Minden csoportnak ad egy betűt, illetve a csoporton belül mindenki kap egy sorszámot. Aztán fölolvassa az első kérdést. Hagy egy kis gondolkodási időt, hogy a csoportok megbeszélhessék a választ. Húz egy betűt és egy számot. A *betű* csoport *sorszámú* tagja fog válaszolni a kérdésre. Megkérdezi az osztály többi tagját, elfogadják-e a választ, ha nem, megbeszélik a helyes megoldást.

1. Mit értünk egy szám abszolútértékén?

   Válasz: az abszolútérték definíciója: $|a|=\begin{cases} a & ,ha\ \ a\ge 0 \\ -a & ,ha\ \ a<0 \end{cases}$

2. Mi az abszolútérték-függvény definíciója?

   Válasz: $f(x)=|x|=\begin{cases} x & ,ha\ \ x\ge 0 \\ -x & ,ha\ \ x<0 \end{cases}$

3. A függvény legyen adott $f(x)=|x|+b$ hozzárendelési utasítással, ahol b egy tetszőleges valós szám. Ez a függvény mely y értékeket veszi fel 0, 1 ill. 2 helyen?

   Válasz: A b-nél kisebb y értékeket sehol sem veszi fel. Az $y=b$ értéket 1 helyen, a b-nél nagyobb y értékeket pedig 2 helyen.

4. A függvény legyen adott $f(x)=|x|+b$ hozzárendelési utasítással, ahol b egy tetszőleges valós szám. Milyen b értékek esetén lesz a függvénynek 0, 1 ill. 2 zérushelye?

   Válasz: $b<0$ esetén 2 zérushelye van, $b=0$ esetén 1, $b>0$ esetén pedig nincs zérushelye.

5. Mi a különbség az $f(x)=|x+5|$, illetve az $f(x)=|x|+5$ hozzárendelési utasítással megadott függvények grafikonja között?

   Válasz: Az elsőt az $f(x)=|x|$ függvény grafikonjának x tengely menti, 5 egységgel, negatív irányba történő eltolásával kapjuk. A másodikat pedig $f(x)=|x|$ függvény grafikonjának y tengely menti, 5 egységgel, pozitív irányba történő eltolásával.

6. Az $f(x)=|x-1|+3$ függvénynek hol van szélsőértéke? Maximuma vagy minimuma van? Mekkora ez a függvényérték?

   Válasz: Ennek a függvénynek az $x=1$ helyen van szélsőértéke, mégpedig minimuma. A minimumérték: $f(1)=3$.

7. Hogyan változik az $f(x)=|x+1|+3$ függvény szélsőértéke a 6. feladatban található függvény szélsőértékéhez képest?

   Válasz: Csak annyiban változik, hogy minimumát az $x=-1$ helyen veszi fel. A minimumérték ugyanaz: $f(-1)=3$.

8. Az $f(x)=c|x|$ függvénynek milyen c értékek esetén van minimuma illetve maximuma?

   Válasz: Ha c negatív, akkor maximuma van, ha pedig pozitív, akkor minimuma.

9. Hogyan változik az $f(x)=|x|$ függvény grafikonja, ha az $|x|$-t megszorozzuk egy számmal a $]0;1[$ intervallumból?

   Válasz: A grafikon „szétnyílik”.

10. Jellemezd az $f(x)=c|x|$ hozzárendelési utasítással megadott függvény monotonitását negatív illetve pozitív c értékek esetén!

    Válasz:

    – pozitív c esetén: ha $x>0$, akkor szigorúan monoton növő. Ha $x<0$, akkor szigorúan monoton csökkenő;

    – negatív c esetén: ha $x<0$, akkor szigorúan monoton növő. Ha $x>0$, akkor szigorúan monoton csökkenő.

11. Hogyan ábrázoljuk általában az $|f(x)|$ típusú függvényeket?

Válasz: Az $f(x)$ függvény grafikonjának x tengely alatti részét tükrözzük az x tengelyre, míg az x tengelyre eső pontokat és a grafikon x tengely feletti részét változatlanul hagyjuk.

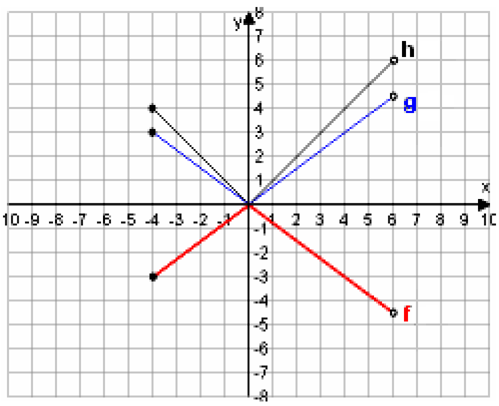
Mintapélda$_2$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x) = -\frac{3}{4}|x|$, x [–4;6[hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:

Értéktáblázattal:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	5,9
$f(x)$	–3	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$	–3	–4,75	–4,425



Transzformációs lépések:

1. $h(x) = |x|$
2. $g(x) = \frac{3}{4}|x|$
3. $f(x) = -\frac{3}{4}|x|$

Definíció szerint:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x & \text{, ha} \quad x \ge 0 \\ \frac{3}{4}x & \text{, ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

Jellemzés:

- ÉT: $-4 \le x < 6$, ahol x valós
- ÉK: $-4,5 < f(x) \le 0$
- Zérushely: $x = 0$
- Monotonitás:
  - ↳ $-4 \le x < 0$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
  - ↳ $0 \le x < 6$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
- Szélsőérték: $x = 0$ helyen maximuma van. A maximum értéke: $f(0) = 0$.

Mintapélda$_3$

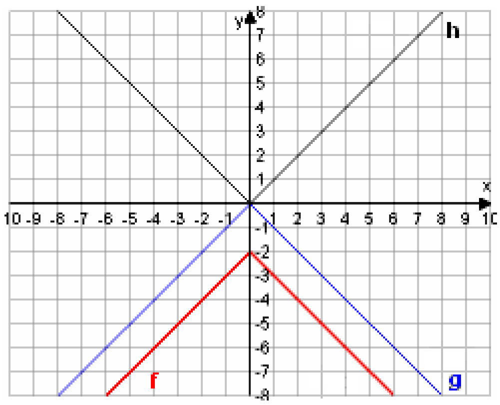
Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az

$f(x) = -|\,x\,| - 2$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:

Értéktáblázattal:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–6	–5	–4	–3	–2	–3	–4	–5	–6



Transzformációs lépések:

1. $h(x) = |\,x\,|$
2. $g(x) = -|\,x\,|$
3. $f(x) = -|\,x\,| - 2$

Definíció szerint:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & ,ha \;\; x \geq 0 \\ x-2 & ,ha \;\; x < 0 \end{cases}$$

Jellemzés:

– É.T.: x **R.**

– É.K.: $f(x) \leq -2$.

– Zérushely: nincs.

– Monotonitás:

↳ $x \leq 0$ esetén szigorúan monoton növekvő.

↳ $0 < x$ esetén szigorúan monoton csökkenő.

– Szélsőérték: $x = 0$ helyen maximuma van. A maximum értéke: $f(0) = -2$.

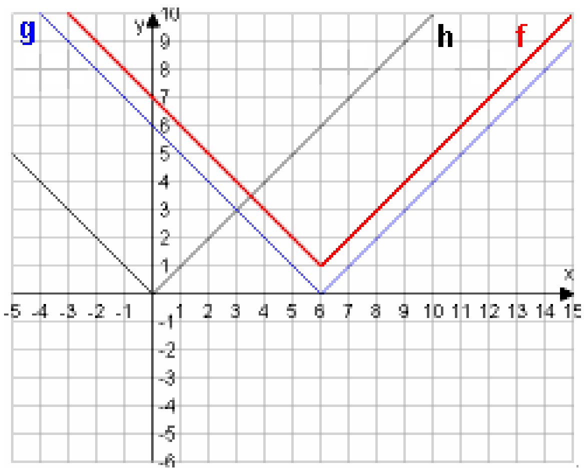
Mintapélda$_4$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x)=|x-6|+1$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:

Értéktáblázattal:

x	–3	0	3	4	5	6	7	9	12
$f(x)$	10	7	4	3	2	1	2	4	7



Transzformációs lépések:

1. $h(x) = |x|$
2. $g(x) = |x-6|$
3. $f(x) = |x-6|+1$

Definíció szerint:

$$f(x)=\begin{cases} x-6+1=x-5 & ,\text{ha} \quad x\ge 6 \\ -x+6+1=-x+7 & ,\text{ha} \quad x<6 \end{cases}$$

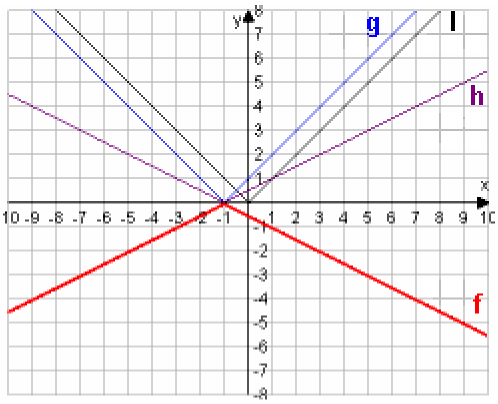
Jellemzés:

- ÉT: x **R**
- ÉK: $f(x)$ 1
- Zérushely: nincs
- Monotonitás:
  - ↳ $x<6$ esetén szigorúan monoton csökkenő
  - ↳ x 6 esetén szigorúan monoton növekvő
- Szélsőérték: $x = 6$ helyen minimuma van. A minimum értéke: $f(6)=1$.

Mintapélda₅

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x) = -\frac{2}{3}|x+1|$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás:



Transzformációs lépések:

1. $l(x) = |x|$
2. $h(x) = |x + 1|$
3. $g(x) = \frac{2}{3}|x + 1|$
4. $f(x) = -\frac{2}{3}|x + 1|$

Definíció szerint:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} & \text{, ha} \quad x \geq -1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{, ha} \quad x < -1 \end{cases}$$

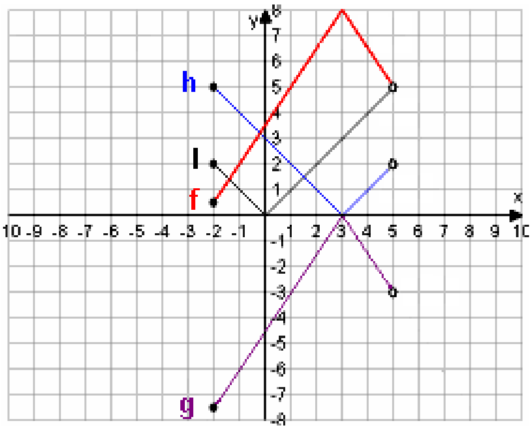
Jellemzés:

- ÉT: x **R**
- ÉK: $f(x) \leq 0$
- Zérushely: $x = 0$
- Monotonitás:
  - ↳ $x < -1$ esetén szigorúan monoton növekvő
  - ↳ x -1 esetén szigorúan monoton csökkenő
- Szélsőérték: $x = -1$ helyen maximuma van. A maximum értéke: $f(-1) = 0$.

Mintapélda$_6$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x) = -\frac{3}{2}|x-3|+8$, x $[-2; 5[$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

Megoldás



Transzformációs lépések:

1. $l(x) = |x|$
2. $h(x) = |x-3|$
3. $g(x) = -\frac{3}{2}\,|x-3|$
4. $f(x) = -\frac{3}{2}|x-3|+8$

Definíció szerint:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(x-3)+8 = -\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}+8 = -\frac{3}{2}x+\frac{25}{2} & \text{, ha } \; 3 \le x < 5 \\ \frac{3}{2}(x-3)+8 = \frac{3}{2}x-\frac{9}{2}+8 = \frac{3}{2}x+\frac{7}{2} & \text{, ha } \; -2 \le x < 3 \end{cases}$$

Jellemzés:

– ÉT: x $[-2; 5[$, ahol x valós

– ÉK: $\frac{1}{2} \le f(x) \le 8$

– Zérushely: nincs

– Monotonitás:

↳ $3 \le x < 5$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő

↳ $-2 \le x < 3$ intervallumon szigorúan monoton növekvő

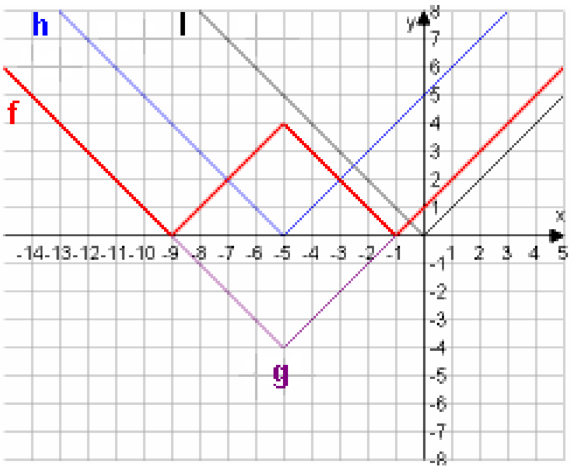
– Szélsőérték:

↳ $x = 3$ helyen maximuma van. A maximum értéke: $f(3) = 8$.

↳ $x = -2$ helyen minimuma van. Minimum értéke: $f(-2) = \frac{1}{2}$.

Mintapélda$_7$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x)=\left|\,|x+5|-4\right|$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!



Megoldás:

Transzformációs lépések:

1. $l(x) = |x|$
2. $h(x) = |x + 5|$
3. $g(x) = |x + 5| - 4$
4. $f(x) = ||x + 5| - 4|$

Definíció szerint:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & ,\text{ha} \quad x \ge -1 \\ -x-1 & ,\text{ha} \quad -5 \le x < -1 \\ x+9 & ,\text{ha} \quad -9 \le x < -5 \\ -x-9 & ,\text{ha} \quad x < -9 \end{cases}$$

Jellemzés:

- ÉT: x **R**
- ÉK: $0 \le f(x)$
- Zérushely: $x = -9$ és $x = -1$ helyeken
- Monotonitás:
  - ↳ $x \ge -1$ esetén szigorúan monoton növekvő
  - ↳ $-5 \le x < -1$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő
  - ↳ $-9 \le x < -5$ intervallumon szigorúan monoton növekvő
  - ↳ $x < -9$ esetén szigorúan monoton csökkenő
- Szélsőérték:
  - ↳ $x = -9$ és $x = -1$ helyeken minimuma van.
    A minimum értéke: $f(-9) = f(-1) = 0$.
  - ↳ $x = -5$ helyen lokális maximuma van. A maximum értéke: $f(-5) = 4$.

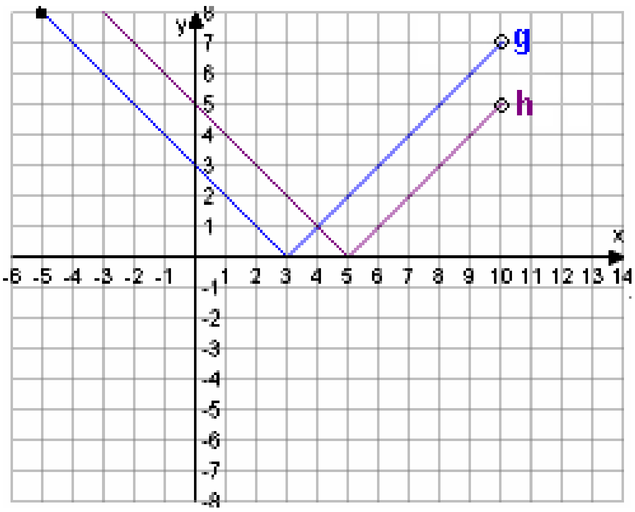
Mintapélda₈

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben, és jellemezzük az $f(x)=|x-3|+|x-5|$, x $[-5;10[$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt!

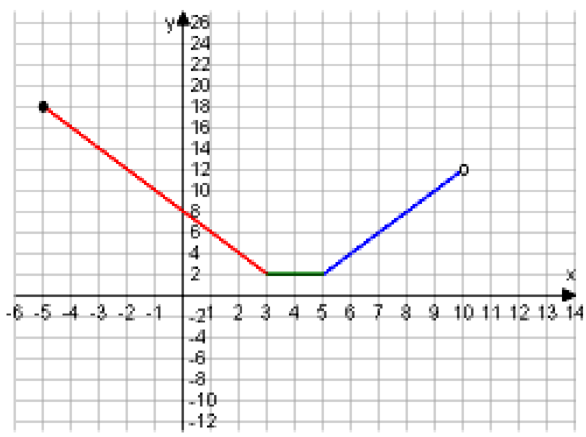
Megoldás:

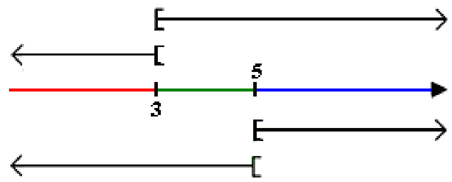
<u>Definíció szerint:</u>

$$g(x)=|x-3|=\begin{cases}x-3 & ,\text{ha} \quad x\geq 3\\ -x+3 & ,\text{ha} \quad x<3\end{cases} \qquad h(x)=|x-5|=\begin{cases}x-5 & ,\text{ha} \quad x\geq 5\\ -x+5 & ,\text{ha} \quad x<5\end{cases}$$



Két függvény összege szerepel. Az egyik grafikonjának csúcspontja 3-nál, a másiké 5-nél van, ezért a számegyenest 3 részre tagoljuk, és eszerint vizsgáljuk a függvényt.





Összegezve:

$$f(x)=\begin{cases}2x-8 & ,\text{ha} \quad 5\leq x<10\\ 2 & ,\text{ha} \quad 3\leq x<5\\ -2x+8 & ,\text{ha} \quad -5\leq x<3\end{cases}$$

<u>Jellemzés:</u>

- ÉT: $x \quad [-5; 10[$
- ÉK: $2 \le f(x) \le 18$
- Zérushely: nincs
- Monotonitás:
  - ↳ $5 \le x < 10$ intervallumon szigorúan monoton növekvő
  - ↳ $3 \le x < 5$ intervallumon állandó (konstans) értéket vesz fel
  - ↳ $-5 \le x < 3$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő
- Szélsőérték:
  - ↳ $3 \le x < 5$ intervallumon minimuma van. A minimum érték: $f(x) = 2$.
  - ↳ $x = -5$ helyen maximuma van. A maximum érték: $f(-5) = 18$.

<u>Feldolgozási javaslat az 5. – 7. feladatokhoz:</u> A tanár 2 fős, lehetőleg homogén csoportokat alakít ki. Minden tanuló számára az illető képességének megfelelően kijelöl 3 - 3 feladatot. A tanulók megoldják a füzetükbe a saját feladataikat, majd az egy csoportba tartozók kicserélik a füzeteiket, és kijavítják. Végül megbeszélik a javítást.
Ajánlás:
5. feladat: a), d), h) illetve j), k), m)
6. feladat: a), d), l) illetve b), c), e)
7. feladat: a), f), i) illetve b), d), h)

Feladatok

5. Ábrázold koordináta-rendszerben, és jellemezd az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket! Az ábrázoláshoz felhasználhatod az értéktáblázatot vagy az abszolútérték-függvény definícióját.

a) $f(x) = |x+5|,\ 8 \quad x \quad 3$ b) $f(x) = |x-7|$ c) $f(x) = |x| + 3$

d) $f(x) = |x| - 4,\ 6 \quad x \quad 4$ e) $f(x) = -|x|$ e) $f(x) = \ 2|x|$

f) $f(x) = -\frac{4}{5}|x|,\ x \quad [-4; 8[$ g) $f(x) = \frac{3}{2}|x|,\ x \quad]-6; 3]$

h) $f(x) = -3|x|$ i) $f(x) = -|x| - 1$ j) $f(x) = -|x+4|,\ -5 < x < 1$

k) $f(x) = |-3x|$ l) $f(x) = |2x|$ m) $f(x) = -|x| + 5$

Megoldási útmutató: ezek a függvények elemi transzformációkkal ábrázolhatók.

A k) $f(x) = 3|x|$ és l) $f(x) = 2|x|$ függvények pedig ezen átalakítás után.

6. Ábrázold koordináta-rendszerben, és jellemezd az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket! Az ábrázoláshoz felhasználhatod az értéktáblázatot vagy az abszolútérték-függvény definícióját.

a) $f(x) = 2\,|x-4|,\ 1 < x < 7$ b) $f(x) = -\frac{2}{3}\,|x+1|$

c) $f(x) = |x-3| + 4$ d) $f(x) = |x+3| - 2,\ x \quad [-6;4]$

e) $f(x) = |3x| + 2,\ -3 \quad x < 5$ f) $f(x) = \frac{1}{4}\,|x| - 2$

g) $f(x) = -\frac{3}{4}\,|x| - 5,\ -2 < x < 4$ h) $f(x) = -2\,|x| + 10$

i) $f(x) = \frac{1}{3}\,|x+3|$ j) $f(x) = -4\,|x-2|,\ x \quad]-2;\, 5\,]$

k) $f(x) = |x-2| - 1$ l) $f(x) = -|x+1| + 3$

Megoldási útmutató: ezek a függvények elemi transzformációkkal ábrázolhatóak.

Az e) függvény pedig $f(x) = 3\,|x| + 2$ átalakítás után.

7. Ábrázold koordináta-rendszerben, és jellemezd az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját! Az ábrázoláshoz felhasználhatod az értéktáblázatot vagy az abszolútérték-függvény definícióját.

a) $f(x) = \frac{1}{3}|x+4| - 2$ b) $f(x) = -\frac{5}{2}|x-5| + 8,\ x \quad [-1;\, 8\,[$

c) $f(x) = 2|x+5| + 1$ d) $f(x) = |2x+5| + 1,\ x \quad [-8;\, 1\,]$

e) $f(x) = |3 + \frac{1}{2}x| - 4,\ x \quad [-10;0[$

f) $f(x) = |-4x+8| + 2,\ x \quad [-3;\, 7\,]$

g) $f(x) = \left|-\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right| - 5$ h) $f(x) = |\,2\,|x-1| - 3\,|,\ x \quad]-5;\, 6\,]$

i) $f(x) = |\,|x+4| - 5\,|$ j) $f(x) = \left|-\frac{1}{3}\,|x| + 3\right|,\ -15 < x \quad 15$

Megoldási útmutató: a), b), c), h), i), j) függvények közvetlenül, a többi az alábbi átalakítás után ábrázolható elemi transzformációkkal.

d) $f(x) = 2\left|x + \frac{5}{2}\right| + 1$; e) $f(x) = \frac{1}{2}|x+6| - 4$; f) $f(x) = 4|x-2| + 2$; g) $f(x) = \frac{2}{3}|x+2| - 5$.

8. Ábrázold koordináta-rendszerben, és jellemezd az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket! Az ábrázoláshoz felhasználhatod az értéktáblázatot vagy az abszolútérték-függvény definícióját.

a) $f(x) = |-5|x-3|+2|$ b) $f(x) = |x| + x$

c) $f(x) = 2x - |x|;\ x \quad [-6; 4]$ d) $f(x) = |x| + |x+2|;\ x \quad]-8; 3[$

e) $f(x) = |x-1| + |x-6|;\ x \quad [-5; 10[$ f) $f(x) = |x+1| - |x|$

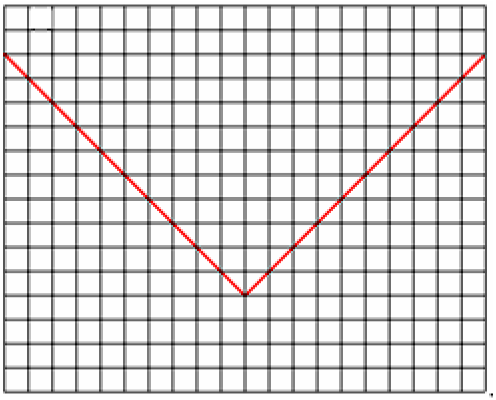
g) $f(x) = -|x-2| - |x+4|$ h) $f(x) = 2|x-3| + |x+1| - 2$

Megoldási útmutató: ezek a függvények az abszolútérték-függvény definícióját alkalmazva ábrázolhatók, előzőleg elvégezve a megfelelő összevonásokat.

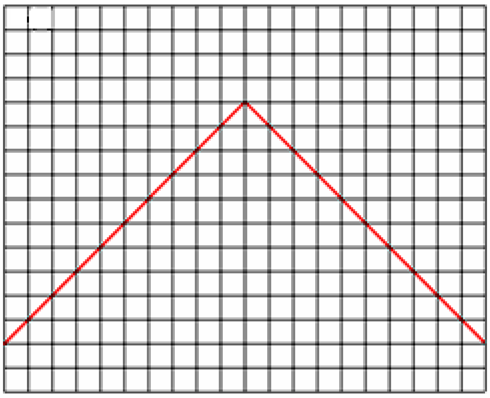
9. Rajzold be az ábrákba a grafikon és a hozzárendelési utasítás alapján a koordináta–rendszer tengelyeit!

Feldolgozási javaslat: A tanár kijelöl 3 feladatot, amit tanulók egyénileg megoldanak.
Ajánlás: 1,6,8

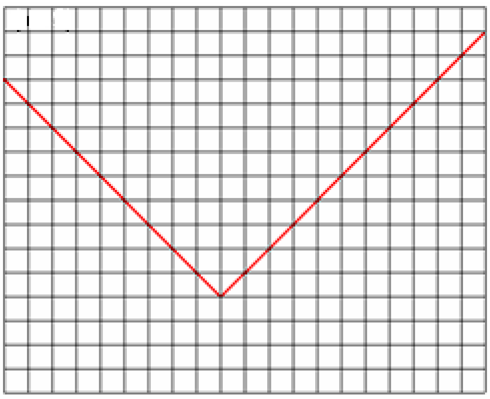
a) $f(x)=|x|$



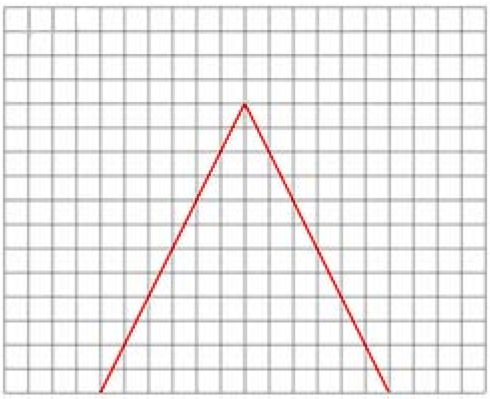
b) $f(x)=-|x|$



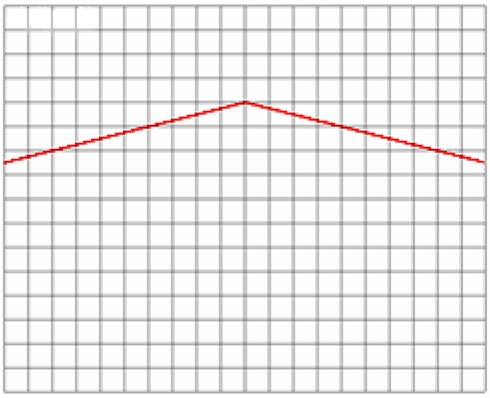
c) $f(x)=|x+5|$



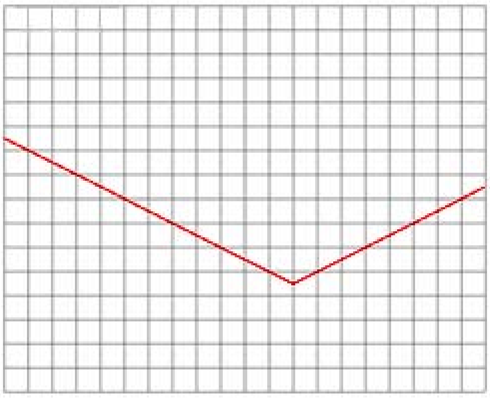
d) $f(x)=-2|x|+8$



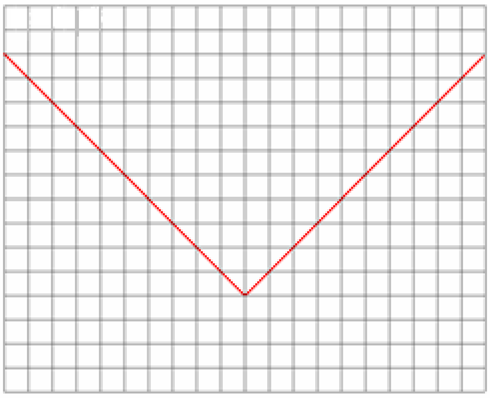
e) $f(x)=-\frac{1}{4}|x-3|$



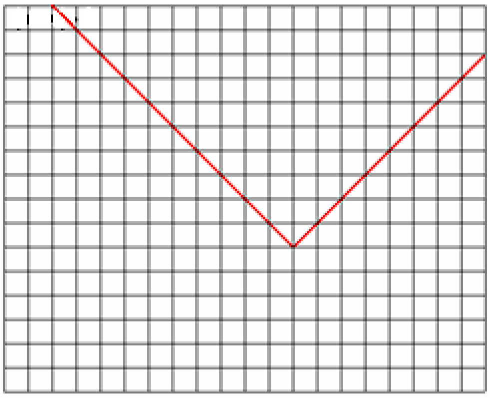
f) $f(x)=\frac{1}{4}|x|-\frac{3}{2}$



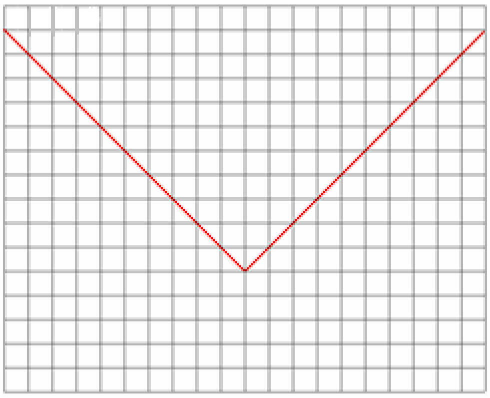
g) $f(x)=|x+3|-6$



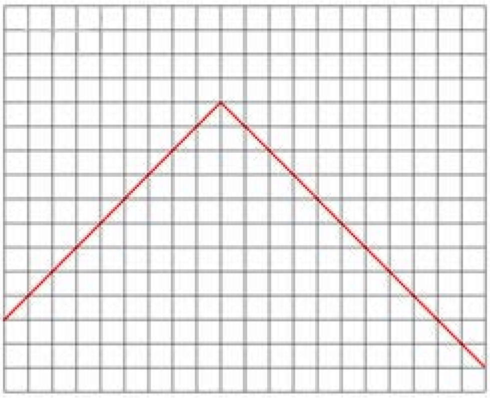
h) $f(x)=|x-4|-3$



i) $f(x)=|x-2|+3$

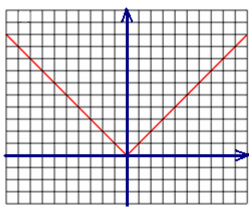


j) $f(x)=-|x+1|+4$

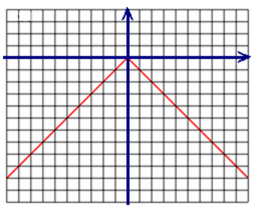


Megoldás:

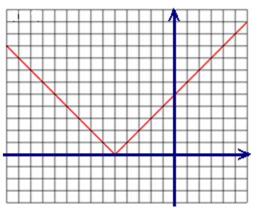
a)



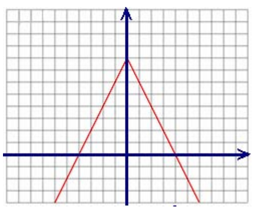
b)



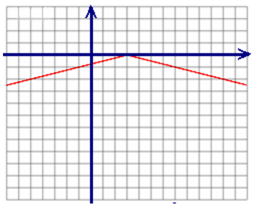
c)



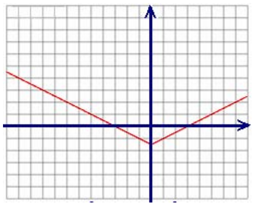
d)



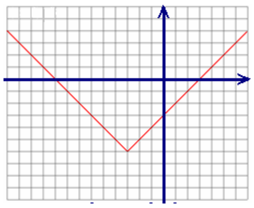
e)



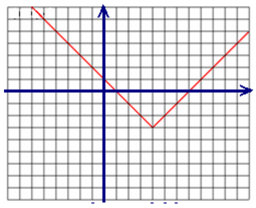
f)



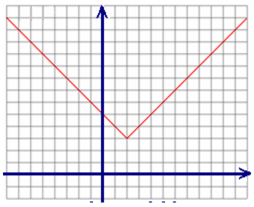
g)



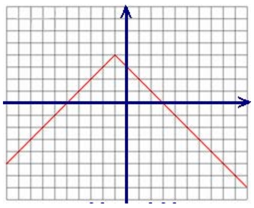
h)



i)



j)



Mintapélda₉

Állítsuk sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy az $m(x) = -|x - 10| + 7$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját kapjuk az alapfüggvény grafikonjából!

Megoldás:

Egyik lehetőség:

1. x tengely menti eltolás
2. x tengelyre történő tükrözés
3. y tengely menti eltolás

Másik lehetőség:

1. x tengelyre történő tükrözés
2. x tengely menti eltolás
3. y tengely menti eltolás

Megjegyzés: Az első lehetőség egy általános érvényű sorrend. Ha a behelyettesítési lépések sorrendjét követjük a megfelelő geometriai transzformációban, akkor biztosan jó az eljárás.

Feldolgozási javaslat a 10. feladathoz:
A tanulók párokban, a füzetükben dolgoznak. Rajzoljanak a füzetükbe egy nagy koordináta – rendszert. A tanár vagy kiosztja az abszolútérték alapfüggvény grafikonját ábrázoló sablont (füzetsablon.doc), páronként egyet – egyet, vagy szól a tanulóknak előző órán, hogy készítsék el karton papírból. Kijelöl 2-2 függvényt. például a), f) illetve e), g). A tanulók állapítsák meg, hogy az alapfüggvény grafikonjából kiindulva, mi a geometriai transzformációk helyes sorrendje. Van ahol több megoldás is lehetséges. A transzformációs lépesek a sablon segítségével követhetők.

Feladat

10. Állítsd sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy a feladatokban meghatározott hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját kapjad az alapfüggvény grafikonjából!

Geometriai transzformációk:

x tengely menti eltolás;	y tengely menti eltolás;
x tengelyre tükrözés;	y tengely menti zsugorítás/nyújtás.

Függvények:

$a(x)=\|x\|+1$	$b(x)=\|x+1\|$	$c(x)=-\|x\|$	$d(x)=-\|x\|-2$
$e(x)=-\|x-2\|$	$f(x)=\|x+1\|+2$	$g(x)=\|x-2\|-1$	$h(x)=-\|x+3\|-4$

Mintapélda$_{10}$

Állítsuk sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy az

$m(x)=-\frac{2}{3}|x+2|-6$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját kapjuk az alapfüggvény grafikonjából!

Megoldás:

Első lehetőség: (ez a sorrend általános érvényű)

1. x tengely menti eltolás
2. x tengelyre történő tükrözés
3. y tengely menti zsugorítás, nyújtás (*Megjegyzés:* a sablon használata miatt célszerű előbb tükrözni, s csak utána zsugorítani vagy nyújtani)
4. y tengely menti eltolás

Többi lehetőség: az első három transzformáció sorrendje tetszőlegesen felcserélhető. Ez további 5 lehetséges sorrendet eredményez. ($3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 = 3! - 1 = 5$)

Feldolgozási javaslat a 11. feladathoz:
A tanulók négy fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak odaadja a koordináta-rendszert ábrázoló lapot és abszolútérték-függvény grafikonját ábrázoló sablont (haladóknak egy egyenest ábrázoló fóliát.
Továbbá a

a 12.2. kártyakészletben található feladatkártyákat. A csoport egyik tagja két kártyát kap: egy transzformációsat és a „Választ” kártyát. Minden csoporttag azért a transzformációért felel, amelyiknek a kártyája éppen nála van. Akinél a „Választ” kártya található, az húz a hátlappal felfelé fordított kártyák közül egyet.

a 10. feladatban szereplő függvényekből készített kártyákat hátlapjukkal felfelé. (12.3. kártyakészlet)

Ha az előző már megy és még van idő, akkor rátérhetnek a 11. feladat függvényeire (12.4. kártyakészlet), amelyhez az egyenest ábrázoló fóliára lesz szükség.

A feladat megoldásának menete:

A tanulók transzformációkat úgy tegyék sorrendbe, hogy megkapják a kártyán lévő hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját az alapfüggvény grafikonjából kiindulva. Közben a „Választ” kártya tulajdonosa a transzformációknak megfelelően helyezi el a fóliát vagy a sablont a koordináta-rendszeren.

Ha megtalálták a helyes sorrendet, készítsenek vázlatot a füzetükbe, majd a transzformációs kártyát a balra ülőnek adják tovább, a „Választ” kártyát pedig a jobbra ülőnek.

Addig dolgozzanak, amíg a kártyák egyszer körbe nem érnek.

11. Állítsd sorrendbe az alábbi geometriai transzformációkat úgy, hogy a következő hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját kapjad az alapfüggvény grafikonjából!

$a(x)=2|x|+3$ $\qquad b(x)=-\frac{2}{3}|x-2|$ $\qquad c(x)=-\frac{1}{2}|x+1|$

$d(x)=-\frac{4}{3}|x|+4$ $\qquad e(x)=-\frac{1}{3}|x+3|-2$ $\qquad f(x)=3|x-1|+1$

A következő kirakós játék csak a tanári kézikönyvben található meg. Használjuk hozzá az 5. kártyakészletet illetve a „Kirakós_közép” nevű dokumentumot.

Feldolgozási javaslat:

A tanár nyomtatás előtt a kirakos_k.doc nevű állományt átszerkeszti. A táblázat minden sorából kitörli két cella tartalmát. (Ilyenkor célszerű más néven elmenteni a változtatásokat.) Az így kapott táblázatot nyomtatja ki annyi példányban, ahány csoportot (3 - 4 fős) képez majd az osztályban.

Az 12.5. kártyakészletben is megtalálható a teljes táblázat. Fénymásolás után innét vágja ki a hiányzó kártyákat, amelyeket a tanulók majd a helyükre tesznek.

Tehát a tanár minden csoportnak ad egy hiányos táblázatot, illetve a hiányzó 12 db kártyát külön. A tanulók (csoporton belül) szétosztják egymás között a kártyákat úgy, hogy mindenkinél ugyanannyi legyen. Megkeresik a kártyájuknak megfelelő sort és oszlopot, és lerakják oda a kártyát.

A feladatot lehet könnyíteni úgy, hogy a tanár több kártyát is a helyén hagy. Vagy lehet nehezíteni úgy, hogy a tanár nem ad támpontot, vagyis üres táblázatot ad ki a csoportoknak.

A feladat további könnyítésére / nehezítésére a függvények hozzárendelési utasításának nehezítése ad lehetőséget.

Például a 12.6. kártyakészlet és a hozzá tartozó kirakos_e.doc nevű állomány már emelt szintű függvényeket tartalmaz. Míg a 12.7. kártyakészlet a hozzá tartozó kirakos_a.doc nevű állománnyal egy könnyebb verzió. Itt az oszlopok száma is csak kettő: függvény és az ő grafikonja. És a függvények hozzárendelési utasítása is lényegesen egyszerűbb.

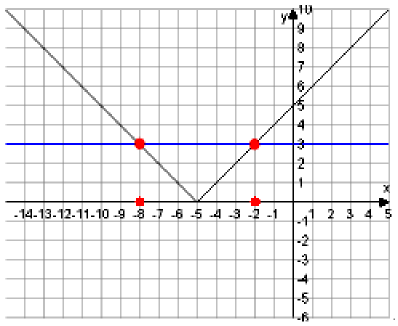
III. Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Feldolgozási javaslat a 10. feladathoz:
A tanár először frontálisan bemutatja a mintapéldákon keresztül az abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldását.
A tanulók 3 fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak ad 3 db példányt az Abszolútértékes egyenlőtlenségek c. A4-es lapból. Kijelöl 3 példát a 12. feladatból.
Egy csoporton belül minden tanuló kap egy, a másikétól különböző példát. Felírják a lapjuk tetején lévő rubrikába a példában szereplő egyenlőtlenség jobb illetve baloldalát. Így minden lapon különböző feladat lesz, de annak több változatát is meg fogják oldani. Egységesen elkezdik az első oszlop kitöltését a lapon található szempontok szerint. Ha készen vannak, odaadják a lapot a mellettük ülőnek. És a középső relációs jelnek megfelelően oldják meg a feladatot. Majd ismét továbbítják a lapot, és kitöltik az utolsó oszlopot is. Ennek eredményeként mindenki 3 különböző feladatot, 3 különböző relációs jelnek megfelelően oldott meg, de egy lapon csak egy példa szerepel.
Ajánlott példák: a), b), c) A megoldás leolvasható a grafikonról.

Mintapélda$_{11}$

Oldjuk meg grafikusan a | x + 5 | = 3 egyenletet!

Megoldás:

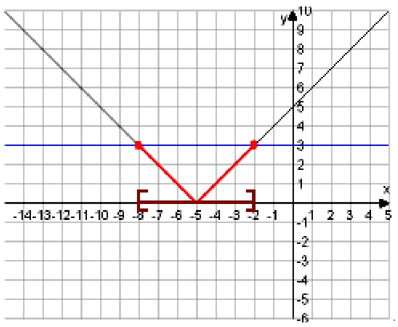


A keresett értékek: $x_1 = -8$, illetve $x_2 = -2$.

Mintapélda$_{12}$

Oldjuk meg grafikusan a | x + 5 | 3 egyenlőtlenséget!

Megoldás:

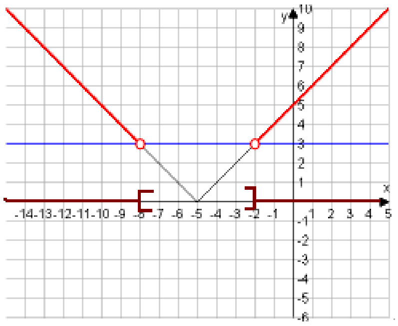


A keresett intervallum: –8 x –2.

Mintapélda$_{13}$

Oldjuk meg grafikusan a $|x + 5| > 3$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:



A keresett intervallumok: $x_1 < -8$ vagy $x_2 > -2$.

Feladat

12. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

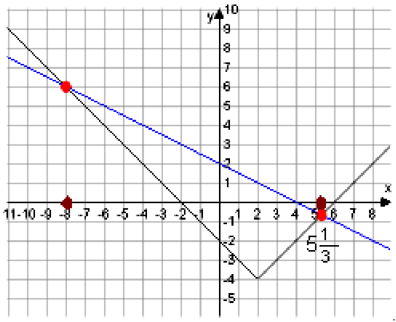
a) $|x| - 2 \geq 1$; b) $-|x| + 3 > -4$; c) $|x + 4| < 5$; d) $-|x - 2| \leq 1$; e) $|x| = x$.

Az ez utáni anyagrész átvétele el is maradhat. A grafikus megoldás során a metszéspontotok x koordinátájának pontos meghatározása haladóknak ajánlott, mivel abszolútértékes egyenletek gyökeit kellene meghatározni. Így elegendő jelölni a grafikonon a megoldást jelentő intervallumokat.

Mintapélda$_{14}$

Oldjuk meg az $|x - 2| - 4 = -\frac{1}{2}x + 2$ egyenletet!

1. megoldás (grafikus):



A keresett értékek: $x_1 = -8$, $x_2 \approx 5$.

2. megoldás (algebrai):

Az abszolútérték definícióját alkalmazzuk (esetszétválasztás):

I. $x - 2 \geq 0$ eset: $|x - 2| = x - 2$ behelyettesítéssel adódik:

$$x - 2 - 4 = -\frac{1}{2}x + 2, \text{ ebből } x_1 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

II. $x-2<0$ eset: $|x-2|=-(x-2)$ behelyettesítéssel adódik:

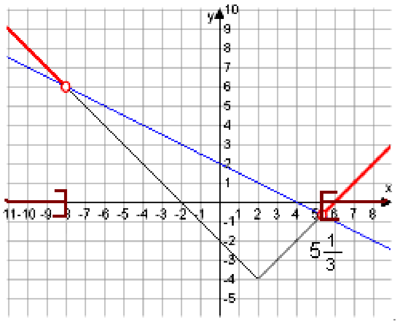
$$-(x-2)-4=-\frac{1}{2}x+2, \text{ ebből } x_2=-8$$

A megoldás tehát $x_1=5\frac{1}{3}$, $x_2=-8$.

Mintapélda$_{15}$

Oldjuk meg grafikusan a $|x-2|-4\geq-\frac{1}{2}x+2$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:



A metszéspontok x koordinátáját az előző mintapéldában már meghatároztuk.

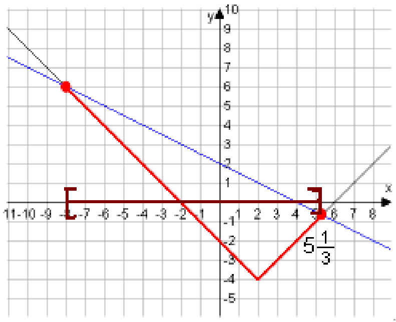
A keresett intervallumok:

$$x<-8 \text{ vagy } 5\frac{1}{3}<x$$

Mintapélda$_{16}$

Oldjuk meg grafikusan a $|x-2|-4<-\frac{1}{2}x+2$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:



A metszéspontok x koordinátáját a 13. mintapéldában már meghatároztuk.

A keresett intervallumok:

$$-8 \quad x \quad 5\frac{1}{3}.$$

Feladatok

13. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket, egyenletet!

a) $|x+2|-5<2$; b) $|x+3|\geq -x+3$; c) $|x-4|-2=\frac{1}{2}x-2$; d) $|x|>2x+3$.

Megoldási útmutató: Az egyenlőtlenségeket egyenlőségként megoldva a következő gyököket kapjuk:

a) $x_1=5$; $x_2=-9$; b) $x=0$; c) $x_1=8$; $x_2=\frac{16}{3}$; d) $x_1=-3$; $x_2=-1$.

Ezek után az ábráról leolvashatók a keresett intervallumok.

14. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $-3=|x-2|-5$; b) $|x-2|-5=5$; c) $-3<|x-2|-5\leq 5$;

d) $-3\geq|x-2|-5$ vagy $|x-2|-5>5$.

Megoldási útmutató: Az egyenlőtlenségeket egyenlőségként megoldva a következő gyököket kapjuk: a) $x_1=4$; $x_2=0$; b) $x_1=12$; $x_2=-8$.

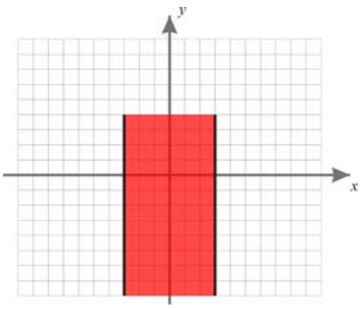
Ezek után az ábráról már leolvashatók a keresett intervallumok.

15. Színezd ki a megadott tartományokat úgy, hogy ha az egyenlőség megengedett, akkor a tartomány határa a tartomány színe legyen, mivel a tartomány határvonala is beletartozik a megoldáshalmazba. Ha nem megengedett, akkor fekete színű legyen!

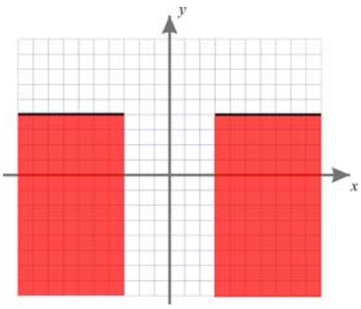
a) $|x|<3$ és $y\leq 4$; b) $|x|\geq 3$ és $y<4$; c) $|x|\geq 3$ és $y>4$.

Megoldás:

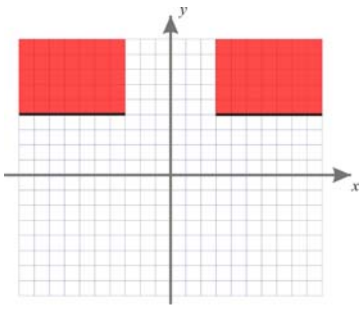
a)



b)



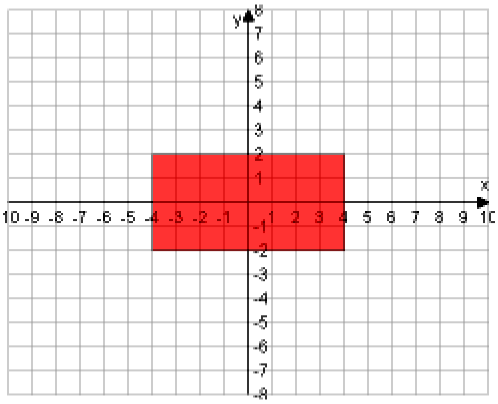
c)



Mintapélda16

Színezzük ki azon pontok halmazát, melyek koordinátáira teljesül, hogy $|x| < 4$ és $|y| < 2$! A színezéshez használjuk fel a 15. feladatban leírtakat!

Megoldás:



Feladatok

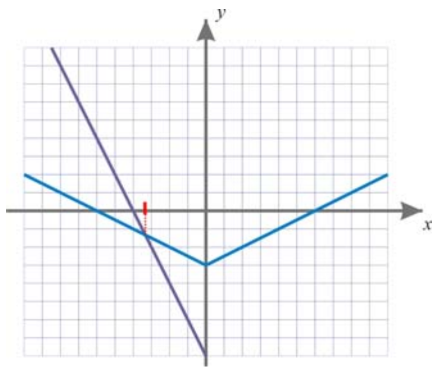
16. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $-2x-8=\frac{1}{2}|x|-3$; b) $\frac{1}{2}|x|-3=\frac{2}{3}x+3$;

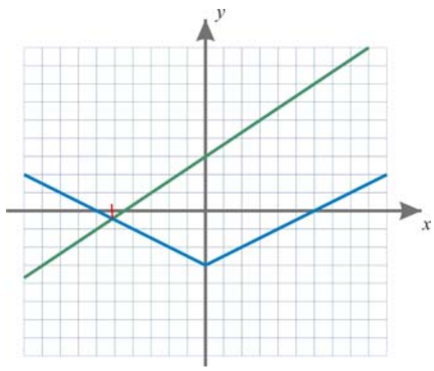
c) $-2x-8\le\frac{1}{2}|x|-3<\frac{2}{3}x+3$; d) $-2x-8>\frac{1}{2}|x|-3$ vagy $\frac{1}{2}|x|-3\ge\frac{2}{3}x+3$.

Megoldás:

a)

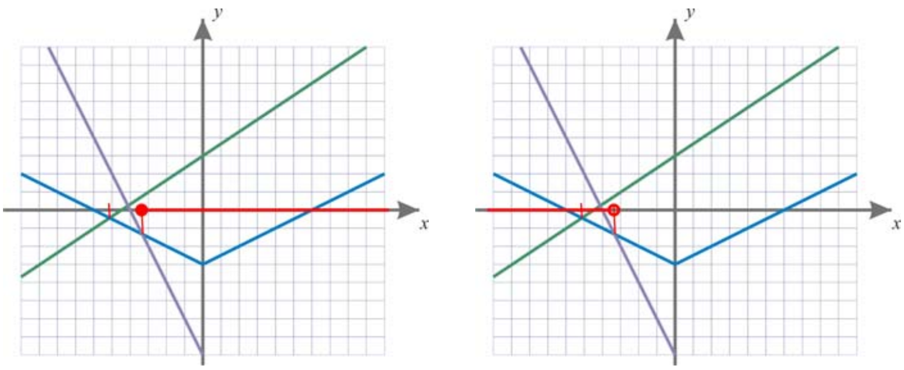


b)



c)

d)



17. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $-2|x-3|+5>-\frac{3}{2}x+6$; b) $|x|-2\geq-|x|$;

c) $|x+8|+7<-|x+5|+1$; d) $|x-4|+2\ \ |x-5|+3$;

e) $|x-3|+|x|=3$.

Megoldási útmutató: Az egyenlőtlenségeket egyenlőségként megoldva a következő gyököket kapjuk:

a) $x_1=2;\ x_2=10$; b) $x_1=-1;\ x_2=1$; c) $x_1=-5{,}5;\ x_2=7{,}5$; d) $x_1=4;\ x_2=5$;

e) $x_1=0;\ x_2=3$.

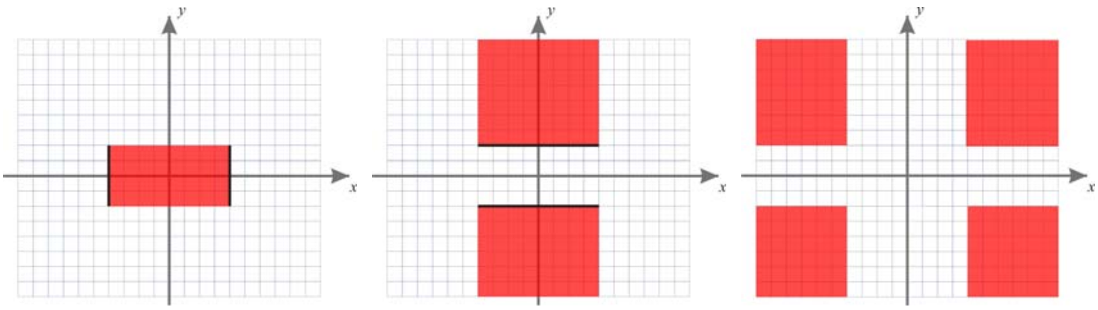
Ezek után az ábráról leolvashatók a keresett intervallumok.

18. Színezd ki a megadott tartományokat úgy, hogy ha az egyenlőség megengedett, akkor a tartomány határa a tartomány színe legyen, mivel a tartomány határvonala is beletartozik a megoldáshalmazba. Ha nem megengedett, akkor fekete színű legyen!

a) $|x|<4$ és $|y|\quad 2$; b) $|x|\quad 4$ és $|y|>2$; c) $|x|\quad 4$ és $|y|\quad 2$.

Megoldás:

a) b) c)



Kislexikon

Pozitív szám **abszolútérték**e maga a szám, negatív szám abszolútértéke a szám ellentettje, egy pozitív szám. $|0| = 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{ha} \quad a < 0 \end{cases}$$

Legyen x tetszőleges valós szám. Ekkor az **abszolútérték-függvény**:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tulajdonságai:

1. Monotonitás

Ha $x < 0$, akkor növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Ezért az $f(x) = |x|$ függvény ezen a tartományon **szigorúan monoton csökkenő.**

Ha x 0, akkor növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvényt ezen a tartományon **szigorúan monoton növekvőnek** nevezzük.

2. Zérushely: Az $f(x) = |x|$ függvénynek az $x = 0$ pontban van **zérushelye**. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ebben a pontban van közös pontja az x tengellyel.

3. Szélsőérték: Az $f(x) = |x|$ függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen pozitív. Ezért az f függvénynek az $x = 0$-ban szélsőértéke, nevezetesen **minimuma** van. (Látható, hogy az f függvény negatív x-ek esetén szigorúan monoton csökkenő, pozitív x-ekre pedig szigorúan monoton növekvő.) Másképp: az f függvény az értelmezési tartományának $x = 0$ helyén veszi fel a legkisebb függvényértékét, ekkor $f(x) = 0$