I. Egyenes arányosság és a lineáris függvények kapcsolata

Az óra első néhány percében idézzük fel az egyenes arányosságról és a lineáris függvényről az általános iskolában tanultakat az első 3, majd pedig a 4.-7. mintapéldák segítségével.

Mintapélda$_1$

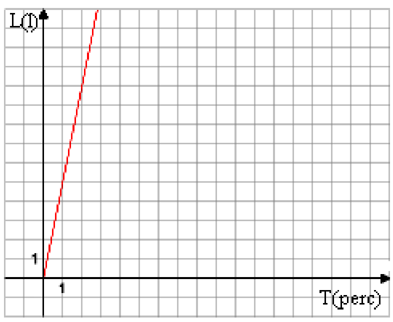
A csapból percenként 5 l víz folyik a fürdőkádba, melynek befogadó képessége 80 liter. Mennyi idő alatt telik meg az eredetileg üres kád? Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a kádban levő vízmennyiséget az eltelt idő függvényében!

Megoldás:

1. Válasz a kérdésre: 16 perc alatt telik meg a kád, mert $\frac{80}{5}=16$.
2. Értéktáblázat készítése:

T (perc)	1	2	3	4	8	12	16
L (liter)	5	10	15	20	40	60	80

3. Ábrázolás grafikonnal:



4. Hozzárendelési utasítás meghatározása:

Az eltelt időt az x tengelyen, a térfogatot (literben) az y tengelyen ábrázoltuk, tehát: $x \mapsto 5 \cdot x$ vagy $f(x) = 5\ x$.

Mintapélda$_2$

Egy 20 cm hosszú gyertyát meggyújtunk. A gyertya 4 óra alatt ég el. Fél óra alatt hány centimétert csökken? Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a gyertya hosszának alakulását az eltelt időtől függően!

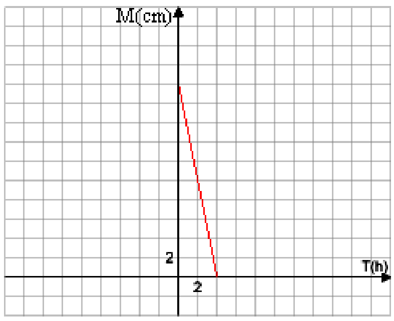
Megoldás:

1. Válasz a kérdésre: A gyertya 1 óra alatt $\frac{20}{4} = 5$ cm-t csökken, fél óra alatt 2,5 cm-rel lesz alacsonyabb.

2. Értéktáblázat készítése:

T (h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4
M (cm)	20	17,5	15	12,5	10	5	0

3. Ábrázolás grafikonnal:



4. Hozzárendelési utasítás meghatározása:

   Az eltelt időt az x tengelyen, a gyertya magasságát az y tengelyen ábrázoltuk, tehát:

   $x \mapsto -5x + 20$. vagy $f(x) = -5x + 20$.

Mintapélda$_3$

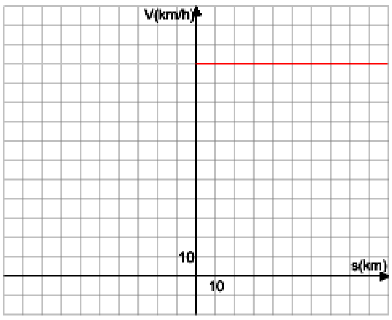
Egy személygépkocsi az autópálya 50 km-es szakaszán 110 km/h sebességgel halad. Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat? Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a sebességet az út függvényében!

Megoldás:

1. Válasz a kérdésre: Az autó 0,45 óra alatt teszi meg az utat, mert $t = \frac{v}{s} = \frac{50}{110} = 0,\dot{4}\dot{5}$.
2. Értéktáblázat készítése:

s (km)	1	10	20	30	40	45	50
$v\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	110	110	110	110	110	110	110

3. Ábrázolás grafikonnal:



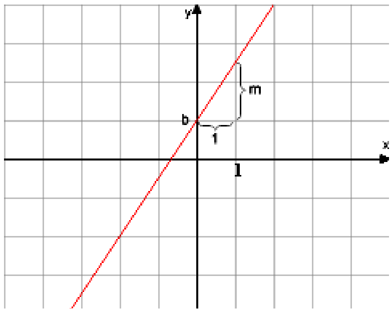
4. Hozzárendelési utasítás meghatározása:

A megtett utat az x tengelyen, az autó sebességét az y tengelyen ábrázoltuk, így:

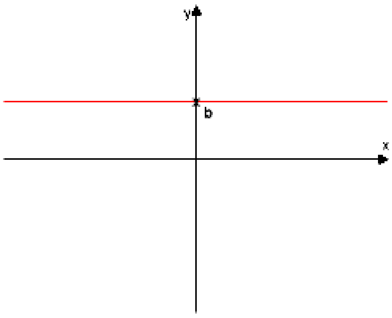
$x \mapsto 110$, vagyis $f(x) = 110$.

II. A lineáris függvény

Azokat a függvényeket, amelyeknek grafikonja egyenes, lineáris függvényeknek nevezzük, és az $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$ képlettel adhatjuk meg, ahol $\boldsymbol{m}$ a függvény grafikonjának **meredeksége**, $\boldsymbol{b}$ pedig **az *y* tengellyel való metszéspont második koordinátája**.



1. $f(x) = mx + b$

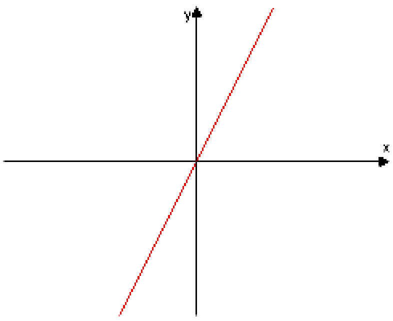


2. $f(x) = b$

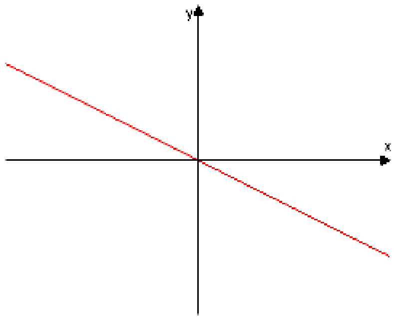
Ha $\boldsymbol{m = 0}$, akkor az $f(x) = b$ hozzárendelést kapjuk, melyet **konstans** (nulladfokú) **függvény**nek nevezünk.

Ekkor a függvény képe az *x* tengellyel párhuzamos egyenes.

Ha ***m*** **0**, akkor **ez a lineáris függvény elsőfokú**.



3. $f(x) = mx$, ha $m > 0$



4. $f(x) = mx$, ha $m < 0$

Ha $\boldsymbol{m > 0}$, akkor a függvény **szigorúan növő**, vagyis növekvő *x* értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak.

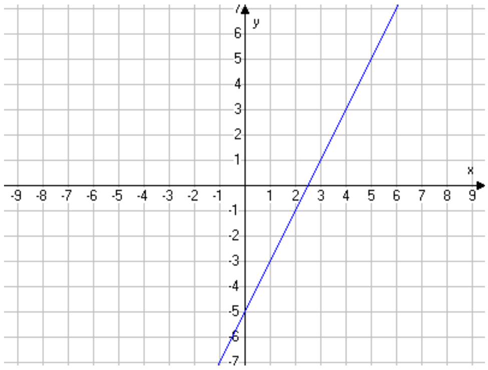
Ha $\boldsymbol{m < 0}$, akkor a függvény **szigorúan csökkenő**, vagyis növekvő *x* értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak.

Minden $f(x) = mx$ függvény az egyenes arányosság függvénye, az arányossági tényező az *m*. (Minden *x* érték esetén az $f(x)$ érték *m*-szerese az *x*-nek). A grafikonról leolvashatjuk, hogy egy egységnyi jobbra haladás esetén hány egységet megyünk az *y* tengely mentén pozitív *m* esetén felfelé, negatív *m* esetén lefelé.

Mintapélda$_4$

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x) = 2x - 5$ hozzárendeléssel megadott függvényt!

Megoldás:



Ábrázolása:

1. Az y tengelyt a 5 pontban metszi.
2. Ebből a pontból kiindulva a +2 meredekség miatt egy egységnyi jobbra haladás esetén 2 egységet lépünk felfelé az y tengely mentén.
3. A kapott két pontot összekötve, és meghosszabbítva a szakaszt, megkapjuk a lineáris függvény grafikonját.

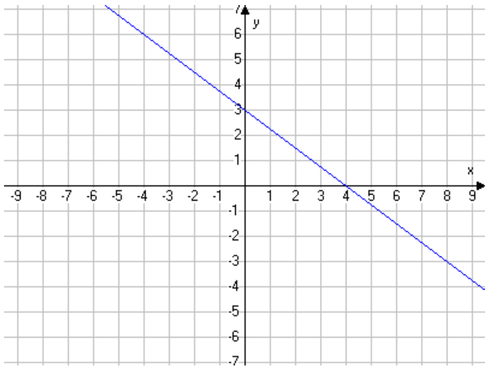
Jellemzése:

1. É.T.: **R**.
2. É.K.: **R**.
3. Zérushely: $x = 2,5$.
4. Szigorúan növekvő (mivel a meredeksége pozitív előjelű).

Mintapélda$_5$

Ábrázoljuk és jellemezzük a $g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$ hozzárendeléssel megadott függvényt!

Megoldás:



Ábrázolása:

1. Az y tengelyt a +3 pontban metszi.
2. Ebből a pontból kiindulva a $-\frac{3}{4}$ meredekség miatt 4 egységnyi jobbra haladás esetén 3 egységet lépünk lefelé az y tengely mentén.
3. A kapott két pontot összekötve, és meghosszabbítva a szakaszt, megkapjuk a lineáris függvény grafikonját.

Jellemzése:

1. É.T.: **R**.
2. É.K.: **R**.
3. Zérushely: $x = 4$.
4. Szigorúan csökkenő (mivel a meredeksége negatív előjelű).

Módszertani megjegyzés: Frontálisan elevenítsük fel a lineáris függvénnyel kapcsolatos általános iskolai ismereteket, majd – ha lehet – alakítsunk ki négy fős csoportokat! Minden csoportban mindenki kap egy-egy kártyát a 10-13.A és B kártyakészletből. A kártyákon az A, B, C, D betűk állnak. Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt húztak. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: az A a legkönnyebb, a D pedig a legnehezebb. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz, ahol megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál.

Feladatok

„A” jelűek feladata:

1. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját!

a) $f(x)=2x$; b) $f(x)=-2$; c) $f(x)=-\frac{1}{3}x$; d) $f(x)=\frac{3}{2}$.

Megoldási útmutató:

Ezek a függvények a meredekség és a konstans jelentésének ismeretében ábrázolhatók.

É.T.:**R**; É.K:**R**.

„B” jelűek feladata:

2. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját!

a) $f(x)=x-5$; b) $f(x)=-x+4$; c) $f(x)=5-2x$; d) $f(x)=3x-4$.

Megoldási útmutató:

Ezek a függvények a meredekség és a konstans jelentésének ismeretében ábrázolhatók.

É.T.:**R**; É.K:**R**.

„C” jelűek feladata:

3. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját!

a) $f(x)=-\frac{1}{3}x+5$; b) $f(x)=-\frac{2}{3}x-1$; c) $f(x)=2x-\frac{1}{2}$; d) $f(x)=-\frac{3}{2}x+1$

Megoldási útmutató:

Ezek a függvények a meredekség és a konstans jelentésének ismeretében ábrázolhatók.

É.T.:**R**; É.K:**R**.

„D” jelűek feladata:

4. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját!

a) $f(x)=\frac{2x+3}{6}$; b) $f(x)=\frac{4x-1}{2}$; c) $f(x)=-\frac{-5x+1}{3}$; d) $f(x)=-\left(-\frac{2}{3}x-1\right)$.

Megoldási útmutató:

Ezek a függvények képletüket átalakítva ábrázolhatók, É.T.:**R**; É.K:**R**.

a) $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$; b) $f(x)=2x-\frac{1}{2}$; c) $f(x)=\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$; d) $f(x)=\frac{2}{3}x+1$.

Mintapélda$_6$

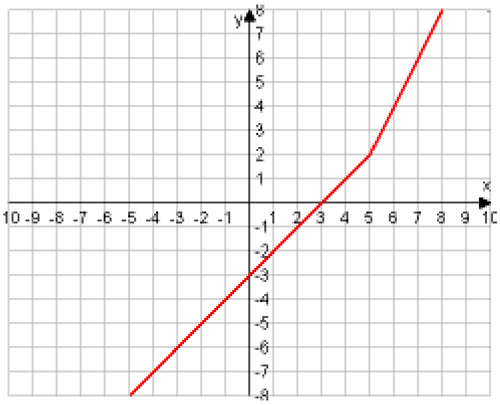
Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $f(x) = \begin{cases} x-3, & ha \quad x \le 5 \\ 2x-8, & ha \quad x > 5 \end{cases}$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját!

Megoldás:

Ábrázoljuk először az $f_1(x) = x - 3$ függvény grafikonját a $]-\infty; 5]$ intervallumon, majd folytassuk az $f_2(x) = 2x - 8$ függvény grafikonjával az $]5; \infty[$ intervallumon.

Közben megfigyelhetjük, hogy az $x = 5$ helyen ugyanazt az értéket veszik fel a függvények:

$f_1(5) = 5 - 3 = 2$, $\qquad f_2(5) = 2 \cdot 5 - 8 = 2$.



Mintapélda$_7$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját!

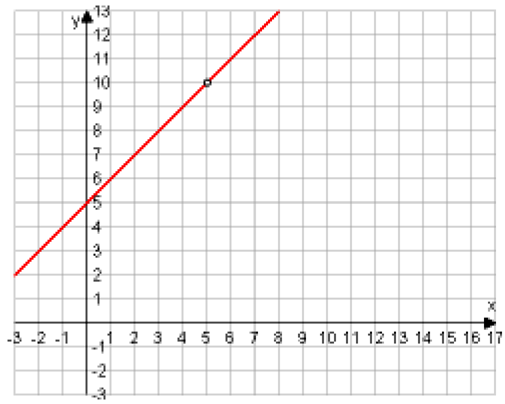
Megoldás:

Egyszerűsítsük a törtet!

$$f(x) = \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)} = x+5,$$

$x \neq 5$.

Ábrázoláskor figyeljünk arra, hogy a függvény az $x = 5$ helyen nincs értelmezve. Ezt a szakadási pontot üres karikával jelöljük.



Feladatok

5. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonját!

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$; c) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{x-3}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$; e) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; f) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & ha \quad x \ge 2 \\ 2x-4, & ha \quad x < 2 \end{cases}$;

g) $f(x) = \begin{cases} -2x, & ha \quad x \le 3 \\ -6, & ha \quad x > 3 \end{cases}$; h) $f(x) = \begin{cases} x-2, & ha \quad x > -1 \\ -x-4, & ha \quad x \le -1 \end{cases}$.

Megoldás:

A kijelölt műveletek elvégzése után a függvények a tanult módon ábrázolhatók a megfelelő értelmezési tartományokon.

a) $f(x) = x$, ha $x \neq 0$; b) $f(x) = \dfrac{(x-4)(x+4)}{x+4} = x - 4$, ha $x \neq -4$;

c) $f(x) = x$, ha $x \neq 3$; d) $f(x) = x + 3$, ha $x \neq -3$;

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & ha \quad x > 0 \\ -1, & ha \quad x < 0 \end{cases}$, ha $x \neq 0$.

Módszertani megjegyzés: A következő mintapélda b) részét csak a jobb képességű tanulócsoportokban javasoljuk átvenni.

Mintapélda$_8$

Adjuk meg a lineáris függvény hozzárendelési utasítását, ha az

a) átmegy a $P(-3; 5)$ ponton és az y tengelyt a –10 helyen metszi!

b) átmegy a $P(2; -1)$ ponton és grafikonja párhuzamos az $f(x) = -2x + 6$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonjával!

Megoldás:

a) A lineáris függvény hozzárendelési utasításának általános alakja: $f(x) = mx + b$.

Adott: $P(-3; 5)$, valamint $b = -10$.

$f(x)$ az x helyen felvett függvényérték. Mivel a P pont rajta van a grafikonon, így $x = -3$ és $f(-3) = 5$.

Ezeket behelyettesítve az általános egyenletbe kapjuk: $5 = -3m - 10 \Rightarrow m = -5$.

A keresett hozzárendelési utasítás: $f(x) = -5x - 10$.

b) A lineáris függvény hozzárendelési utasításának általános alakja: $f(x) = mx + b$.

Adott: $P(2; -1)$. Az előző példához hasonlóan $x = 2$ és $f(2) = -1$.

Ha a keresett függvény grafikonja párhuzamos az $f(x) = -2x + 6$ függvény képével, akkor a meredekségük megegyezik. A keresett hozzárendelési szabályban a meredekség tehát szintén –2.

Ezeket behelyettesítve az általános képletbe kapjuk: $-1 = 2\cdot(-2) + b$, ebből $b = 5$.

A keresett hozzárendelési utasítás: $g(x) = -2x + 5$.

Feladatok

6. Add meg a lineáris függvény hozzárendelési utasítását, ha az

a) átmegy a $P($ 7; 4) ponton, és a meredeksége $\frac{1}{2}$!

b) átmegy a $P($ 2 ; 2) ponton és az x tengelyt a 6 pontban metszi!

c) átmegy a $P(-2; 6)$ ponton, és meredeksége 0!

d) átmegy a $P(100; -1)$ ponton és párhuzamos az x tengellyel!

e) átmegy a $P(-1; -4)$ és a $Q(4; 1)$ pontokon!

Megoldás:

Minden feladat megoldásának a kulcsa az $f(x)=mx+b$ általános hozzárendelési utasítás felhasználása: szükségünk van m és b konkrét értékeire. Továbbá a megoldásban segít egy vázlat készítése a koordináta-rendszerben.

a) Tudjuk: $x=7;\ f(7)=4;\ m=\frac{1}{2}$.

Ezeket az adatokat behelyettesítve a képletbe kapjuk: $4 = \frac{1}{2}\cdot 7 + b$.

Ebből átrendezéssel adódik: $b = \frac{1}{2}$.

Az m és b értékeket visszahelyettesítve az általános hozzárendelési utasításba a keresett lineáris függvényt az $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ hozzárendelési szabállyal adhatjuk meg.

b) Ha $x = 2$, akkor $f(2)=2$.

Az x tengelyt a 6 pontban metszi: $f(x) = 0$, akkor $x = 6$.

Ebből 2 egyenletet lehet felírni két ismeretlennel:

I. $2 = 2m + b$;

<u>II. $0 = 6m + b \qquad b = -6m$.</u>

II.−t visszahelyettesítve I−be kapjuk: $2=2m-6m$, ahonnan $m=-\frac{1}{2}$, $b=3$.

Megoldás: $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$.

c) Tudjuk, hogy $x=-2;\ f(-2)=6;\ m=0$.

Behelyettesítve az $f(x)=mx+b$ képletbe kapjuk, hogy $6 = 0\,(-2) + b$, ebből $b = 6$.

A keresett hozzárendelési utasítás: $f(x)=6$.

d) Tudjuk, hogy x = 100, f(100) = –1. Ha a lineáris függvény grafikonja párhuzamos az x tengellyel, akkor a meredeksége 0.

Az előző feladathoz hasonlóan meghatározható hozzárendelési utasítás: $f(x) = -1$.

e) Adott: P (−1; −4); Q (4; 1).

A pontok koordinátáit behelyettesítve az $f(x) = mx + b$ képletbe kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapunk:

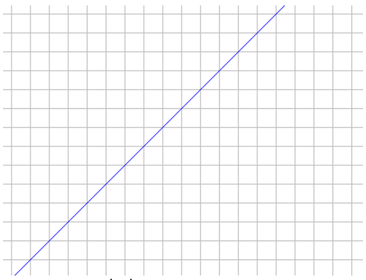
I. –4 = −1 m + b;

<u>II. 1 = 4 m + b; b = 1 − 4 m.</u>

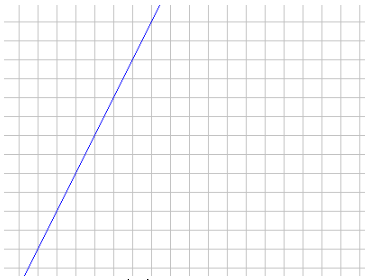
II.−t I.−be visszahelyettesítve: −4 = −m + 1 − 4 m; 1 = m; b = −3.

A keresett hozzárendelési utasítás: $f(x) = x - 3$.

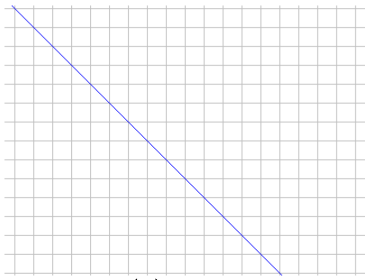
7. a) Az alábbi hozzárendelési utasításoknak megfelelően rajzold be a koordinátatengelyeket!



$f_1(x) = x + 5$;



$f_2(x) = 2x - 3$;



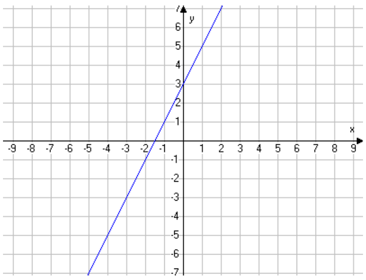
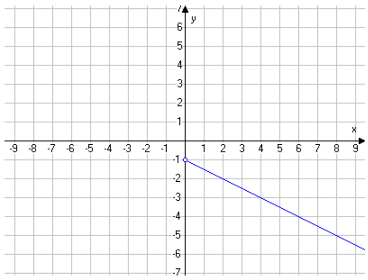
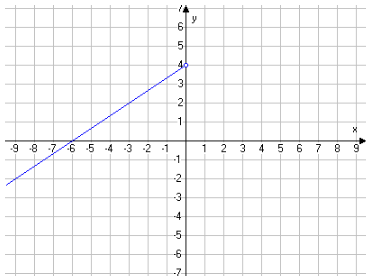
$f_3(x) = -x - 2$;

Megoldás:

Mivel az egyenesek végtelen hosszúak, így elegendő, ha valahol kijelöljük az y tengely helyét. Az egyenes és az y tengely metszéspontja az $mx + b$ alakban a b, ebből már meghatározható az y tengelyen a 0 érték (az origó). Ezen a ponton halad át az y tengelyre merőleges x tengely.

b) Írd fel a következő grafikonok hozzárendelési utasításait. Add meg az értelmezési tartományt is!

Módszertani megjegyzés: Ezek a feladatok átvezetnek a lineáris egyenlőtlenségek megoldására.

Megoldás:

$f(x)=2x+3$; $f(x)=-\frac{1}{2}x-1$; $f(x)=\frac{2}{3}x+4$;

É.T.: **R**; É.T.: $\mathbf{R}^+$; É.T.: **R** .

II. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek és lineáris egyenlőtlenségek grafikus megoldása

1. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldása

A mintapélda megbeszélése után a tanulók párokban dolgozzanak. A tanár kiválasztja az órán megoldandó feladatot (*ajánlás*: 8. és/vagy 11. feladat), felváltva kiosztja az ehhez tartozó ablakokat a 11.1. ablakcsomagból.
Egy csoporton belül a tanulók felosztják egymás között a részfeladatokat, kitöltik az ablak rubrikáit. Ha elkészültek, két-két, különböző feladatot megoldó csoport kicseréli egymás ablakait, és ellenőrzik, kijavítják a megoldásokat.

Mintapélda$_8$

Jancsi bankszámlát szeretne nyitni. Az egyik bank havi számlafenntartási díja 300 Ft, de havonta 2 tranzakció (pénz felvétele, egyenleg lekérdezése, utalás stb.) ingyenes, minden további tranzakció 100 Ft. A másik banknál a havi számlafenntartási díj 100 Ft, de minden tranzakció 150 Ft. Melyik bankot érdemes választania, ha havonta 5 tranzakció történik? Havonta hány tranzakció esetén éri meg az első bank, illetve a második? Válaszaidat indokold!

Megoldás:

Értéktáblázat készítése:

Egyik bank:

Havonta a tranzakciók száma	1	2	3	4	5	6
Díj (Ft)	300	300	400	500	600	700

Másik bank:

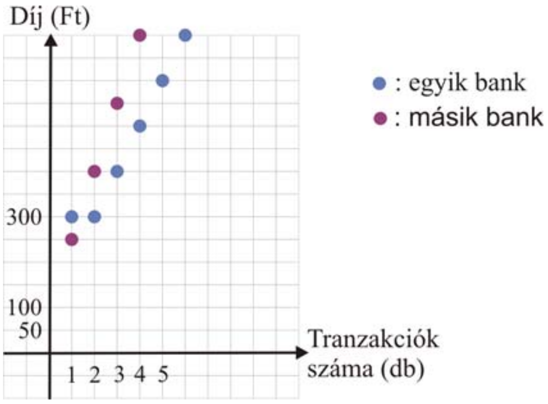
Havonta a tranzakciók száma	1	2	3	4	5	6
Díj (Ft)	250	400	550	700	850	1000

Hozzárendelési szabályok: x-szel jelöljük a tranzakciók számát.

Egyik bank: $e(x)=\begin{cases}300+(x-2)\cdot 100, & x\ge 3\\ 300, & x\in\{1;2\}\end{cases}$;

Másik bank: $m(x)=100+150x$.

Grafikon készítése:



Szöveges válasz:

Havi 5 tranzakció esetén az első bankot érdemes választani, mert itt csak 650 Ft-ot kell fizetnie, míg az másik banknál 850 Ft-ot.

Havi egy tranzakció esetén a második bankban, de 2 vagy annál több tranzakció esetén az elsőben éri meg számlát nyitni.

Feladatok

Útmutató a következő 4 feladat megoldásához: Oldd meg a szöveges feladatokat a következőképpen: töltsd ki az értéktáblázatokat, határozd meg minden feladatban a két értéktáblázat értékpárjai közötti hozzárendelési utasítást! Ábrázold az ezek által meghatározott függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben!

8. Egy új autó 2 500 eFt-ba kerül, de 6 évig garantáltan nem hibásodik meg, azaz rá fordított költségek elhanyagolhatóak. Utána minden évben 100 eFt-ot kell ráköltenünk. Egy 8 éves használt autó ára csak 800 eFt, de az éves szervizdíja átlagosan 300 eFt. Melyik autóra kell többet költenünk, ha a költségeket az autók 10 éves koráig összeszámoljuk? Melyik az a legkésőbbi időpont, amikor még megéri a használt autót fenntartani? Válaszaidat indokold!

Kitöltendő értéktáblázatok:

Új autó

év	0	6	7	8	10	11	15
költség (eFt)							

Használt autó

év	0	6	7	8	10	11	15
költség (eFt)							

Megoldás:

Értéktáblázat kitöltése:

Új autó

év	0	1	2	3	4	5	6	7
költség (eFt)	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2600

Használt autó

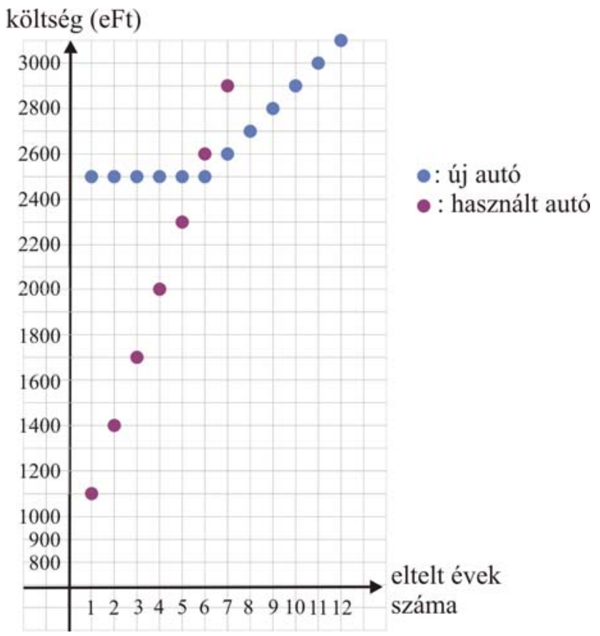
év	0	1	2	3	4	5	6	7
költség (eFt)	800	1100	1400	1700	2000	2300	2600	2900

Hozzárendelési szabály meghatározása:

Jelöljük x-szel az eltelt évek számát! $u(x)=\begin{cases} 2500, & \text{ha} \quad 0<x\le 6 \\ 2500+100x, & \text{ha} \quad x>6 \end{cases}$;

$h(x) = 800 + 300x$.

Ábrázolás grafikonnal



Szöveges válasz:

10 év alatt az új autóra költünk kevesebbet.

Az 5. év a legkésőbbi időpont, amikor még a használt autó fenntartása a kevesebb, így ennyi időre éri meg használt autót vásárolni.

9. Reggel a munkahelyemre villamossal és busszal egyaránt mehetek. A villamos azonnal indul, a buszra még várni kell 8 percet. Ha villamossal megyek, akkor a 4 km-es út 25 percbe telik, a busszal csak 17 perc. Melyikkel menjek, hogy minél hamarabb beérjek? Mennyi idő alatt tesz meg a busz, ill. a villamos 1 km utat? Válaszaidat indokold!

Kitöltendő értéktáblázatok:

Villamos

s (km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t (min)							

Busz

s (km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t (min)							

Megoldás:

Értéktáblázat kitöltése:

Villamos

s (km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t (min)	0	3,125	6,25	12,5	18,75	25	31,25

Busz

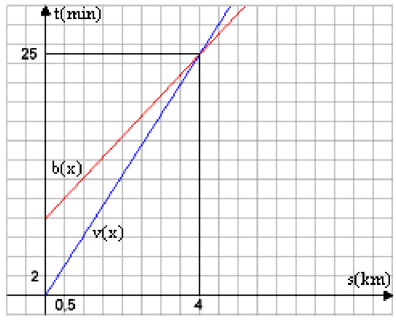
s (km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t (min)	8	10,125	12,25	16,5	20,75	25	29,25

<ins>Hozzárendelési szabály meghatározása</ins>:

$v(x)=6{,}25x$;

$b(x)=4{,}25x+8$.

<ins>Ábrázolás grafikonnal</ins>:



<ins>Szöveges válasz:</ins>

Mindegy, hogy villamossal vagy busszal megyek, mert ugyanakkorra fogok beérni a munkahelyemre. A villamos 1 km-t 6,25 perc alatt tesz meg, míg a busz csak 4,25 perc alatt.

10. A soltvadkerti nyári táborba a csoport néhány tagja biciklivel megy, a többiek autóbusszal. A táv 100 km, a biciklisták 25 km/h óra sebességgel képesek haladni, és reggel 7 órakor indulnak az iskola elől. A busz 9-kor indul ugyanerről a helyről, de 80 km-t tesz meg óránként. Melyik csapat éri hamarabb a célt? Hány órával később ér le a másik? Hány km megtétele után és hány órakor éri utol az egyik a másikat? Válaszaidat indokold!

Kitöltendő értéktáblázatok:

Bicikli

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (h; perc)							

Autóbusz

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (h; perc)							

Megoldás:

<ins>Értéktáblázat kitöltése:</ins>

Bicikli

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (h; perc)	7	7h 48p	8h 36p	9h 24p	9h 48p	10h 12p	11

Autóbusz

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (h; perc)	9	9h 15p	9h 30p	9h 45p	9h 52,5p	10h	10h 15 p

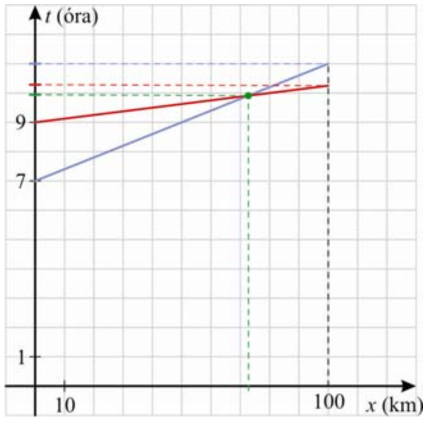
Hozzárendelési szabály meghatározása:

Jelöljük x-szel a megtett utat.

$b(x)=7+\frac{1}{25}x$;

$a(x)=9+\frac{1}{80}x$.

Ábrázolás grafikonnal:



Szöveges válasz:

Az autóbusszal utazók érnek le hamarabb, a biciklizők ¾ órával később érkeznek meg. Az autóbusszal utazók $72\frac{8}{11}$ 72,72 km megtétele után, 9,9 órakor, azaz $9\frac{10}{11}$ 9h 54 perckor érik utol a biciklistákat.

11. Kati szeretne beiratkozni könyvtárba. Az egyik könyvtárban 500 Ft az éves tagsági díj, és minden kölcsönzés 150 Ft. A másik könyvtárban 1200 Ft a tagsági díj, de a kölcsönzési díj 50 Ft. Ha egy éven keresztül havonta 8 könyvet szeretne kikölcsönözni, akkor melyik könyvtárba érdemes beiratkoznia? Egy évben hány könyvet kölcsönözzön ki, hogy ugyanannyit fizessen? Hány könyv kölcsönzése esetén érdemes az első, illetve a második könyvtárat választania? Válaszaidat indokold!

Kitöltendő értéktáblázatok:

Egyik könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)							

Másik könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)							

Megoldás:

Értéktáblázat kitöltése:

Egyik könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)	500	650	800	1250	1550	1700	1850

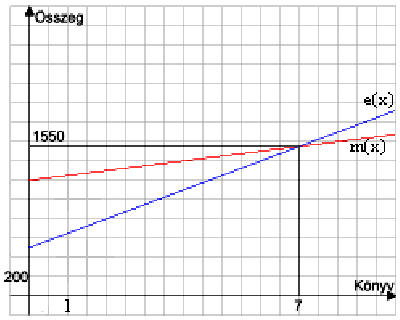
Másik könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)	1200	1250	1300	1450	1550	1600	1650

Hozzárendelési szabály meghatározása:

$e(x)=500+150x;$
$m(x)=1200+50x.$

Ábrázolás grafikonnal:



Szöveges válasz:

Ha egy éven keresztül minden hónapban 8 könyvet szeretne kikölcsönözni, akkor a 2. könyvtárba érdemes beiratkoznia, mert így csak 6000 Ft-ot kell fizetnie, míg az 1.-ben 14900 Ft-ot.

Egy év alatt 7 könyv kölcsönzése esetén fog ugyanannyit fizetni. Ha ennél kevesebbet akar kölcsönözni, akkor válassza az első könyvtárat, ha többet, akkor a másodikat.

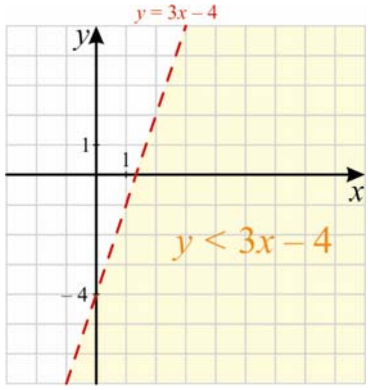
2. Lineáris egyenlőtlenségek

Mintapélda₁₀

Hol találhatók a síkban azok a pontok, amelyek koordinátáira teljesül az $y + 4 < 3x$ egyenlőtlenség?

Megoldás:

Az egyenlőtlenséget y-ra rendezve kapjuk az $y < 3x - 4$ egyenlőtlenséget. Ha a < jel helyett = jelet írunk, akkor egy egyenest kapunk. Azokat a síkbeli pontokat keressük, amelyeknek y koordinátája kisebb, mint a baloldali kifejezés, vagyis az egyenes alatt találhatók. A megoldáshalmaz tehát az egyenes alatti félsík. Az egyenes pontjai nem tartoznak a megoldáshalmazba (ezt szaggatott vonallal jelöljük).

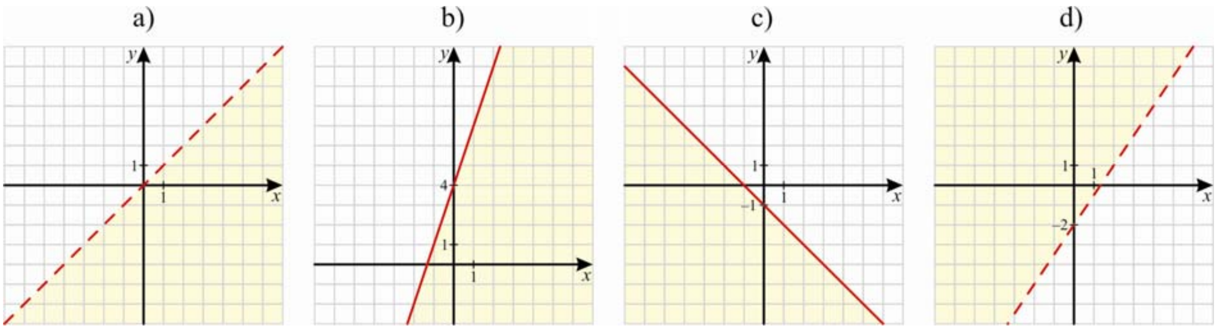


12. Hol találhatók a síkban azok a pontok, amelyek koordinátáira teljesül, hogy

a) $y < x$; b) $y \leq 3x + 4$; c) $-y \geq x + 1$; e) $2y > 3x - 4$?

Megoldási útmutató:

A c) és e) egyenlőtlenségek y-ra rendezve könnyen megoldhatók. A megoldást jelentő ponthalmaz a megadott egyenes ($mx + b$ alak) által határolt, a relációs jelnek megfelelő félsík lesz. Átrendezéskor ügyeljünk arra, hogy –1-gyel való szorzáskor az egyenlőtlenség jele megfordul.



A további feladatok közül elegendő egyet elvégezni, vagy házi feladatnak feladni

13. Határozd meg a pontok y koordinátáit úgy, hogy az így kapott pont az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvények grafikonjai felett illetve alatt legyenek!

Hozzárendelési utasítások:

$f(x) = -\frac{1}{4}x - 2$ $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ $h(x) = -2x + 4$ $i(x) = x - 3$

Pontok:

$P(-1;\ )$ $Q(5;\ )$ $R(-\frac{1}{2};\ )$ $S(1;\ )$ $T(-6;\ )$ $U(0;\ )$ $V(3{,}5\ ;\ )$

14. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi lineáris egyenlőtlenségeket! Színezd ki a megoldási halmazt!

a) $y \quad 3$; b) $-\frac{1}{3}x + 4 > 0{,}5$, c) $-1 \quad y < 5$, d) $2x - 4 \quad 2$.

15. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi lineáris egyenlőtlenségeket! Színezd ki a megoldási halmazt!

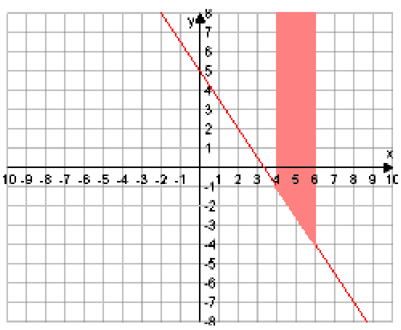
a) $x + 4 > x - 2$; b) $3x - 2 \quad -2x + 5$; c) $-5x - 7 < -5x + 1$; d) $\frac{3}{2}x - 1 \quad -x$.

16. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi lineáris egyenlőtlenségeket! Színezd ki a megoldási halmazt!

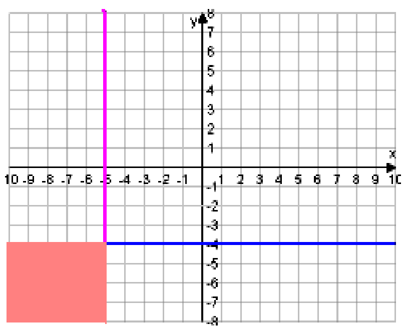
a) $y > 3x - 1$; b) $y \quad 3$ és $|x| < 1$; c) $y < -2x + 1$ és $-1 < x < 5$.

17. Jellemezd az adott ponthalmazokat!

a)



b)



Megoldás:

a) $4 \quad x \quad 6$ és $y \quad -\frac{3}{2}x + 5$

b) $x \quad -5$ és $y \quad -4$

IV. Előjel-, törtrész és egészrész függvény

Módszertani megjegyzés: Ha a tanár úgy ítéli meg, hogy nehéz az osztálya számára, vagy több idő kell az alapvető ismeretek elsajátításához, ez a fejezet elhagyható (nem középszintű érettségi anyag).
Az intervallumonkénti megadási mód, a szakadásos jelleg, az értékkészletek tulajdonságai vagy a törtrész-függvény periodicitása (amelynek segítségével könnyebb a periodikusság megértése, mint a trigonometrikus függvények esetében) olyan érdekes tulajdonságok, amelyek ismerete nagyobb betekintést nyújt a függvények világába. Emellett ennek a témának hozadéka a számfogalom erősítése is. Különösen fontos a negatív tartományon való vizsgálat pl. az egészrésznek, ez gyakran szokott problámát okozni.

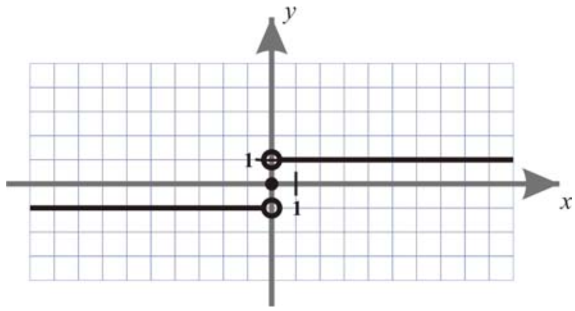
Feldolgozási javaslat: A tanulók 3 fős csoportokat alkotnak. Egy csoporton belül minden tanuló kap egy-egy függvényt. Akik ugyanazt a függvényt kapták, csoportjukból kiválva közös asztalhoz mennek és feldolgozzák az anyagot. Ezután visszatérnek saját csoportjukhoz, ott elmagyarázzák a többieknek. Végül a tanár néhány kérdéssel ellenőrzi, hogy megértették-e a leírtakat.

1. Előjelfüggvény

Azt a függvényt, amely a negatív valós számokhoz –1-et, a pozitív valós számokhoz +1-et, a 0-hoz pedig 0-át rendel, **előjelfüggvény**nek (szignum függvénynek) nevezzük.

A valós számok halmazán értelmezett $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x > 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \\ -1, & ha\ x < 0 \end{cases}$ hozzárendelési utasítással

megadott függvény grafikonja a következő:



Jellemzés:

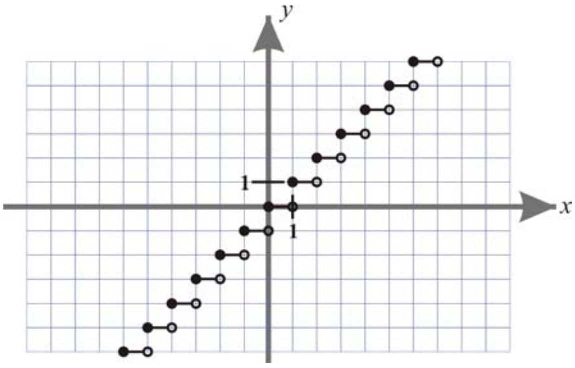
- É.T.: **R**.
- É.K.: {–1; 0; 1}.
- Zérushely: $x = 0$.
- Monotonitás: monoton növekvő.
- Szélsőérték: minimumhely: minden $x < 0$ esetén; minimumérték: –1;
  maximumhely: minden $x > 0$ esetén; maximumérték: 1.
- Paritás: páratlan, mert $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$.

2. Egészrész-függvény

Az x valós számnak az **egészrésze** az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél.

Az egészrész jele: $[x]$

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = [x]$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **egészrész függvény**nek nevezzük.



Grafikonja a következő:

Jellemzés:

É.T.: **R.**

É.K.: **Z.**

Zérushely: $0 \quad x < 1$.

Monotonitás: Az értelmezési tartományán monoton növekvő, de szakaszonként állandó.

Ha k egész szám, akkor $k \quad x < k+1$ helyeken k értéket veszi fel.

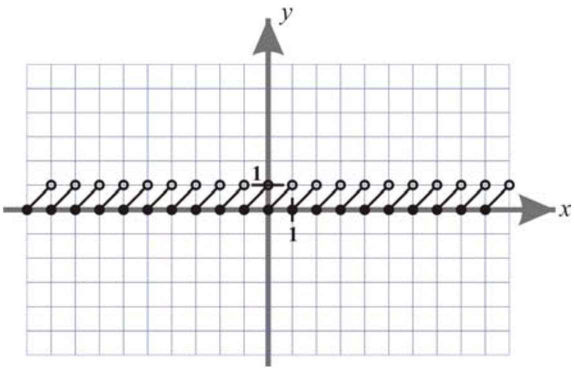
Szélsőérték: nincs szélsőértéke.

3. Törtrész-függvény

Ha egy számból elveszük az egészrészét, akkor a „**törtrész**e” marad. Jelölése: $x - [x] = \{x\}$

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \{x\}$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **törtrész függvény**nek nevezzük.

Grafikonja a következő:



Jellemzés:

É.T: **R.**

É.K: $[0; 1[$.

Zérushely: $x \quad$ **Z.**

Monotonitás: Ha $k \quad$ **Z**, akkor a $[k; k+1[$ intervallumon szigorúan növekvő.

Szélsőérték: minimumhely: $x \quad$ **Z**; minimumérték: 0;

maximuma nincs.

A függvény periodikus, vagyis tetszőleges helyen ugyanazt a függvényértéket veszi fel, mint az 1-gyel, vagy bármely egész számmal nagyobb helyen. Az 1 a legkisebb ilyen pozitív egész szám, ezt nevezzük a periódus hosszának. Jelöléssel: $f(x + 1) = f(x)$, tetszőleges k $\mathbf{Z}$ esetén $f(x) = f(x + k)$.

Módszertani megjegyzés: A mintapélda megbeszélése után a tanulók párban gyakoroljanak. *Ajánlás*: egyik tanuló: 18/d; 19/e; 20/b; másik tanuló: 18/a; 19/b; 20/e.

Mintapélda₁₁

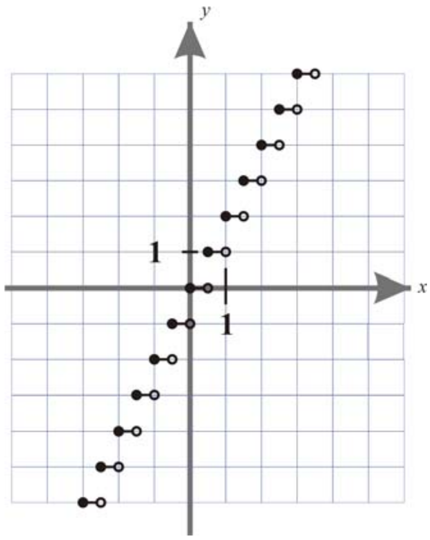
Ábrázold a következő függvényeket!

a) $f(x) = [2x]$; b) $g(x) = 2\{x\}$; c) $h(x) = \mathrm{sgn}\,(x + 1)$.

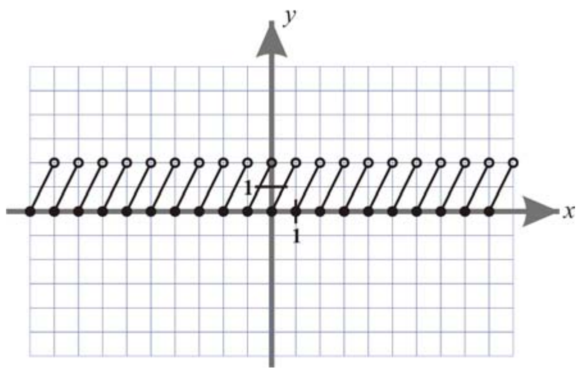
Megoldás:

a) A függvény a 0 értéket a [0; 0,5[intervallumon veszi fel, pl.: [0 2[= 0, de [0,5 2[= 1. Az 1 értéket a [0,5; 1[intervallumon veszi fel, pl.: [0,5 2[= 1, de [1 2[= 2 stb.

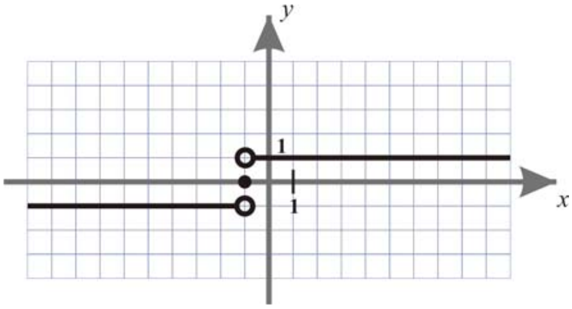
A grafikon:



b) Az alapfüggvény minden függvényértéke kétszeresére nő:



c) A függvény grafikonját eltoljuk az x tengely mentén –1 egységgel:



Feladatok

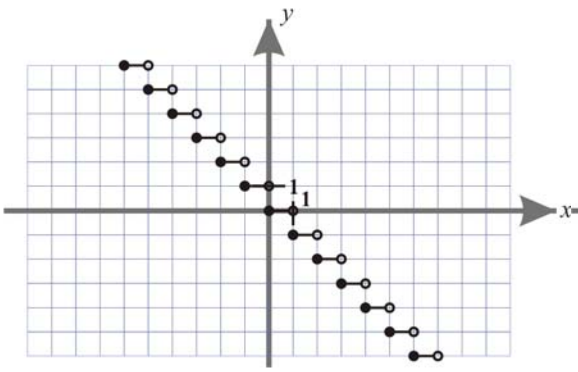
18. Ábrázold a következő függvényeket!

a) $f(x) = -[x]$; b) $f(x) = [-x]$; c) $f(x) = \frac{1}{2}[x]$;

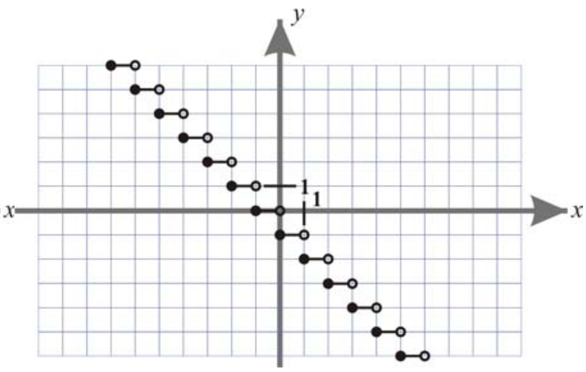
d) $f(x) = [x] + 1$; e) $f(x) = [x\,] - 1$; f) $f(x) = [x + 1]$; g) $f(x) = [x - 1]$.

Megoldás:

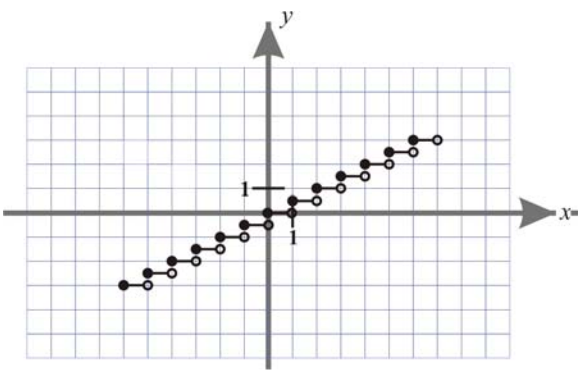
a)



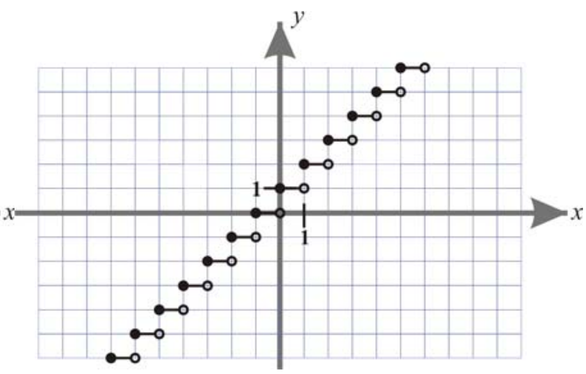
b)



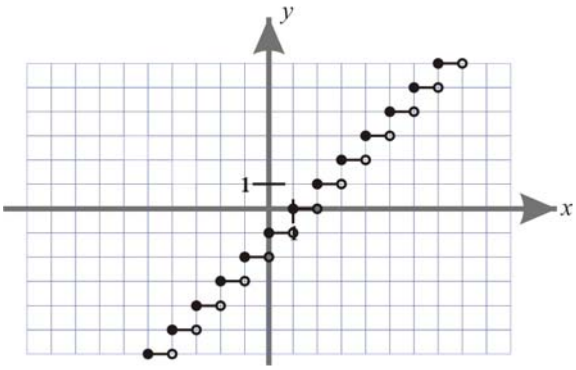
c)



d) és f)



e) és g)



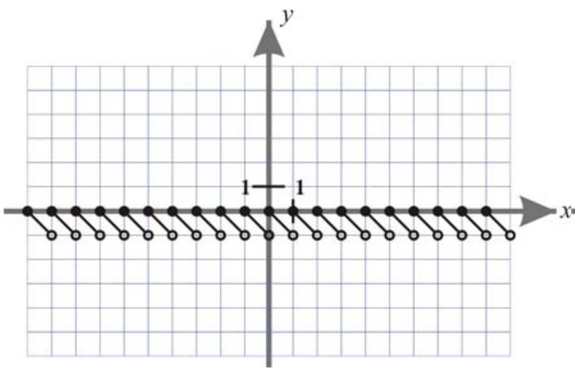
19. Ábrázold a következő függvényeket!

a) $f(x) = -\{x\}$; b) $f(x) = \{-x\}$; c) $f(x) = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$;

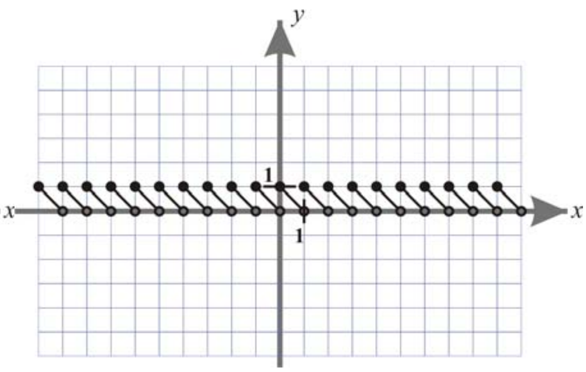
d) $f(x) = \{x\} - 1$; e) $f(x) = \{x + 1\}$.

Megoldás:

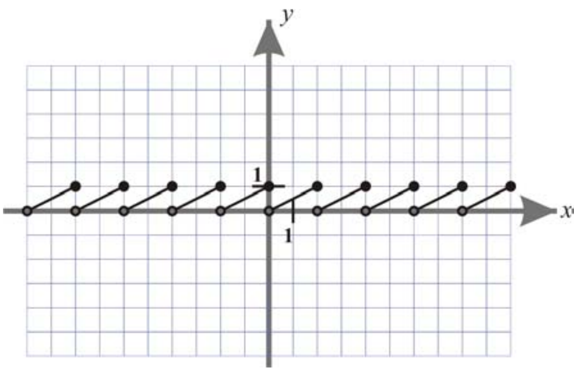
a)



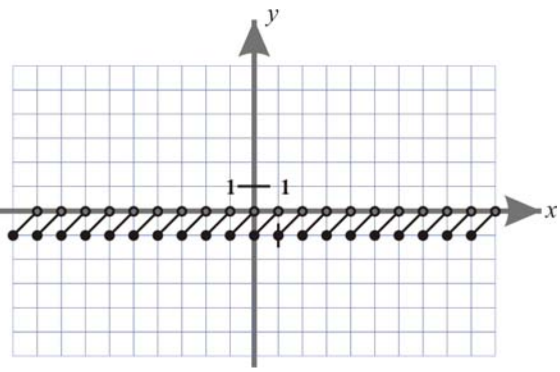
b)



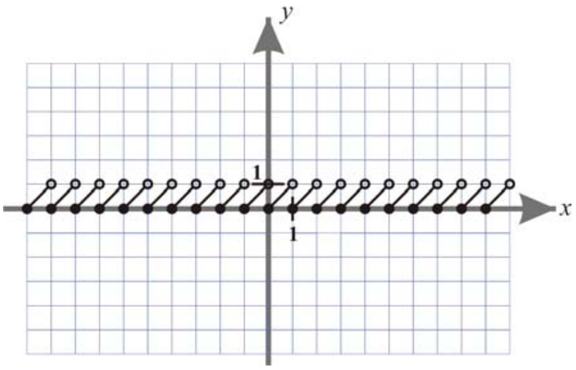
c)



d)



e) Ez természetesen azonos az eredeti törtrész függvénnyel!



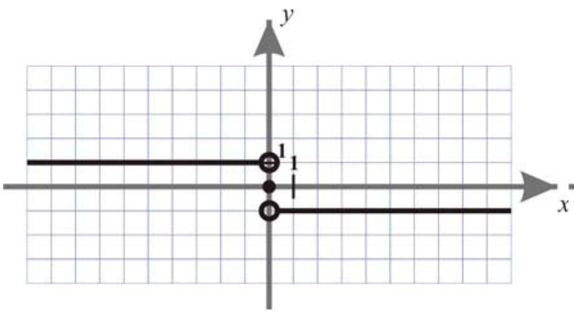
20. Ábrázold a következő függvényeket!

a) $f(x) = -\text{sgn}(x)$; b) $f(x) = \text{sgn}(-x)$; c) $f(x) = \text{sgn}(\,|x|\,)$;

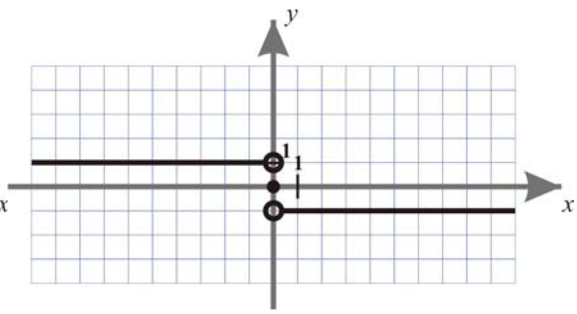
d) $f(x) = \text{sgn}(x) - 1$; e) $f(x) = 2\ \text{sgn}(x)$.

Megoldás:

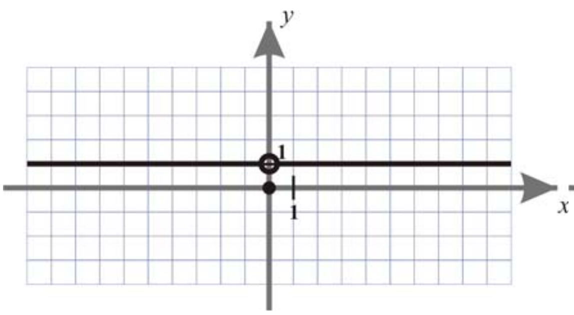
a)



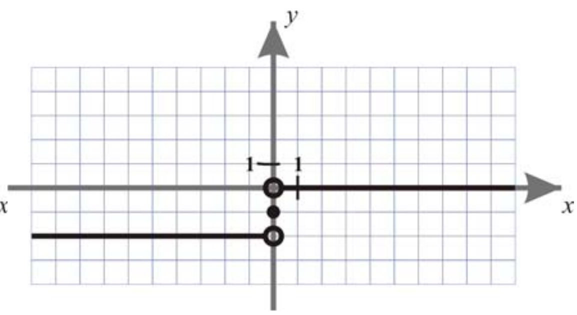
b)



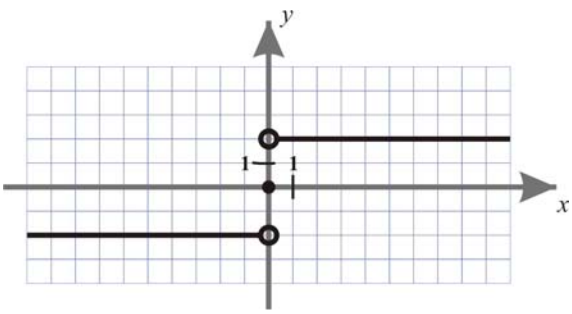
c)



d)



e)



Kislexikon

Lineáris függvény: a konstans (nulladfokú) és az elsőfokú függvények összessége. Grafikonja egyenes.

Lineáris függvény hozzárendelési utasítása (képlete) mindig megadható $f(x) = mx + b$ *alakban*, ahol *m* a függvény grafikonjának meredeksége, *b* pedig az *y* tengellyel vett metszéspont 2. koordinátája. $b = 0$ esetén a grafikon átmegy az origón. Ha $m = 0$, akkor a függvény konstans függvény, grafikonja párhuzamos az *x* tengellyel.

Lineáris függvény grafikonjának meredeksége: megmutatja, hogy egy egységnyi jobbra haladás esetén hány egységet kell az *y* tengely mentén lépni pozitív *m* esetén felfelé, negatív *m* esetén lefelé.

Lineáris függvény monotonitása:

- ha $\boldsymbol{m > 0}$, akkor a függvény **szigorúan növő**, vagyis ha az *x* helyébe bármely két különböző valós számot helyettesítünk, akkor a nagyobb *x* értékhez nagyobb függvényérték tartozik.
- ha $\boldsymbol{m < 0}$, akkor a függvény **szigorúan csökkenő**, vagyis ha az *x* helyébe bármely két különböző valós számot helyettesítünk, akkor a nagyobb *x* értékhez kisebb függvényérték tartozik.

Pont és egyenes illeszkedése: A $P(x_0;y_0)$ pont rajta van az $f(x) = mx + b$ hozzárendelési utasítással megadott lineáris függvény grafikonján, ha *x* helyébe x_0-t; *f*(*x*) helyébe y_0-t helyettesítve az egyenlőség teljesül. Ha $y_0 > mx_0 + b$, akkor a *P* pont az egyenes felett helyezkedik el, ha $y_0 < mx_0 + b$, akkor pedig alatta van.

Egyenes arányosság: Ha két változó mennyiség összetartozó értékeinek hányadosa állandó, akkor azok egyenesen arányosak. Az egyenes arányosságot az $f(x) = mx$, $m \neq 0$ lineáris függvény írja le, ahol *m* az arányossági tényező.

Előjelfüggvénynek (szignumfüggvénynek) nevezzük a valós számok halmazán értelmezett $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & ha\ x>0\\ 0, & ha\ x=0\\ -1, & ha\ x<0\end{cases}$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt.

Az x valós számnak az **egészrésze** az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x–nél. Az egészrész jele: $[x]$.

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = [x]$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **egészrész-függvény**nek nevezzük.

Ha egy számból elveszük az egész részét, akkor a „**törtrész**e” marad. Jelölése: $x - [x] = \{x\}$. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \{x\}$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **törtrész-függvény**nek nevezzük.