I. A függvény fogalma

1. Hozzárendelési szabályok és ábrázolásuk

A csoportképzés során az osztály tanulói azonos tulajdonság alapján keresik meg egymást. Ennek célja a tanulók ráhangolása az elemek közötti összefüggések megállapítására.
Jelen esetben azok a tanulók tartoznak egy csoportba, akik kártyáján lévő szavak betűinek száma megegyezik. A kettős betű (pl. sz) két betűnek számít. A kártyák a 4 fős csoportok képzéséhez a 10.1 kártyakészletben találhatóak.

Feldolgozási javaslat az 1., 2. mintapéldákhoz, és az 1 – 6. feladatokhoz:
Megjegyzés: Ez a rész rendszerező ismétlése az eddig tanult ábrázolási módszereknek.
A tanár minden csoportnak odaadja a 10.2 kártyakészletben található feladatkártyákat. Majd kijelöl egy egyértelmű, illetve egy nem egyértelmű feladatot (*ajánlás*: 1. és 2. mintapélda).
Az 1 – 4. feladatok egyértelmű, míg az 5. és 6. feladatok nem egyértelmű hozzárendeléseket írnak le.
A függvény fogalmának kialakításához ajánlatos mindkét fajta feladattípust megoldaniuk. Eközben a figyeljenek oda az egyértelmű, illetve nem egyértelmű hozzárendelések ábrázolása közötti különbségekre!

Mintapélda$_1$

Hányféleképpen állhatnak sorba egy bolt pénztáránál a vásárlók, ha 3-an, 4-en, 5-en, … k-an vannak?

Megoldás:

A hozzárendelési szabály megállapítása:

Az első helyre k vásárló közül állhat valaki, a másodikra már csak $k-1$ vásárló, a harmadikra $k-2$, …, a $(k-1)$-edikre 2, a k. helyre pedig 1.

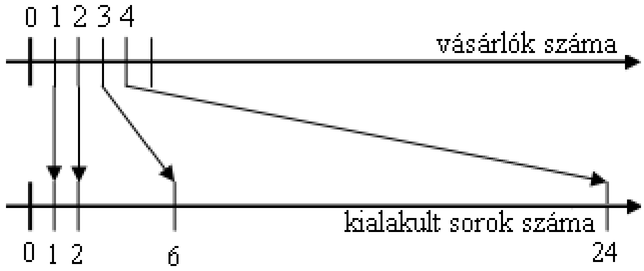
Ez összesen: $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1 = k!$ lehetőség.

A hozzárendelési szabály: $k \mapsto k!$

Táblázat:

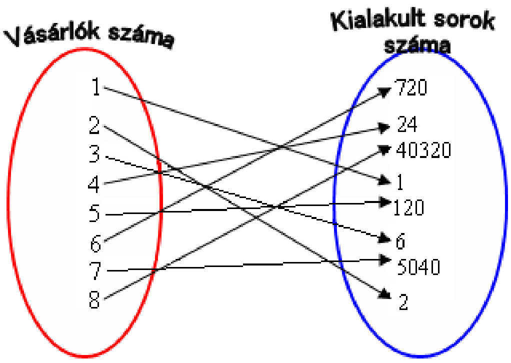
Vásárlók száma	1	2	3	4	5	6	7	8
Kialakult sorok száma	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Nyíldiagram:



Koordináta-rendszer

Venn-diagram:



Mintapélda$_2$

Karcsi nyáron 435 Ft-os órabérért dolgozott. A szerződése szerint hetente 30 órát kell teljesítenie, de ő osztja be az idejét. Fizetségét mindig a nap végén kapja meg. A munkáltató úgy fizet, hogy mindig a lehető legkevesebb bankjegy kerüljön ki a kezéből. Karcsi a következő módon osztotta be az első két héten a munkanapjain ledolgozott órákat:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
8	4	6	6	6	12	0	0	12	6
30 óra					30 óra				

Milyen címletekben kapta Karcsi a fizetését?

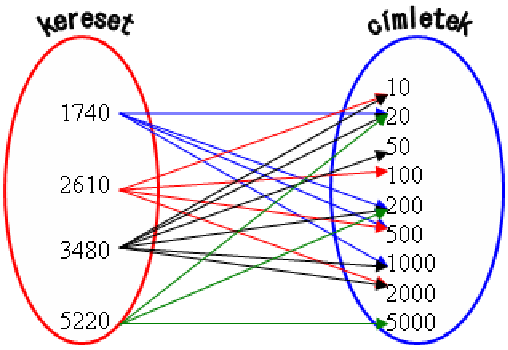
Megoldás:

A hozzárendelési szabály: a napi keresetek kiszámítása és felbontása címletekre:

Nap	Kereset	Címletek
1.	3480	1·2000+1·1000+2·200+1·50+1·20+1·10
2.	1740	1·1000+1·500+1·200+2·20
3.	2610	1·2000+1·500+1·100+1·10
4.	2610	1·2000+1·500+1·100+1·10

5.	2610	1·2000+1·500+1·100+1·10
6.	5220	1·5000+1·200+1·20
7.	0	0
8.	0	0
9.	5220	1·5000+1·200+1·20
10.	2610	1·2000+1·500+1·100+1·10

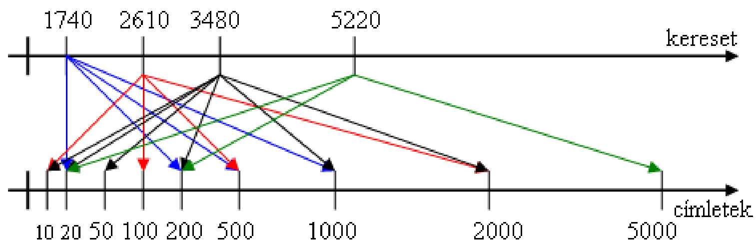
Venn-diagram:



Koordináta-rendszer:

Megjegyzés: Itt a koordináta-rendszerrel történő ábrázolás nagyon erőltetett. A függvények különböző ábrázolásai éppen arra jók, hogy több lehetőség közül a feladattól függően választhatnak.

Nyíldiagram:



Táblázat:

Kereset	Címletek								
	5000	2000	1000	500	200	100	50	20	10
1740			x	x	x			x	
2610		x		x		x			x
3480		x	x		x		x	x	x
5220	x				x			x	

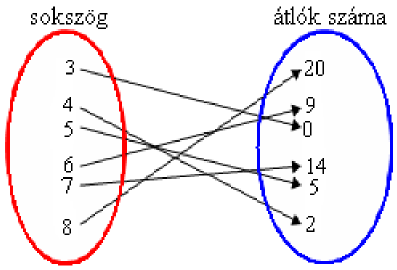
Feladatok

1. Egy n oldalú sokszög átlóinak számát a $\frac{n(n-3)}{2}$ képlettel számoljuk ki. Mennyi az átlók száma, ha $n = 3, 4, 5, \dots, k$?

Megoldás:

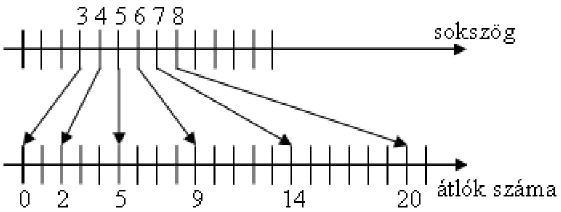
Hozzárendelési szabály: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Venn-diagram:



Koordináta-rendszer:

Nyíldiagram:



Táblázat:

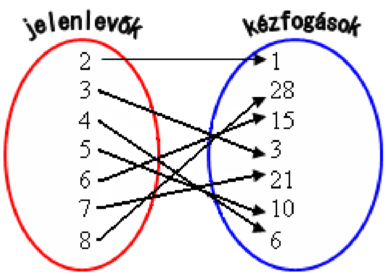
Sokszög oldalszáma	3	4	5	6	7	8
Átlók száma	0	2	5	9	14	20

2. Egy partin az emberek kézfogással üdvözlik egymást. Mivel Kalmár intenzív társasági életet él, így minden este meghív néhány vendéget a lakására. Hány kézfogás történik, ha a jelenlévők száma 1,2,3, … k?

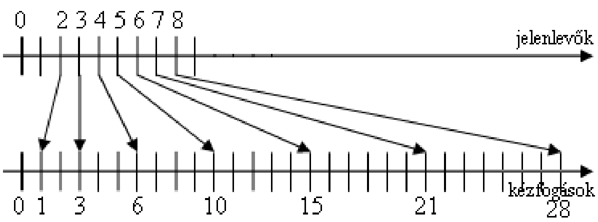
Megoldás:

Hozzárendelési szabály: $\frac{n(n-1)}{2}$.

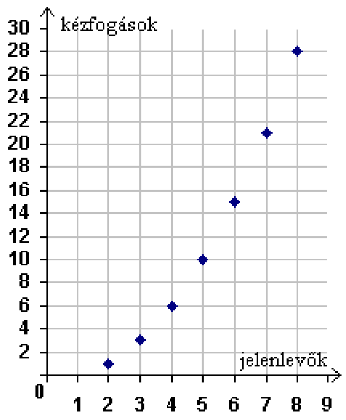
Venn-diagram:



Nyíldiagram:



Koordináta-rendszer:



Táblázat:

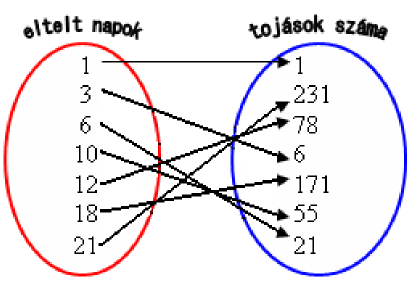
Jelenlevők	2	3	4	5	6	7	8
Kézfogások	1	3	6	10	15	21	28

3. Julcsi néni egy kis faluban éldegél. A húsvét ünnepe nagy esemény számára, mert ekkor a falu apraja-nagyja, és a rokonai is köré gyűlnek. Hogy ne kelljen az utolsó pillanatban kapkodnia, elhatározza, hogy a következő hónap elsejétől kezdve 1 hónapon keresztül minden nap annyi tojást vesz, amennyi nap eltelt már a hónapból. A hónap 31 napos. Hogyan gyarapszik Julcsi néni tojáskészlete napról napra?

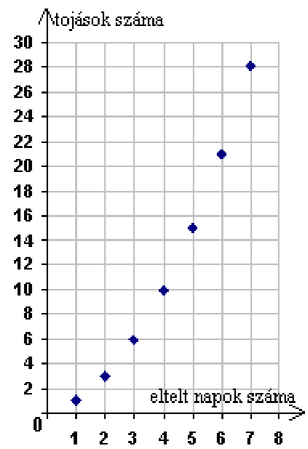
Megoldás:

Hozzárendelési szabály: k nap esetén az addig összegyűjtött tojások száma: $1 + 2 + 3 + \ldots + k$.

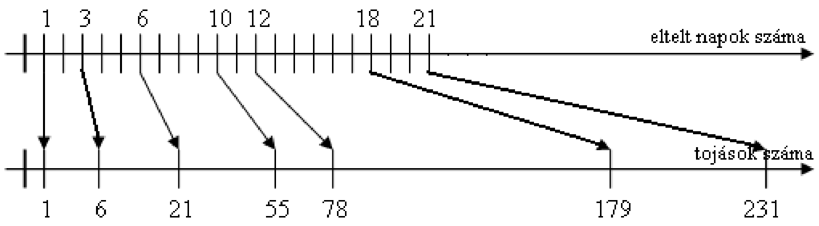
Venn-diagram:



Koordináta-rendszer:



Nyíldiagram:



Táblázat:

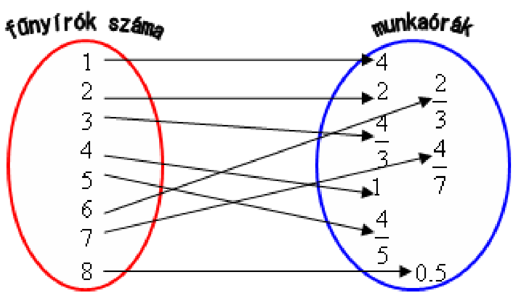
eltelt napok	1	3	6	10	12	18	21
tojások száma	1	6	21	55	78	171	231

4. A gyerektáborban füves focipályán játszhatnak a gyerekek. A gondnok mindig a tábor első napjának délelőttjén vágja le a füvet. Egymagának 4 órájába telik ez a tevékenység, ezért igyekszik minél több gyereket bevonni a munkába. Mennyi idő alatt végeznek, ha 1,2,3, …., k gyerek segít neki és mindenki azonos teljesítménnyel dolgozik?

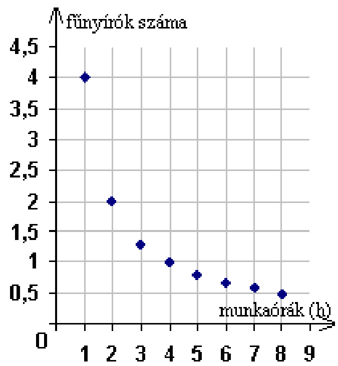
Megoldás:

Hozzárendelési szabály: minél többen segítenek, annál hamarabb lesznek készen a fűnyírással. Ha $k-1$ gyerek segít, azaz k ember végzi a fűnyírást, akkor $\frac{4}{k}$ óra alatt fejezik be a munkát. **Megjegyzés:** 8-nál több főre nem érdemes számolni, hiszen nem férnek el a pályán.

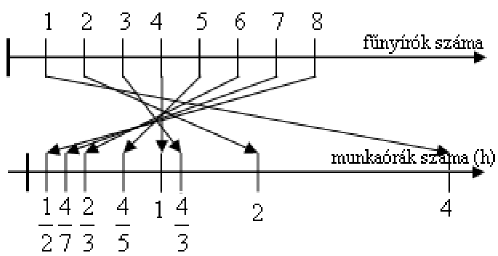
Venn-diagram:



Koordináta-rendszer:



Nyíldiagram:



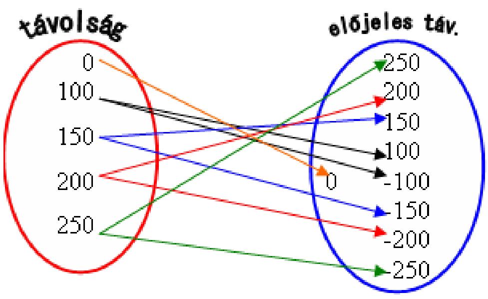
Táblázat:

fűnyírók száma	1	2	3	4	5	6	7	8
munkaórák (h)	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$

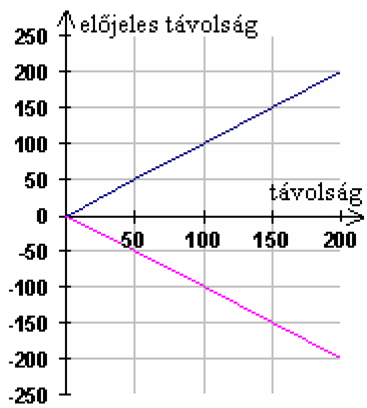
5. A budapesti Ferihegy II-ről Athénba illetve Koppenhágába egyaránt indulhat repülő. Athén 1425 km-re van, Koppenhága pedig 1300 km-re. A Koppenhága (észak) felé induló repülő Budapesttől mért távolságát pozitív, az Athén (dél) felé induló repülő Budapesttől mért távolságát negatív előjellel jelöljük. Nem tudjuk, hogy a repülő merre indult el, csak azt, hogy a különböző időpontokban hány kilométerre volt Budapesttől: 0, 50, 100; 150; 200; 250; …; *k* km-re. Készíts táblázatot, hogy hol járhat a repülő! Állapítsd meg a hozzárendelési utasítást, és fogalmazd meg általánosan! Ábrázold grafikonnal a táblázat adatait!

Megoldás:
Hozzárendelési szabály: A repülő észak felé és dél felé egyaránt elindulhatott, így minden távolságnál két hely valamelyikén lehet. Ha *k* távolságra van a kiindulási ponttól, akkor k-hoz hozzárendeljük a (–*k*) és a (+*k*) irányított távolságot. Ez a hozzárendelés nem függvény!

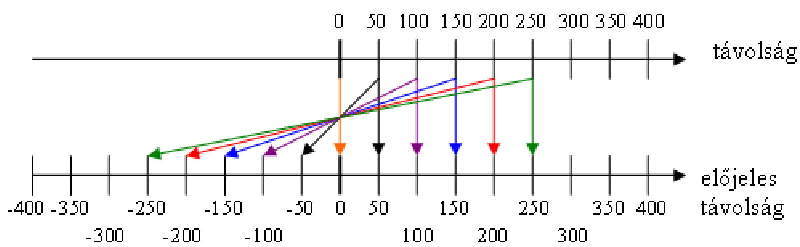
Venn-diagram:



Koordináta-rendszer:



Nyíldiagram:



Táblázat:

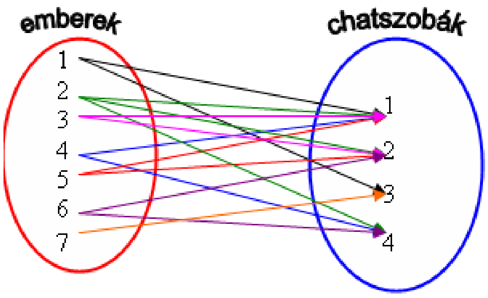
távolság	0	50	100	150	200	250
előjeles távolság	0	+50	+100	+150	+200	+250
	0	−50	−100	−150	−200	−250

6. Aladár (1), Béla (2), Cecil (3), Dezső (4), Erika (5), Flóra (6), és Gergő (7) interneten csetelnek azaz csevegnek, a belépési sorszámuknak megfelelő néven. Egy gyerek egyszerre több chatszobában is jelen lehet. Összesen 4 ilyen szoba van. Az első szobában jelen vannak: 1,2,3,4,5; a 2. szobában: 2,3,5,6; a harmadikban: 1,6,7; és a 4-ben: 2,4,6. Ábrázoljuk, hogy a különböző sorszámú emberek mely szobákban beszélgetnek!

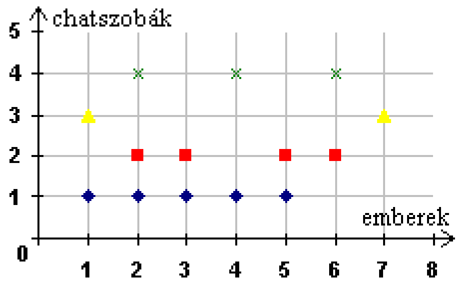
Megoldás:

Hozzárendelési szabály: Rendeljük hozzá mindegyik ember sorszámához a chatszobák sorszámát, amelyikbe belépett: Aladár: 1,3; Béla: 1,2,4; Cecil: 1,2; Dezső: 1,4; Erika: 1,2; Flóra: 2,4; Gergő: 3. Ez a hozzárendelés nem függvény!

Venn-diagram:



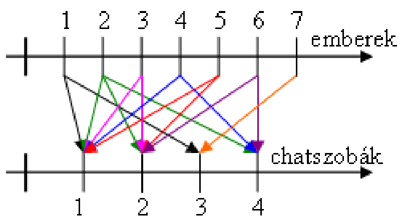
Koordináta-rendszer:



Táblázat:

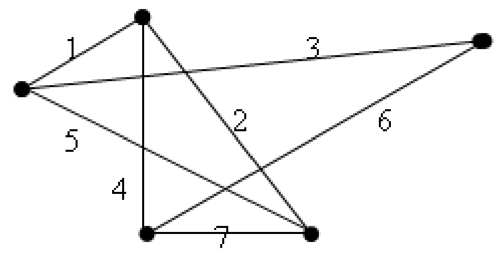
emberek	1	2	3	4	5	6	7
chat–szobák	1	1	1	1	1		
		2	2		2	2	
	3						3
		4		4		4	

Nyíldiagram:



7. A következő térkép az 5 várost összekötő vasúti vonalakat ábrázolja:

Útvonal	Útvonal hossza (km)
1	33
2	42
3	74
4	40
5	59
6	68
7	35



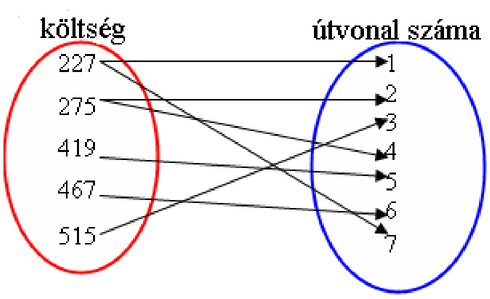
A vasútjegy ára 7 km-ig 35 Ft, utána 7 km-enként 48 Ft-tal nő. Melyek az azonos költségű útvonalak?

Megoldás:

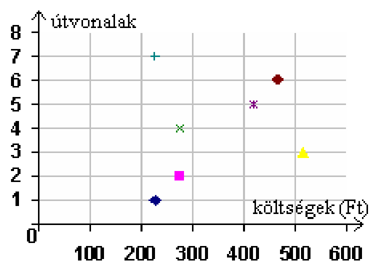
Hozzárendelési szabály: A költséghez rendeljük hozzá az útvonalakat! Ez a hozzárendelés nem függvény!

költség (Ft)	hossz (km)	**sorszám**
227	33; 35	**1; 7**
275	42; 40	**2; 4**
515	74	**3**
419	59	**5**
467	68	**6**

Venn- diagram:



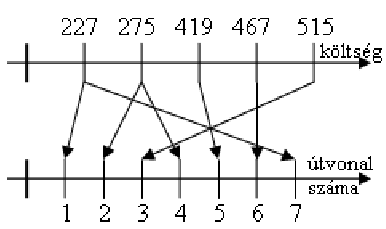
Koordináta-rendszer:



Táblázat:

költség (Ft)	227	275	419	467	515
útvonal száma	1	2	5	6	3
	7	2			

Nyíl



8. Válaszolj a következő kérdésekre az eddigi tapasztalataid alapján!

Feldolgozási javaslat: Szétosztandó kártyák a diákkvartetthez a 10-13. modulok A és B kártyái: a betűk a csoportra hivatkoznak, a számok a csoportokon belül a tanulókra.
A diákkvartett menete: (1) A tanár felolvassa a soron következő kérdést, és hagy 1−1,5 perc gondolkodási időt a csoportoknak, hogy a tagok megbeszéljék a választ. (2) A tanár húz egy számot, majd egy betűt. (vagy fordítva) (3) Az adott betűvel jelzett csoport adott sorszámú tagja fog válaszolni a kérdésre. A csoport által megbeszélt választ mondja el. (4) A tanár megkérdezi az osztályt, elfogadják-e a választ. Ha igen, akkor visszatérhetünk az (1) pontra. Ha nem, akkor megbeszéljük a helyes választ.
.

a) Melyik egyértelmű, melyik nem egyértelmű hozzárendelés?
Válasz: Az 1. mintapélda, valamint az 1 - 4. feladatokban egyértelmű hozzárendelés szerepel, míg a 2. mintapéldában és a 6. feladatban nem egyértelmű a hozzárendelés.

b) Hogyan jelenik ez meg a különböző ábrázolási módokban?
Válasz:

	Egyértelmű	Nem egyértelmű
Venn-diagram	egyetlen nyíl indul ki az alaphalmaz elemeiből	több nyíl is kiindulhat
Táblázat	az első sorban szereplő értékek alatt egyetlen érték található (a táblázat kétsoros)	az első sorban szereplő értékek alatt több érték is található (a táblázat többsoros)
Koordináta-rendszer	az egyes x értékekhez pontosan egy y érték tartozik	az egyes x értékekhez több y érték is tartozhat
Nyíldiagram	egy nyíl indul ki az alaphalmaz elemeiből	több nyíl is kiindulhat

c) Minek alapján döntöd el, hogy melyek az összetartozó értékek?
Válasz: A hozzárendelési utasítás alapján.

d) Hogyan tudnád 2 csoportba (halmazba) sorolni az értékeket?

Válasz: Amihez hozzárendelünk (alaphalmaz), illetve amit hozzárendelünk (képhalmaz).

2. A függvény fogalma, megadása

A hozzárendelések között vannak olyanok, amelyek az egyik halmaz minden eleméhez a másik halmaznak **pontosan egy elemét rendelik hozzá**.
Ezek az **egyértelmű hozzárendelések**. Az egyértelmű hozzárendeléseket **függvényeknek** nevezzük. A függvényeket kisbetűkkel jelöljük: *f*,*g*,*h*, … stb.
A függvényt megadhatjuk táblázattal, grafikonnal, nyíldiagrammal, képlettel vagy egyéb utasítással. Azt a halmazt, amelynek az elemeihez hozzárendeljük a másik halmaz elemeit, **alaphalmaznak**, a másik halmazt, amelybe a hozzárendelt elemek tartoznak, **képhalmaznak** nevezzük. A **hozzárendelési szabály** (utasítás) adja meg a függvényt, amely szerint az alaphalmaz elemeihez **egyértelműen** hozzárendeljük a képhalmaz elemeit.
Azokat a függvényeket, amelyek mindkét irányban egyértelműek („megfordíthatóak”), **kölcsönösen egyértelmű függvényeknek** nevezzük.

Az **értelmezési tartomány** (szokásos jelölése: É.T.) az alaphalmaz azon elemeinek a halmaza, amelyekre a hozzárendelési szabály érvényes. Ez lehet maga az alaphalmaz is. Az értelmezési tartomány elemeit szokás változóknak is nevezni.

Elfogadott megállapodás, hogy amennyiben nem jelezzük az értelmezési tartományt, akkor értelmezési tartománynak a valós számok halmazát tekintjük, illetve annak azt a legbővebb részhalmazát, ahol értelmezhető a hozzárendelési utasítás.

Az **értékkészlet** (szokásos jelölése: É.K.) a képhalmaz azon elemeinek a halmaza, amely értékeket a függvény felvesz. Ez lehet a teljes képhalmaz is. Elemei a függvényértékek.

Mintapélda$_3$

Egy bank annak alapján hajlandó takarékossági szerződést kötni ügyfeleivel, hogy pillanatnyilag van-e adósságuk, vagy nincs. Az ügyfél neve mellé −1-et tesznek, ha van adóssága, 0-t, ha bevételei pontosan fedezik a kiadásait, illetve +1-et, ha van megtakarítása. Ha valakinek adóssága van a banknál, akkor az adósság összege elé negatív előjel kerül.

A bank néhány ügyfelének anyagi helyzetét az alábbi táblázat mutatja:

Név	Anyagi helyzet (eFt)
Kardos Katalin	2
Lemcsák Ferenc	0
Tokodi Béla	−14
Vagyonos Vendel	62
Szabó Elemér	49
Manó Miklós	−51
Repdeső Anna	0

Milyen kategóriákba sorolja a bank az ügyfeleit? A fenti táblázat alapján banki jelrendszer szerint melyik pénzösszegnél kötnek szerződést, és melyiknél nem?

Megoldás:

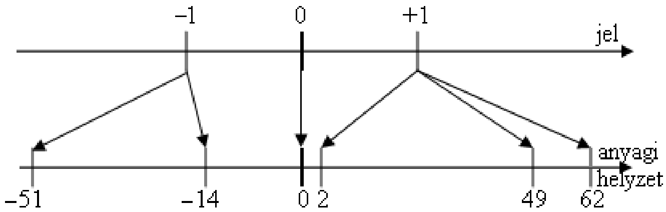
Név	Anyagi helyzet (eFt)	jel
Kardos Katalin	2	+1
Lemcsák Ferenc	0	0
Tokodi Béla	−14	−1
Vagyonos Vendel	62	+1
Szabó Elemér	49	+1
Manó Miklós	−51	−1
Repdeső Anna	0	0

<u>Táblázat</u>:

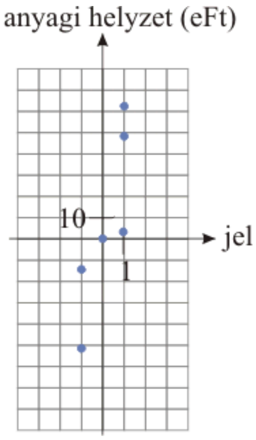
jel	−1	0	+1
anyagi helyzet (eFt)	−14	0	2
	−51		49
			62

<u>Hozzárendelési szabály</u>:
negatív számokhoz −1 -et, pozitív számokhoz +1 -et, 0 -hoz pedig 0 -t rendel.

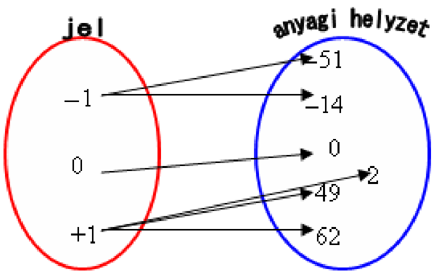
Nyíldiagram:



Koordináta - rendszer:



Venn - diagram:



Szerződést kötnek a következő pénzösszegek esetén: 2, 0, 62, 49.

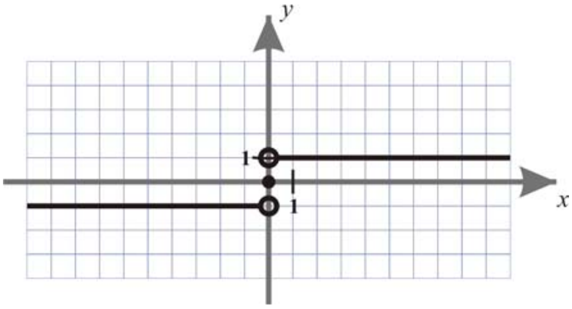
Módszertani megjegyzés: Sok érdekes függvény van. Az alábbiaknak viszont jelentős számfogalom fejlesztésére gyakorolt hatása.
Az előjelfüggvény a valós számok előjelük szerint csoportosítja.
Az egészrész-függvény grafikonja lépcsős. Az egyes lépcsőfokok balról zárt jobbról nyitott, az *x* tengellyel párhuzamos szakaszok, amelyek negatív irányba is folytatódnak. A grafikon és a nyíldiagram segít megérteni az egészrész fogalmát, ami különösen nehéz a negatív számok körében.
A törtrész-függvény esetén egy számból vonunk ki egy nála kisebbet. Mivel negatív számból egy nála kisebb negatív számot vonunk ki, az eredmény mindig pozitív lesz. Egyrészt fejleszti a számfogalmat, másrészt ez az egyik legegyszerűbb példa a periodikus függvényekre, amilyenekkel 10. évfolyamon még találkozni fogunk.
Ezekre a függvényekre részletesebben visszatérünk a Lineáris függvények (11.) modul végén.

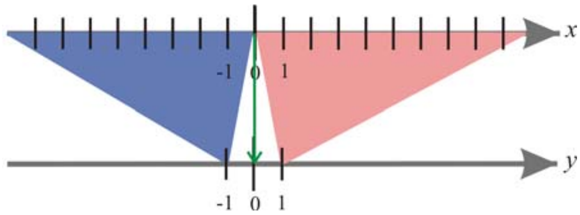
Azt a függvényt, amely a negatív valós számokhoz –1-et, a pozitív valós számokhoz +1-et, a 0-hoz pedig 0-át rendel, **előjelfüggvény**nek nevezzük.

A példában ennek a hozzárendelésnek a fordítottjával találkozunk.

A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\begin{cases}1, & ha\ x>0\\ 0, & ha\ x=0\\ -1, & ha\ x<0\end{cases}$ hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonja a következő:

Nyíldiagramon ábrázolva:



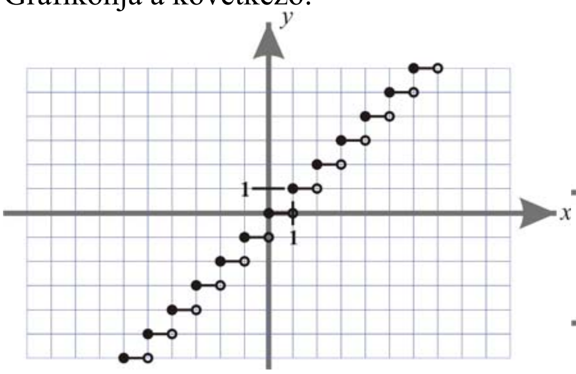


További két érdekes függvénnyel is megismerkedünk:

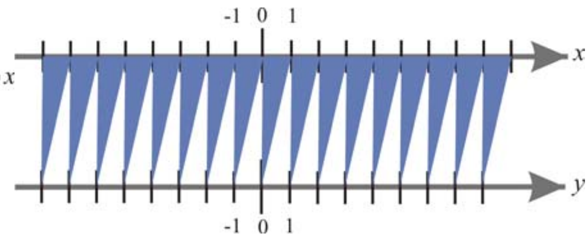
1.

Az x valós számnak az **egészrésze** az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x -nél. Az egészrész jele: $[x]$
A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = [x]$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **egészrész-függvény**nek nevezzük.

Grafikonja a következő:



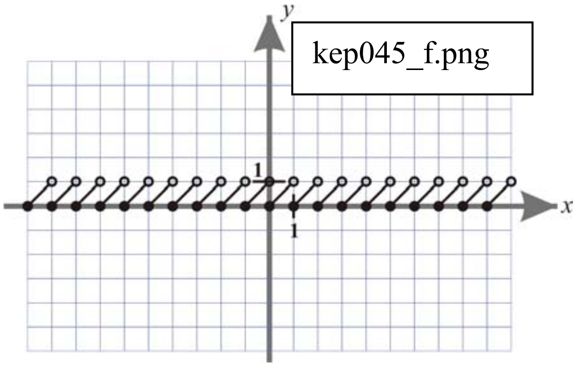
Nyíldiagramon ábrázolva:



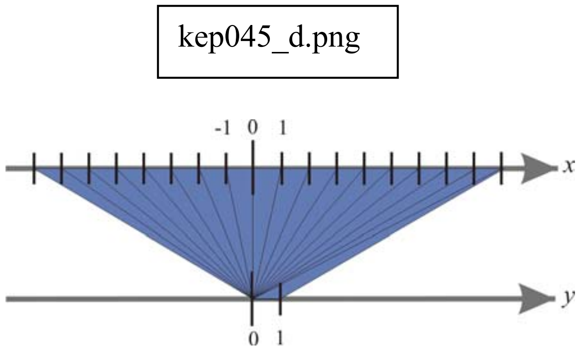
2.

Ha egy számból elveszük az egészrészét, akkor a „**törtrész**e” marad. Jelölése: $x - [x] = \{x\}$.
A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \{x\}$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **törtrész-függvény**nek nevezzük.

Grafikonja a következő:



Nyíldiagramon ábrázolva:



Feladatok

A 9. feladat házi feladatnak ajánlott.

9. A következő hozzárendelések közül válaszd ki a függvényeket! Minden hozzárendeléshez írj 3-3 példát! Ha az nem függvény, írj olyan példát is, ami bebizonyítja, hogy a hozzárendelés nem egyértelmű! Válaszd ki a kölcsönösen egyértelmű függvényeket!

a) Első halmaz: a sokszögek, második halmaz: a pozitív számok. A sokszögekhez rendeljük hozzá a belső szögeinek összegét.
Megoldás: Függvény. Példák: háromszög 180°; négyszög 360°; ötszög 540°.

b) Első halmaz: síkbeli alakzatok, második halmaz: síkbeli alakzatok. Továbbá adott egy *t* tükörtengely. Minden síkbeli alakzathoz rendeljük hozzá a *t* tengelyre vonatkozó tükörképét.
Megoldás: Ez kölcsönösen egyértelmű függvény.

c) Első halmaz: pozitív egész számok, második halmaz: prímszámok. Minden pozitív egész számhoz rendeljük hozzá a prímosztóit.
Megoldás: Nem függvény. Példa: 6 prímosztói: 2,3.

d) Első halmaz: kétjegyű egész számok, második halmaz: kétjegyű egész számok. Minden kétjegyű, egész számhoz rendeljük hozzá azt a kétjegyű egész számot, amelynek a négyzete ugyanarra a számjegyre végződik.
Megoldás: Nem függvény. Példa: 11,19,21,29,31,39, …, 99 számok négyezetei 1−re végződnek. A 11−hez 18 számot is rendelhetünk.

e) Első halmaz: egész számok, második halmaz: egyjegyű számok. Minden egész számhoz rendeljük hozzá azt az egyjegyű számot, amely számjegyre a szám négyzete végződik.
*Megoldás:*Ez függvény. Például: 16 6; 45 5; 23 9; 34 6.

f) Első halmaz: természetes számok, második halmaz: természetes számok. A természetes számokhoz a náluk nagyobb természetes számokat rendeljük hozzá.
Megoldás: Nem függvény, mert minden természetes szám esetén végtelen sok nála nagyobb természetes szám létezik.

g) Első halmaz: természetes számok, második halmaz: természetes számok. Minden természetes számhoz a nála eggyel nagyobb természetes számot rendeljük hozzá.
Megoldás: Ez kölcsönösen egyértelmű függvény. Pl: 5 6; 6 7; 7 8.

h) Első halmaz: racionális számok, második halmaz: a számegyenes pontjai. Egy-egy számhoz a számegyenes azon pontját rendeljük hozzá, ami az adott számnak a helye.
Megoldás: Ez kölcsönösen egyértelmű függvény.

i) Első halmaz: a racionális számokból alkotott rendezett párok, második halmaz: A koordinátasík pontjai. Egy-egy számpárhoz a sík egy-egy pontját rendeljük hozzá.
(A számpár a pont két jelzőszáma a derékszögű koordináta-rendszerben)
Megoldás: Ez kölcsönösen egyértelmű függvény.

Mintapélda$_4$

Határozd meg az adott függvények értelmezési tartományát, egyes esetekben az értékkészletét, és a keresett helyeken a függvény helyettesítési értékét!

a) $f(x) = -\frac{2}{x - 4}$;

Megoldás:

É.T.: x **R**\{4} (ahol a nevező 0),

É.K.: $f(x)$ **R**\{0} (amilyen értéket nem vehet fel),

$f(8) = -\frac{2}{8 - 4} = -\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{-\frac{1}{2} - 4} = \frac{4}{9}$.

b) $g(x) = |x - 1| - |x + 3|$.

Megoldás:

É.T.: x **R**,

É.K.: $g(x)$ $[-4; 4]$,

$g(-2) = |-2 - 1| - |-2 + 3| = 1$,

$g(5) = |5 - 1| - |5 + 3| = -4$.

<u>Feldolgozási javaslat a 10. feladathoz:</u> A tanulók 2 fős csoportokban dolgozzanak. Az egyik tanuló a 10. feladat a) – c) , a másik a b) – d) példáit oldja meg. Ha készen vannak, kicserélik a füzetüket, és kijavítják egymás feladatát. Megbeszélik a javítást.

10. Határozd meg az adott függvények értelmezési tartományát, egyes esetekben az értékkészletét, és a keresett helyeken a függvény helyettesítési értékét!

a) $f(x) = -\frac{x + 2}{6}$ É.T.:? É.K.:? $f(0) = ?$ $f(-2) = ?$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ É.T.:? É.K.:? $g(2) = ?$ $g(-3) = ?$

c) $h(x) = \frac{1}{x + 2}$ É.T.:? É.K.:? $h\left(\frac{1}{2}\right) = ?$ $h(-6) = ?$

d) $k(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$ É.T.:? $k(2)=?$ $k(-1)=?$

Megoldás:

a) É.T.: x **R**; É.K.: $f(x)$ **R**; $f(0)=-\dfrac{1}{3}$; $f(-2)=0$.

b) É.T.: x **R**\{0}; É.K.: $g(x)$ **R**\{0}; $g(2)=\dfrac{1}{2}$; $g(-3)=-\dfrac{1}{3}$.

c) É.T.: x **R**\{−2}; É.K.: $g(x)$ **R**\{0}; $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$; $h(-6)=-\dfrac{1}{4}$.

d) É.T.: x **R**\{4}; $k(2)=-\dfrac{7}{2}$; $k(-1)=-\dfrac{1}{5}$.

11. Határozd meg az adott függvények értelmezési tartományát, egyes esetekben az értékkészletét, és a keresett helyeken a függvény helyettesítési értékét!

a) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{3}$ É.T.: ?; É.K.: ? $f(-1{,}5)=?$ $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=?$

b) $g(x)=x^2+3$ É.T.:? É.K.:? $g(0)=?$ $g(4{,}5)=?$

c) $h(x)=\sqrt{x}$ É.T.:? É.K.:? $h(3)=?$ $h(9)=?$

d) $k(x)=\dfrac{5x^2-2}{x+1}$ É.T.:? $k(0)=?$ $k(-4)=?$

Megoldás:

a) É.T.: x **R**; É.K.: $f(x)$ $\mathbf{R}^+$ {0}; $f(-1{,}5)=\dfrac{7}{6}$; $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{12}$.

b) É.T.: x **R**; É.K.: $g(x)$ $\mathbf{R}^+$: $g(x)$ 3; $g(0)=3$; $g(4{,}5)=23{,}25$.

c) É.T.: x $\mathbf{R}^+$ {0}; É.K.: $h(x)$ $\mathbf{R}^+$ {0}; $h(3)=\sqrt{3}$; $h(9)=3$.

d) É.T.: x **R**\{−1}; $k(0)=-2$; $k(-4)=26$.

II. Függvénytulajdonságok

<u>*Megjegyzés*</u>: Ezek a feladatok hétköznapi szituációkon keresztül, szemléletesen mutatják be a függvénytulajdonságokat. A folyamatok és a hozzájuk tartozó grafikonok elemzése játékosan készítik elő a monotonitás, zérushely, szélsőérték fogalmát, amit rendszerezés után a tanár tisztáz.
<u>Feldolgozási javaslat az 5., 6. mintapéldához és a 12–15 feladatokhoz</u>: A tanulók két fős csoportokban dolgozzanak, fejenként 2, egymástól eltérő típusú példát oldjanak meg.
Javasolt feladatpárok: 5. Mintapélda – 15. feladat; 12. feladat – 9. mintapélda

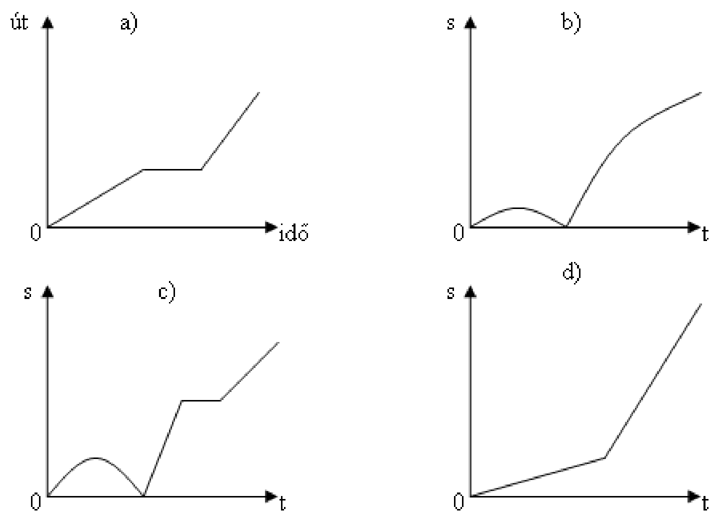
Mintapélda$_5$

Egy reggel négy gyerek elindult az iskolába. Mozgásukat követheted a négy út−idő grafikonon. Közülük hárman elmesélik, hogy milyen volt az útjuk. Találd ki, hogy melyik grafikon kinek a mozgását ábrázolja!

Feri: Biciklivel járok iskolába. Mindig azonos tempóban szoktam menni. Ma, amikor útközben ránéztem az órámra, úgy láttam, hogy nem fogok beérni, ezért gyorsabban hajtottam a kerékpárt.

Béla: Gyalog járok az iskolába. Már jó darabot megtettem, amikor eszembe jutott, hogy nem hoztam el Ferinek az ígért könyvet. Visszafordultam érte, és ezek után persze futnom kellett, hogy ne késsek el.

Jóska: Én minden nap robogóval járok, de ma nagyon megjártam. Már félúton voltam, amikor elfogyott a benzin. Elég sokáig kellett várnom, amíg végre egy autóstól kaptam annyi benzint, hogy be tudjak jönni az iskolába.



Zsuzsinak hívják a negyedik gyereket.

A grafikon alapján írd le, mi történt Zsuzsival útközben!

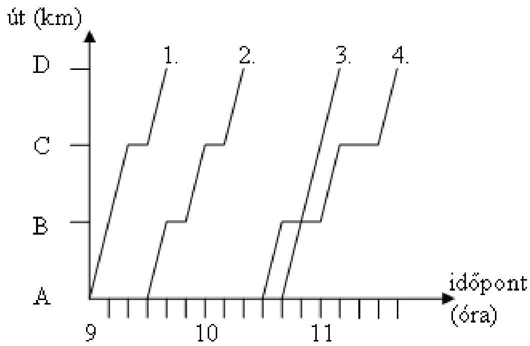
Megoldás:
Zsuzsi útját a c) ábra írja le. Zsuzsi elindult, de útközben rájött, hogy otthon felejtette az uzsonnáját, így visszafordult érte. A lakásból kijőve azonnal buszra tudott szállni. Az iskolába menet egyszer át kell szállnia. Az első busz gyorsan haladt. A második pont az orra előtt ment

el, ezért várnia kellett rá. A következő járatra felszállt. A reggeli csúcsforgalom miatt ez a busz kicsit lassabban haladt.

Feri – d); Béla – b); Jóska – a)

Mintapélda$_6$

Az ábra egy vasúti menetrend részletét mutatja egy 40 km-es útszakaszon, ahol négy állomás van; ezek A, B, C és D.



Állapítsd meg, hogy a négy vonat közül melyik áll meg a B illetve a C állomásokon!

Számítsd ki, mekkora az egyes vonatok átlagsebessége az A-tól D-ig terjedő távolságokon?

(Az átlagsebesség a megtett út és a megtételéhez szükséges idő hányadosa.)

Megoldás:

A B állomáson a 2. és 4. vonat állt meg, a C-n az 1., 2., és a 4.

Első vonat átlagsebessége: $v = \frac{40}{\frac{2}{3}} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A 2. vonaté: $v = \frac{40}{\frac{5}{6}} = 48\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A 3. vonaté: $v = \frac{40}{0{,}5} = 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A 4. vonaté pedig: $v = \frac{40}{1{,}167} = 34{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Feladatok

12. Az állatolimpián magasugrás műsorszámban indult a bolha, a kenguru, a tücsök és a delfin. Az ugrások magassága és hossza minden versenyző testmagasságához viszonyítva értendők.

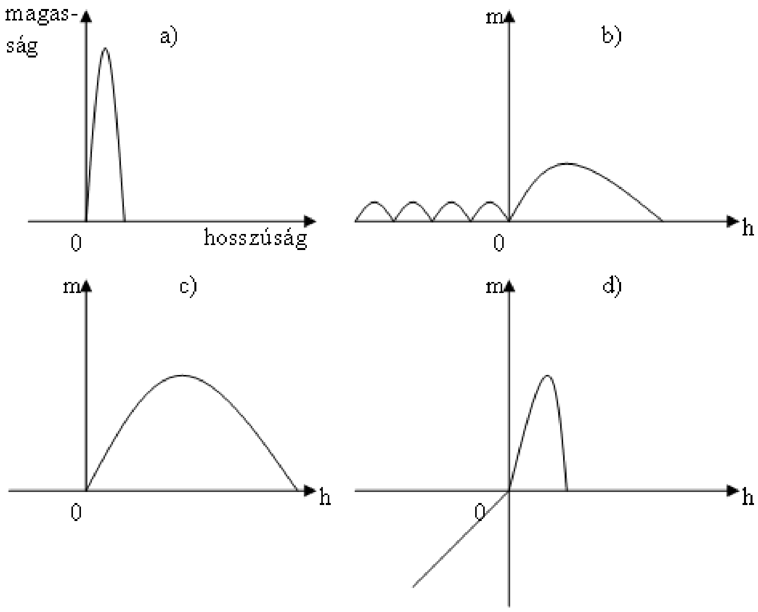
A *bolha* helyből, kis nekirugaszkodással saját testmagasságához képest kiemelkedően magasat ugrott.

A *delfin* leúszott a medence aljára, hogy onnét nekiindulva megfelelő lendülettel a víz fölé emelkedjen, s átugorja a lécet.

A *tücsök* izmos hátsó lábainak köszönhetően jól elrugaszkodott, és eredményét tekintve a távolugró bajnok is lehetett volna egyetlen ugrásával.

Találd ki, hogy melyik grafikon melyik állat mozgását ábrázolja!

A grafikon alapján milyen taktikát alkalmazott a *kenguru*? Milyen eredménnyel?

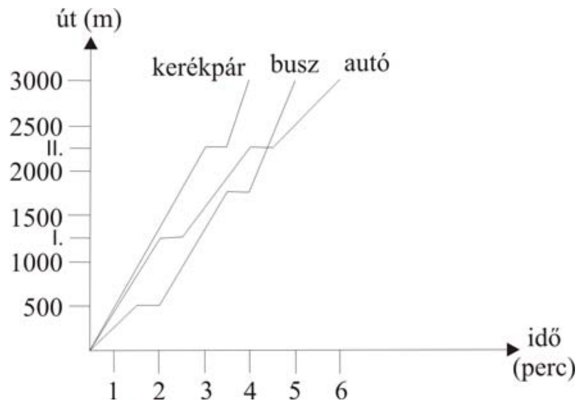


Megoldás: a kenguru a nagy elrugaszkodás érdekében „nekifutásból” ugrott el. Mivel csak ugrálni tud, nekifutás helyett ezt jelzi a b) ábra.

bolha – a); delfin – d); tücsök – c).

13. Budapesten a főútvonalak felújítása miatt reggel 8 óra körül, amikor a legtöbb ember munkába igyekszik, forgalmi dugó alakul ki. Egyik reggel stábunk kiszemelt egy 3 km-es útszakaszt, és tesztelte a különböző közlekedési módszerek hatékonyságát. Megkértünk 3 embert, tegye meg ezt az útszakaszt biciklivel, személyautóval, illetve tömegközlekedéssel.

A 3 km-es szakaszon két jelzőlámpás útkereszteződés lassítja a haladást. Az autóbusznak két megállója van, és az útszakasz egy részén elkülönített buszsávon közlekedhet. A biciklistának is lehetősége van az útvonal egy szakaszán bicikliúton közlekedni, de nem végig.



Állapítsd meg, hogy melyik járműnek kellett az I-es illetve a II-es számú útkereszteződésnél várakoznia! Hol vannak az autóbusz megállói ezen a szakaszon?
Számítsd ki, mekkora az egyes járművek átlagsebessége ezen a 3 km-es útszakaszon!
(Az átlagsebesség a megtett út és a megtételhez szükséges idő hányadosa.)

Megoldás:
Az I-es jelzőlámpánál csak az autónak kellett várakoznia. A II-esnél a kerékpárosnak is. Az autóbusznak 500 m után van az első megállója, a 2. pedig 1750 m -nél.

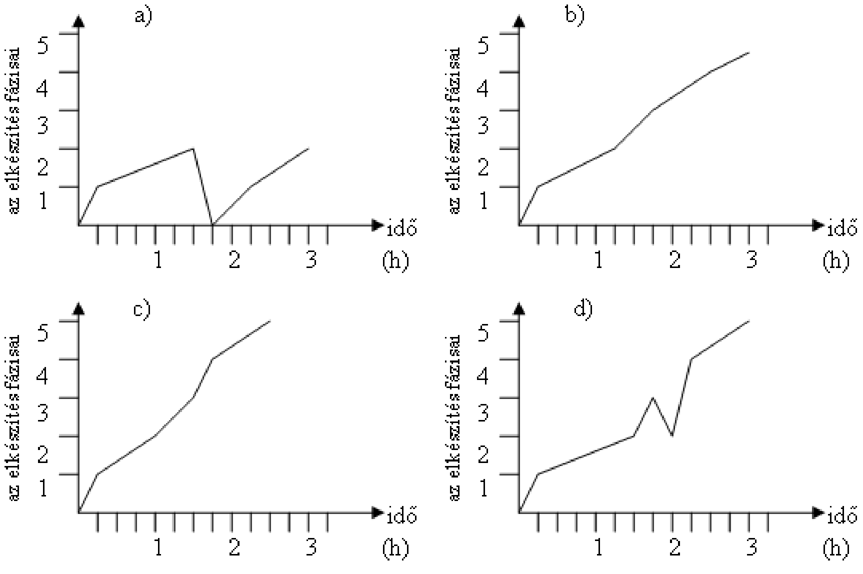
A kerékpár átlagsebessége: $v = \frac{3}{\frac{4}{60}} = 45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Busz: $v = \frac{3}{\frac{5}{60}} = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Autó: $v = \frac{3}{0{,}1} = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

14. Egy szakácstanonc-verseny döntőjébe 4 leendő szakács került be. A feladatuk ezúttal süteménysütés. A sütemény elkészítésének fázisai a következők:

1. alapanyagok összekészítése,
2. tészta összeállítása és kisütése,
3. a krém elkészítése,
4. a tészta és a krém összerakása,
5. a sütemény díszítése.

A tanoncok 3 órát kapnak az elkészítésre.

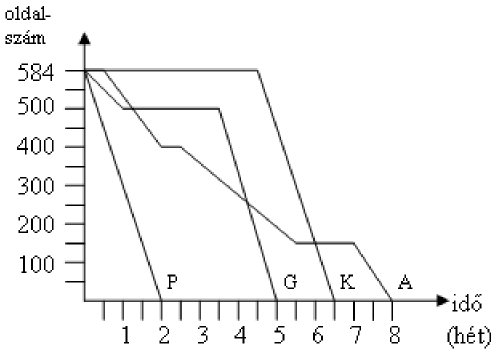
Karcsi: biztosra ment. A kedvenc, már sokszor kipróbált receptje alapján készítette el a süteményt. Így jóval a határidő letelte előtt, két és fél óra alatt végzett.
Gyurka: mindig alapos munkát végez. Nagyon ügyel a részletekre. Így egészen a díszítésig eljutott, de ez utóbbira már nem maradt elég ideje. Csak belekezdett.
Borbála: szépen haladt a tésztasütéssel, de amikor ránézett az órájára, megijedt, hogy kifut az időből, ezért elkezdett kapkodni. Teljes lángon főzte a krémet, ami persze leégett, így ki kellett dobnia, és újra kellett kezdenie. Eme kis baki ellenére hajszál pontosan sikerült elkészítenie a remekművet.
A negyedik szakácsot *Lajosnak* hívták. Ő hogyan haladt a desszertkészítéssel?



Megoldás: Karcsi – c; Gyurkó – b; Borbála – d.

Lajos – a): Túl sokáig sütötte a tésztát, így az odaégett. Elölről kellett mindent kezdenie. Másodszorra az alapanyagot összekészítése is több időt vett igénybe. Így csak a tésztát tudta kisütni.

15. Egy osztály tanulóinak a nyári szünet végére egy 584 oldalas kötelező olvasmányt kell elolvasniuk, és olvasónaplót készíteniük. Piroska, Klára, Gergő és Aladár nem szeretnek olvasni, ezért folyamatosan számon tartották, hány oldal van még hátra a műből. A haladási ütemüket a következő grafikon mutatja:



Állapítsd meg, hogy ki, átlagosan hány oldalt olvasott el naponta!

Megoldás Piroska naponta 584:14 = 41,7 oldalt olvasott el. Gergő: 584:35 ≈ 16,7, Klára: 584:45,5 ≈ 12,8, végül Aladár: 584:56 ≈ 10,4 oldalt.

Feldolgozási javaslat a 16. feladathoz: A tanár szétosztja a 10-13. modulok A és B kártyakészletét, majd elkezdi fölolvasni a 16. feladat kérdéseit. Minden kérdés elhangzása után 1-1,5 perc gondolkodási időt hagy, hogy a csoportok megbeszéljék a választ. Ezek után kártyahúzással (betű-szám) kiválasztja azt a személyt, aki választ ad, amit osztályszinten is megbeszélnek, kiegészítik, kijavítják, ha kell.

16. Válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) Az előző feladatokban milyen hozzárendelési szabályokat veszel észre?
Válasz: pl. út–idő; magasság – távolság; sebesség – út; stb.

b) Adj meg néhány függvényt a példák alapján!
Válasz: pl. 21. feladatban É.T.: [0; 800]; hozzárendelési utasítás: megtett úthoz rendeljük hozzá azt a sebességet, amivel megtette ezt az utat.

c) Hol olvasod le a helyettesítési értéket a grafikonról, és hol a helyeket?
Válasz: A helyettesítési értékeket a függőleges tengelyről, a helyeket a vízszintes tengelyről.

d) A 0 helyettesítési értéket zérushelynek nevezzük. Hogy tudod ránézésre megállapitani a függvény grafikonja alapján, hogy hol van a függvénynek a zérushelye?
Válasz: A függvény grafikonjának ezen a helyen van közös pontja a vízszintes tengellyel.

e) Milyen tendenciákat mutatnak a 13.feladat grafikonjai összességében véve szakaszonként? Ennek az alapján hasonlítsd össze a grafikonokat!
Válasz: Az idő előrehaladtával mind a három jármű egyre nagyobb távolságot tesz meg a kijelölt szakaszon. Ez növekvő tendencia. De a kerékpár halad a leggyorsabban, aztán a busz, és az autó a leglassúbb.
f) Milyen tendenciákat mutatnak a 15. feladat grafikonjai összességében véve szakaszonként? Ennek az alapján hasonlítsd össze a grafikonokat!

Válasz: Csökkenő tendenciát mutatnak, mivel ahogy telik az idő, egyre kevesebb oldal van hátra a könyvből. A leghamarabb Piroska olvasta ki a könyvet, aztán Gergő, Klára, majd Aladár volt a leglassúbb.

A tapasztalatok legfontosabb tanulsága, hogy a feladatokban elősorduló változó mennyiségek leírása átvezet a gyakorlati tapasztalatokról a halmazelméleti függvényfogalomra.
Ha a konkrét tartalomtól eltekintünk, akkor a változó mennyiség jele x. A hozzá tartozó másik mennyiség a függvényérték az $f(x)$ jelölést kapja.

1. A függvény tulajdonságai: zérushely és monotonitás

Zérushely: Az értelmezési tartományban az az x érték, ahol a függvény helyettesítési értéke 0 ($f(x) = 0$). Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a függvény grafikonja ezen a helyen metszi az x tengelyt.

Monotonitás:

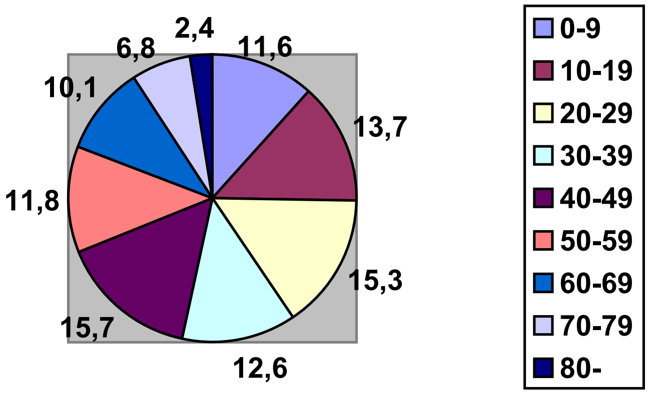
- Az f függvény egy intervallumon **szigorúan (monoton) növekvő**, ha az intervallumból választott bármely $x_1<x_2$ hely esetén $f(x_1) < f(x_2)$, és monoton növekvő, ha $f(x_1) \le f(x_2)$.
- Az f függvény egy intervallumon **szigorúan (monoton) csökkenő**, ha az intervallumból választott bármely $x_1<x_2$ hely esetén $f(x_1) > f(x_2)$, és monoton csökkenő, ha $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Jobb csoportban megbeszélhetjük azt is, hogy mit jelent, ha a függvény nem növekvő vagy nem csökkenő.

Feldolgozási javaslat: A tanulók párosával dolgoznak. A tanár kijelöl 2–2 megoldandó feladatot, például 7., 8. mintapéldát és a 17. valamint a 18. feladatokat.
A tanulók egyénileg megoldják a példáikat a füzetükbe, majd kicserélik egymásét és leellenőrzik. Utána megbeszélik a javítást.

Mintapélda$_7$

A következő diagram a népesség korcsoportok szerinti százalékos megoszlását mutatja 1996–ban. Olvasd le a legkisebb és legnagyobb értékeket! Határozd meg, hol/mikor veszik fel ezeket az értékeket!



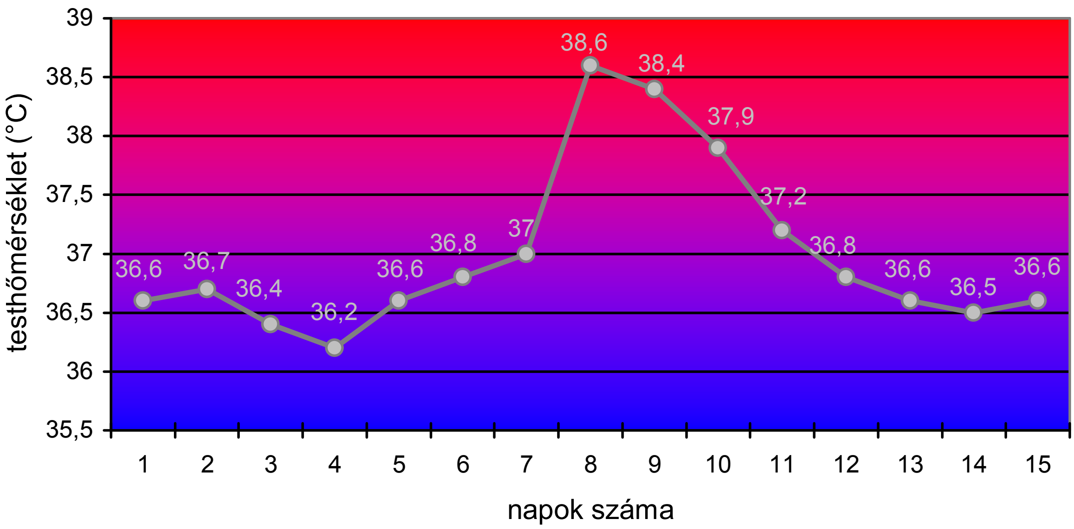
Megoldás:

Legnagyobb érték: 15,7. A 40–49 év közöttiek vannak a legtöbben.

Legkisebb érték: 2,4. A 80 éven felüliek vannak a legkevesebben.

Mintapélda$_8$

A következő diagram Kati átlagos testhőmérsékletének alakulását mutatja két héten keresztül:



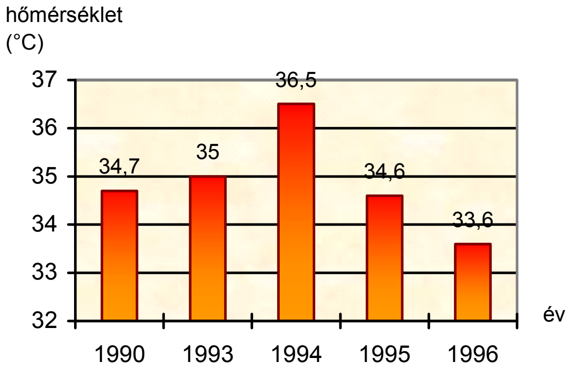
a) Melyik nap volt Katinak a legmagasabb, illetve a legalacsonyabb a testhőmérséklete?
b) A hónap hányadik napjától lázasodott be Kati? Hány napig tartott a betegsége? A hónap első hetében mekkora volt Kati átlagos testhőmérséklete?

Megoldás:
Kati a 8. naptól volt lázas. Betegsége 4 napig tartott. A hónap első hetében Kati átlagos testhőmérséklete 36,6 °C volt. A 4. napon volt Katinak a legalacsonyabb a testhőmérséklete, és a 8. napon a legmagasabb.

Megjegyzés: Ennél a példánál beszélhetünk a lokális (helyi) maximum, illetve a lokális (helyi) minimum fogalmáról is. Az ábrán magyarázzuk el, hogy a lokális szélsőérték függ attól, hogy mekkora intervallumon nézzük.

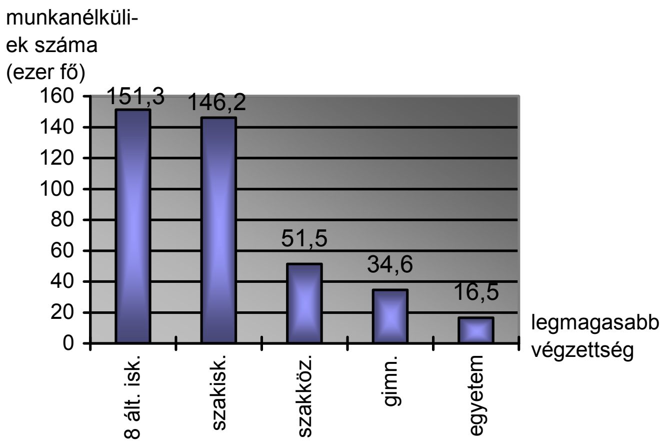
17. Olvasd le a következő diagramokról a legkisebb és legnagyobb értékeket! Határozd meg, hol/mikor veszik fel ezeket az értékeket!

a) Az adott években mért legmagasabb hőmérsékletek (°C) alakulása 1990 és 1996 között.



Megoldás:
Legnagyobb érték: 36,5. 1994–ben veszi fel.
Legkisebb érték: 33,6. 1996–ben veszi fel.

b) Egyik évben a munkanélküliek száma (ezer főben) a legmagasabb iskolai végzettség szerint

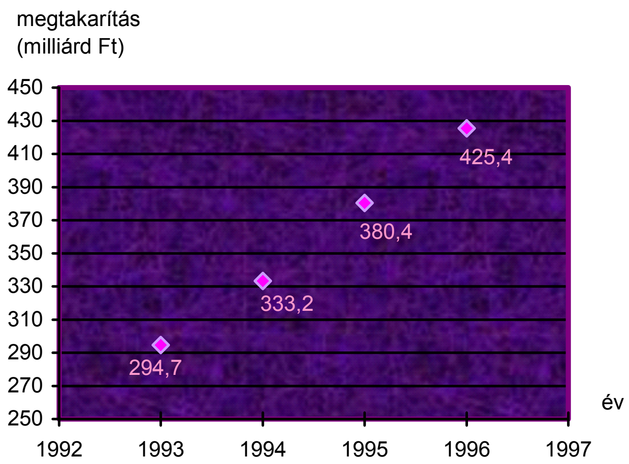


Megoldás:
Legnagyobb érték: 151,3 ezer. A 8 általános iskolát végzettek körében legnagyobb a munkanélküliek száma.

Legkisebb érték: 16,5 ezer. Az egyetemet végzettek körében legkevesebb a munkanélküliek száma.

18. Olvasd le a következő diagramokról a legkisebb és legnagyobb értékeket! Határozd meg, hol/mikor veszik fel ezeket az értékeket!

a) A háztartások készpénz megtakarítása 1993 és 1996 között (milliárd Ft)

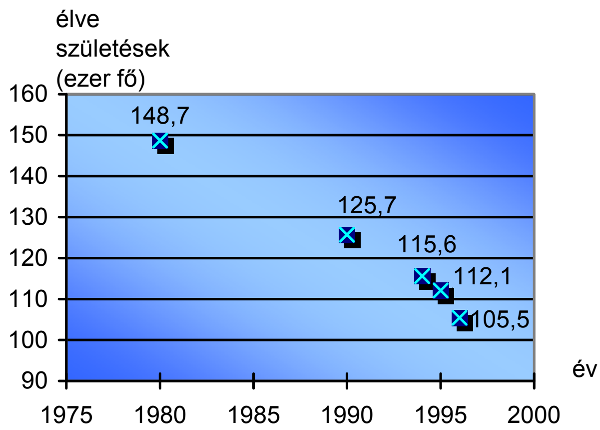


Megoldás:

Legnagyobb érték: 425,4. 1996-ban legtöbb a háztartások készpénz-megtakarítása.

Legkisebb érték: 294,7. 1993-ban legkevesebb a háztartások készpénz-megtakarítása.

b) Élve születések alakulása 1980 és 1996 között (ezer fő)

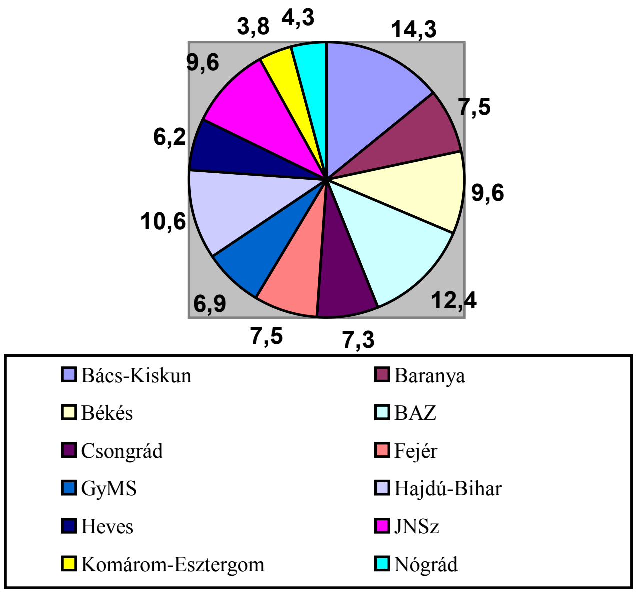


Megoldás:

Legnagyobb érték: 148,7 ezer. 1980−ban legnagyobb az élve születések száma.

Legkisebb érték: 105,5 ezer. 1996−ban legkisebb az élve születések száma.

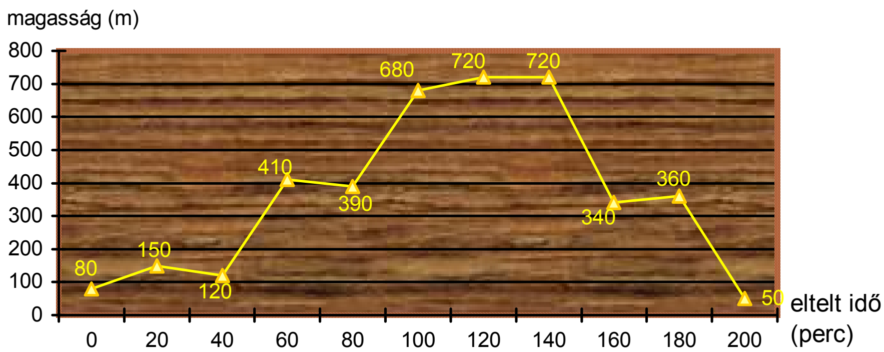
19. A következő diagram Magyarország 12 megyéjének területi eloszlását mutatja %–ban. Olvasd le, melyik megyének a legkisebb és melyiknek a legnagyobb a területe, és add meg a területét is!



Megoldás:
Legnagyobb érték: 14,3. Bács-Kiskun megyének a legnagyobb a területe.

Legkisebb érték: 3,8 Komárom-Esztergom megye területe a legkisebb.

20. Egy turistacsoport elment kirándulni a hegyekbe. Más útvonalon mentek, mint amit a visszatérésre választottak. Útjuk a következőképpen alakult:



a) Milyen magasra másztak fel? Hol voltak a legalacsonyabban?
b) Mennyi idő alatt mászták meg a hegyet? Felfelé menet milyen magasságban értek ereszkedő szakaszhoz? Mekkora volt ezen a szakaszon a szintkülönbség? Visszafelé az emelkedő szakasz előtt mekkora volt az út meredeksége, ha közben 1,2 km-t haladtak előre?

Megoldás:
A turistacsoport 2 óra alatt mászta meg a hegyet. Felfelé menet először 150 m magasságban érkeztek ereszkedő szakaszhoz. Itt 30m volt a szintkülönbség. Másodszor pedig 410 m-es magasságban érkeztek ereszkedő szakaszhoz. A szintkülönbség itt 20 m-es volt. A visszafelé

vezető úton az első szakaszban az út meredeksége $m = \frac{720-340}{1200} = \frac{380}{1200} = 0{,}3167 = 31{,}67\%$ -os volt, ami azt jelenti, hogy 100 m -enként 31,67 méterrel kerültek alacsonyabbra.

2. A függvény tulajdonságai: szélsőérték

Maximum:
A függvénynek az x_0 helyen **abszolút maximuma** van, ha a függvény az $f(x_0)$ -nál nagyobb értéket seholsem vesz fel.
x_0 -et **maximumhely**nek, $f(x_0)$ -et **maximumérték**nek nevezzük.

A függvénynek az x_0 helyen *helyi maximuma* van, ha az x_0 hely valamely környezetében az $f(x_0)$ –nál a függvény nem vesz fel nagyobb értékét, de a környezeten kívül ennél nagyobb értéket is felvehet.

Minimum:
A függvénynek az x_0 helyen **abszolút minimuma** van, ha a függvény az $f(x_0)$ -nál kisebb értéket sehol sem vesz fel.
x_0 -et **minimumhely**nek, $f(x_0)$ -t **minimumérték**nek nevezzük.

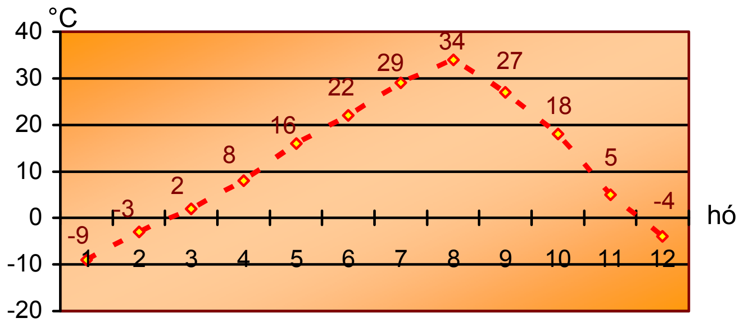
A függvénynek az x_0 helyen *helyi minimuma* van, ha az x_0 hely valamely környezetében az $f(x_0)$ –nál a függvény nem vesz fel kisebb értékét, de a környezeten kívül ennél kisebb értéket is felvehet.

A függvény tulajdonságainak megállapításakor a következő szempontokat vesszük figyelembe:

1. Értelmezési tartomány meghatározása,
2. Értékkészlet meghatározása (csak egyszerűbb esetekben),
3. Zérushely(ek) megállapítása,
4. Monotonitás,
5. Szélsőérték(ek) és azok helyeinek meghatározása.

Feladatok

21. Genuvia ország havi átlaghőmérsékletének alakulását mutatja a következő grafikon



egy éves viszonylatban:

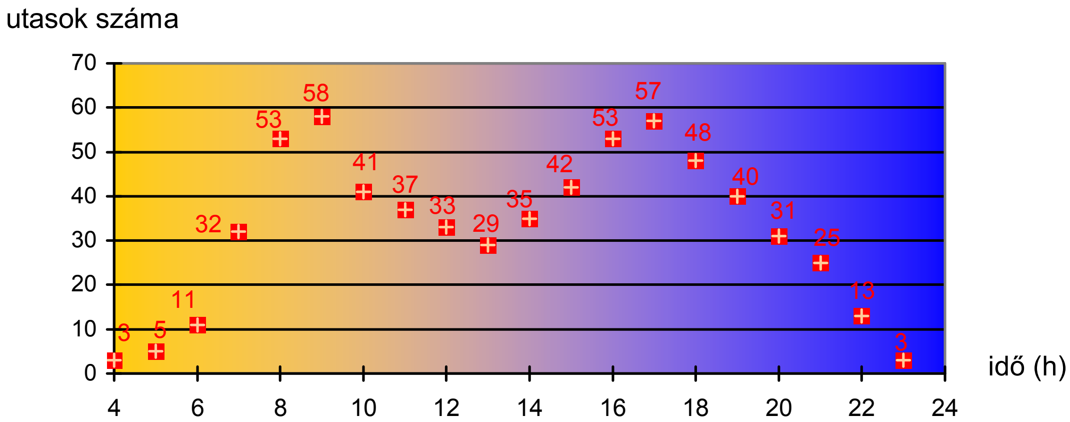
a) Mennyi az éves átlaghőmérséklet?

b) Mely hónapok átlaghőmérséklete közelíti meg (5 °C–nál nem nagyobb az eltérés) ezt az értéket?
c) Melyik hónapban legnagyobb, melyikben legkisebb az átlaghőmérséklet?
d) Melyik azaz első hónap, amikor fagypont fölé emelkedik az átlaghőmérséklet?
e) Melyik azaz első hónap, amikor fagypont alá süllyed az átlaghőmérséklet?

Megjegyzés: Az összetartozó értékpárokat a pontok jelenítik meg. Az összekötésük a változás jellegére teszi a hangsúlyt, más funkciója nincs.

Megoldás:
a) Az éves átlaghőmérséklet 12 °C.
b) Áprilisban, illetve májusban közelíti meg ezt a hőmérsékletet.
c) Januárban a legkisebb, augusztusban a legnagyobb az átlaghőmérséklet.
d) Márciusban.
e) Decemberben.

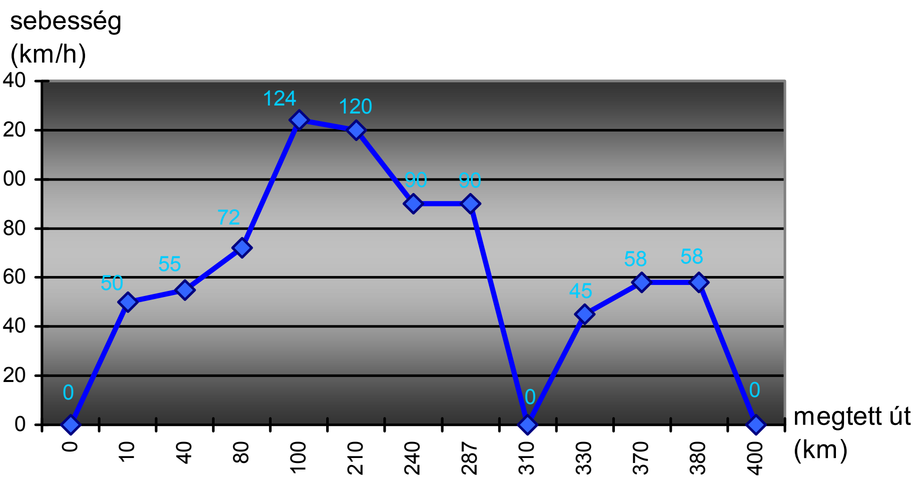
22. A helyi kisbusszal közlekedő utasok számának átlagos alakulása a nap folyamán:



a) Milyen időszakokban utaznak aránylag sokan, és melyekben kevesen? Ez átlagosan hány főt jelent? Mikor utaznak a legtöbben, és mikor a legkevesebben?
b) Hányan utaznak munkakezdés előtt (9 óráig)?
c) Átlagosan hányan utaznak naponta a busszal?
d) Mely időszakokban csökken az utasok száma?
e) Mely időszakokban nő az utasok létszáma?

Megoldás:
a) Aránylag sokan utaznak 9 és 10 óra között. Ez átlag 58 főt jelent. 17 és 18 óra között is sokan utaznak. Ez 57 főt jelent. Aránylag kevesen utaznak reggel 4 és 5 között (3 fő), 13 és 14 óra között (29 fő), illetve 23 és 24 óra között (3 fő). A legtöbben 9−10 óra között utaztak. A legkevesebben hajnali 4 és 5 között illetve éjjel 23 és 24 óra között utaztak a busszal.
b) Munkakezdés előtt összesen 114-en utaztak.
c) Átlagosan 649-en utaznak naponta ezzel a járattal. (Ez a függvényértékek összege.)
d) Az utasok száma 9 és 13 óra között, valamint 17 és 24 óra között csökken.
e) Az utasok száma 4 és 9 óra között, valamint 13 és 17 óra között növekszik.

23. Egy család az egyik hétvégén meglátogatta a 400 km-re lakó nagyszülőket. Útjuk a következőképpen alakult:



Amikor autópályán utaznak, akkor végig nagyobb a sebességük 100 km/h -nál.

a) Kb. hány km hosszú az a szakasz, amit autópályán tesznek meg? Mekkora volt a maximális sebességük?

b) Ha tudjuk, hogy az út 7 és fél órába telt, akkor mekkora volt az átlagsebesség? És mely útszakaszokon közelítette meg az autó sebessége ezt az átlagsebességet?

c) Hány km megtétele után álltak meg pihenni?

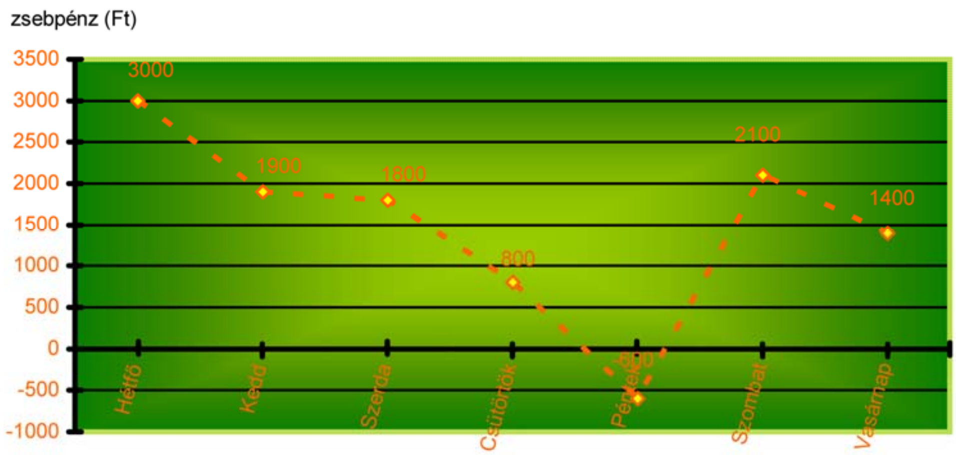
Megoldás:

a) Kb. 140 km -t tettek meg autópályán. A maximális sebességük 124 km/h volt.

b) Az átlagsebesség $v = \frac{400}{7{,}5} = 53{,}3\frac{km}{h}$. Ehhez közeli sebességgel 10 és 40 km, illetve 330 és 380 km közötti szakaszokon haladt.

c) 310 km megtétele után álltak meg pihenni.

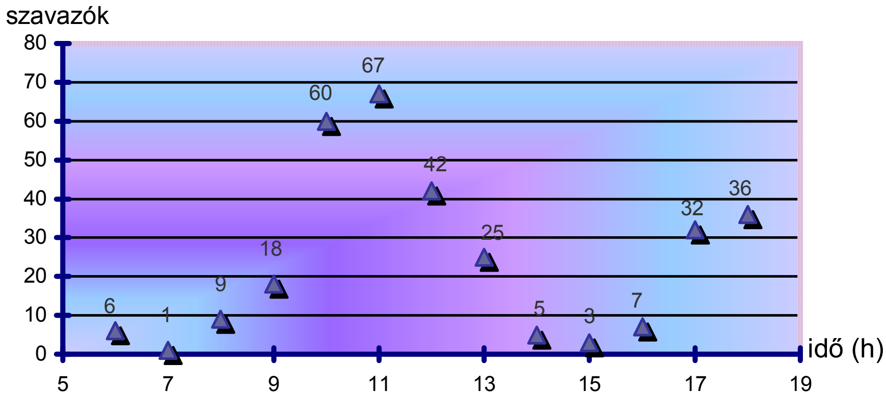
24. Jancsi heti zsebpénzének alakulása (az értékek a reggeli állapotot mutatják): Mennyit költött csütörtökön Jancsi? Melyik nap költött a legkevesebbet?



Megoldás:

Jancsi csütörtökön 1400 Ft-ot költött, azaz 600 Ft-ot valakitől kölcsön kért. Kedden költött legkevesebbet, mindössze 100 Ft-ot.

25. Népszavazás alkalmával reggel 6 és este 7 között jöhetnek szavazni a választópolgárok. A következő grafikon azt mutatja, hogy egy kis lélekszámú körzetben óránként átlagosan hányan szavaztak.



Hányan szavaztak aznap? Melyik időszakban voltak a legtöbben, illetve mikor volt pangás? Átlagosan hányan szavaztak 6-tól 9-ig, 9 és 13 óra között, illetve 13 óra után?

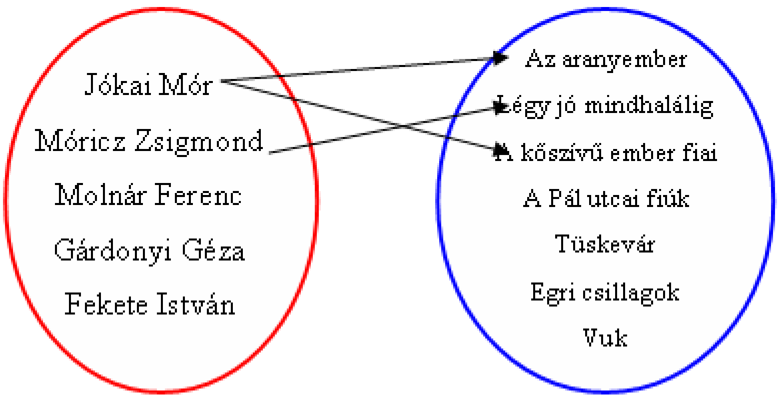
Megoldás:

Aznap 322-en szavaztak (függvényértékek összeadása). 10–11 között jöttek a legtöbben. 6-tól 9-ig illetve 14-től 16-ig volt pangás. 6 és 9 között átlagosan 5-en szavaztak óránként. 9 és 13 óra között 49-en, 13 óra után pedig óránként 15-en.

Feladatok ismétléshez

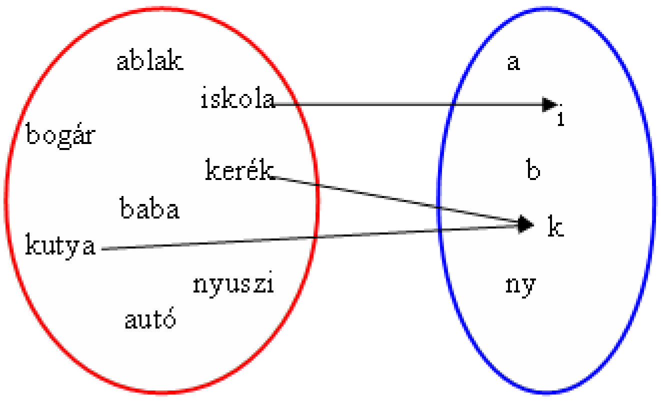
26. Válaszd ki a következő Venn-diagramokkal megadott hozzárendelések közül az egyértelműeket! Mi lehet a hozzárendelési utasítás? Rajzold be a hiányzó nyilakat!

a)



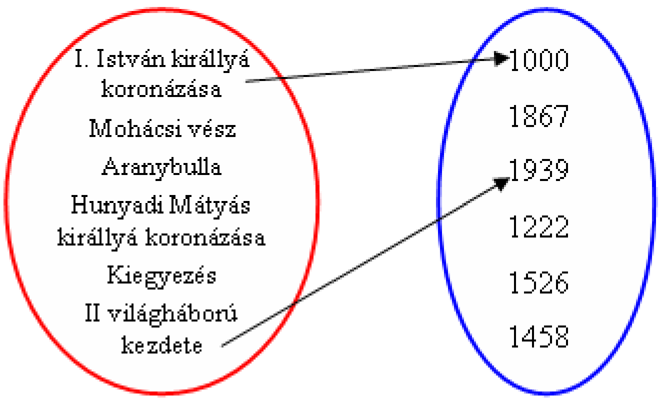
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: szerzőkhöz azok műveit rendeljük.

b)



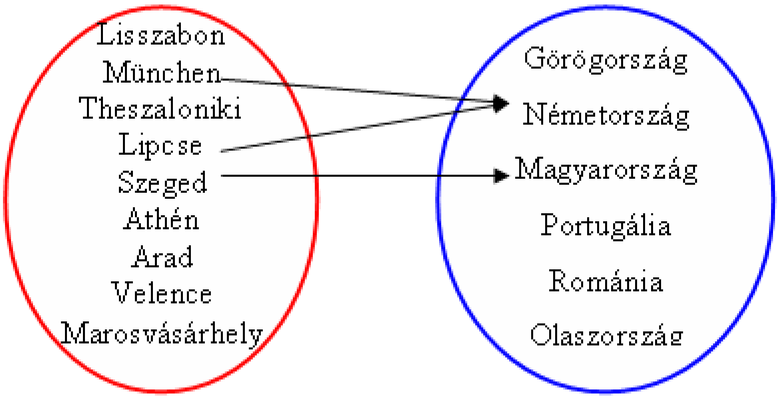
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: szavakhoz azok kezdőbetűit rendeljük.

c)



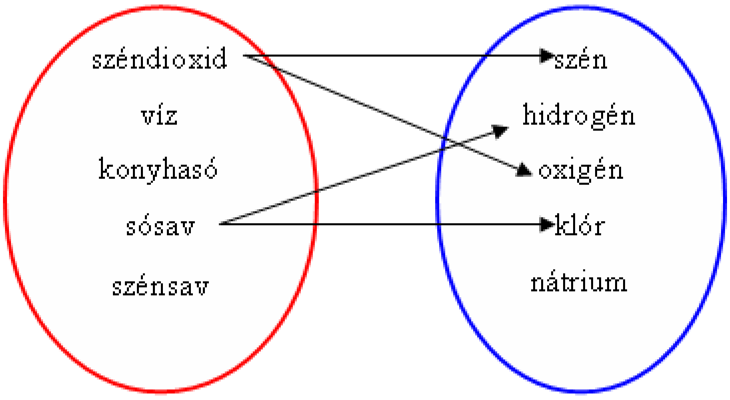
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: történelmi eseményekhez azok évszámát rendeljük.

d)



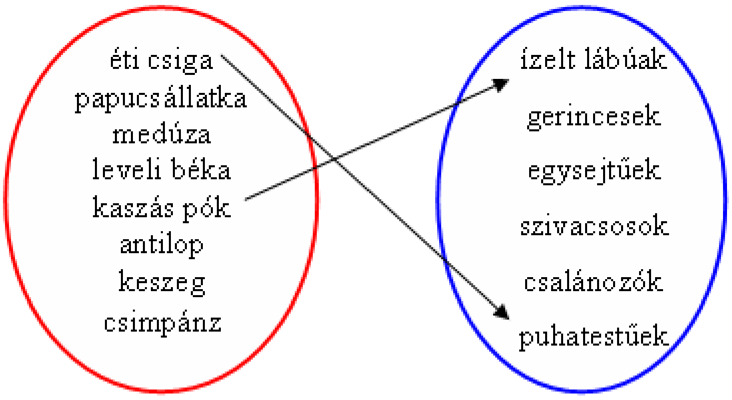
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: városokhoz hozzárendeljük azt az országot, amelyikben a város található.

e)



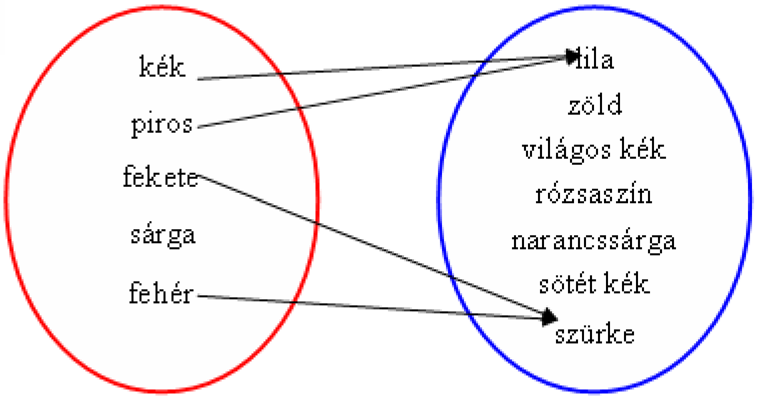
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: vegyületekhez azok alkotóelemeit rendeljük.

f)



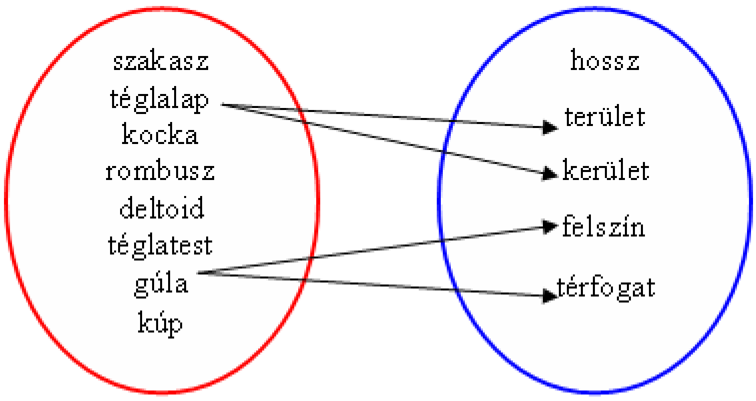
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: állatokhoz hozzárendeljük azt a törzset, amelyikbe tartozik.

g)



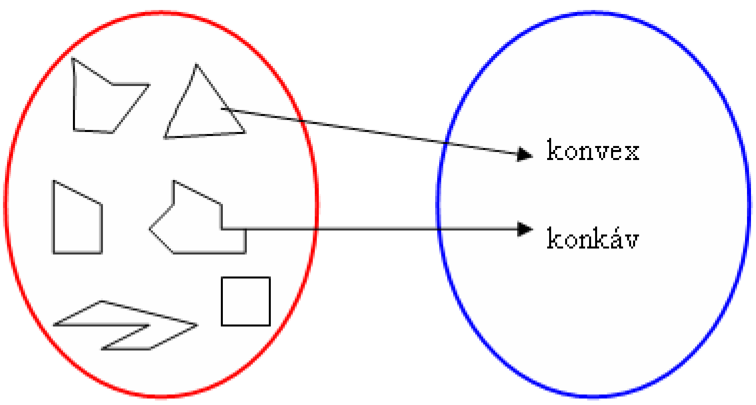
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: két színhez hozzárendeljük azt a színt, amelyet e kettő keverékéből kapunk.

h)



Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy sík vagy térbeli alakzathoz hozzárendeljük a bizonyos mértékeit.

i)



Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy síkidomhoz hozzárendeljük, hogy konvex vagy konkáv.

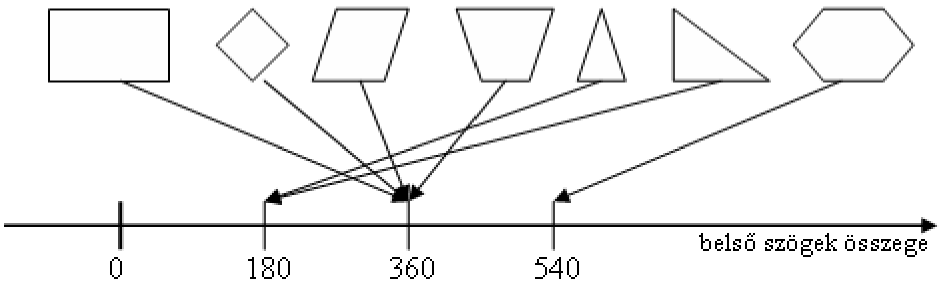
27. Az előző feladatból válaszd ki azokat a hozzárendeléseket, amelyeknek a megfordítása is egyértelmű hozzárendelés! (megfordítása = az alaphalmaz és a képhalmaz felcserélése)

Megoldás:

a) nem függvény, de ebben a feladatban a megfordítása az;
b) függvény, de a megfordítása nem az;
c) függvény, és ebben a példában a megfordítása is az;
d) függvény, de a megfordítása nem;
e) nem függvény (a megfordítása a felsorolt vegyületeknél kétváltozós függvény);
f) függvény, de a megfordítása nem;
g) kétváltozós függvény, de a megfordítása nem;
h) nem függvény, és a megfordítása sem;
i) függvény, de a megfordítása nem az.

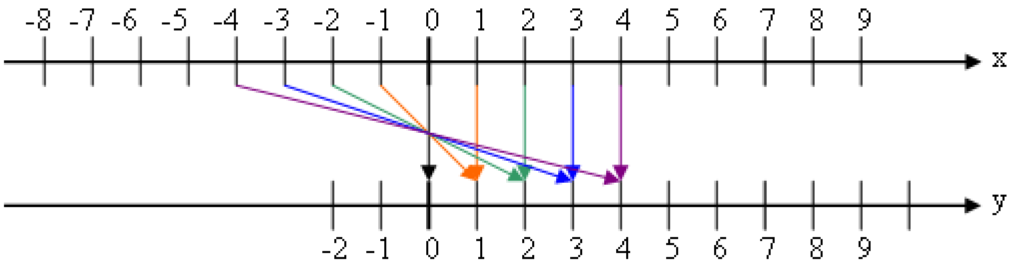
28. A következő, nyíldiagramokkal megadott ábrákból válaszd ki a függvényeket! Függvény esetén add meg az értelmezési tartományt, az értékkészletet, és a hozzárendelési utasítást!

a)



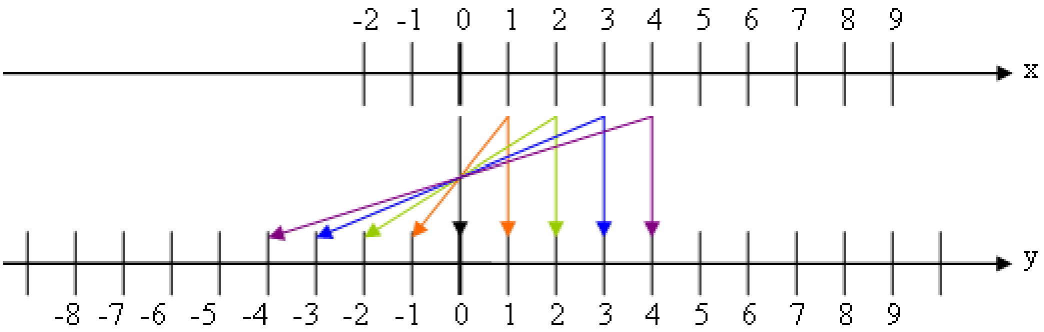
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: Egy síkidomhoz hozzárendeljük belső szögeinek összegét. (Az É:T. az adott hét síkidomból álló halmaz, az É.K. három elemű: 180˚, 360˚, 540˚ .)

b)



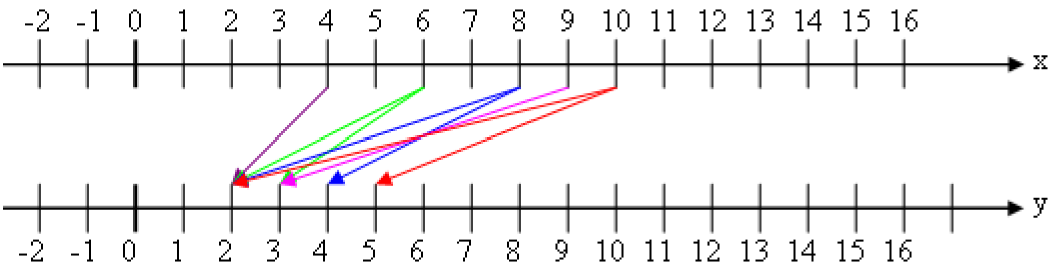
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy számhoz hozzárendeljük az abszolútértékét. (É.T.: egész számok halmaza, É.K.: nemnegatív egész számok)

c)



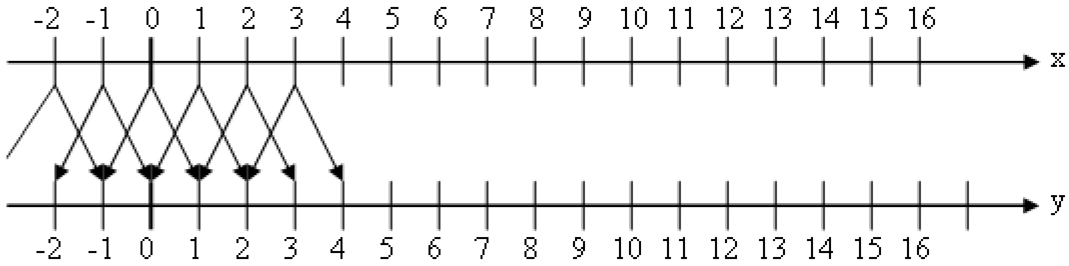
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy nemnegatív számhoz hozzárendeljük azokat a számokat, amelyeknek az adott szám az abszolútértéke. Nem függvény.

d)



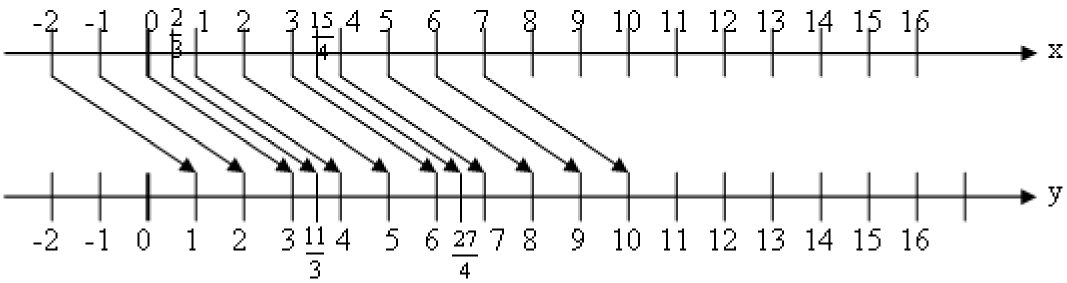
Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy számhoz hozzárendeljük a valódi osztóit. Nem függvény.

e)



Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy egész számhoz hozzárendeljük a szomszédait. Nem függvény

f)

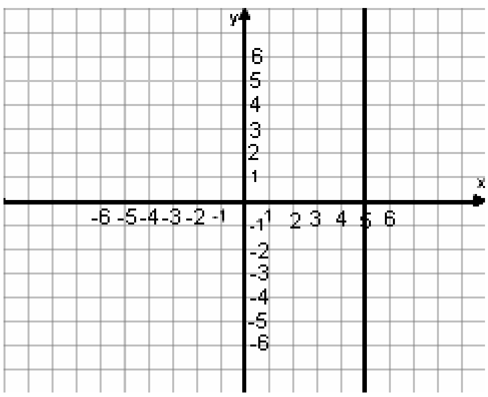


Megoldás: A hozzárendelési utasítás: egy számhoz hozzárendeljük a nála 3-mal nagyobbat. Kölcsönösen egyértelmű függvény, É.T. és É.K. is a teljes számegyenes.

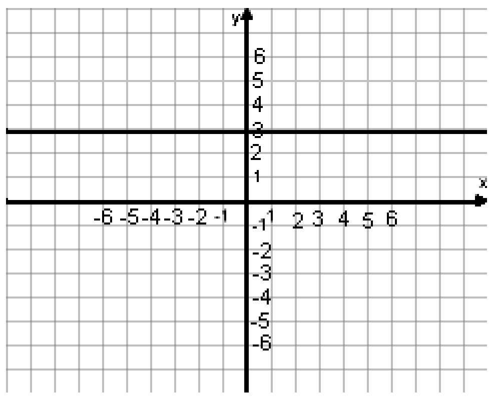
29. Válogasd ki a következő rajzok közül azokat, amelyek függvény grafikonjai lehetnek!

Olvasd le a függvénygrafikonok értelmezési tartományát és értékkészletét!

a)



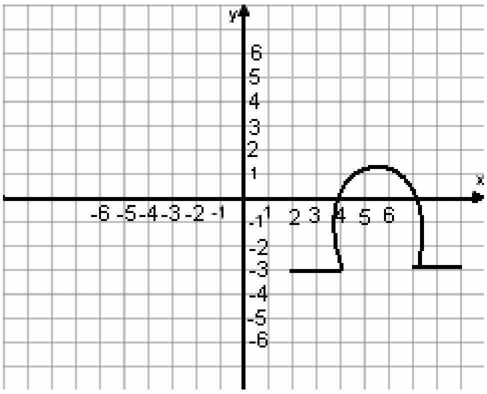
b)



Megoldás: Nem függvény

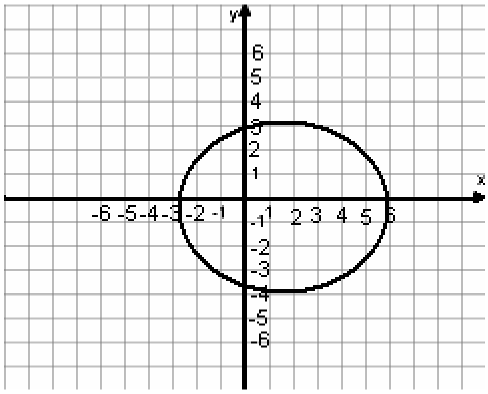
Függvény. É.T: *x* **R**; É.K: $f(x) = 3$

c)



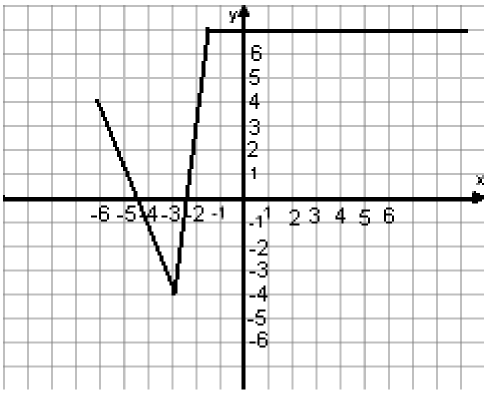
Megoldás: Nem függvény

d)



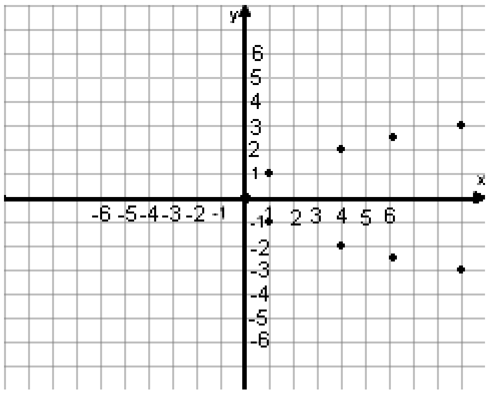
Nem függvény

e)



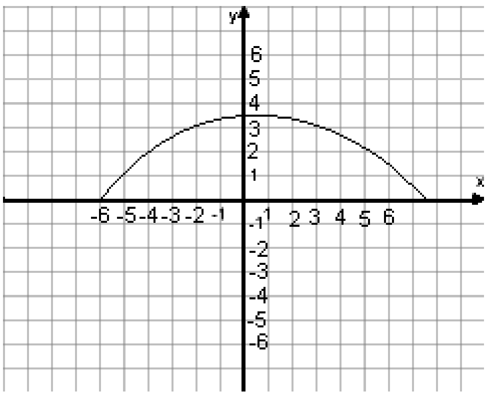
Megoldás: Függvény. É.T.:$x \quad -6$;
É.K.: $-4 \quad f(x) \quad 7$

f)



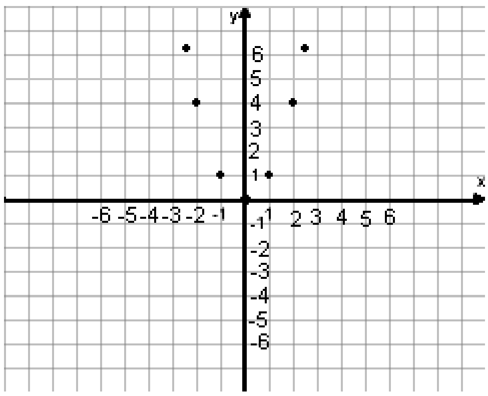
Nem függvény

g)



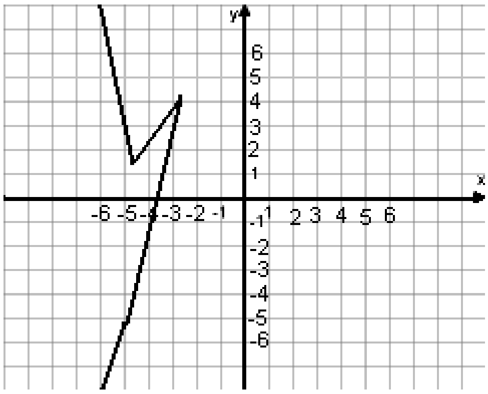
Megoldás: Függvény. É.T.: $-6 \quad x \quad 7{,}5$;
É.K.: $0 \quad f(x) \quad 3{,}5$

h)



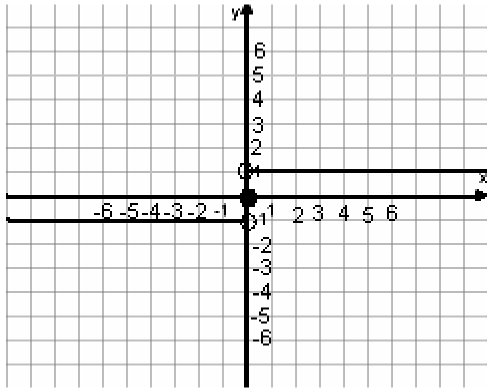
Függvény. É.T.: $x \quad \{-2{,}5;-2;-1;0;1;2;2{,}5\}$
É.K.: $f(x) \quad \{0;\ 1;\ 4;\ 6{,}25\}$

i)



Megoldás: Nem függvény

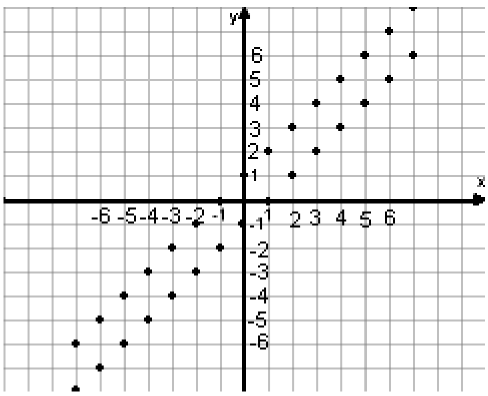
j)



Függvény: É.T.: x **R**;

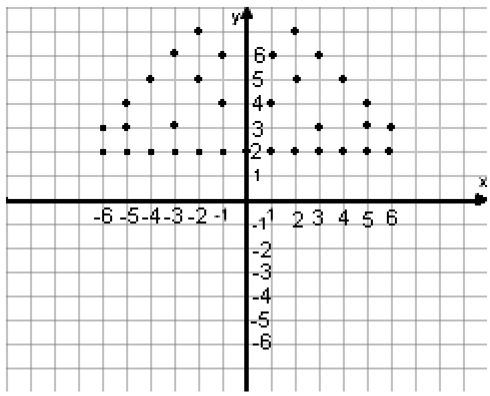
É.K.: $f(x)$ $\{-1;0;1\}$

k)



Megoldás: Nem függvény

l)



Nem függvény

Kislexikon

Egyértelmű hozzárendelés: az alaphalmaz minden eleméhez a képhalmaznak pontosan egy elemét rendeli hozzá.

Függvény: Az egyértelmű hozzárendelés. Jelölése lehet pl.: *f*, *g*, *h*, …..
A függvényt megadhatjuk táblázattal, grafikonnal, különböző nyíldiagrammal, képlettel, vagy egyéb utasítással. Azt a halmazt, amelynek az elemeihez hozzárendeljük a másik halmaz elemeit, **alaphalmaznak**, a másik halmazt, amelybe a hozzárendelt elemek tartoznak, **képhalmaznak** nevezzük**.** A **hozzárendelési szabály** (utasítás) adja meg a függvényt, amely szerint az alaphalmaz elemeihez **egyértelműen** hozzárendeljük a képhalmaz elemeit.

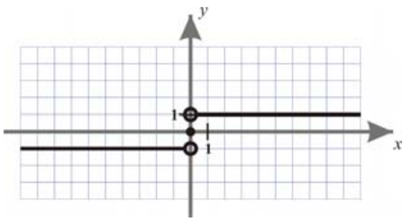
Értelmezési tartomány: az alaphalmaz azon elemeinek a halmaza, amelyekre a hozzárendelési szabály érvényes. Ez lehet maga az alaphalmaz is. Szokásos jelölése: É.T.
Az értelmezési tartomány elemeit szoktuk változóknak nevezni. Szám–szám függvény esetén *x*-szel szoktuk jelölni a változót.

Értékkészlet: a képhalmaz azon elemeinek a halmaza, amely értékeket a függvény felvesz. Ez lehet a teljes képhalmaz is. Szokásos jelölése: É.K. Elemei a függvényértékek.
Ez utóbbiakat $f(x)$-szel jelöljük, mely az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékét** jelenti.

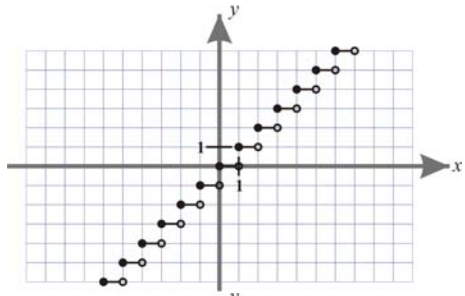
Kölcsönösen egyértelmű függvény: a mindkét irányban egyértelmű („megfordítható") függvény.

Előjelfüggvénynek nevezzük a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\begin{cases} 1, & ha\ x>0 \\ 0, & ha\ x=0 \\ -1, & ha\ x<0 \end{cases}$

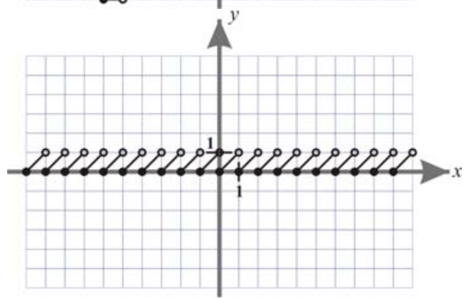
hozzárendelési utasítással megadott függvényt. Grafikonja:



Az x valós számnak az **egészrésze** az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb *x*-nél. Az egészrész jele: $[x]$. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = [x]$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **egészrész-függvény**nek nevezzük.



Ha egy számból elveszük az egész részét, akkor a **„törtrésze"** marad. Jelölése: $x - [x] = \{x\}$



A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \{x\}$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **törtrész-függvény**nek nevezzük.

Zérushely: az értelmezési tartományban az az x érték, ahol a függvény helyettesítési értéke 0 ($f(x) = 0$). Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a függvény grafikonja ezen a helyen metszi az x tengelyt.

Monotonitás:

– Az f függvény egy intervallumon **szigorúan (monoton) növekvő**, ha az intervallumból választott bármely $x_1<x_2$ hely esetén $f(x_1) < f(x_2)$, és monoton növekvő, ha $f(x_1) \le f(x_2)$

– Az f függvény egy intervallumon **szigorúan (monoton) csökkenő**, ha az intervallumból választott bármely $x_1<x_2$ hely esetén $f(x_1) > f(x_2)$, és monoton csökkenő, ha $f(x_1) \ge f(x_2)$

Abszolút maximum:
A függvénynek az x_0 helyen **abszolút maximuma** van, ha a függvény az $f(x_0)$ -nál nagyobb értéket sehol sem vesz fel.

Helyi (lokális) maximum: A függvénynek az x_0 helyen *helyi maximuma* van, ha az x_0 hely valamely környezetében az $f(x_0)$-nál a függvény nem vesz fel nagyobb értékét, de a környezeten kívül ennél nagyobb értéket is felvehet.

x_0 -t **maximumhely**nek, $f(x_0)$ -t **maximumérték**nek nevezzük.

Abszolút minimum:
A függvénynek az x_0 helyen **abszolút minimuma** van, ha a függvény az $f(x_0)$ -nál kisebb értéket sehol sem vesz fel.

Helyi (lokális) minimum: A függvénynek az x_0 helyen *helyi minimuma* van, ha az x_0 hely valamely környezetében az $f(x_0)$ -nál a függvény nem vesz fel kisebb értékét, de a környezeten kívül ennél kisebb értéket is felvehet.

x_0 -et **minimumhely**nek, $f(x_0)$ -t **minimumérték**nek nevezzük.

A függvény tulajdonságainak megállapításakor a következő szempontokat vesszük figyelembe:

1. Értelmezési tartomány meghatározása.
2. Értékkészlet meghatározása (csak egyszerűbb esetekben).
3. Zérushely(ek) megállapítása.
4. Monotonitás vizsgálata.
5. Szélsőérték(ek) és azok helyeinek meghatározása.