0892. MODUL

VALÓSZÍNŰSÉG, STATISZTIKA

Valószínűség

Készítette: Pintér Klára

A modul célja	Kombinatorika: összeadási szabály, vegyes összeszámlálási feladatok, különböző modellek esetén összes eset rendszeres felsorolása. Események, biztos, lehetetlen esemény fogalmának ismétlése, amihez kapcsolódik a skatulya elv gyakorlása. Gyakoriság, relatív gyakoriság alapján a valószínűség előzetes becslése, szemléletes fogalmának bevezetése.
Időkeret	5 óra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	Arányosság. Statisztika.
A képességfejlesztés fókuszai	Becslés, mérés, rendszerezés, kombinativitás, mennyiségi következtetések. Problémaérzékenység, kritikai gondolkodás. Valószínűségi gondolkodás.

AJÁNLÁS

A 6. osztályos kombinatorikát folytatjuk, ott a szorzási szabály alapján oldottunk meg feladatokat, most az összeadási szabály van soron. Ezután fontos, hogy a gyerekek vegyesen találkozzanak a kombinatorika feladatokkal, hogy ne akarjanak egyfajta módszert alkalmazni. Mindig az összes eset rendszeres felsorolásából induljanak ki a feladatok megoldásánál. A gyakoriságok elemzése után kombinatorikus úton meghatározzuk a megfelelő esetszámokat, ezzel támasztjuk alá a valószínűségi becsléseket. Ezzel tulajdonképpen a klasszikus valószínűségi mezőben számolunk valószínűséget kedvező esetek száma és az összes eset száma hányadosaként. Figyeljünk azonban azokra a kísérletekre, amikor a klasszikus valószínűségi modell nem alkalmazható!

TÁMOGATÓ RENDSZER:

Egyszerű játékok: dobókockák, korongok, számkártyák, feladatlapok.

ÉRTÉKELÉS:

A gyerekek folyamatos munkáját és végül a dolgozatot értékeljük.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Kombinatorika – összeadási szabály			
1.	Úthálózaton különböző útvonalak száma – összeadási szabály	Analízis, szintézis.	1. feladatlap.
2.	Gyakorlás – betűtáblák	Analízis, szintézis.	2. feladatlap.
3.	Bonyolultabb úthálózatok	Rendszerezés.	3. feladatlap.
II. Vegyes összeszámlálási feladatok			
1.	Kerek asztal, ismétlődés sorba rendezésekben, kiválasztási feladatok	Kombinatív képesség, rendszerezés.	Gyöngykészlet, fogvájó, drót 4. feladatlap.
2.	Vegyes feladatok	Kombinatív képesség, rendszerezés.	5. feladatlap.
III. Lehetséges, biztos, lehetetlen események – skatulya elv			
1.	Kísérletek a lehetséges, biztos, lehetetlen meghatározására	Valószínűségi gondolkodás.	6. feladatlap, gyöngyök (golyók), számkártyák.
2.	Gyakorlás	Általánosítás. Logikai képességek	6. feladatlap, négyszögek.

IV. Gyakoriság, relatív gyakoriság – valószínűség becslése			
1.	Gyakoriságok előzetes becslése – relatív gyakoriság – valószínűség	Valószínűségi gondolkodás, modellalkotás.	7. feladatlap. Számkártyák, dobókockák, korongok, érmék.

V. Gyakorlás			
1.	Vegyes feladatok		8. feladatlap.

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Kombinatorika – összeadási szabály

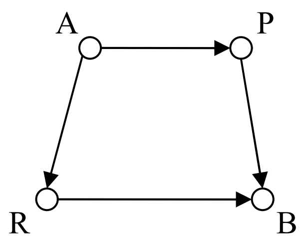
1. Úthálózaton különböző útvonalak száma – összeadási szabály

Az úthálózatokon a különböző útvonalak számát már korán elkezdik összeszámolni, de csak nagyon kis hálózatok esetén lehet ezt az összes eset felsorolásával megtenni, hiszen nehéz látni, hogy mely esetek a különbözők, kitalálni, hogyan jegyezzük fel az eseteket, és a rendszert, ami alapján biztosak lehetünk abban, hogy minden esetet felsoroltunk. Kézenfekvő megtanítani az összeadási szabályt, ám tapasztalatom szerint ez bizonyos életkor/szint alatt nem olyan egyszerű, ezért itt kis lépésekkel haladunk. Az egyszerű hálózatokon végigjárjuk az összes különböző útvonalat, utána keresünk szabályosságot! Ez azért is fontos, mert zavart szokott okozni, hogy mikor van szó két pont közti összes lehetséges útvonalról és mikor az útvonalak egyes szakaszairól. Azoknak a gyerekeknek, akiknek ez gyorsan, egyszerűen megy, biztosítjuk a következő pontban a továbblépést a Pascal háromszög és tulajdonságai felé. Érdemes végighaladni a triviálisnak tűnő feladatokon is, mert ezekből lehet majd összerakni az általános megoldási módszert.
Az itt következő feladatokat fel lehet dolgozni csoportokban játékként úgy, hogy körbe haladnak, és +1 pontot kap, aki tud új esetet rakni, 0 pontot, aki nem és –1 pontot, aki olyan esetet rak, ami már volt (6. osztályban szerepeltek ilyen játékok). Kicsit nehézkes körben ülve jól látni a másik által rajzolt útvonalakat. A tanulói munkafüzet feladatai megoldhatók egyéni vagy csoportmunkában is.
Ha a gyerekek igénylik, fel lehet rajzolni fagráffal az összes esetet, de félő, hogy a kétféle „nyíldiagram”, az utak és a gráfos ábrázolás megkavarja a gyerekeket, viszont lehetnek olyanok, akiknél pont ezzel tisztázzuk a problémát.

1. FELADATLAP

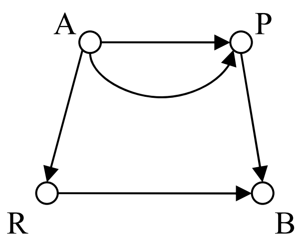
Hányféleképpen juthat el András Bencéhez az alábbi úthálózatokon, ha mindig a nyilak mentén halad a nyílnak megfelelő irányba (két útvonal különböző, ha van olyan útszakasz, amelyikben eltérnek)?

a)



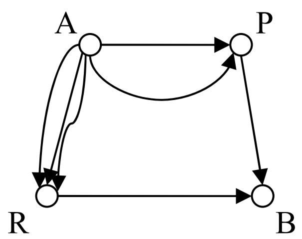
A P vagy az R pontokon keresztül haladhat, ez 1+1=2 lehetőség.

b)



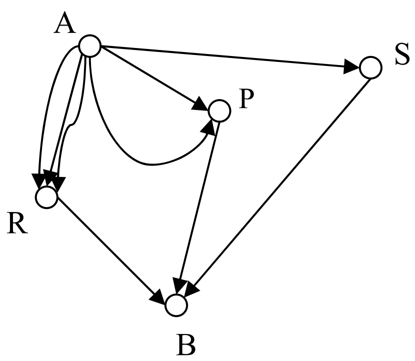
Most P-be 2-féleképpen juthat A-ból, így P-n keresztül 2-féleképpen juthat A-ból B-be. R-en keresztül most is egyféleképpen juthat A-ból B-be, így összesen 2+1=3 különböző útvonalon lehet A-ból B-be jutni.

c)



Most P-be kétféleképpen, R-be háromféleképpen juthatunk, így A-ból P-n keresztül 2 útvonal vezet B-be, R-en keresztül 3 útvonal, mivel A-ból B-be mehetünk vagy P-n vagy R-en keresztül, így összesen 2 + 3 = 5-féle útvonal vezet.

d)



A-ból B-be vagy S-en vagy P-n vagy R-en keresztül mehetünk. S-en keresztül 1-féleképpen, P-n keresztül 2-féleképpen, R-en keresztül 3-féleképpen juthatunk A-ból B-be, így összesen 1+2+3=6-féle különböző útvonal van.
Tapasztalatok összefoglalása: A közös esetet nem tartalmazó részek elemszámai összeadódnak.
Hasonló úthálózatokon az összeadási szabály alapján lehet az útvonalak számát megadni:

- mindegyik pont mellé az a szám kerül, ahányféleképpen a kezdőpontból oda lehet jutni.
- egy pontba annyiféleképpen lehet jutni, amennyi azon pontok mellé írt számok összege, ahonnan ebbe a pontba közvetlenül (egy nyílon) eljuthatunk.

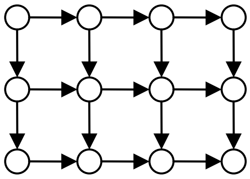
2. Gyakorlás – betűtáblák

Bár az összeadási szabály kényelmes, formális megtanulása hiba lenne, tudni kell feladatokban megfelelően alkalmazni. Közben mindig figyeljünk arra, hogy hogyan lehetne az összes útvonalat rendszeres felsorolással összeszámolni. Ezt a célt szolgálják a következő feladatok.

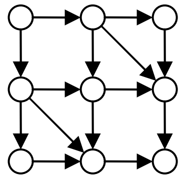
2. FELADATLAP

1. Hányféleképpen lehet eljutni az alábbi úthálózatokon a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba, ha csak a nyilak mentén haladhatunk? Soroljuk fel az összes útvonalat!

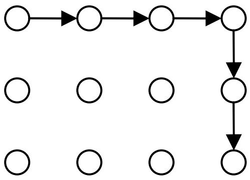
a)



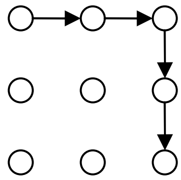
b)



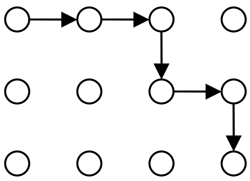
Az összes útvonalat felsorolhatjuk rajzzal, vagy a J, L betűkkel (a b)-nél lehet F a ferde), ahol a J jelenti a jobbra haladást, az L a lefele haladást. Ez a fajta felsorolás a későbbiekben (11. osztályban) a binomiális együtthatókkal való kapcsolathoz hasznos lesz.



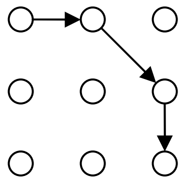
JJJLL



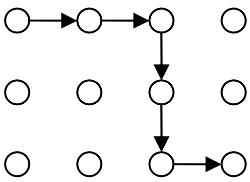
JJLL



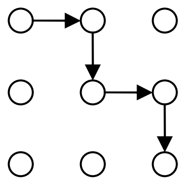
JJLJL



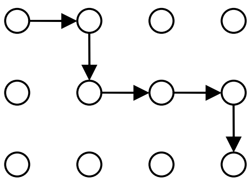
JFL



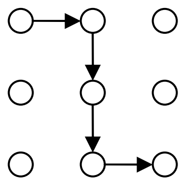
JJLLJ



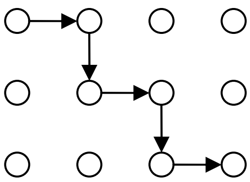
JLJL



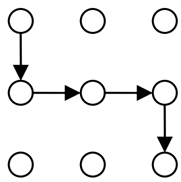
JLJJL



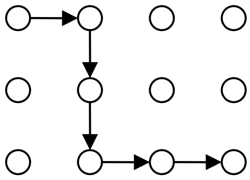
JLLJ



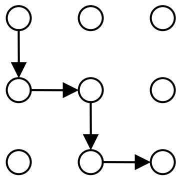
JLJLJ



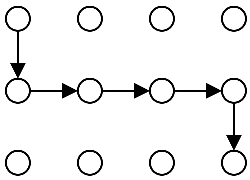
LJJL



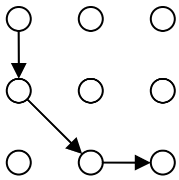
JLLJJ



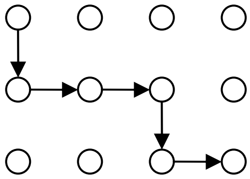
LJLJ



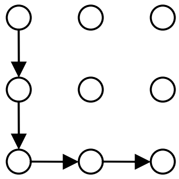
LJJJL



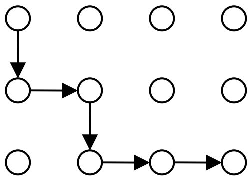
LFJ



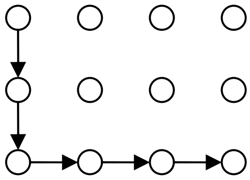
LJJLJ



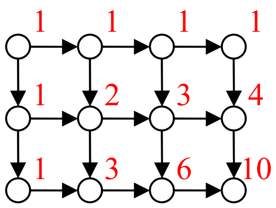
LLJJ

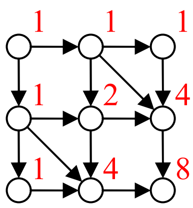


LJLJJ



LLJJJ





2. Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi betűtáblákból a megfelelő szavakat?

a)

A N D
N D R
D R Á
R Á S

A N D
1 1 1
N D R
1 2 3
D R Á
1 3 6
R Á S
1 4 10

b)

B E N C E
E N C E
N C E
C E
E

B E N C E
1 1 1 1 1
E N C E
1 2 3 4
N C E
1 3 6
C E
1 4
E
1

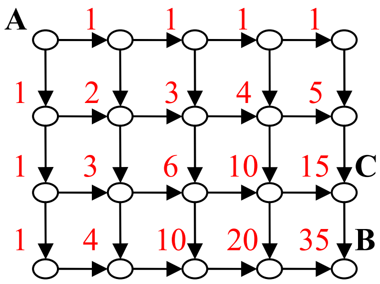
ANDRÁS nevét 10-féleképpen, BENCÉ-t 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16-féleképpen lehet kiolvasni. BENCE kiolvasásakor mindegyik betűnél (az utolsó kivételével) választhatunk, hogy lefele vagy jobbra megyünk. Így 4 alkalommal választunk 2 lehetőség közül, ezért a lehetőségek száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$. A BENCE név esetén a betűk mellé írt számok a Pascal háromszöget adják. Meg lehet figyelni a Pascal háromszög szimmetriáját.

3. Bonyolultabb úthálózatok

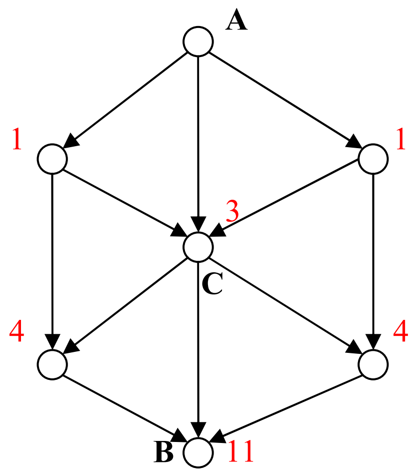
A következő feladatokra akkor kerül sor, ha marad idő az előzőek után, vagy gyorsabban haladó gyerekeknek külön adhatók. A feladatok az előző szabály alapján megoldhatók, csak nem automatikusan.

3. FELADATLAP

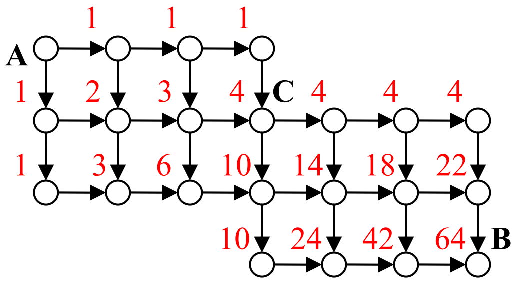
1. Hányféleképpen juthatsz a nyilak mentén A-ból B-be? Ezek közül hány út megy át C-n?



B-be 35, C-n át 15

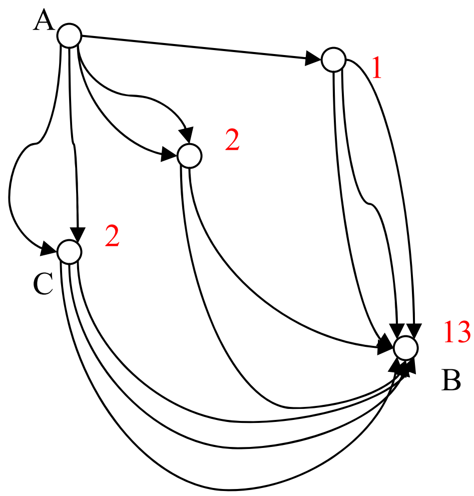


B-be 11, C-n át 9



B-be 64, C-n át 30.

C: 4	4	4	4
4	8	12	16
4	12	24	30



B-be 13, C-n át 6.

2. Hányféleképpen lehet kiolvasni a városneveket az alábbi táblázatokból, ha mindegyik betűből csak lefele, eggyel balra lefele vagy eggyel jobbra lefele lehet menni?

K
E E E
C C C C C
S S S S S S S
K K K K K K K K K
E E E E E E E
M M M M M
É É É
T

S S S S S
Z Z Z
O
M M M
B B B B B
A A A A A A A
T T T T T T T T T
H H H H H H H
E E E E E
L L L
Y

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
15 30 45 51 45 30 15
90 126 141 126 90
357 393 357
1107

1 1 1 1 1
3 3 3
9
9 9 9
9 18 27 18 9
9 27 54 63 54 27 9
9 36 90 144 171 144 90 36 9
135 270 405 459 405 270 135
810 1134 1269 1134 810
3213 3537 3213
9963

3. Rajzoljatok egymásnak nyilakból hálózatokat, válasszatok ki két pontot és számoljátok össze, hányféleképpen lehet egyikből a másikba jutni.
- Van-e olyan pont, amelybe nem lehet eljutni?
- Figyeljétek meg, hogy melyik pontból hány nyíl indul, és hány érkezik!
- Rögzítsétek előre, hogy pontonként hány nyíl induljon, és hány érkezzen! Mikor lehet megfelelő úthálózatot rajzolni és mikor nem?

II. Vegyes összeszámlálási feladatok

1. Kerek asztal, ismétlődés sorba rendezésekben, kiválasztási feladatok

A következő feladatokhoz négyféle színű gyöngyre van szükség, mindegyik színből 25 db, ennyi fogpiszkáló (a gyöngyöket fel lehessen húzni a fogpiszkálóra), 7 rövid drót, ezekre szintén fel lehet fűzni a gyöngyöket. Kétféle színű gyurma is szükséges, ezekkel jelezzük a sorok elejét és a végét. A tanulók csoportokban játszanak a szokásos módon: mindenki kirak egy újabb esetet, ez 1 pontot ér, ha nem tud rakni, 0 pont, ha olyat rak, ami már volt, az –1 pont. A feladatok a sorbarendezést (1. feladat – ismétlés, 2. feladat - módosított), a körben sorbarendezést (3. feladat), az ismétléssel sorbarendezést (4. feladat) és a kiválasztási problémát gyakoroltatják(4/c). A 3. feladatnál az összes lehetőséget rajzolják le a füzetbe lehetőleg rendszerben. A 4. feladatnál a két színből a lehetőségek számát és a két színkiválasztását külön rajzoljuk le, a gráfos ábrázolásból következik a szorzás. Mivel összesen 96 lehetőség van, nem is lehet játszani (nincs elég gyöngy).

4. FELADATLAP

1. A fogpiszkálókra rakjunk ki négy különböző színt, a fogpiszkáló elejét az egyik színű, a végét a másik színű gyurma jelzi. Két eset akkor különböző, ha valamelyik helyen eltérő színű gyöngy van.
$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

2. Hogyan változik az esetek száma, ha a fogpiszkálók elejét és végét nem különböztetjük meg (ugyanolyan színű gyurma van rajta)?
Megfordítva mindegyiknek van párja, így az előző lehetőségek fele: $4\cdot3\cdot2\cdot1/2=12$

3. Húzzunk négy különböző színű gyöngyöt egy drótra! A drót két végének összetekerésének helyét ne vegyük figyelembe.

a) A feladatot oldjuk meg úgy, hogy a gyöngysor megfordítható. Ekkor két gyöngysor különböző, ha van olyan gyöngy a megfordított gyöngysoron, amelyiknek legalább az egyik szomszédja eltér az eredetitől. Nem számít, hogy bal- vagy jobbszomszéd.

b) A feladatot oldjuk meg úgy is, hogy a gyöngysor nem megfordítható. Ekkor két gyöngysor akkor különböző, ha van olyan gyöngy, amelyiknek a bal- vagy a jobbszomszédja eltér az eredetitől.

Első esetben 3, a másodikban 6 lehetőség van. Érdemes megfigyelni, melyek azok a különböző fogpiszkálók, amelyeken levő gyöngyöket drótra fűzve ugyanazt a kört adják.

4. a) Két darab kék és két darab piros gyöngyöt hányféleképpen rakhatunk sorba? 6

b) I) Piros és kék gyöngyökből hány különböző 4-elemű sor rakható ki, ha két sor akkor különböző, ha valamelyik helyen eltérő színű gyöngy van, és megengedjük, hogy egy sorban csak egyféle szín legyen? $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

II) Piros és kék gyöngyökből hány különböző 4-elemű sor rakható ki, ha két sor akkor különböző, ha valamelyik helyen eltérő színű gyöngy van, és megkívánjuk, hogy egy sorban mindkét színből legyen legalább egy? $16 - 2 = 14$

c) Piros és kék gyöngyökből hány különböző 4-elemű sor rakható ki, ha bármelyik két színt választhatjuk a négy közül a négy gyöngyből álló sor kirakásához és megengedjük, hogy egy sorban csak egyféle szín legyen?

Rögzített két színnél 16 lehetőség van, a két színt 6-féleképpen választhatjuk ki, így $16 \cdot 6 = 96$ lehetőség van.

2. Vegyes feladatok

A gyerekek egyéni munkában oldják meg saját tempójukban a feladatokat az előző játékok mintájára.

5. FELADATLAP

1. Négy lány kör alakú asztal körül ül. Távol levő barátnőjüknek Bori így számol be az ülésrendről: Anna egyik szomszédja Csilla, akinek balján Enikő ül. Az asztal körül ülés sorrendjében, az óramutató járásával egy irányban egymás után felsorolva a lányokat, az alábbiak közül melyik sorrend a helyes (a lányok nevét kezdőbetűjükkel jelöljük)? Rajzoljátok le az ülésrendet! Keressétek meg az összes különböző ülésrendet (két ülésrend különböző, ha valakinek más a bal- vagy jobbszomszédja)!

(A) BACE (B) AECB (C) EBAC (D) CEBA (E) ABEC (F) ACEB

Az ülésrendek lerajzolása mellett érdekes, hogy 4-féleképpen lehet helyesen egymás után felsorolni a neveket, hiszen 4 helyen kezdhetem a felsorolást. Ez jól mutatja, hogy az egyenes asztalnál levő sorrendek negyedrésze lesz a kerek asztalnál levő sorrendek száma, de ezt most még nem kell tudni a gyerekeknek.

2. Kati egy deltoidon különböző transzformációkat hajtott végre. Az ABCD deltoid megfelelő csúcsait továbbra is ugyanezekkel a betűkkel jelölte (A képe az A). Ezután felsorolta a kapott alakzatok csúcsait ugyanazzal a körüljárási iránnyal, mint először. A következőket kapta:

(A) BCDA (B) DCBA (C) CDAB (D) BCDA (E) DABC (F) ADCB

Melyik lehetett tengelyes tükrözés és melyik középpontos tükrözés?

Tengelyes tükrözésnél megfordul a körüljárási irány: (B), (E), (F)

Középpontos tükrözésnél nem fordul meg a körüljárási irány: (A), (C), (D).

3. A pénztárcánkban 10, 20 és 50 forintos pénzérmék mindegyikéből legalább három van. Ha 3 érmét kiveszünk, hányféle lehet az összeg? Melyik kerek tízes összeget nem lehet kifizetni 30 és 150 Ft között 3 érmével?
10-féle összeg: 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 110; 120; 150. Nem fizethető ki a 100; 130 és 140 Ft.

4. A 0; 1; 2; 3 számkártyákból négyjegyű számokat rakunk ki (mindegyik kártyából 1 db van). Hány olyan szám van, amely

a) 4-gyel osztható; 20; 12; 32 lehet a végződés, így 4 szám lehet.
b) 3-mal osztható; Számjegyek összege 6, így mind ilyen: 3·3·2·1=18 db.
c) 6-tal osztható? Nem jók, amik 1-re végződnek, ilyen 4 db van, marad 14 szám.

Hogyan változik a lehetőségek száma, ha a kártyák:

I) 0; 2; 2; 2. 4-gyel osztható 1 van, 3-mal osztható 3 van, ezek 6-tal is oszthatók.
II) 0; 2; 2; 4. 4-gyel osztható végződése: 20 (2 db); 40; 04; 24, ez 5 lehetőség; 3-mal és így 6-tal osztható nem lehet.

5. A 4 fős csoportból hányféleképpen választhattok ki 2 gyereket, aki megtartja az előadást? Hogyan változik ez a szám 5 fős csoport esetén?
Gráffal, felsorolással 4 főből kettőt 6-féleképen, 5-ből pedig 10-féleképpen választhatunk ki.

6. Feri 4 játékot játszik egymás után. 256 Ft-tal kezd, és ha nyer, a pénze a felével nő, ha veszít, akkor a felére csökken. Mennyi pénze lehet a végére?

4 vereség: $256\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=16$

1 győzelem, 3 vereség: $256\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=48$

2 győzelem, 2 vereség: $256\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=144$

3 győzelem, 1 vereség: $256\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=432$

4 győzelem: $256\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4=1296$

Lényeges, hogy a végösszeg szempontjából nem fontos, hogy milyen sorrendben jöttek a vereségek és a győzelmek!

III. Lehetséges, biztos, lehetetlen események – skatulya elv

A következő feladatok mindegyikét lehet játszani, az első kettőt mindenképpen érdemes. A feladatok sorrendje a gyerekeknek megfelelően változtatható. A lehetséges, lehetetlen, biztos gyakorlása mellett fontos a skatulya elv gondolatának megismerése, a megoldások indoklásának módja – nem szerencsés a legrosszabb eset elnevezés, mert sokszor nem lehet tudni, mi a legrosszabb. A skatulya elv formális megfogalmazását nem tartom szükségesnek. Az anyagrész jó lehetőséget kínál a matematika más részeinek gyakorlására: logika, oszthatóság, négyszögek csoportosítása, halmazok. Követeljük meg, hogy a „lehetséges” indoklásakor mutassanak példát olyan esetre is, amikor bekövetkezett, és olyanra is, amikor nem következett be az esemény. Célszerű ezeket szöveggel leíratni a füzetbe. Ezzel a tagadásokat is jól tudják gyakorolni a gyerekek.

1. Kísérletek a lehetséges, biztos, lehetetlen meghatározására

A gyerekek csoportban dolgoznak, a kísérletek elvégzése segít a feladatok kérdéseinek megválaszolásában. A lehetséges, lehetetlen, biztos meghatározása után érdekesek azok a kérdések, hogy legkevesebb mennyit vegyünk ki, hogy biztosan bekövetkezzen valami, ez a kapcsolat így nem egyszerű a gyerekeknek, hajlamosak a lehetségessel keverni. A 4. feladat négyszögeit konkrétan készítsük el(csoportonként egy kupac), az alapján dolgozzanak a gyerekek.

6. FELADATLAP

1. Egy zacskóban 2 sárga, 1 kék és 5 zöld golyó van. Becsukott szemmel kiveszünk 4 golyót (visszatevés nélkül). Mit mondhatunk a következő eseményekről: lehetséges, lehetetlen vagy biztos? Végezzük el a kísérletet 10-szer, jegyezzük fel, melyik hányszor fordult elő, utána válaszoljunk!

(A) Mind egyszínű. Lehet mind zöld.
(B) Van két egyszínű. Biztos, mert csak 3-féle szín van és 4-et húzunk.
(C) Nincs közte zöld. Lehetetlen, mert nem zöld csak 3 golyó van.
(D) Mind sárga vagy kék. Sárga vagy kék csak 3 van, ezért lehetetlen.
(E) Mind különböző színű. Lehetetlen, mert csak 3 szín van és 4 golyó.
(F) Mindegyik színből húztunk. Lehetséges.
(G) Ha az első 3 kihúzott golyó között nincs zöld, akkor a 4. golyó zöld.
Biztos, mert már csak zöld maradt.

Válaszoljunk a következő kérdésekre:
Legkevesebb hány golyót kell kivenni, hogy a kihúzottak között biztosan legyen

a) két egyszínű golyó?
Ha mindhárom színből húztunk, a 4. már biztosan egyezik valamelyik korábban húzott színnel, így 4-et.

b) sárga golyó?
7-t: 6 golyót még húzhatunk úgy, hogy 1 kék és 5 zöld, a 7. már biztosan sárga lesz.

c) legalább 3 zöld golyó?
6-ot: 5 golyót még húzhatunk úgy, hogy 2 sárga, 1 kék és 2 zöld, de már csak zöld golyó marad, így a 6. golyó biztosan zöld.

2. Van 9 darab számkártyánk: 0, 1, 2,…9. Kihúzunk közülük 4 kártyát. Mit mondhatunk a következő eseményekről: lehetséges, lehetetlen vagy biztos? Végezzük el a kísérletet 10-szer, jegyezzük fel, melyik hányszor fordult elő, utána válaszoljunk!

(A) A kihúzott számok összege osztható 3-mal.
Lehetséges: 1+2+3+6 osztható, de 1+2+3+4 nem osztható.

(B) A kihúzottak közt nincs 3-mal osztható szám.
Lehetséges: nincs 3-mal osztható: 1; 2; 4; 5, van 3-mal osztható: 1; 2; 3; 4)

(C) Mindegyik kihúzott szám osztható 3-mal.
Lehetséges, mert csak 4 db 3-mal osztható számjegy van, a 0; 3; 6; 9, de a 0; 3; 6; 7-re nem igaz, hogy mindegyik osztható 3-mal. Hangsúlyozzuk, hogy a 0 osztható 3-mal!

(D) A kihúzottak közt van két szám, melyek különbsége osztható 3-mal.
Biztos, mert 3-mal osztva 3-féle maradék van: 0, 1, 2, így a 4 szám közt kell legyen két azonos maradékú, melyek különbsége osztható 3-mal. Hagyjuk a gyerekeket megtapasztalni ezt a tényt, sok esetből próbálgatással felfedezni, ugyanis elég nehéz!

(E) A kihúzottak közt van két szám, melyek összege osztható 3-mal.
Lehetséges, például 1; 2; 3; 4 számokra igaz, 1+2=3, de a 2; 3; 5; 8; számokra nem igaz. Érdemes megint a maradékok alapján példákat keresni az alapján, hogy 1-es és 2-es maradékú számok összege osztható 3-mal.
Válaszoljunk a következő kérdésekre:
Legkevesebb hány számkártyát kell kivenni, hogy a kihúzottak között biztosan legyen
a) 3-mal osztható szám;
4 szám osztható 3-mal, 6 nem osztható, így legkevesebb 7-et kell kivenni, hogy biztosan legyen olyan, amelyik osztható 3-mal, ugyanis ha csak 6-ot veszünk ki, még mindig lehet, hogy a 6 nem oszthatót vettük ki.
b) 3-mal nem osztható szám;
Az előbbiek alapján legkevesebb 5 számot kell kivenni)
c) két szám, amelyek összege osztható 3-mal?
Két szám összege akkor osztható 3-mal, ha vagy mindkettő osztható 3-mal, vagy az egyik 1, a másik 2 maradékot ad 3-mal osztva. Így ahhoz, hogy négy szám közt ne legyen kettő, melyek összege osztható 3-mal, legfeljebb egy 3-mal osztható lehet, és mellette vagy az összes 1 maradékot adó, vagy az összes 2 maradékot adó. Ezekből 3-3 van, így 4 számot még kihúzhatunk, hogy ne legyen köztük kettő, melyek összege osztható 3-mal, de 5-nél már biztosan van két ilyen szám.

3. Lottózzunk! A mi lottónknál 6 számból 4-et húznak ki. Játsszunk, és figyeljük, hányszor lesz 0; 1; 2; 3; 4 találatunk! Mit mondhatunk a következő eseményekről: lehetséges, lehetetlen vagy biztos?
(A) 4 találatunk van. Lehetséges.
(B) pontosan 3 találatunk van. Lehetséges.
(C) pontosan 2 találatunk van.
Biztos, ez elég meglepő, ne is áruljuk el a gyerekeknek, hagyjuk, hogy ők döbbenjenek rá, ugyanis a 6 szám közül csak 2 rossz, vagyis amit nem húztak ki, így a 4 tippünk közül legfeljebb 2 lehet rossz, a másik 2 biztosan jó.
(D) pontosan 1 találatunk van. Lehetetlen az előbbi miatt.
(E) nincs találatunk Lehetetlen az előbbi miatt.
Legkevesebb hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen legalább
a) 2 találatunk? 1
b) 3 találatunk?
Amelyik szelvény nem legalább 3 találatos, az pont 2 találatos. 2 találatnál 2 rossz szám közül 2-t 1-féleképpen, 4 jó szám közül 2-t 6-féleképpen lehet kiválasztani, így $1 \cdot 6 = 6$-féle pont 2 találatos szelvény van. Ha 6+1=7 szelvényt töltünk ki, akkor biztosan van közte legalább egy legalább 3 találatos szelvény.
c) 4 találatunk?
Összesen a 6 szám közül 4-et annyiféleképpen választhatunk, mint a 2 kimaradót, azaz $6 \cdot 5/2 = 15$-féleképpen. Ezek közül 1 a 4 találatos, így mind a 15 lehetőséget meg kell játszani ahhoz, hogy biztosan legyen 4 találatosunk.)

2. Gyakorlás

4. Egy zacskóban a következő négyszögekből van egy-egy: trapéz (amelyik nem paralelogramma és nem húrtrapéz), húrtrapéz (nem téglalap), paralelogramma (nem téglalap és nem rombusz), téglalap (nem négyzet), rombusz (nem négyzet). Ezek közül húzunk egyet. Mit mondhatunk a következő eseményekről: lehetséges, lehetetlen vagy biztos?
(A) tengelyesen szimmetrikus. Lehetséges: húrtrapéz, téglalap, rombusz.

(B) középpontosan szimmetrikus. Lehetséges: paralelogramma, téglalap, rombusz.
(C) van párhuzamos oldalpárja. Biztos, mert mindegyik trapéz.
(D) van két egyenlő hosszúságú oldala. Lehetséges, a trapéz kivételével mind.
(E) rombusz és téglalap. Lehetetlen, mert nincs köztük négyzet.
(F) rombusz vagy téglalap. Lehetséges: rombusz, téglalap.

Legkevesebb hány alakzatot kell kivenni (látva őket) és melyeket, hogy a zacskóból egyet véletlenszerűen kihúzva a fenti események biztosak legyenek?

(A) 2: trapéz, paralelogramma
(B) 2: trapéz, húrtrapéz
(C) 0
(D) 1: trapéz
(E) nem lehet
(F) 3: trapéz, húrtrapéz, paralelogramma

5. A 26 fős osztályban mindenki tanul angolul vagy franciául, 20-an tanulnak angolt, és 17-en franciát. Legkevesebb hány gyereket kell véletlenszerűen kiválasztani, hogy biztosan legyen köztük olyan, aki

a) csak angolul tanul; 17 tanul franciául, 18-at kell kiválasztani.
b) csak franciául tanul; 20 tanul angolul, 21-et kell kiválasztani.
c) angolul is és franciául is tanul. 20+17 - 26 =11 tanulja mindkét nyelvet, 26 – 11=15 csak egy nyelvet, így 16-ot kell kiválasztani

A feladat megoldásához célszerű halmazábrát készíteni, és mindegyik részbe beleírni az elemszámokat a logikai szita alapján.

IV. Gyakoriság, relatív gyakoriság – valószínűség becslése

1. Gyakoriságok előzetes becslése – relatív gyakoriság – valószínűség

A feladatok lényege a kísérletezés és ebből sejtések megfogalmazása.
Az 1. feladatot párban játsszuk, a gyerekek egymásnak írnak – készítenek FI sorozatokat, amikről el kell dönteni, hogy hamis vagy valódi.

7. FELADATLAP

1. Írj egy sorba 20 betűt, mindegyik lehet F vagy I. Utána dobj fel egy érmét 20-szor egymás után és jegyezd fel az eredményt F, I (fej,írás) sorozatként. Készíts két ilyen 20-as sorozatot, majd a három sorozatot add át a társadnak! El kell döntenie, hogy a három közül melyik a hamis, (amelyik nem igazi dobások alapján készült). Az alábbi sorozatok közül melyik az, amelyik igazi dobások alapján készülhetett és melyik nem?

a) F I F I F I F I F I F I F I F I F I F I Túl szabályos felváltva.
b) F F F I I F I F F I I F F F F F I F I I Valódi.
c) F F F F F F F F F F I I I I I I I I I I Túl szabályos.
d) F F F F I F I I F F F I F F F F F I F F Kevés az írás.

Az 2. feladaton csoportban dolgoznak a gyerekek, mindenki elvégez 30 dobást, lejegyzi az eredményét, összesíti a felsorolt események gyakoriságát, majd egybegyűjtik a csoport tagjainak eredményeit így több kísérlet alapján vonnak le következtetéseket. A relatív gyakoriságokból olvassuk le, hogy az 1 vagy a 6 relatív gyakorisága az 1 és a 6 relatív gyakoriságainak összege. A kockával összesen 6-félét dobhatunk, ebből az 1 vagy 6 kétféle lehetőség, így az esélye 2/6. Ehhez közelít a relatív gyakorisága. Ugyanígy a többi eseménynél.

2. Egy kockát dobjunk fel egymás után 30-szor. Az eredmények alapján töltsük ki az alábbi táblázatot!

Események: dobás	1	6	1 vagy 6	2 vagy 3	1, 2, 3 vagy 6	4 vagy 5
Strigulák						
Csoporttársak eredményei						
Gyakoriság						
Relatív gyakoriság = gyakoriság/összes dobás						
Valószínűség	1 lehetőség a 6-ból: $\frac{1}{6}$	1/6	2/6	2/6	4/6	2/6

Következtetés:

- Az 1 vagy 6 relatív gyakorisága az 1 és a 6 relatív gyakoriságának összege.
- A relatív gyakoriság közelíti az esemény valószínűségét elég sok kísérlet esetén.
- Esemény valószínűségét megkaphatjuk úgy, hogy azoknak a lehetőségeknek a számát, amikor az esemény bekövetkezik, osztjuk az összes lehetőség számával. Ez akkor érvényes, ha az összes lehetőséget egy számmal megadhatjuk, és ha ezek a lehetőségek egyformán valószínűek.

Az 3. feladatot csoportban játsszák a gyerekek. A gyakoriságokra kell tippelni az érmékből (korongokból rakott) tornyokkal, az győz, aki a legjobban tippelt. Többször is érdemes játszani, hogy egy-egy játék tapasztalatai alapján újabb gyakorisági tippeket rakhassanak ki a gyerekek. Adjuk fel, hogy jegyezzék fel egymás után, hogy hány volt a helyén, akkor ennek az adatsokaságnak a módusza adja a legvalószínűbb értéket (ezt a fogalmat érdemes itt elővenni), és utána tudnak gyakoriságot, relatív gyakoriságot számolni. Jobb képességű osztályban összeszámolhatjuk a lehetőségeket, így megadhatjuk a valószínűséget is, indokolhatjuk a gyakoriságok nagyságát. Az egyik fontos eleme a feladatnak, hogy pontosan 3 nem lehet a helyén, mert akkor már a 4. is ott van. (Ez az oka annak, hogy a sorba rendezéseknél az utolsó elhelyezésére már csak 1 lehetőség van.) Sokszor kapunk 0 gyakoriságot a 4 van a helyén eseményre is, de míg ennek csak kicsi az esélye, addig a 3 van a helyén lehetetlen.

3. A játékot 1- 4 számkártyákkal végezzük.
– A kártyákat lefordítva összekeverjük, kirakjuk az asztalra sorban egymás mellé.
– A csoport minden játékosa kap 10 érmét (korongot). Maga elé felírja a 0, 1, 2, 3, 4 számokat úgy, hogy mindegyik elé elférjen egy torony érme. Mindenki kirakja az érméit tornyokba a számai elé.
– Felfordítjuk a kártyákat és megszámoljuk, hogy hány kártya van balról számítva annyiadik helyen, ahányas szám áll rajta.
– Mindenki levehet egy érmét attól a számtól, ahány kártya a helyén volt.
–.Ezzel az első menet véget ér, új kártyaterítés következik és újból le lehet venni érmét a megfelelő toronyból. Az győz a játékban, aki leghamarabb le tudja szedni az összes érméjét.

A tornyok magasságával a szám gyakoriságára tippelünk. Érdemes feljegyezni, hogy melyik oszlopba hány érmét raktunk, hogy a következő játéknál tudjunk módosítani, és így megmaradnak a gyakorisági tippjeink is.

A lehetőségek:

Hány van a helyén	**1**	**2**	**3**	**4**	Lehetőségek száma	Valószínűség
4	1	2	3	4	1	1/24
3					Nem lehet, mert ha 3 a helyén van, akkor a 4. is ott kell legyen	0
2	1 1 1 4 3 2	2 4 3 2 2 1	4 3 2 3 1 3	3 2 4 1 4 4	6	6/24
1	1 1 3 4 2 4 2 3	3 4 2 2 4 1 3 1	4 2 4 1 3 3 1 2	2 3 1 3 1 2 4 4	8	8/24
0	2 2 2 3 3 3 4 4 4	1 3 4 1 4 4 1 3 3	4 4 1 4 1 2 2 1 2	3 1 3 2 2 1 3 2 1	9	9/24
Összesen					24	

V. Gyakorlás

1. Vegyes feladatok

Az 1. feladatot az előző feladatlap 3.-hoz hasonlóan oldjuk meg. A gyakorisági játék az érdekes, a valószínűségek kiszámolása nem fontos.

8. FELADATLAP

1. A játékot két dobókockával játsszuk.
– Valaki feldobja a két kockát és a dobott számok összegét nézzük.
– Mindenki kap 20 érmét (korongot). Felírja maga elé az 1, 2, 3, 4, …, 11, 12 számokat és kirakja az érméit tornyokba a számai elé. (Érdemes feljegyezni, hogy melyik oszlopba hány érmét raktunk, hogy a következő játéknál tudjunk módosítani, és így megmaradnak a gyakorisági tippjeink is.)
– Minden dobásnál levehet egy érmét attól a számtól, amennyi a dobott számok összege volt. Az győz, aki leghamarabb le tudja szedni az összes érméjét.
A tornyok magasságával az összegek gyakoriságára tippelünk. Jegyezzük fel az összegeket, a móduszt, az átlagot, ábrázoljuk a gyakoriságokat, számítsuk ki a relatív gyakoriságokat! Kombinatorikusan indokoljuk, melyik összeg a legvalószínűbb!

A lehetőségek összeszámlálását érdemes a következő táblázat alapján végezni. Az első sor és az első oszlop jelenti az egyik és a másik kockával dobott számot, a táblázatba pedig ezek összegét írjuk:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ez alapján össze lehet számolni az egyes összegek valószínűségét:
2: 1/36; 3: 2/36; 4: 3/36; 5: 4/36; 6: 5/36; 7: 6/36; 8: 5/36; 9: 4/36; 10: 3/36; 11: 2/36; 12: 1/36.

Az 2. feladatban szereplő kísérletet a Scrabble játék betűivel csoportonként hajtsuk végre! A gyakoriságok számolása az érdekes, a valószínűségek kiszámolása nem fontos.

2. KATA nevének kezdőbetűit berakta egy zacskóba és sorban egymás után kihúzta őket. Mi az esély, hogy pont a nevét rakta ki? Mi az esély, hogy K-val kezdődő szót rak ki? Számolás előtt végezd el a kísérletet, számold az egyes sorrendek gyakoriságát, relatív gyakoriságát, móduszát!
4 különböző betűt egymás után 24-féle sorrendben húzhatunk ki, ezek közül 2 sorrend a megfelelő, hiszen a két A betű sorrendje nem számít, így a KATA kirakásának valószínűsége 2/24. Annak esélye, hogy az első betű K ¼, hiszen elsőre 4 közül húzunk 1-et.

A 3. feladathoz csoportonként két egyforma, és egy harmadik, ezektől különböző érme szükséges. Ezt a feladatot mindenképpen érdemes lejátszani, mert megmutatja, hogy két érme akkor is különböző darabként viselkedik, ha egyformának látszanak. Lehet érv arra is, hogy ha az egyik fej, akkor a másik kétféle lehet, fej vagy írás, tehát ½ az esély, meg lehet a 2/3-ra is, így ezen jó, ha vitatkoznak a gyerekek, és kísérlettel lehet igazolni, hogy melyik működik a valóságban.

3. Két érmét feldobunk egyszerre. Addig dobáljuk őket, míg az egyik fej lesz. Minek nagyobb az esélye, hogy ekkor a másik is fej vagy hogy a másik írás? Tippeld meg előre, hogy a másik fej vagy írás! Végezd el sokszor a kísérletet, az alapján vonj le következtetést!
Az egyik fej 3-féleképpen lehet: FI, IF, FF, mert a két érme akkor is különböző érmeként viselkedik, ha szemmel nem tudjuk megkülönböztetni őket. Ha ezt hangsúlyozni akarjuk, akkor érdemes először különböző két érmével játszani, utána egyformákkal. A 3 lehetőség közül 2-ben lesz a másik érme is fej, így ennek 2/3 a valószínűsége, az írásnak 1/3.

Az 4. feladat annak a téves szemléletnek eloszlatását célozza, hogy húzásoknál bizonyos húzások valószínűbbek valamiféle számmisztika alapján. Feltétlen adjuk fel a feladatot, kis számokkal érdemes le is játszani, pl. 0–9 kártyákkal.

4. Tombolajegyeket osztogattak, melyeket 1–300-ig számoztak. A jegyek párjait összekeverve húzzák közülük az ajándékok nyerteseit. Marcsié a 149-es, Zolié az 1-es szelvény. Marcsi azt állítja, hogy neki nagyobb esélye van a nyerésre, mint Zolinak, mert a száma nagyjából középen van. Zoli szerint ez lényegtelen a nyerés szempontjából. Kinek van igaza?
Mivel össze vannak keverve, bármely szelvény húzásának ugyanakkora az esélye, így Zolinak van igaza. Téves mindennapi szemlélet Marcsi véleménye. Hasonló működik a lottószelvények kitöltésekor.

A további feladatok a gyakorlást szolgálják. A kísérletek elvégzése az elsődleges, táblázatokkal számolhatjuk a lehetőségeket, és ebből a valószínűségeket.

5. Készítsünk egy tetraédert, melynek lapjaira az 1; 2; 3; 4 számokat írtuk. Dobjuk fel a tetraédert kétszer egymás után és nézzük a dobott számok összegét. Játsszuk le a gyakorisági játékot! Közben jegyezzük az eredményeket, számoljunk gyakoriságokat, relatív gyakoriságokat, móduszt, átlagot, mediánt. Mennyi az egyes összegek dobásának esélye?
A két kockával dobáshoz hasonlóan táblázatot készítünk a lehetőségekről:

	1	**2**	**3**	**4**
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Összesen 16 lehetőség van.
2 valószínűsége: 1/16
3 valószínűsége: 2/16
4 valószínűsége: 3/16
5 valószínűsége: 4/16
6 valószínűsége: 3/16
7 valószínűsége: 2/16
8 valószínűsége: 1/16

A 6. feladathoz a gyerekek előre készítsenek egy kockát, párban dolgoznak.

6. Készíts a társadnak egy 3 cm élhosszúságú kockát kemény papírból 1–6-ig számozott lapokkal! Az egyik lapra belülről ragassz egy 100 forintost! A kocka dobálásával állapítsátok meg, melyik lapon van belül a pénz!
A „cinkelt” lapra fog leggyakrabban esni a kocka.

7. Egy érmével dobtunk egymás után 6 fejet. Mi az esély, hogy a 7. dobás is fej lesz?
Ugyanúgy ½, mint az első dobásnál, mert az érme nem „jegyzi meg” a korábbi dobásokat az egymás utáni dobások független események.

A következő két feladat az „és” és a „vagy” gyakorlását szolgálják.

8. Egy kockát feldobunk. Jegyezzük fel a következő események gyakoriságát, majd számoljunk relatív gyakoriságokat, valószínűségeket! A dobott szám
- **a)** 2-es vagy páratlan; 1; 2; 3; 5 lehet: 4/6 a valószínűsége.
- **b)** páros vagy páratlan; Mindegyik szám lehet, ez a biztos esemény: 1 a valószínűsége.
- **c)** legalább 4 vagy prím; 2; 3; 4; 5; 6 lehet: 5/6 a valószínűsége.
- **d)** legfeljebb 4 és prím; 2; 3 lehet: 2/6 a valószínűsége.

9. Dobjunk fel egyszerre egy kockát és egy érmét! Jegyezzük fel a következő események gyakoriságát, majd számoljunk relatív gyakoriságokat, valószínűségeket.
- **a)** fejet dobtunk és páros számot;
- **b)** fejet dobtunk és legfeljebb 2-est;
- **c)** fej vagy 2-es.

Készítsünk táblázatot a lehetőségekről:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
fej						
írás						

Összesen 2·6=12 lehetőség van.
- **a)** a lehetőségek: fej-2; fej-4; fej-6, a valószínűség 3/12.
- **b)** a lehetőségek: fej-1; fej-2, a valószínűség 2/12.
- **c)** a lehetőségek: fej-1; fej-2; fej-3; fej-4; fej-5; fej-6; írás-2, a valószínűség 7/12.