0891. MODUL

VALÓSZÍNŰSÉG, STATISZTIKA

Statisztika

Készítette: Pintér Klára

A modul célja	Diagramok leolvasása, értelmezése, készítése. Közepek: számtani átlag ismétlése, módusz, medián fogalmának bevezetése, alkalmazása. Adathalmazok elemzése.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	Arányosság. Ábrázolás.
A képességfejlesztés fókuszai	Becslés, mérés, rendszerezés, kombinativitás, mennyiségi következtetések. Problémaérzékenység, kritikai gondolkodás.

AJÁNLÁS

A különféle diagramok tanulmányozása, készítése, ismétlés. A gyakorisági diagramok után természetesen jön a módusz, egyébként is hasznosnak gondolom a módusz és a medián szétválasztását a számtani átlaggal (ami egyébként ismétlés, de most összetettebb feladatokat adunk), így kevésbé keveredik a két hasonló elnevezés. A fogalmakat tevékenységen keresztül mutatjuk be, ezután jönnek a definíciók és ezek gyakorlása. A különböző közepek megkülönböztetését szolgálja az is, hogy mindháromra szánunk egy-egy órát külön, és a végén egy összefoglalást, amelynek során egymáshoz képest is megmutatjuk az eltéréseket. Ha akár a grafikonok, akár emiatt egy órával túllépjük a keretet, az nem probléma, hiszen a módusz számolásával is a valószínűségi becslést gyakoroljuk, a valószínűség részből ez pótolható.

TÁMOGATÓ RENDSZER:

Internet, újságok, feladatlap, esetleg számítógép grafikonok készítéséhez.

ÉRTÉKELÉS:

A gyerekek folyamatos munkáját és végül a dolgozatot értékeljük.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Diagramok			
1.	Diagramok elemzése	Analízis, szintézis.	Újságcikkek, Internet, 1. feladatlap
2.	Diagramok készítése	Analízis, szintézis, szövegértés.	
3.	Közbülső értékek becslése diagramok alapján	Becslés, mérés.	2. feladatlap

II. Módusz			
1.	Kérdés–felelet játék: a módusz bevezetése	Nagyságrendi becslések. Mérés.	1–4 számkártyák 3. feladatlap
2.	Legvalószínűbb esemény becslése	Becslés, valószínűségi gondolkodás.	4. feladatlap 2 dobókocka, gyufaskatulya, 0–9 számkártyák

III. Számtani közép			
1.	Az átlag szemléltetése kis kockákkal – átlagtól való előjeles eltérések összege	Ábrázolás, modellalkotás.	5. feladatlap Színes rudak vagy kis kockák
2.	Az átlag és a minta elemek összegének kapcsolata	reverzibilitás.	6. feladatlap
3.	Az átlaggal kapcsolatos furcsaságok: átlagok átlaga, átlagsebesség	Kritikai gondolkodás, érvelés, bizonyítási igény.	7. feladatlap

IV. Medián			
1.	Kiugró adat elrontja az átlagot – medián		8. feladatlap
2.	Vegyes feladatok		9. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Diagramok

1. Diagramok elemzése

Az előző héten adjuk fel házi feladatnak, hogy a gyerekek gyűjtsenek diagramokat, ez bármilyen piktogram, oszlopdiagram, kördiagram, grafikon lehet.
Csoportonként nézzék meg, hogy ki mit hozott, és válasszanak közülük kettőt, amelyeket elemeznek, és az elemzést elmondják a többieknek. Így tudnak párban dolgozni egy-egy diagramon. A tanár figyelje a készülő elemzéseket, és úgy válasszon csoportonként egyet-egyet, hogy végül a lehető legváltozatosabb elemzéseket beszéljék meg közösen.
Az elemzésnek és annak elmondásának adhatjuk azt a formát, hogy egy tévé hírműsor bemondója csak a diagramot és néhány szempontot kapott a szerkesztőtől és neki kell ebből a hírt elmondania (Deme Zita matematika szakos hallgató ötlete nyomán). A lehetséges szempontok: Mikor volt a legnagyobb, legkisebb, hogyan változott, nőtt, csökkent, mi lehetett ennek az oka.
Érdemes a tanárnak is gyűjtenie újságokból diagramokat, hogy legyen, ha a gyerekek nem hoznak eleget. Jó, ha ezek a diagramok aktuálisak. Lehetnek időjárással kapcsolatos diagramok (csapadék, hőmérsékletváltozás, hójelentés), ekkor a bemondó meteorológus lesz.
A párban készült rövid írásbeli elemzéseket a tanár beszedi és értékeli (kisötös, piros pont).

1. FELADATLAP

1. Gyűjtsetek diagramokat újságokból, internetről minél változatosabb formában: piktogram, oszlopdiagram, kördiagram, grafikon.
Elemezzétek a diagramokat!
Adjátok elő az elemzéseket osztálytársaitoknak, mintha ti lennétek a bemondók (pl. meteorológusok, gazdasági elemzők stb.) a tévében!

2. Diagramok készítése

A gyerekeket 6–7 fős csoportokba osztjuk. Mindegyik csoport kap egy nagy kartonlapot, esetleg csomagolópapírt. Mindegyik csoport választ magának egy jeligét, amelyet az osztály többi része nem tud. Minden csoport készítsen két-három szempont szerint statisztikát a tagjairól, aminek az eredményét diagramokon ábrázolják! Lehetőleg oszlopdiagram és kördiagram is legyen, ez utóbbihoz célszerű egy nagyobb kör alakú sablont adni a gyerekeknek, vagy egyszerűen egy megfelelő méretű fedőt, amelyet körberajzolhatnak. Ezeket a diagramokat rajzolják fel a nagy lapra jól láthatóan, írják rá a jeligéjüket is! A lapokat adják be a tanárnak, aki kirakja a táblára, hogy mindegyiket mindenki jól lássa. A diagramokból kell kitalálni, hogy melyik lap melyik csoporthoz tartozik. (Az egy csoportbeli gyerekek együtt álljanak, hogy mindenki lássa, hogy összetartoznak.) Ezután minden csoportnak fel kell írnia egy lapra, hogy mely diagramok mely csoportra jellemzők. A csoportokat pontozzuk: minden általuk leírt jó tipp egy pontot ér, ezen kívül annyi pontot kapnak még, ahány csoport jól párosította őket a Így a jó diagramkészítést és a leolvasást is értékeljük. Az a csoport győz, amelyiknek a legtöbb pontja van. A lehetséges szempontok lehetnek például: szemüveges/nem szemüveges; szőke/barna/vörös-hajú; szoknyában/nadrágban van; van rajta látható piros ruhadarab vagy nincs; fülbevalóinak száma stb. Nem érdemes túl sok ötletet mondani a gyerekeknek, bízzuk a fantáziájukra!

2. Csoportokban dolgozzatok! A feladatok elvégzésével pontokat szerezhettek.
Válasszatok titkos jeligét magatoknak! Készítsetek statisztikát két-három szempont szerint a csoportról, ennek eredményét egy nagy lapra rajzolt diagramokon ábrázoljátok! Az elkészült lapot a jeligével adjátok be tanárotoknak, aki kiállítást rendez az osztályban elkészült statisztikákból.
Találjátok ki, hogy melyik diagramok melyik csoportra jellemzők, és ezt írjátok fel egy papírlapra!
Pontozás: minden jó csoport-diagram tippért 1 pontot kaptok, + annyi pontot, ahány csoport titeket jól azonosított a diagramjaitokkal.

3. Közbülső értékek becslése diagramok alapján

A következő feladatokra akkor kerül sor, ha véletlenül marad idő az előzőek után. A feladatok lényege, hogy a diagramokat használhatjuk arra, hogy néhány megadott érték alapján becsüljük a közbülső értékeket. Bizonyos osztályokban teljesen ki is maradhat ez a rész, de hacsak lehet, ajánlom a gyakorlati alkalmazhatósága miatt, még időtúllépés terhére is.

2. FELADATLAP

1. Zsófi kistestvére 3900 grammal született szeptember 25-én. Egy éves koráig majdnem minden hónapban ugyanazon a napon feljegyezték a tömegét, az adatokat a következő táblázat tartalmazza:

Hónap	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tömeg(g)	4510	5100	5620	6000	6710	7250		8040	8320		8990	9240

a) Ábrázoljuk az adatokat grafikonon!
b) A grafikon alapján becsüljük meg a hiányzó áprilisi és júliusi értékeket!
c) Mikor volt éppen 6 kg a csecsemő?
d) Becsüljük meg, mikor lépte át az 5 kg-ot, a 7 kg-ot?
e) Jósoljuk meg, mikorra lesz 10 kg?
f) Mikorra duplázta meg a születési tömegét?
g) Ha évente ugyanennyit gyarapodna, mekkora lenne a tömege 13 éves korára?

Ő egy valóságos gyerek, aki 4 hónapos korában 7560, 7 hónapos korában 8620 g volt.

2. Kati és Panni 100 méteres síkfutásban versenyeztek. 10 méterenként mérték az idejüket stopperrel, de sajnos néhány időmérő nem volt ügyes, így az adatok hiányosak. A mért időket az alábbi táblázat tartalmazza:

Táv(m)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Kati ideje(mp)	1,5	3	6		9,5		12	14		17
Panni ideje(mp)	2	4	5	7		11		13,5		15

a) Ábrázoljuk grafikonon a verseny lefolyását: a független változó legyen a hely (vízszintes tengely), a függő változó legyen az idő(függőleges tengely) – a megadott pontokat ábrázoljuk, majd kössük össze olyan görbével, amely legjobban illeszkedik ezekre a pontokra!
b) Töltsd ki a táblázat hiányzó adatait a grafikon alapján!

c) Te vagy a sportriporter, közvetítsd a versenyt! Ki rajtolt jobban, meddig vezetett, mikor volt előzés, ki hajrázott jobban, ki győzött?

A következő feladatban egy rugóval mérünk tömeget. Utalhatunk a fizikából tanultakra, hogy rugó megnyúlását erő, ebben az esetben a testek súlya okozza, aminek nagysága a test tömegétől függ.

3. Pisti talált egy rugót, amit tömeg mérésére szeretne használni. A rugó 6 cm hosszú. Néhány ismert tömegű testet ráakasztva Pisti megmérte a rugó hosszát, az adatokat a következő táblázat tartalmazza:

Tömeg(dkg)	10	20	30	40	50	60	70	80
Hossz(cm)	9	10,3	11,2	12	12,9	14	15,1	16,2

a) Ábrázoljuk a rugó hosszát a ráakasztott tömeg függvényében!
b) Rajzolj egy egyenest, amely a legjobban illeszkedik a pontokra – ugyanis a rugó megnyúlása egyenesen arányos a ráakasztott tömeggel!
c) Ezután már használhatjuk tömeg mérésére a rugót. Mekkora a mért tömeg, ha a rugó hossza: 9,5 cm, 12,5 cm, 13,5 cm 20 cm?
d) A 10–100 dkg tartományban mekkora a rugó mérési hibája?

A következő feladatban szerepel a terawattóra mértékegység. Itt szándékosan nem adtuk meg ennek jelentését, egyébként 10^{12}-szerese a wattórának, mert később a módusznál ezt kérdezzük. Jó lenne, ha a gyerekek kíváncsiak lennének rá, akkor persze mondjuk meg, de a következő órai kérdéssel rámutathatunk, hogy érdemes megkérdezni, amit nem tudnak egy feladatban, még akkor is, ha a megoldás szempontjából nincs jelentősége.

4. A European Photovoltaic Industry Association (EPIA) jelentése alapján (www.zoldtech.hu/cikkek/20060907) a világméretekben napenergiából előállított energia 2005-ben 7 terawattóra volt, 2025-re előreláthatólag 589terawattórára, 2040-re 4890 terawattórára nő. Ezzel szemben az IEA (Nemzetközi Energia Hivatal) 2004-ben csak 119 terawattórát jósolt 2030-ra. Becsüljük meg, mennyivel kevesebb ez az EPIA által jósolt értéknél!

II. Módusz

1. Kérdés–felelet játék: a módusz bevezetése

Legyen Ön is milliomos! A játék közönségét játsszuk! A kérdéseket szóban ismertethetjük, így a szóbeli szöveg értését, és memorizálását is fejlesztjük (ekkor csukassuk be a munkafüzetet), de felírhatjuk fóliára is, így jobban látják az adatokat, jobban elgondolkodhatnak a válaszon,de a tanulók munkafüzetében is benne vannak a kérdések. A kérdésekre négy lehetséges válasz közül kell választani, a választ 1–4 számkártya felmutatásával kell megadni, mint amikor egy zsűri pontoz. (lehetséges úgy is, hogy egy papírra felírja mindenki az összes választ, de addig sok üres idő megy el, míg kiértékeljük. Ha pedig felállással jelzik a válaszaikat, akkor befolyásolják egymást.) A válaszokat táblázatban strigulázzuk, összeszámoljuk az egyes válaszok gyakoriságát, majd ezeket oszlopdiagramon ábrázoljuk. Így természetes a módusz, mint leggyakoribb adat bevezetése, hiszen a közönség többsége ezt választotta.
Az első kérdés a tera- előtagot, a 2. kérdés a 10 hatványok és a kg, tonna átváltást eleveníti fel, a 3. kérdésnél a negatív számok, a 4-diknél a terület mértékegységek szerepelnek.

3. FELADATLAP

Kérdés–felelet játék
Legyen Ön is milliomos! A játék közönségét játsszuk! A kérdésekre négy lehetséges válasz közül kell választani, a választ 1–4 számkártya felmutatásával kell megadni, mint amikor egy zsűri pontoz. A válaszokat strigulázzuk táblázatban, számoljuk össze az egyes válaszok gyakoriságát, majd ezeket ábrázoljuk oszlopdiagramon!

A játék kérdései:

1. Hányszorosa az 1 wattnak az 1 terawatt?
A: 10^6-szorosa; B: 10^9-szerese; C: 10^{12}-szerese; D: 10^{15}-szerese.

Válasz		Gyakoriság
A		
B		
C		
D		

Melyiket választották legtöbben? Mi a helyes válasz?

2. A Föld tömege $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, a Szaturnusz tömege $5,\ 59 \cdot 10^{23}$ tonna. Melyiknek nagyobb a tömege és hányszorosa a másiknak?
A: A Föld tömege a nagyobb, kb. 10-szerese a Szaturnusznak.
B: A Föld tömege a nagyobb, kb. 100-szorosa a Szaturnusznak.
C: A Szaturnusz tömege a nagyobb, kb. 10-szerese a Földnek.
D: A Szaturnusz tömege a nagyobb, kb. 100-szorosa a Földnek.

Válasz		Gyakoriság
A		
B		
C		
D		

Melyiket választották legtöbben? Mi a helyes válasz?

3. Melyik a Föld legmélyebb árka?
A: Jávai-árok; B: Mariana-árok; C: Holt-tenger árka; D: Puerto-Rico árok
Jávai-árok: -7450m; Mariana-árok: -11034m; Holt-tenger árka: -397m; Puerto-Rico árok: -9219m

Válasz		Gyakoriság
A		
B		
C		
D		

Melyiket választották legtöbben? Mi a helyes válasz?

4. Mennyi egy felnőtt férfi tüdejének légzőfelülete?
A: 50 cm^2; B: 1 m^2; C: $10m^2$; D: $50m^2$.

Válasz		Gyakoriság
A		
B		
C		
D		

Melyiket választották legtöbben? Mi a helyes válasz?

Az előbbiekben egy olyan adatsokaságot kaptunk, a válaszokból, amelyek A, B, C, D betűkből állnak. Ennek az adatsokaságnak a módusza az a betű, amelyik a legtöbbször szerepel.

TUDNIVALÓ:

Minta **módusza** az adatsokaság leggyakrabban előforduló eleme. Ha több elem ugyanannyiszor szerepel, (és a többi elem ennél kevesebbszer,) akkor a mintának több módusza van. Ha mindegyik mintaelem egyszer szerepel, akkor a mintának nincsen módusza.

2. Legvalószínűbb esemény becslése

A gyerekek csoportokban végzik a kísérleteket, lejegyzik az eredményeket, megállapítják az adatok móduszát, ebből becslést adnak arra, melyik a legvalószínűbb a vizsgált események közül. Amikor a csoportok készen vannak, a táblán összesítjük az eredményeket, így több kísérlet alapján közösen vonjuk le a következtetéseket. Ha kevesebb az időnk, a különböző csoportoknak különböző kísérleteket kell végezni, és a végén mindegyik beszámol az eredményről.
Időt takaríthatunk meg, ha a kísérletek elvégzését feladjuk előző órán házi feladatnak, és a csoportok összegzik a tagok adatait!
Esetleg a Tanár is megadhatja az adatokat írásvetítőn, csak akkor félő, hogy elszakad a gyerek a valóságos kísérlettől.
Az 1. kísérlethez 2 dobókocka kell, a 2. kísérlethez egy gyufaskatulya, a 3. kísérlethez 0–9 számkártyák, mindegyikből egy-egy. A kísérletek után elméleti megfontolásokkal is alátámaszthatjuk megfigyeléseinket.

4. FELADATLAP

1. kísérlet:
Dobjunk fel két dobókockát egymás után 50-szer és jegyezzük fel a dobott számok összegét. Számoljuk össze az egyes összegek gyakoriságát, készítsünk gyakorisági diagramot, adjuk meg a minta móduszát. Ez alapján jósoljuk meg, melyik a legvalószínűbb összeg?
Elméletileg a legvalószínűbb összeg a 7, de a statisztika ettől eltérhet.

2. kísérlet:
Számozzuk meg egy gyufaskatulya lapjait 1–6-ig. Tegyük a pad szélére úgy, hogy kicsit kilógjon, pöcköljük fel, és jegyezzük fel annak a lapnak a számát, amelyikre esett. Végezzük el 30-szor a kísérletet, számoljuk össze a számok gyakoriságát, készítsünk gyakorisági

diagramot, adjuk meg a minta móduszát. Ez alapján jósoljuk meg, melyik lapjára esik legnagyobb eséllyel a gyufaskatulya?

3. kísérlet:
Egy kétjegyű szám számjegyeit határozzuk meg úgy, hogy a tízes helyiértékre az 1 és a 2 számkártyák közül húzunk egyet, az egyes helyiértékre pedig a 0–9 számkártyák közül. Az így kapott kétjegyű szám legnagyobb, nála kisebb osztóját jegyezzük fel. Végezzük el a kísérletet 30-szor, számoljuk össze a különböző számok gyakoriságát, ábrázoljuk diagramon és adjuk meg a minta móduszát! Ez alapján jósoljuk meg, melyik szám a legvalószínűbb?
Prímszámok esetén 1-et kapunk, ez lesz a legvalószínűbb.

III. Számtani közép

A számtani közép ismert, most ismétlés folyik, így több lehetőség van a finomságokra, amikor visszafelé számolunk hiányzó számot az átlagból, az átlag változását vizsgáljuk, vagy az átlagsebességet, megmutathatjuk, hogy ez nem a sebességek átlaga!

1. Az átlag szemléltetése kis kockákkal– átlagtól való előjeles eltérések összege

A gyerekek csoportban dolgoznak, a számtani közép keresését modellezik színes rudakkal, esetleg kis kockákkal. A táblázat kitöltése segíti a következtetés levonását, amit közösen teszünk meg.

5. FELADATLAP

1. Hat embert megkérdeztek, hogy hány szobás lakásban lakik (mindegyik különböző lakásban lakott). A következőket válaszolták: 2; 3; 1; 5, 3; 4. Rakd ki kis kockákkal a számokat (egy kocka egy szobának felel meg), az oszlop magassága feleljen meg a számnak! Rakd ki kockákkal, hogy hány szobásak átlagosan a lakások!
Képzeld úgy, hogy a különböző magasságú oszlopokat egyformára „söpörjük”, így kapjuk az átlagot. Ellenőrizzük az átlagot számolással!
Ez a szemlélet későbbi feladatok megoldásakor hasznos lehet.

$$\frac{2+3+1+5+3+4}{6}=\frac{18}{6}=3$$

Töltsd ki a táblázatot! Mit figyeltél meg a táblázatot tanulmányozva?

Szám	Átlagtól való előjeles eltérés	A számnak megfelelő oszlop magassága az átlaghoz képest
2	2 – 3 = –1	1 magas „mélyedés”
3	3 – 3 = 0	Megegyezik az átlaggal.
1	1 – 3 = –2	2 magas „mélyedés”
5	5 – 3 = 2	2 magas „kiemelkedés”
3	3 – 3 = 0	Megegyezik az átlaggal
4	4 – 3 = 1	1 magas „kiemelkedés”

Figyeljük meg, hogy amennyivel az átlagnál nagyobb számok nagyobbak az átlagnál, az átlagnál kisebb számok ugyanannyival kisebbek:
Számítsd ki az átlagtól való eltérések összegét: – 1 + 0 – 2 + 2 + 0 + 1 = 0
Lehet-e ebből általánosítani?

2. Az átlag és a minta elemek összegének kapcsolata

A következő feladatokat egyéni munkában oldják meg a gyerekek. A feladatok célja annak megmutatása, hogy az átlagból a számok összegét meg lehet határozni, a megoldás kulcsa a mindegyik feladatnál a számok összege. Feltétlenül adjuk fel házi feladatnak a 7. feladatot, ami egy könyvespolcon levő könyvek átlagos vastagságát kérdezi! Ebből indíthatjuk a mediánt a következő órán. Az első 3 feladat feltétlenül szükséges, a 4. és a 7. lehet házi feladat.

6. FELADATLAP

1. Gabi iskola után előfizetéses menüt eszik ebédre, ami 450 Ft naponta. Zsuzsi minden nap másutt eszik, ezen a héten hétfőn rántott sajtot evett rizzsel 520 Ft-ért, kedden rakott krumplit 410 Ft-ért, szerdán sült csirkét zöldborsóval 630 Ft-ért, csütörtökön pirított májat tökfőzelékkel 430 Ft-ért, pénteken tejbegrízt a tejivóban 260 Ft-ért. Ki költött többet a héten az ebédjére? Átlagosan mennyit költött Zsuzsi egy ebédre?
Gabi 5 · 450 = 2250 Ft-ot költött, Zsuzsi pedig 520+410+630+430+260 = 2250 Ft-ot. Összesen ugyanannyit költöttek.
Zsuzsi átlagosan 2250 : 5 = 450 Ft-ot költött naponta.
Rögzítve az összköltséget az átlag az az ár, amit akkor fizet, ha minden nap ugyanannyit fizet.

2. Dorka év végén összeszámolta, hogy hány könyvet olvasott abban az évben és megállapította, hogy havonta átlagosan 3 könyvet olvasott el.
a) Hány könyvet olvasott összesen abban az évben? 12 · 3 = 36
b) Volt-e olyan hónap, amikor egy könyvet sem olvasott? Nem tudjuk, lehetséges.
c) Mennyivel kellett volna több könyvet olvasnia abban az évben, hogy a havi átlaga felmenjen 4-re?
Képzeljük el a könyveket kirakva kis kockákkal. Látható, hogy minden hónapban 1-gyel több könyvet kellett volna olvasnia, azaz összesen 12-vel többet. Az összeggel is dolgozhatunk: ahhoz, hogy az átlag 4 legyen, az összegnek 12 · 4 = 48-nak kell lenni, így még 48 – 36 =12 könyvet kell elolvasnia.
d) Mennyi lehetett a legtöbb könyv, amit egy hónapban olvasott, ha minden hónapban elolvasott legalább egy könyvet?
Összesen 36 könyvet olvasott el, úgy olvashatott egy hónapban a legtöbbet, ha a többi hónapban egyet-egyet olvasott el, ez 11 könyv, így marad 25 egy hónapra.
(Tegyük fel, hogy hónap végére mindig elolvasta azokat a könyveket, amelyekbe abban a hónapban belekezdett.)

3. Zsófi hegedülni tanul. Hétfőnként másfél órát gyakorol, kedden 2 órát, szerdán 2,5 órát, csütörtökön 2 órát, pénteken 3 órát. Mivel hegedűversenyre készült, naponta egy órával többet gyakorolt a múlt héten. Mennyivel nőtt a napi átlagos gyakorlási ideje?
A gyerekekkel érdemes kiszámoltatni az új időket és ezek átlagát, de különben azonnal lehet tudni, hogy ha mindegyik szám 1-gyel nőtt, akkor az átlag is 1-gyel nő.

4. Egy öttagú család átlagéletkora most 20 év.

a) Hány évesek az ikrek, ha az apa 38, az anya 36 éves, a legkisebb gyerek pedig 4 éves?

(5·20 – 38 – 36 – 4): 2 = 11 éves

b) Mennyi lesz a család átlagéletkora 5 év múlva?

20+5=25 év

c) Mennyi volt a család átlagéletkora 5 évvel ezelőtt?

Csalós, mert a legkisebb gyerek 5 éve még nem született meg, így (33 + 31 + 2·6) : 4 = 19 év volt az átlag.

5. Az iskolai kosárlabda bajnokságban Domi csapata 7 meccset játszik. Az első hat meccsen Domi 2; 10; 16; 12; 18; 14 pontot ért el. Hány pontot kell dobnia az utolsó meccsen, hogy elérje a tavalyi 14 pontos meccsenkénti átlagát?

A 14-es átlaghoz összesen 7 · 14 = 98 pontot kell dobjon, eddig 2+10+16+12+18+14=72 pontot dobott, tehát az utolsó meccsen 98 – 72 = 26 pontot kell dobjon.

6. Anna hiányzott a matematika dolgozat írásakor, így nélküle az osztályátlag 68 pont volt. Anna 92 pontos dolgozatával az osztályátlag felmegy 69-re. Hányan vannak az osztályban Annával együtt?

Megoldható egyenlettel is: 68n + 92 = 69(n+1), n=23 de ha elképzeljük a pontokat mint kiskockákat, a 68-as átlag azt jelenti, hogy erre a szintre vannak „besöpörve” a kockák. Ha Anna pontjait is besöpörjük, magának marad 69, és mindenki másnak ad 1-et, mert az átlag nő 1-gyel, így 92 – 69=23 pontot ad át, tehát 23-an vannak rajta kívül, vagyis vele együtt 24-en.

7. Rakd egymás tetejére az összes tankönyvedet, és méréssel, számolással határozd meg a könyvek átlagos vastagságát!

Természetesen dolgozhat úgy is, hogy mindegyik könyvet megméri, és az adatokból átlagot számol, de gyorsabb, ha az egész polc hosszát osztja a rajta levő könyvek számával, ez megint erősíti az átlag és az adatok összegének kapcsolatának megértését. Ebből a feladatból indulhatunk a medián bevezetésekor a következő órán, különösen, ha a könyvek közé beraknak egy-két vastag szótárt is.

3. Az átlaggal kapcsolatos furcsaságok: átlagok átlaga, átlagsebesség

A következő feladatokat páros munkában oldják meg a gyerekek. A feladatokban kétféle megoldási lehetőséget kínálunk fel, a páros egyik tagjának az egyiket kell védenie, a másik tagjának a másikat. Lehetőleg úgy, hogy ne teljesen ellenkező álláspontot kelljen védeniük, mint amit gondolnak. Lehet úgy is dolgozni, hogy sorsot húznak, melyik szerepet ki játssza. Mindkettőnek keresnie kell példákat a saját igazának a megmutatására, meg kell győzniük egymást és együtt kitalálni a jó módszert. Fontos a végén közösen tisztázni, hogy melyik a helyes, nehogy a rossz módszer rögzüljön a gyerekekben. Így megtanulnak ellenpéldát keresni, ami rámutat a módszer hibájára.

7. FELADATLAP

1. Számoljuk ki a következő négy szám átlagát: 3,5; 4,5; 6; 8. Albert az alábbi módszert alkalmazta: a 3,5 és a 4,5 átlaga 4, a 6 és a 8 átlaga 7, ezután vesszük a 4 és a 7 átlagát, ami 5,5, ez lesz a négy szám átlaga. „Egyetértek” és „cáfolom” szerepében milyen érveket találtok?

„Egyetértek”: Négy szám átlagát így helyesen kaptuk meg (ellenőrizzük!), ez mindig igaz, ha olyan csoportokra osztjuk a számokat, amelyekben ugyanannyi szám van. Például 6 szám esetén két hármas csoport átlagát számoljuk, majd ezen átlagok átlagát.

„Cáfolom”: nem kapunk jó eredményt, ha úgy számolunk, hogy vesszük három szám átlagát, majd ennek és a kimaradt számnak az átlagát, vagyis ha a csoportokban nem ugyanannyi szám van. Ellenőrizzük a helyes számítással is!

2. Amíg Budapesttől csak Kiskunfélegyházáig ért az autópálya, ezt a 120 km-es utat 1 óra alatt lehetett megtenni. A Kiskunfélegyházától Szegedig hátralevő 60 km megtételéhez szintén 1 óra kellett. Mennyi volt az úton az átlagsebesség? Béni így gondolkodott: Az autópályán az átlagsebesség 120 km/h, a további szakaszon 60 km/h, ezek átlaga pedig (120+60) : 2 = 90 km/h. „Egyetértek” és „cáfolom” szerepében milyen érveket találtok?
„Egyetértek”: A teljes megtett út 120 + 60 km, amit 2 óra alatt tettek meg, így az átlagsebesség tényleg (120+60) : 2 = 90 km/h. A kétféle számolással ugyanazt az eredményt kapjuk, ha ugyanannyi ideig mennek mindegyik sebességgel.
„Cáfolom”: nem kapunk jó eredményt, ha például 2 órán keresztül haladt az autó 120 km/h sebességgel és 1 órán át 60 km/h sebességgel. Ekkor ugyanis az átlagsebesség (240+ 60) : 3 = 100 km/h. Az átlagsebesség az összes megtett út és az összes idő hányadosa, általában nem egyenlő a sebességek átlagával, ezért nem jó általánosan a módszer!

IV. Medián

1. Kiugró adat elrontja az átlagot – medián

A medián bevezetéséhez olyan példát mutatunk, amikor az adatok közepének jellemzésére az átlag nem ad a szemléletünknek megfelelő, jó eredményt. Ennek oka lehet, hogy van nagyon kiugró adat, ami a számtani közepet nagyon eltolja. A második példa gyakorlás. Akik megértették az átlagok átlagával kapcsolatos problémát, azoknak itt elmagyarázzuk, hogy azért sem helyes a városokban az egy főre jutó átlagok átlagát számolni, mert a városoknak nagyon eltérő számú lakosa van, így ez az átlag nem adná a nagyvárosok átlagát. Említsük meg, hogy a levegő tisztasága szempontjából nagyon fontos az egy főre jutó zöldterület nagysága, ami lehet kert, park, stb.

8. FELADATLAP

1. Gabi rendezte a könyvespolcát, ezért megmérte a könyvei vastagságát. Az egyik polcon levő könyvekre a következő eredményeket kapta milliméterben: 24; 21; 14; 19; 17; 18; 16; 14; 22; 23; 16; 62; 59. Az utolsó két szám az angol szótárainak vastagsága. Számold ki a könyvek vastagságának átlagát! Írd fel a könyvek vastagságát nagyság szerint növekvő sorba, és keresd meg a középsőt!

Az adatok átlaga: $\frac{24+21+14+19+17+18+16+14+22+23+16+62+59}{13}=25$, aminél kettő kivételével minden könyv vékonyabb, ránézésre ez az átlag nem jellemzi jól az adatok közepét. Ha el akarnánk hagyni, a szótárak vastagságát, akkor felmerül a kérdés, hogy a 14 mm vastag könyvek vastagságát is elhagyjuk-e. Adatok önkényes kihagyása egyébként sem helyes.
Viszont ha vastagság szerint növekvő sorrendbe rakjuk a könyveket:
14; 14; 16; 16; 17; 18;19; 21; 22; 23; 24; 59; 62, a sorban a középső a 19. Ugyanannyi könyv kisebb nála, mint amennyi nagyobb. Ez az adat a könyvek vastagságának mediánja.

TUDNIVALÓ:

Minta **medián**ja a középső elem az adatok nagyság szerinti növekvő sorában. Ha két középső elem van (páros elemű adatsokaságban), akkor ezek átlaga a medián.

2. Az egy lakosra jutó zöldterület nagysága m^2-ben magyarországi megyeszékhelyeken: Budapest: 11; Békéscsaba: 33; Debrecen: 18; Eger: 35; Győr: 63; Kaposvár: 24; Kecskemét: 15; Miskolc: 41; Nyíregyháza: 51; Pécs: 78; Salgótarján: 22; Szeged: 25; Székesfehérvár: 44; Szekszárd: 21; Szolnok: 118; Szombathely: 19; Tatabánya: 43; Veszprém: 14; Zalaegerszeg: 73. Mennyi az adatok mediánja?
Nagyság szerint sorbarendezve: 11; 14; 15; 18; 19; 21; 22; 24; 25; **33**; 35; 41; 43; 44; 51; 63; 73; 78; 118.
A középső a 10. szám, a 33, ez a medián.

2. Vegyes feladatok

Az első feladatot közösen oldjuk meg. Ennek érdekessége, hogy a kapott adatokat sávokba rendezzük és így készítünk gyakorisági diagramot. Ezután a többi feladatot kioszthatjuk úgy, hogy a csoportok más-más feladatot csinálnak, és a végén megbeszéljük őket, a méréses feladat lehet házi feladat is. Hasonló feladatok adhatók még például: ki milyen sportot űz, kinek hány háziállata van (egy akváriumot egynek veszünk), hányszor volt moziban a múlt hónapban, hány könyvet kapott vagy vett egy év alatt, stb.
Végül az 5–6. feladat a közepek számolását gyakoroltatja, kiegészítés lehet gyorsabban haladóknak, vagy házi feladat.

9. FELADATLAP

1. Kérdezzünk meg minden gyereket, hány órát töltött az elmúlt hétvégén (szombat, vasárnap) sportolással (séta, biciklizés, úszás, edzés, tánc, …). Az adatokat jegyezzük fel!
a) Töltsük ki a táblázatot!

		Összesen
0 – 1 óra		
1 – 2 óra		
2 – 3 óra		
3 – 4 óra		
4 – 5 óra		
5 – 6 óra		
6– 7 óra		
7 óránál több		

b) Válaszolj a következő kérdésekre!
I) Hányan sportoltak legfeljebb 2 órát?
II) Hányan sportoltak legalább 3, de legfeljebb 5 órát?
III) Hányan sportoltak 6 óránál többet?
c) Számold ki az adatok móduszát, számtani átlagát, mediánját! Melyik értékből mire lehet következtetni?

2. Jegyezd fel táblázatba, hogy hány 3, 4, 5, … betűből álló keresztnév van az osztályotokban (mindenkinek egy keresztnevet számolj)!
a) Készíts oszlopdiagramot a gyakoriságokból!
b) Készíts kördiagramot, mely az arányokat mutatja!
c) Mennyi a betűk számának módusza, számtani átlaga, mediánja? Melyik értékből mire lehet következtetni?

3. Jegyezd fel táblázatba az osztálytársaid testvéreinek számát!
a) Készíts oszlopdiagramot a gyakoriságokból!
b) Készíts kördiagramot, mely az arányokat mutatja!
c) Mennyi a betűk számának módusza, számtani átlaga, mediánja? Melyik értékből mire lehet következtetni?

4. Jegyezd fel a következő táblázatba egy forgalmas utca egyik oldalán elhaladó autók számát, és az egy autóban utazók számát!

		Összesen
1 személy		
2 személy		
3 személy		
4 személy		
5 személy		
Autók		

a) Készíts oszlopdiagramot az utasok számáról!
b) Készíts kördiagramot, amely mutatja, hogy az arra haladó autók hányadrészében ült 1, 2,… számú ember.
c) Mennyi az autókban ülő emberek számának módusza, átlaga, mediánja? Melyik értékből mire lehet következtetni?

5. Anna virághagymákat ültetett a kertjébe. Hóvirágot 55-öt, krokuszt 18-at, jácintot 11-et, tulipánt 18-at, nárciszt 17-et, gyöngyikét 13-at. Dorka ugyanilyen hagymákat ültetett. Kiderült, hogy a két lány által ültetett virághagymák számának módusza, mediánja és számtani közepe is ugyanannyi. Különbözhetnek-e Dorka virághagymáinak számai Anna virághagymáinak számától? Keressünk példákat!

Anna által ültetett virághagymák számának átlaga: $\frac{55+18+11+18+17+13}{6}=\frac{132}{6}=22$, segít megmondani, összesen hány hagymát ültetett el, de a kiugró érték miatt az adatok közepét nem jellemzi jól.
Módusza: 18; (valójában nem mond semmi érdemlegeset az adatokról.)
Mediánja: 11;13;17; 18; 18; 55 sorban a két középső átlaga: 17,5 ebben az esetben jól jellemzi az adatsokaság közepét.
A 4. és 5. a sorban a 18, mert kell legalább két 18-as, de a legnagyobb nem lehet az, mert kevés lenne az összeg. A 3. szám pedig 17 kell legyen a medián miatt. A legkisebb és legnagyobb szám szabadon változtatható, csak a számok összege kell változatlan maradjon, pl: 12; 13; 17; 18; 18; 54, stb.

6. Nyolc szám átlaga 10, mediánja 12, módusza pedig 6 és 12. A legkisebb szám 2, a legnagyobb 15. Mi lehet a nyolc szám?
A nyolc szám összege $8 \cdot 10=80$, mert az átlaguk 10.
A két középső átlaga 12 csak úgy lehet, ha mindkettő 12, mert kell legyen legalább két 12-es.
Mivel a 6 is módusz, van legalább két 6-os.

Így sorban a számok: 2; 6; 6; 12; 12; _ ; _ ; 15. Ezek összege: 53, a hiányzó két számé 80 – 53 = 27, mivel mindkettő nagyobb, mint 12 (ugyanis a 12 sem fordulhat elő többször, mert a 6 is módusz), és kisebb, mint 15 (15 sem lehet, mert akkor a 15 is módusz lenne), így csak 13 és 14 lehet a két szám. Tehát a nyolc szám: 2; 6; 6; 12; 12; 13 ; 14 ; 15.